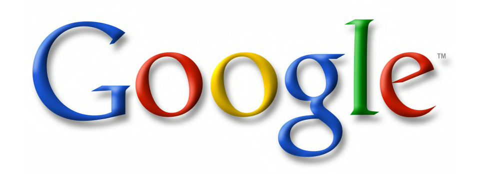
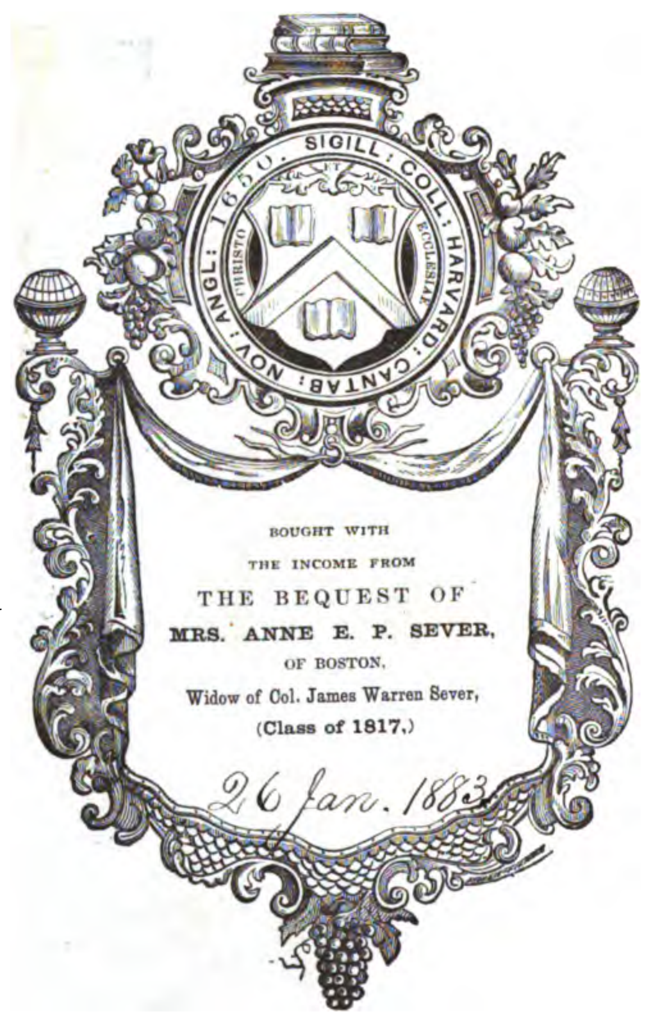
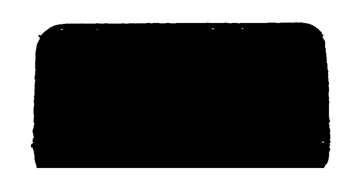
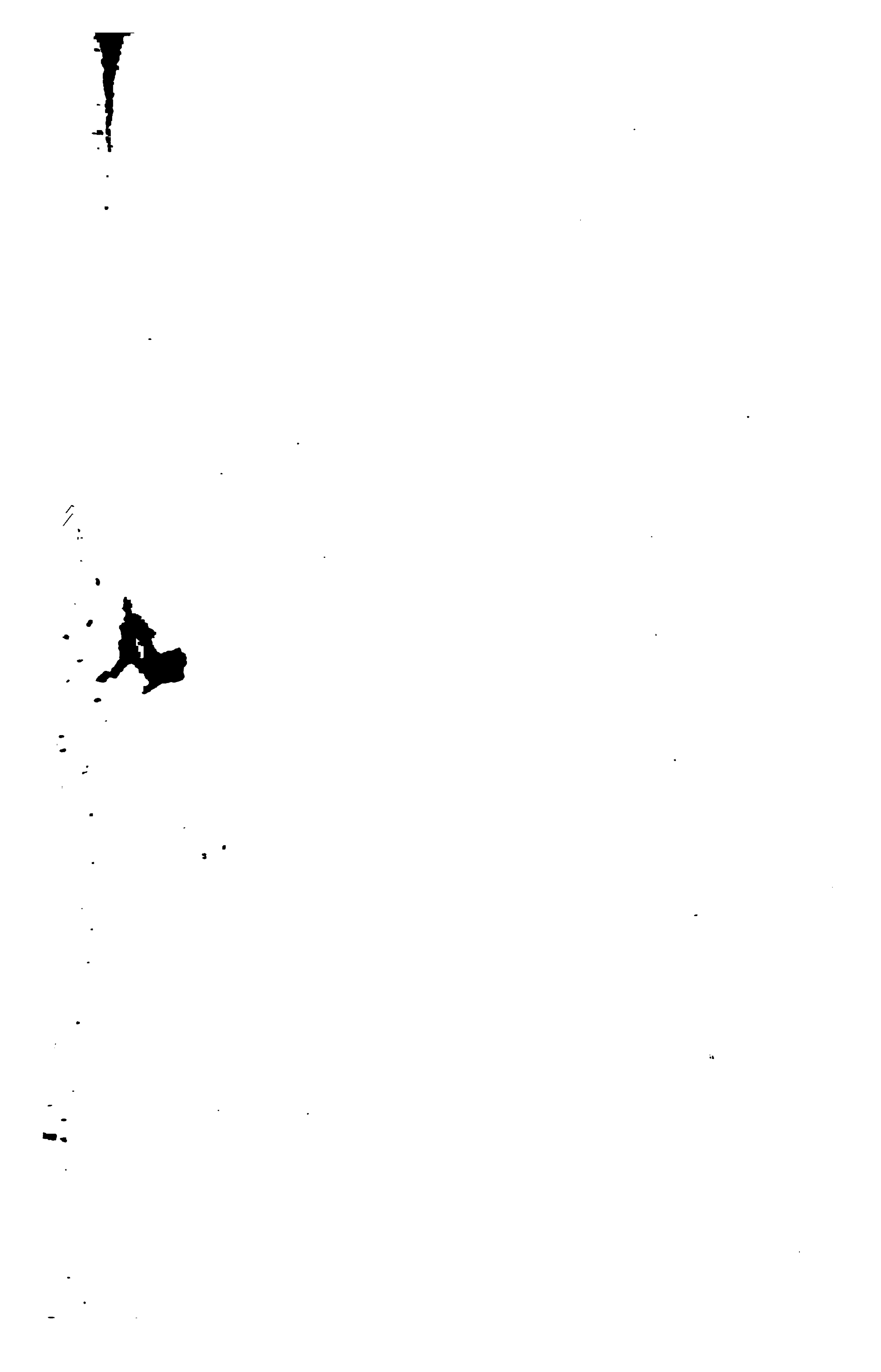
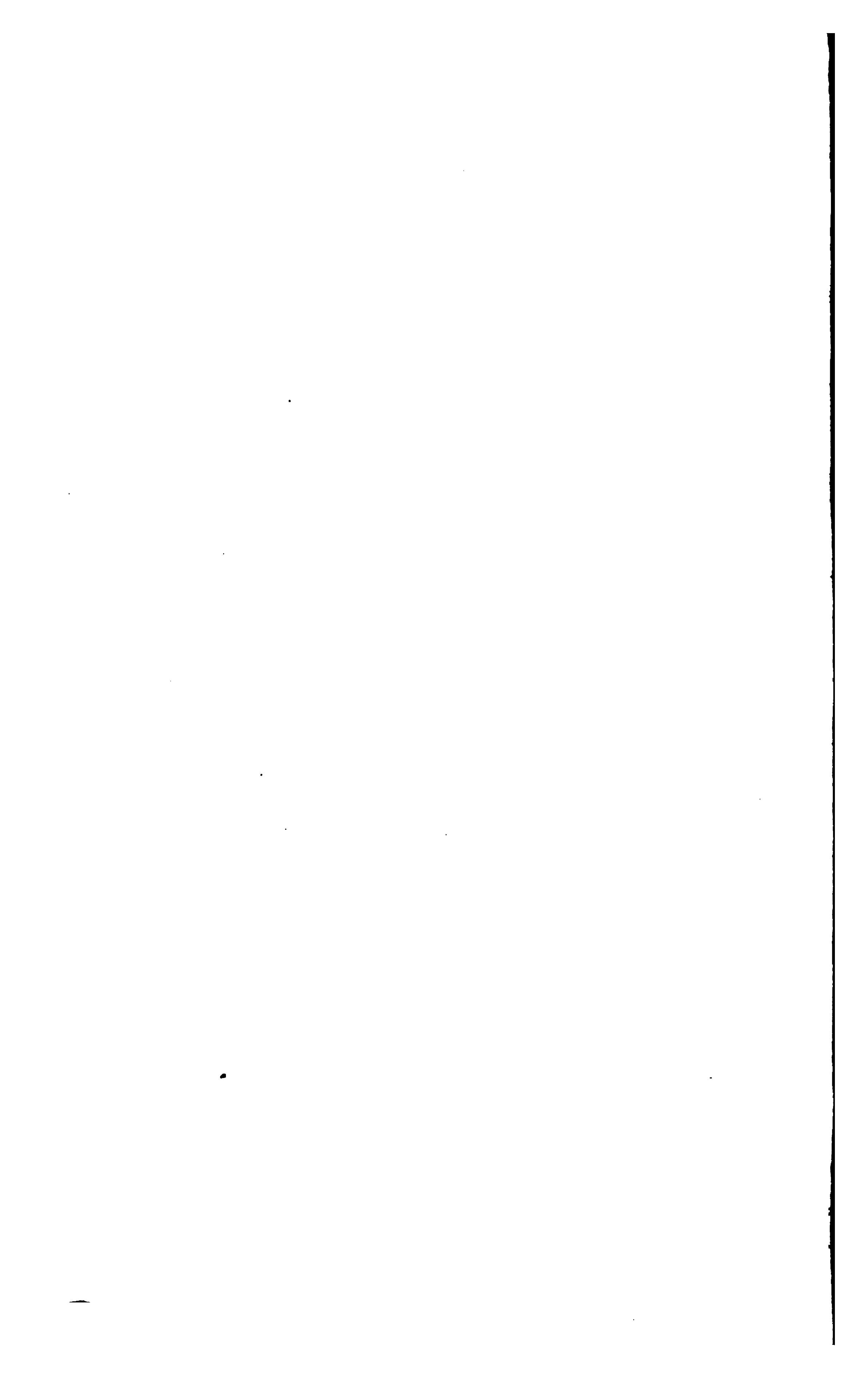
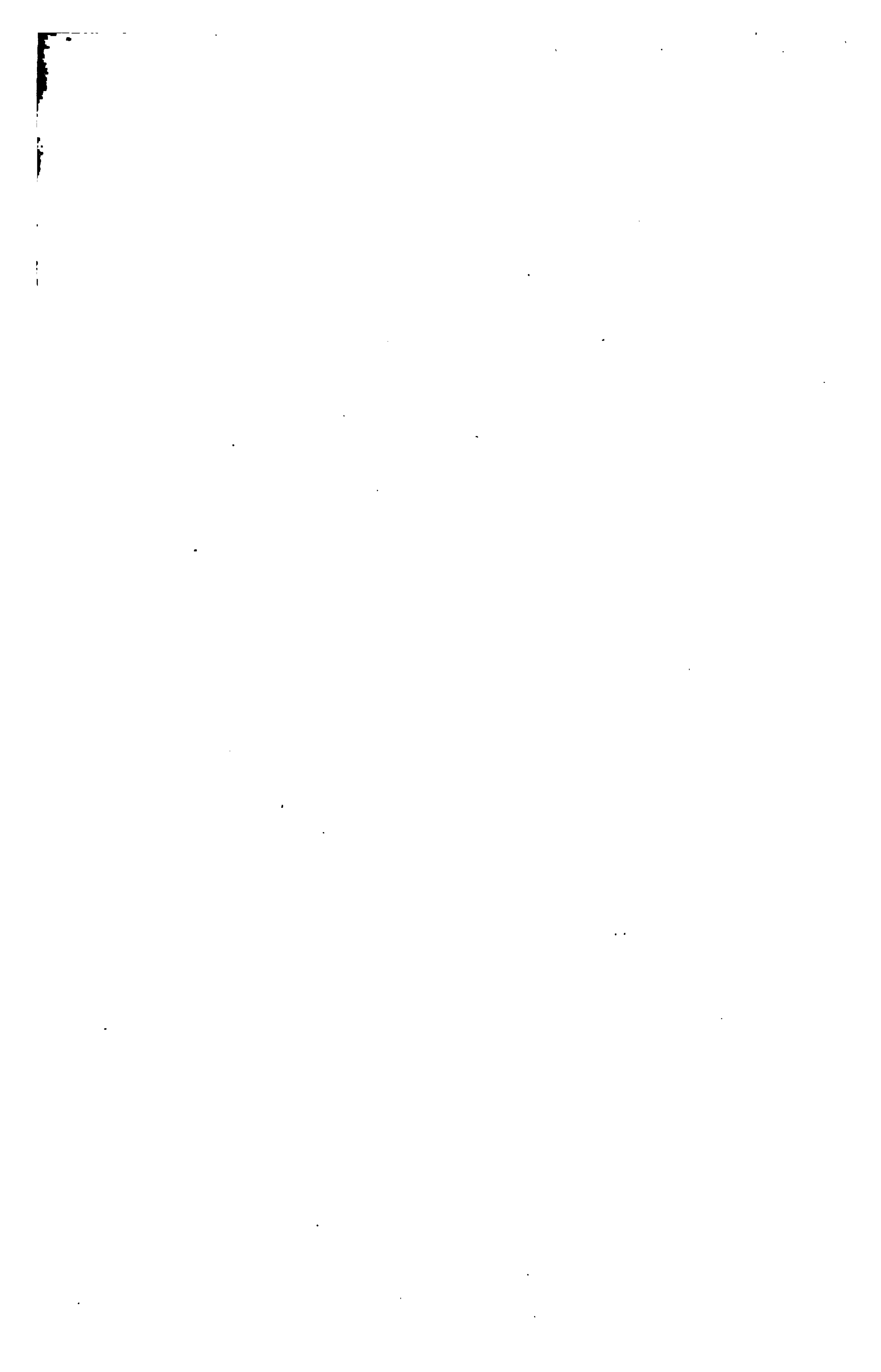



SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO
ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
MRS. ANNE E. P. SEVER,
OF BOSTON,
Widow of Col. James Warren Sever,
(Class of 1817,)
26 Jan. 1883.









ENCYKLOPÆDIE

DER

NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN

VON

PROF. DR. G. JÄGER, PROF. DR. A. KENNGOTT,
PROF. DR. LADENBURG, PROF. DR. VON OPPOLZER,
PROF. DR. SCHENK, GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH,
PROF. DR. G. C. WITTSTEIN, PROF. DR. VON ZECH.

I. ABTHEILUNG.

II. THEIL:

HANDBUCH DER MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN

VON

GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH.

BRESLAU,
VERLAG VON EDUARD TREWENDT.
1881.

Anal.

HANDBUCH

DER

MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN

VON

GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH

UNTER MITWIRKUNG

VON

PROF. DR. REIDT UND PROF. DR. HEGER.

MIT 235 HOLZSCHNITTEN.

ZWEITER BAND.

BRESLAU,
VERLAG VON EDUARD TREWENDT.
1881.

Inhalts-Verzeichniss.

Analytische Geometrie,

bearbeitet von Dr. RICHARD HEGER in Dresden.

I. Theil. Analytische Geometrie der Ebene.

		Seite
§ 1.	Coordinaten des Punktes	1
§ 2.	Die Gerade	3
§ 3.	Ellipse, Hyperbel, Parabel	7
§ 4.	Liniencoordinaten	25
§ 5.	Die Gleichung ersten Grades in Punkt- und Liniencoordinaten	29
§ 6.	Projective Strahlbüschel und Punktreihen	39
§ 7.	Die quadratische Punkt- und Strahleninvolution	58
§ 8.	Der Kreis	65
§ 9.	Transformation der Coordinaten	78
§ 10.	Transformation der Gleichungen zweiten Grades in Punkt- und Liniencoordinaten	86
§ 11.	Bestimmung einer Curve zweiten Grades durch fünf Punkte und durch fünf Tangenten	99
§ 12.	Homogene Coordinaten des Punktes und der Geraden	114
§ 13.	Tangente und Tangentialpunkt, Polare und Pol an Curven zweiten Grades	125
§ 14.	Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar	149
§ 15.	Curven dritter Ordnung. Construction derselben aus neun gegebenen Punkten	164
§ 16.	Tangente und Polaren eines Punktes in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung	176
§ 17.	Construction von Curven dritter Ordnung mit Doppel- und Rückkehrpunkt	186
§ 18.	Correspondirende Punkte einer Curve dritter Ordnung	191

II. Theil. Analytische Geometrie des Raumes.

§ 1.	Coordinaten des Punktes	195
§ 2.	Transformation rechtwinkeliger Coordinatensysteme	199
§ 3.	Die Ebene, die Gerade und der Punkt	202
§ 4.	Die Kugel	220
§ 5.	Tangentenebene und Tangentialpunkt an Flächen zweiten Grades. Cylinder, Kegel und Grenzfläche zweiten Grades	230
§ 6.	Das Ellipsoid, die beiden Hyperboloide und die beiden Paraboloide	247
§ 7.	Symmetrieebenen der Flächen zweiter Ordnung	265
§ 8.	Gerade Linien auf Flächen zweiter Ordnung	276
§ 9.	Schnittcurve und Schnittpunkte von Flächen zweiter Ordnung. Kreisschnitte	281
§ 10.	Die abwickelbare Fläche, die zwei Flächen zweiter Klasse umschrieben ist. Gemeinsame Tangentenebenen dreier Flächen zweiter Klasse. Umschriebene Rotationskegel	293
§ 11.	Homogene Coordinaten des Punktes und der Ebene. Gleichung der Ebene und des Punktes	304
§ 12.	Polarebene und Pol für Flächen zweiter Ordnung	316
§ 13.	Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten	341
§ 14.	Projective Punktebenen, Geradenebenen, Ebenenbündel und Strahlbündel	345
§ 15.	Raumcurven dritter Ordnung und abwickelbare Flächen dritter Klasse	362

Differentialrechnung,

bearbeitet von Dr. RICHARD HEGER in Dresden.

Seite

§ 1. Einleitung 381
§ 2. Differentiation einfacher Functionen 388
§ 3. Differentiation zusammengesetzter und unentwickelter Functionen 393
§ 4. Differential einer Function mehrerer Variabeln 399
§ 5. Tangente, Normale und Tangentialpunkt ebener Curven 409
§ 6. Tangentenebene und Tangentialpunkt von Flächen; Tangente und Normalebene von Raumcurven; Gerade auf abwickelbaren Flächen 430
§ 7. Höhere Differentialquotienten 448
§ 8. Krümmung ebener Curven 459
§ 9. Osculationsebene, Krümmung, Torsion und osculirende Kugel an Raumcurven . . 466
§ 10. Krümmung von Flächen 475
§ 11. Einhüllende Curven und Flächen 486
§ 12. Bestimmung einiger Grenzwerthe $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^{\infty}, \infty^{0}\right)$ . . . 494
§ 13. Die Taylor'sche Reihe 496
§ 14. Maxima und Minima 504
§ 15. Singuläre Punkte, Tangenten und Tangentenebenen an Curven und Flächen . . . 519
§ 16. Unendliche Reihen 540
§ 17. Unendliche Producte 562
Anhang 568

Integralrechnung,

bearbeitet von Dr. RICHARD HEGER in Dresden.

I. Theil. Integrale realer Functionen einer realen Variabeln.

§ 1. Grundbegriffe und Grundformeln 569
§ 2. Integral eines Polynoms und eines Products. Einführung einer neuen Variabeln . 574
§ 3. Integration rationaler algebraischer Functionen 576
§ 4. Integration irrationaler Functionen 586
§ 5. Integration transcendenter Functionen 592
§ 6. Integration durch unendliche Reihen 599
§ 7. Einfache bestimmte Integrale 602
§ 8. Berechnung von ebenen Flächen, Curvenbogen, Raumtheilen und unebenen Flächen durch einfache bestimmte Integrale 610
§ 9. Bestimmte Doppelintegrale 627
§ 10. Dreifache bestimmte Integrale 643
§ 11. Die periodischen Reihen und die FOURIER'schen Integrale 652

II. Theil. Functionen einer complexen Variabeln.

§ 12. Algebraische Functionen einer complexen Variabeln 678
§ 13. Integrale complexer Functionen 696
§ 14. Logarithmus und Exponentialfunction, Arcustangens und Tangente 710
§ 15. Arcussinus und Sinus, Arcuscosinus und Cosinus 717
§ 16. Definition des elliptischen Integrals, Reduction auf die Normalformen; Vieldeutigkeit elliptischer Integrale 727
§ 17. Das Additionstheorem für elliptische Integrale. Numerische Berechnung von Integralen erster und zweiter Art 746
§ 18. Die elliptischen Functionen. Entwicklung derselben in Potenzreihen und in periodische Reihen 758
§ 19. Die Thetafunctionen 773

Seite
§ 20. Entwicklung der elliptischen Functionen in unendliche Producte 783
§ 21. Die elliptischen Integrale zweiter und dritter Art 798
§ 22. Geometrische Anwendungen der elliptischen Integrale 811

III. Theil. Differentialgleichungen.

§ 23. Allgemeine Sätze über Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Veränderlichen 819
§ 24. Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Veränderlichen . 829
§ 25. Differentialgleichungen höherer Ordnung mit zwei Veränderlichen 854
§ 26. Differentialgleichungen zwischen mehr als zwei Variabeln. Bestimmte Systeme . . 871
§ 27. Partiale Differentialgleichungen erster Ordnung 885
§ 28. Partiale Differentialgleichungen zweiter Ordnung 898

Ausgleichungsrechnung,

bearbeitet von Dr. RICHARD HEGER in Dresden.

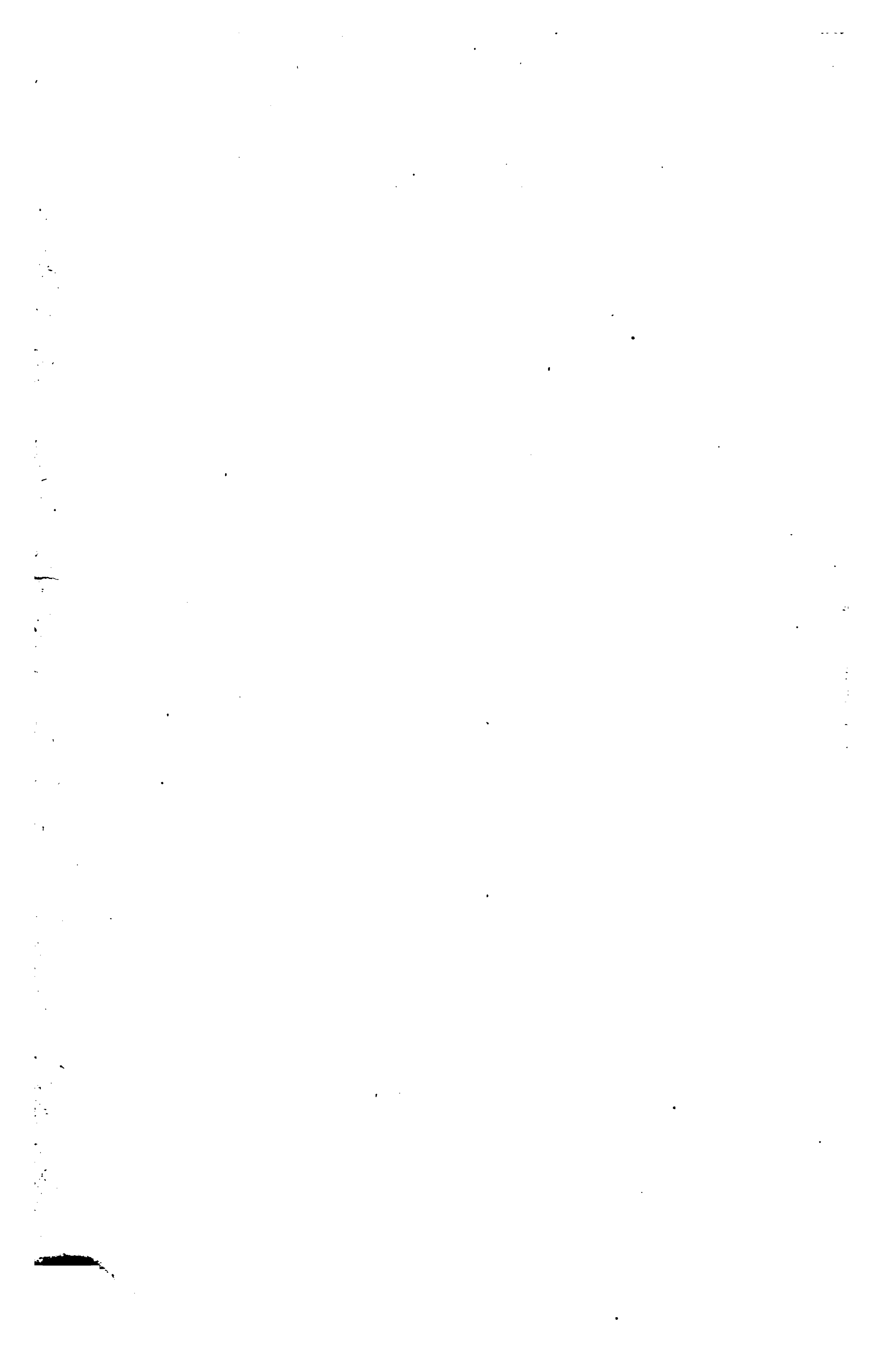
§ 1. Einleitung 903
§ 2. Beobachtungsfehler 907
§ 3. Ausgleichung direkter Beobachtungen 908
§ 4. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen 912
§ 5. Ausgleichung direkter und vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen 920

Renten-, Lebens- und Aussteuer-Versicherung,

bearbeitet von Dr. RICHARD HEGER in Dresden.

§ 1. Lebenswahrscheinlichkeit 929
§ 2. Zinseszins- und Rentenrechnung 933
§ 3. Berechnung der Prämien für Renten-, Lebens- und Aussteuer-Versicherung . . . 943
Absterbeordnung und Tafel der Lebenserwartung der Bevölkerung des preussischen Staates 957

Druckfehler-Verzeichniss 960
Literatur-Angabe 961



Analytische Geometrie,

bearbeitet von

Dr. Richard Heger,

Gymnasiallehrer u. a. o. Hon.-Professor am Kgl. Polytechnikum zu Dresden.

I. Theil. Analytische Geometrie der Ebene.

§ 1. Coordinaten des Punktes.

1. Die analytische Geometrie stellt sich die Aufgabe, geometrische Sätze aus den Resultaten algebraischer (analytischer) Operationen abzuleiten.

Sie geht dabei von folgender für sie charakteristischen Gedankenreihe aus:

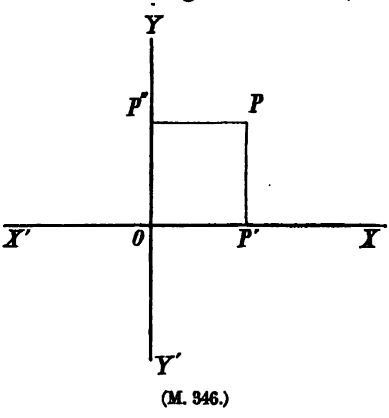
Zwei unbestimmte Zahlen x und y seien durch eine Gleichung mit einander verbunden. Reducirt man diese Gleichung auf Null, so steht rechts die Null und auf der linken Seite steht ein Ausdruck, der ausser x und y noch gegebene Zahlen enthalten kann. Dieser Ausdruck werde abkürzend mit $f(x, y)$ bezeichnet; dann ist die Gleichung

$$f(x, y) = 0.$$

Durch diese Gleichung sind x und y noch nicht bestimmt, aber es ist doch jede der beiden Grössen an die andere gebunden. Denn giebt man der Unbestimmten x einen bestimmten Werth x_0, so ist nun y nicht mehr unbestimmt, sondern der zu x_0 gehörige Werth (bez. die zugehörigen Werthe) von y ergiebt sich durch Auflösung der Gleichung

$$f(x_0, y) = 0$$

rücksichtlich der Unbekannten y. Diese Gleichung kann eine oder mehr als eine reale Wurzel haben; wir wollen jetzt der Einfachheit wegen annehmen, sie habe nur eine reale Wurzel y_0. Diese beiden zusammengehörigen Werthe $x_0 y_0$ kann man geometrisch anschaulich machen.



(M. 346.)

Man nimmt zwei zu einander senkrechte Gerade OX und OY an, deren positive Richtungen OX und OY sein mögen, und trägt auf denselben, indem man eine beliebige Strecke als Maasseinheit zu Grunde legt, zwei Strecken OP' und OP'' auf, die die Längen x_0 und y_0 haben. Der Punkt, der OP' und OP'' zu Normalprojectionen auf OX und OY hat, veranschaulicht die beiden zusammengehörigen Werthe x_0 und y_0.

In der Figur sind P' und P'' positiv angenommen. Ist OP'' positiv und OP' negativ, so liegt P in dem Winkel YOX'; sind OP' und OP'' beide negativ, so liegt P im Winkel $X'OY'$; ist OP' positiv und OP'' negativ, so liegt P im Winkel $Y'OX$. Durch absoluten Werth und Vorzeichen von x und y ist also die Lage des Punktes P und umgekehrt, durch einen Punkt P der Ebene sind die Grössen $OP' = x$ und $OP'' = y$ eindeutig bestimmt.

Giebt man der Unbestimmten x andere Werthe, und lässt x alle realen Werthe von x_0 wachsend bis $+\infty$ und abnehmend bis $-\infty$ durchlaufen, so gehört zu jedem Werthe der Veränderlichen x gemäss der Gleichung $f(x, y) = 0$ ein bestimmter Werth von y. Diese Werthe von y sind im Allgemeinen von einander verschieden und es erscheint somit auch y als veränderliche Grösse, deren Werthe von den Werthen der Veränderlichen x abhängen.

Construirt man zu jedem Paare zusammengehörender Werthe x und y den zugehörigen Punkt P, so wird, während x die Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, vom Punkte P eine bestimmte Linie beschrieben.

Die Abhängigkeit realer Werthe von x und y ist nun auf zweierlei Weise ausgedrückt: arithmetisch durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ und geometrisch durch die von P beschriebene Linie. Alle Sätze, welche durch algebraische Operationen für die Gleichung $f(x, y) = 0$ abgeleitet werden können, erscheinen nun zugleich als geometrische Sätze für die von P beschriebene Linie; und alle Sätze, welche sich durch geometrische Schlüsse für diese Linie ergeben, sind zugleich algebraische Sätze für die Gleichung $f(x, y) = 0$.

Die von P beschriebene Linie heisst die zur Gleichung $f(x, y) = 0$ gehörige Linie; die Strecken $x (= OP')$ und $y (= OP'')$ oder die parallelen und gleichen Strecken $P''P$ und $P'P$ heissen die Coordinaten des Punktes P, OX und OY heissen die Coordinatenachsen; insbesondere nennt man auch OP' die Abscisse, $P'P''$ die Ordinate von P, und demgemäss OX die Abscissenachse, OY die Ordinatenachse.

Alle Punkte, welche die Abscisse OP' haben, liegen auf der durch P' gehenden Parallelen zu OY; alle Punkte, welche die Ordinaten OP'' haben, liegen auf der durch P'' gehenden Parallelen zu OX. Für alle Punkte der Ordinatenachse ist die Abscisse gleich Null; für alle Punkte der Abscissenachse ist die Ordinate gleich Null.

Der Schnittpunkt O der beiden Achsen heisst Coordinatenanfangspunkt oder Nullpunkt. Für den Nullpunkt ist $x = 0$ und $y = 0$.

2. Der methodische Gang in der analytischen Geometrie ist der, dass zunächst die Linien untersucht werden, in deren Gleichung $f(x, y) = 0$ die linke Seite eine algebraische rationale ganze Function ersten Grades für x und y ist; hierauf folgen die Curven, für welche $f(x, y)$ vom zweiten, dritten und vierten Grade ist. Für diese Linien ersten, zweiten, dritten und zum Theil auch für die des vierten Grades ist eine grosse Fülle ins Einzelne gehender Sätze durch algebraische Operationen aufgefunden worden; für die Curven des fünften Grades und höherer Grade giebt es eine Reihe wichtiger allgemeiner Sätze; die Untersuchung der Eigenschaften, welche Curven eines bestimmten Grades vor denen anderer Grade auszeichnen, wird mit dem wachsenden Grad der Gleichung schwieriger.

Für solche Curven, bei denen die Function $f(x, y)$ nicht mehr algebraisch für x und y, sondern transcendent ist, lehren die Differentialrechnung und

Integralrechnung eine Reihe von Eigenschaften analytisch abzuleiten. Diese Curven werden daher im gegenwärtigen Lehrgange unberücksichtigt bleiben und in besonderen Abschnitten der Differential- und der Integralrechnung behandelt werden.

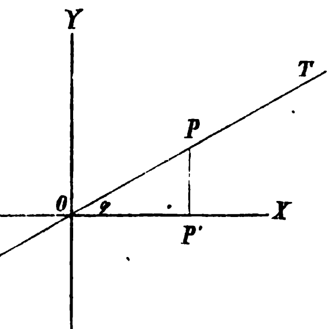
Vor der Discussion der Curven ersten, zweiten etc. Grades erscheint es zweckmässig, die Grundbegriffe dadurch einzuüben, dass wir zu geometrisch definirten Curven die Gleichung aufsuchen und durch einfachste Operationen an diesen Gleichungen nahe liegende Eigenschaften der Curven ableiten; wir wählen dabei solche Beispiele, welche bereits aus der darstellenden Geometrie bekannt sind. An diese Entwicklungen wird sich dann zunächst eine sehr wichtige Erweiterung der Grundbegriffe anschliessen.

§ 2. Die Gerade.

1. Für die Punkte, deren Abstände von der Abscissen- und der Ordinatenachse ein gegebenes Verhältniss m haben, gilt die Gleichung $P'P : OP' = m$, d. i.

$$y = mx, \text{ oder } mx - y = 0,$$

diese Punkte liegen auf einer Geraden T, die durch den Nullpunkt O geht, und für welche $tang\, XOT = m$.



(M. 347.)

Die Gleichung $mx - y = 0$ ist daher die Gleichung einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden.

Ist m positiv, so haben $P'P$ und OP' dasselbe Zeichen, die Gerade geht daher durch den Winkel XOY und seinen Scheitelwinkel; ist m negativ, so haben $P'P$ und OP' ungleiche Zeichen, und die Gerade geht durch die beiden andern von den Achsen begrenzten Winkel.

2. Für die beiden Geraden T_1 und T_2, deren Gleichungen sind

$$y = mx \text{ und } y = -mx$$

ist $tang\, XOT_1 = m = -tang\, XOT_2$, folglich $XOT_1 = 180° - XOT_2$. Diese beiden Geraden liegen daher symmetrisch zu den Achsen.

Bilden zwei durch O gehende Gerade T_1 und T_2 rechte Winkel, so ist $XOT_2 = XOT_1 + 90°$, mithin

$$tang\, XOT_2 = -cot\, XOT_1 = -1 : tang\, XOT_1.$$

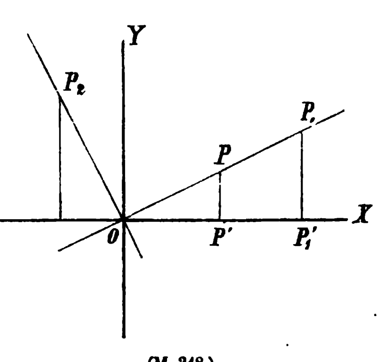
Ist $y = mx$ die Gleichung von T_1, so ist daher die von T_2

$$y = -\frac{1}{m}x.$$

Die beiden durch den Nullpunkt gehenden Geraden

$$y = mx, \quad y = nx$$

stehen also auf einander senkrecht, wenn $mn = -1$.



(M. 348.)

Für jeden Punkt der Geraden, welche O mit dem Punkte P_1 verbindet, ist $OP' : P'P = OP_1' : P_1'P_1$, oder, wenn $x_1\, y_1$ die Coordinaten von P_1 sind,

$$x : y = x_1 : y_1; \text{ also ist}$$

$$y_1 x - x_1 y = 0$$

die Gleichung der Geraden T_1, welche durch den Nullpunkt und den Punkt P_1 geht.

Die Gerade T_2, welche durch O und den Punkt P_2 geht, dessen Coordinaten x_2 und y_2 sind, hat die Gleichung

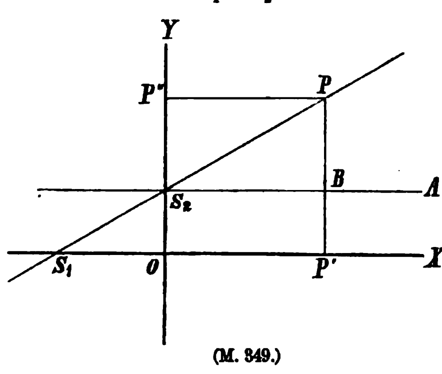
$$y_2 x - x_2 y = 0.$$

Schreibt man beide Gleichungen in der Form

$$y = \frac{y_1}{x_1} x, \quad y = \frac{y_2}{x_2} x,$$

so sieht man: Die Geraden, welche die Punkte P_1 und P_2 mit O verbinden, stehen aufeinder senkrecht, wenn

$$\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1, \text{ d. i.: wenn } x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0.$$



(M. 349.)

3. Für die Punkte, deren Abstand von einer Parallelen S_2A zur X-Achse zum Abstande von der Y-Achse ein gegebenes Verhältniss m hat, ist $BP : S_2B = m$. Nun ist aber $BP = P''P - P''B = P''P - OS_2 = y - b$, wenn die Strecke OS_2 mit b bezeichnet wird; ferner ist $S_2B = OP' = x$; also hat man die Gleichung

$$(y - b) : x = m, \text{ d. i.}$$

$$y = mx + b, \text{ oder } mx - y + b = 0.$$

Die Punkte P der bezeichneten Art liegen aber auf einer Geraden, die durch S_2 geht und mit der X-Achse einen Winkel einschliesst, dessen trigonometrische Tangente gleich dem Verhältniss $BP : S_2B$, also gleich m ist. Wir haben daher:

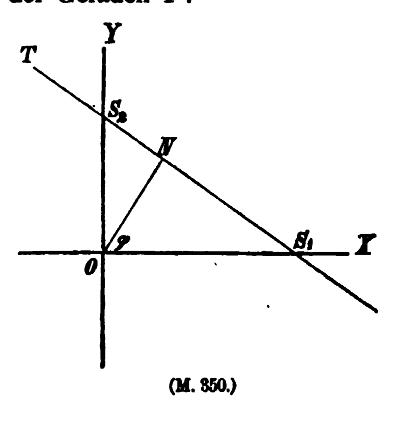
Die Geraden T, welche von der Ordinatenachse das Stück $OS_2 = b$ abschneidet und für welche $tang(X, T) = m$ ist, hat die Gleichung:

$$y = mx + b, \text{ oder } mx - y + b = 0.$$

Die Strecke OS_1 ist die Abscisse desjenigen Punktes der Geraden, dessen Ordinate $= 0$ ist; die Werthe $x = OS_1$ und $y = 0$ genügen also der Gleichung der Geraden; man hat daher

$$0 = m \cdot OS_1 + b, \text{ also: } OS_1 = -b : m.$$

Bezeichnet man OS_1 mit a, so folgt $m = -b : a$, und daher die Gleichung der Geraden T:



(M. 350.)

$$-\frac{b}{a} x - y + b = 0,$$

oder nach Division aller Glieder durch $(-b)$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Dies ist also die Gleichung der Geraden, welche von den Achsen die Strecken $OS_1 = a$ und $OS_2 = b$ abschneidet.

4. Wir legen durch O eine Gerade ν normal zu T und verfügen über den positiven Sinn von T und ν so, dass $T\nu = 90°$. Ist N der Schnittpunkt von T und ν, so haben wir

$$OS_1 = ON : \sin TX, \quad OS_2 = ON : \sin TY.$$

Nun ist $TX = T\nu - X\nu$, $TY = T\nu - Y\nu$, mithin $\sin TX = \cos X\nu$, $\sin TY = \cos \nu Y = \cos (XY - X\nu) = \sin X\nu$. Bezeichnen wir ON, den Abstand der Geraden vom Ursprunge, mit d, und $X\nu$ mit φ, so ist $OS_1 = a = d : \cos\varphi$, $OS_2 = b = d : \sin\varphi$.

Setzt man dies in die Gleichung der Geraden ein, und multiplicirt alle Glieder mit d, so erhält die Gleichung der Geraden die Form

$$\cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y - d = 0.$$

Man nennt dies die Normalform der Gleichung der Geraden.

5. Um den Abstand p eines Punktes P_1 von einer Geraden T aus den Coordinaten $x_1 y_1$ des Punktes und der Gleichung $\cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y - d = 0$ der Geraden zu erhalten, legen wir durch P_1 eine Gerade T_1 parallel zu T. Der Abstand der Geraden T_1 und T ist dem absoluten Werthe nach dem Abstande p gleich. Um rücksichtlich der Vorzeichen alle Zweideutigkeiten zu vermeiden, wollen wir festsetzen, dass bei parallelen Geraden die positiven Richtungen stets übereinstimmend (nicht entgegengesetzt) sein sollen. Ist ferner N_1 der Fusspunkt des von O auf T_1 gefällten Lothes, und $ON_1 = d_1$, so ist die Gleichung der Geraden T_1:

(M. 851.)

$$\cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y - d_1 = 0.$$

Da nun die Gerade T_1 durch P_1 geht, so genügen die Coordinaten von P_1 der Gleichung von T_1, es ist also $\cos\varphi \cdot x_1 + \sin\varphi \cdot y_1 - d_1 = 0$, woraus folgt:

$$d_1 = \cos\varphi \cdot x_1 + \sin\varphi \cdot y_1.$$

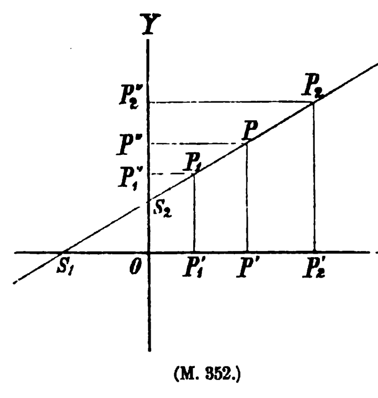
Ist A der Fusspunkt des von P_1 auf T gefällten Lothes, und definiren wir den Abstand p_1 des Punktes P_1 von der Geraden T als die Strecke $P_1 A$ (nicht als AP_1), so haben wir

$$p_1 = P_1 A = N_1 N = ON - ON_1, \text{ folglich}$$
$$-p_1 = \cos\varphi \cdot x_1 + \sin\varphi \cdot y_1 - d.$$

Hieraus ergiebt sich: Ist φ der Winkel, den die X-Achse mit der Normalen einer Geraden T bildet, und d der Abstand dieser Geraden vom Nullpunkte, sind ferner x, y die Coordinaten eines Punktes P, so ist das Trinom $\cos\varphi \cdot x + \sin\varphi - d$ dem Abstande des Punktes P von der Geraden T entgegengesetzt gleich; das Verschwinden des Trinoms, d. i. die Gleichung

$$\cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y - d = 0$$

ist die Bedingung dafür, dass P von T einen verschwindenden Abstand hat, d. i. dass P auf T liegt.



(M. 352.)

6. Aus den Coordinaten x_1y_1, x_2y_2 zweier Punkte P_1 und P_2 lassen sich die Coordinaten jedes Punktes P der Geraden P_1P_2 bestimmen. Ist nämlich $n_2 : n_1$ das Verhältniss, in welchem die Strecke P_1P_2 durch den Punkt P getheilt wird, ist also $P_1P : PP_2 = n_2 : n_1$ (wobei ein positives Theilverhältniss den Punkten zwischen P_1 und P_2, ein negatives den übrigen Punkten der Geraden P_1P_2 zukommt), so hat man

$$S_1P_1' : S_1P' : S_1P_2' = S_1P_1 : S_1P : S_1P_2,$$

folglich

$$S_1P' - S_1P_1' : S_1P_2' - S_1P' = S_1P - S_1P_1 : S_1P_2 - S_1P.$$

Nun ist aber $S_1P' - S_1P_1' = P_1'P' = OP' - OP_1' = x - x_1,$

$$S_1P_2' - S_1P' = P'P_2' = OP_2' - OP' = x_2 - x,$$

$$S_1P - S_1P_1 : S_1P_2 - S_1P = P_1P : PP_2 = n_2 : n_1,$$

folglich: $(x - x_1) : (x_2 - x) = n_2 : n_1,$

woraus folgt $x = \frac{n_1x_1 + n_2x_2}{n_1 + n_2}.$

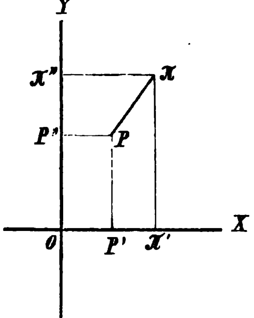
In gleicher Weise findet sich durch Benutzung der Vertikalspur S_2:

$$y = \frac{n_1y_1 + n_2y_2}{n_1 + n_2}.$$

Für den Mittelpunkt der Strecke P_1P_2 ist $n_1 = n_2$; die Coordinaten des Mittelpunktes von P_1P_2 sind also

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

7. Die Entfernung d zweier Punkte P und Π lässt sich aus den Coordinaten xy und $\xi\eta$ derselben berechnen. Ist φ der Winkel der X-Achse mit der Geraden $P\Pi$, so ist



(M. 353.)

$$P'\Pi'^2 = P\Pi^2 \cos^2\varphi, \quad P''\Pi''^2 = P\Pi^2 \sin^2\varphi,$$

mithin durch Addition $P'\Pi'^2 + P''\Pi''^2 = P\Pi^2$.

Nun ist $P'\Pi' = \xi - x, \quad P''\Pi'' = \eta - y, \quad P\Pi = d,$

also ist $d^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2.$

8. Als eine Anwendung der gewonnenen Anschauungen suchen wir den Ort der Punkte auf, die von zwei gegebenen Punkten P_1 und P_2 gleiche Abstände haben.

Die Quadrate der Abstände eines Punktes P von P_1 und P_2 sind

$$d_1^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2, \quad d_2^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2.$$

Nun soll $d_1^2 = d_2^2$ sein; also hat man für x und y die Gleichung

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2, \text{ oder entwickelt}$$

$$x_1^2 - 2x_1x + x^2 + y_1^2 - 2y_1y + y^2 = x_2^2 - 2x_2x + x^2 + y_2^2 - 2y_2y + y^2,$$

woraus sich ergiebt

1. $2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y - (x_2^2 - x_1^2) - (y_2^2 - y_1^2) = 0.$

Dividirt man alle Glieder durch $(x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2)$, und setzt

$$(x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2) : 2(x_2 - x_1) = a$$

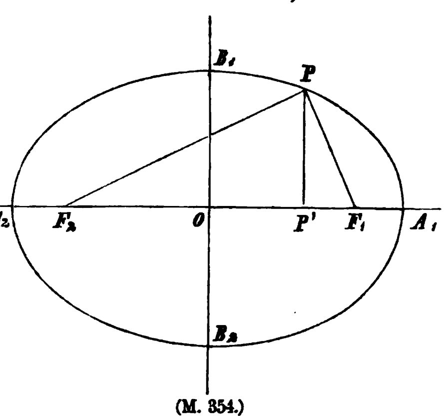
und $(x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2) : 2(y_2 - y_1) = b.$

so ergiebt sich $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0;$$
der gesuchte Ort ist daher eine Gerade, welche von den Achsen die Strecken a und b abschneidet.

Die Gleichung 1. wird identisch, wenn man für x und y die Werthe $(x_1+x_2):2$ und $(y_1+y_2):2$ setzt; der Punkt, der diese Werthe zu Coordinaten hat, der Mittelpunkt der Strecke P_1P_2, liegt also auf der Geraden.

§ 3. Ellipse, Hyperbel, Parabel.

1. Wir suchen die Gleichung des Ortes der Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten eine constante Summe $2a$ haben.



(M. 354.)

Nehmen wir die Gerade, auf der die gegebenen Punkte F_1 und F_2 liegen, zur X-Achse, und den Mittelpunkt der Strecke F_1F_2 zum Nullpunkt und setzen $F_2F_1=2c$, so ist
$$F_1P'=OP'-OF_1=x-c,$$
$$F_2P'=F_2O+OP'=c+x,$$
mithin $$F_1P^2=(x-c)^2-y^2,$$
$$F_2P^2=(x+c)^2+y^2.$$
Da nun $F_1P+F_2P=2a$ sein soll, so folgt die Gleichung:
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$
Quadriren wir, nachdem $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ auf die rechte Seite gestellt worden ist, so folgt
$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$
Hieraus folgt, indem man $x^2+c^2+y^2$ von beiden Seiten subtrahirt und den Rest durch 4 theilt:
$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$
Quadrirt man nochmals, so entsteht:
$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2,$$
woraus hervorgeht:

1. $$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2-a^2(a^2-c^2)=0.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung. Die Curve führt den Namen Ellipse. Die Punkte A, in welchen die Ellipse die X-Achse schneidet, haben $x=OA$, $y=0$. Setzt man dies in 1. ein, so folgt
$$(a^2-c^2)OA^2=a^2(a^2-c^2),\quad OA^2=a^2,\quad OA=\pm a.$$
Die Ellipse schneidet also die Abscissenachse in zwei Punkten A_1 und A_2, welche symmetrisch zum Nullpunkte liegen und von einander den Abstand $2a$ haben.

Um den Schnitt B der Ellipse mit der Ordinatenachse zu erhalten, setzen wir $x=0$, $y=OB$ in die Gleichung 1. und erhalten
$$a^2\cdot OB^2=a^2(a^2-c^2),\qquad OB^2=a^2-c^2.$$
Die Ellipse schneidet somit die Ordinatenachse in zwei symmetrisch zum Nullpunkte gelegenen Punkten B_1 und B_2, deren Abstände vom Nullpunkte gleich $\sqrt{a^2-c^2}$ sind.

Bezeichnet man die positive Wurzel aus $a^2 - c^2$ mit b, so kann man nach Division durch $a^2 b^2$ aus 1. die Gleichung der Ellipse in der Gestalt erhalten

$$2. \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Man sieht leicht, dass dieser Gleichung durch reale Werthe von x und y nur genügt werden kann, wenn $y^2 \leqq b^2$, und $x^2 \leqq a^2$. Die Ellipse ist also zwischen den beiden Parallelen zur Y-Achse enthalten, die von ihr die Abstände $\pm a$ haben und zwischen den Parallelen zur Y-Achse, die von ihr um $\pm b$ entfernt sind.

Die Punkte F_1 und F_2 heissen die Brennpunkte, die Strecke c die Excentricität, die Strecken $2a$ und $2b$ die grosse und die kleine Achse der Ellipse.

Der Werth von y, der zu einem gegebenen Werthe von x gehört, folgt aus der Gleichung 2. zu

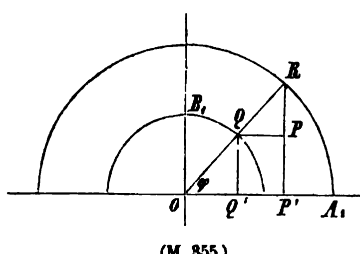
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

diese Formel giebt zwei entgegengesetzt gleiche Werthe für y. Der Werth von x, der zu einem gegebenen Werthe von y gehört, ergiebt sich zu

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2};$$

diese Formel liefert zwei entgegen gesetzt gleiche Werthe für x.

Aus diesen beiden Bemerkungen folgt: Die Ellipse ist doppelt symmetrisch; die grosse und die kleine Achse sind Symmetrieachsen.



(M. 355.)

2. Ist P ein Punkt der Ellipse, so kann man immer $x = a \cos \varphi$ setzen, da für alle Ellipsenpunkte $x < a$ ist. Setzt man dies in die Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

ein, so folgt $y = b \sin \varphi$.

Hieraus ergiebt sich folgende einfache Construction der Ellipse: Man construirt um O Kreise mit den Radien a und b, zieht durch O eine Gerade OR, und macht $QP \parallel OA_1$, $RP \parallel OB_1$. Dann ist $OP' = a \cos \varphi$ und $P'P = Q'Q = b \sin \varphi$, mithin P ein Punkt der Ellipse, welche OA_1 und OB_1 zu Halbachsen hat.

(M. 356.)

3. Bewegt sich eine Strecke AB von unveränderlicher Länge so, dass ihre Enden auf den Schenkeln eines rechten Winkels gleiten, so beschreibt jeder Punkt P der Strecke eine Curve, deren Gleichung sich leicht ergiebt.

Setzt man $AP = b$, $PB = a$, so hat man zunächst

$$1. \qquad AO^2 + OB^2 = AB^2.$$

Nun ist

$$AO : OP' = AB : BP,$$
$$OB : OP'' = AB : AP.$$

Ersetzt man hier AP, PB, OP', OP'' durch b, a, x, y, so erhält man

$$AO^2 = AB^2 \cdot \frac{x^2}{a^2}, \quad OB^2 = AB^2 \cdot \frac{y^2}{b^2},$$

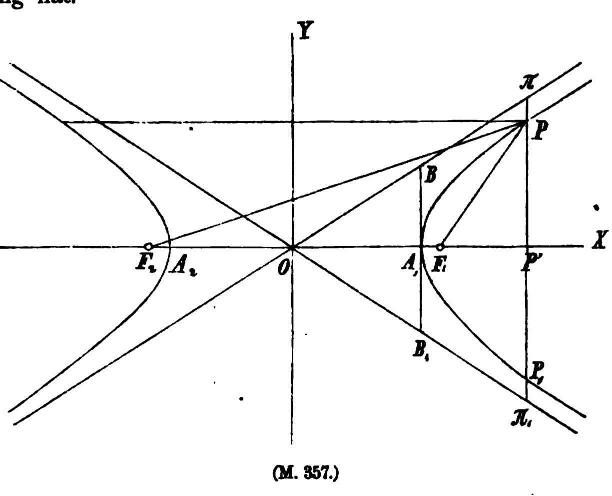
und dies in 1. eingesetzt führt zu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Der Punkt P beschreibt also eine Ellipse mit den Halbachsen a und b.

Man erhält hieraus folgende mechanische Construction der Ellipse: Auf ein Stück durchsichtiges (Oel-) Papier trage man auf einer Geraden die Strecken AP gleich der halben kleinen und PB gleich der halben grossen Achse einer zu entwerfenden Ellipse ab; die Enden A und B markirt man am besten durch kurze scharfe quer durch AB geführte Striche. Hierauf legt man A und B auf die Schenkel eines gezeichneten rechten Winkels und sticht mit einer Copirnadel den Punkt P durch. Durch geeignete Wiederholung findet man soviel Punkte der Ellipse, als man nöthig hat.

4. Um die Gleichung des Orts der Punkte zu finden, deren Abstände von zwei gegebenen Punkten F_1 und F_2 eine gegebene Differenz $2a$ haben, nehmen wir die Gerade F_1F_2 zur Abscissenachse, die Senkrechthalbirende derselben zur Ordinatenachse; bleibt die Bezeichnung so wie im vorigen Abschnitte, so hat man die Gleichung



(M. 357.)

$$\sqrt{(c+x)^2+y^2} - \sqrt{(c-x)^2+y^2} = 2a.$$

Hieraus folgt

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{x - c^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

und nach Substraction von $x^2 + c^2 + y^2$ und nachheriger Division durch $4a$:

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

und hieraus: $c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$;

woraus hervorgeht:

1. $$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 - a^2(c^2 - a^2) = 0.$$

Es ergiebt sich ganz wie im vorigen Abschnitte, dass die Curve von der Abscissenachse Strecken OA_1 und OA_2 abschneidet, die gleich $\pm a$ sind.

Setzt man zur Abkürzung b für die positive Wurzel aus $c^2 - a^2$, und dividirt man die Gleichung 1. durch a^2b^2, so erhält man

2. $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Diese Curve heisst Hyperbel. Die Gleichung 2. lehrt, dass reale Werthe von y nur dann der Gleichung entsprechen, wenn $x^2 \geqq a^2$; zwischen den beiden Geraden, welche im Abstande $\pm a$ parallel zur Ordinatenachse gezogen sind, liegt also kein Punkt der Hyperbel. Ist $x = \pm a$, so folgt $y = 0$. Wächst x, so wächst auch der zugehörige Werth von y, und wird x unendlich gross, so wird auch y unendlich gross.

Berechnet man aus 2. x und y, so folgen die Formeln

3. $$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}.$$

Zu jedem gegebenen Werthe von x, bez. y, ergeben sich also zwei entgegengesetzt gleiche Werthe von y, bez. von x. Hieraus folgt, dass die Hyperbel doppelt symmetrisch ist.

Die Punkte F_1, F_2 und die Strecke OF_1 heissen wie bei der Ellipse die Brennpunkte und die Excentricität; die Strecke A_2A_1 heisst die Hauptachse, die Gerade OY heisst Nebenachse. Die Haupt- und die Nebenachse der Hyperbel sind also Symmetrieachsen derselben.

5. Das Verhältniss der Ordinate eines Hyperbelpunktes zur Abscisse ist nach 3.

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Wird nun x unendlich gross, so erreicht das Verhältniss die beiden Grenzwerthe $\pm(b:a)$; sie entsprechen den beiden zu derselben Abscisse gehörigen Hyperbelpunkten.

Zieht man im Scheitel A_1 der Hyperbel eine Parallele zur Nebenachse und macht auf derselben $B_1A_1 = A_1B = b$, und sind η und η_1 die Ordinaten der Punkte Π und Π_1 der Geraden OB, bez. OB_1, welche zur Abscisse x gehören, so ist $\eta = \frac{b}{a}x$, $\eta_1 = -\frac{b}{a}x$. Sind P und P_1 die zu x gehörigen Hyperbelpunkte, so ist

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad y_1 = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

wenn die Quadratwurzel positiv genommen wird. Mithin hat man

$$P\Pi = P'\Pi - P'P = \frac{b}{a}x - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2})$$

und $\Pi_1P_1 = \Pi_1P' - P_1P' = -P'\Pi_1 + P'P_1 = -\eta_1 + y_1 = \eta - y = P\Pi$.

Wird in der Gleichung

$$P\Pi = P_1\Pi_1 = \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})}{a}$$

sowol der Zähler als der Nenner des rechts stehenden Bruches mit $x + \sqrt{x^2 - a^2}$ multiplicirt, so entsteht

$$P\Pi = P_1\Pi_1 = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}};$$

bei unendlich wachsenden x wird der Nenner unendlich gross, während der Zähler constant bleibt, mithin nähert sich der Quotient und ebenso $P\Pi = P_1\Pi_1$ der Grenze Null, also fallen die zu einer unendlich grossen Abscisse gehörigen Hyperbelpunkte P und P_1 mit den zugehörigen Punkten Π und Π_1 zusammen. Jede der Geraden OB und OB_1 trifft somit die Hyperbel in zwei (in entgegengesetzten Richtungen liegenden) unendlich fernen Punkten.

Aus diesem Grunde nennt man die Geraden OB und OB_1 Asymptoten der Hyperbel. Die Asymptoten der Hyperbel sind also die beiden durch den Mittelpunkt gehenden Geraden, deren mit der Hauptachse gebildete Winkel die trigonometrische Tangente $\pm b:a$ haben.

6. Die Gleichung der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ kann man auch schreiben:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1, \text{ woraus folgt}$$

1. $$\left(\frac{b}{a}x - y\right)\left(\frac{b}{a}x + y\right) = b^2.$$

Nach dem Vorhergehenden ist

$$\frac{b}{a}x - y = \eta - y = P\Pi;$$

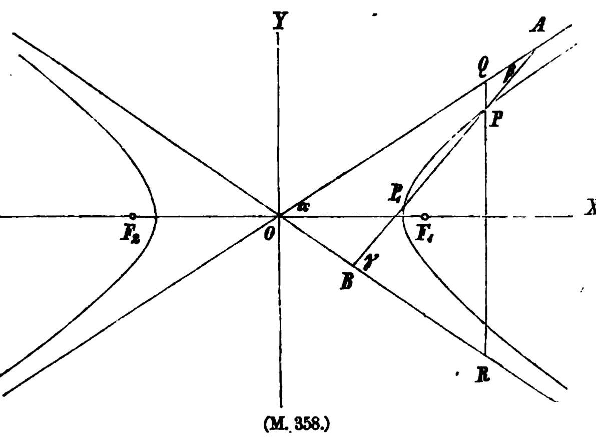
und ferner $$\frac{b}{a}x + y = \eta + y = -\eta_1 + y = \Pi_1 P' + P'P = \Pi_1 P.$$

Dies in 1. eingeführt ergiebt

$$\Pi_1 P \cdot P\Pi = \Pi_1 P_1 \cdot P_1 \Pi = b^2.$$

Daher der Satz: Jede zur Hauptachse der Hyperbel normale zwischen den Asymptoten enthaltene Strecke wird von der Hyperbel so getheilt, dass das Produkt der Theile constant ist.

Auf gleiche Weise findet man: Jede zur Hauptachse der Hyperbel parallele zwischen den Asymptoten enthaltene Strecke wird von der Hyperbel aussen so getheilt, dass das Produkt der Theile constant gleich dem Quadrate der halben Hauptachse ist.



(M. 358.)

Zieht man zwischen den Asymptoten durch den Hyperbelpunkt P die Gerade AB in gegebener Richtung, so ist

$QP : PA = \sin\beta : \cos\alpha$

$RP : PB = \sin\gamma : \cos\alpha$,

also $RP \cdot PQ : BP \cdot PA = \sin\beta \sin\gamma : \cos^2\alpha$.

Da nun $RP \cdot PQ = b^2$, so folgt:

$$BP \cdot PA = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\beta \sin\gamma} \cdot b^2.$$

Das Produkt $RP \cdot PQ$ hängt also nur von der Richtung der Geraden AB ab; der obige Satz gilt daher nicht bloss von den zu einer Achse parallelen, sondern von parallelen zwischen den Asymptoten enthaltenen Strecken überhaupt, wobei für jede anders gerichtete Schaar von Parallelen das Produkt $AP \cdot PB$ im Allgemeinen einen andern Werth hat.

Sind P und P_1 die Punkte, in denen eine zwischen den Asymptoten enthaltene Strecke von der Hyperbel geschnitten wird, so ist $BP \cdot PA = BP_1 \cdot P_1 A$. Hieraus folgt $BP_1 = PA$, und $P_1 A = BP$. Jede zwischen den Asymptoten enthaltene Strecke wird also von der Hyperbel in drei Theile zerlegt, von denen die an den Asymptoten anliegenden einander gleich sind.

Dieser Satz lehrt eine leichte Construction von Hyperbelpunkten, wenn die Asymptoten und ein Punkt der Hyperbel bekannt sind.

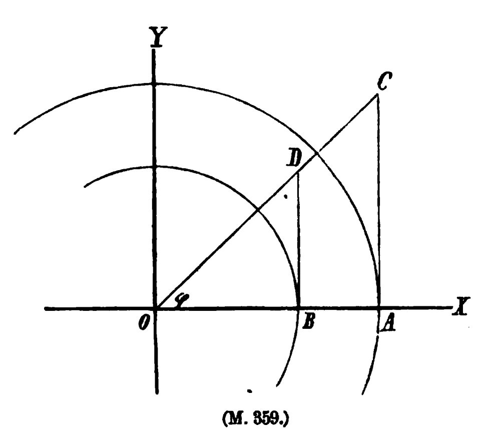
7. Wie bei der Ellipse, so können auch die Coordinaten jedes Hyperbelpunktes mit Hülfe der Strecken a und b und von Functionen eines Hülfswinkels φ ausgedrückt werden. Denn setzt man

$$x = a\sec\varphi,\quad y = b\,tang\,\varphi,$$

so genügen x und y der Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

sind also die Coordinaten eines Punktes dieser Hyperbel.



(M. 359.)

Hieraus folgt eine einfache Construction der Coordinaten von Hyperbelpunkten mit Hülfe zweier Kreise, die um O mit den Radien a und b construirt werden. Zieht man an diese Kreise Tangenten normal zur Hauptachse, legt durch O einen Strahl, der mit der Hauptachse den Winkel φ bildet, und sind C und D die Schnittpunkte dieses Strahles mit den beiden Tangenten, sowie A und B die Schnittpunkte der letzteren mit der Hauptachse, so ist

$$OC = a\sec\varphi,\quad BD = b\,tang\,\varphi,$$

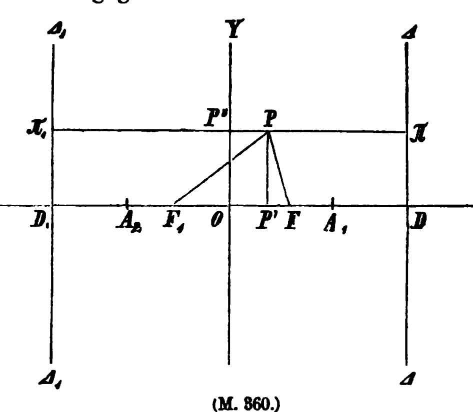
also sind OC und BD Abscisse und Ordinate eines Hyperbelpunktes.

8. Wir suchen nun die Gleichung des Ortes der Punkte auf, deren Abstand von einem festen Punkte zum Abstande von einer festen Geraden ein gegebenes Verhältniss ε hat; wir setzen dies Verhältniss zuerst kleiner, dann grösser und schliesslich gleich der Einheit voraus.

Zunächst ist ersichtlich, dass die Curve in allen drei Fällen gegen die Gerade symmetrisch ist, die normal zu der gegebenen Geraden durch den gegebenen Punkt geht.

Wir wählen daher diese Gerade zur Abscissenachse.

Der gegebene Punkt F wird Brennpunkt, die gegebene Gerade $\Delta\Delta$ Directrix genannt. FD sei normal zur Directrix.



(M. 360.)

Ist P ein Punkt unserer Curve, Π seine Normalprojection auf die Directrix, so ist also $FP : P\Pi = \varepsilon$. Zwei Punkte der Curve liegen auf der Symmetrieachse; ist $\varepsilon < 1$, so liegt innerhalb DF, der andere A_2 in dem an F liegenden unbegrenzten Theile der Achse, und es ist

$$FA_1 : A_1D = A_2F : A_2D = \varepsilon,$$

mithin

$$A_1D = \frac{1}{1+\varepsilon}\,d,\quad A_2D = \frac{1}{1-\varepsilon}\cdot d.$$

Um für den Fall vorgesehen zu sein, dass die Curve noch eine zweite Symmetrieachse normal zur ersten besitzt, wählen wir den Mittelpunkt O der Strecke A_1A_2 zum Nullpunkt und haben daher:

$$OD = \tfrac{1}{2}(A_1D + A_2D) = \frac{1}{1-\varepsilon^2}\,d,$$

$$OA_1 = A_2O = \tfrac{1}{2}(A_2D - A_1D) = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\,d;$$

ferner ist
$$FA_1 = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,d, \quad A_2F = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,d,$$

$$OF = OD - FD = \left(\frac{1}{1-\varepsilon^2} - 1\right)d = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\,d,$$

und
$$P\Pi = OD - OP' = \frac{1}{1-\varepsilon^2}\,d - x,$$

$$FP^2 = P'F^2 + P'P^2 = (OF - OP')^2 + P'P^2 = \left(\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\,d - x\right)^2 + y^2;$$

setzen wir diese Werthe in $FP : P\Pi = \varepsilon$ ein, so erhalten wir:

$$\left(\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\,d - x\right)^2 + y^2 = \varepsilon^2\left(\frac{1}{1-\varepsilon^2}\,d - x\right)^2,$$

oder:
$$\frac{\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^2}\,d^2 - \frac{2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\,dx + x^2 + y^2 = \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}\,d^2 - \frac{2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\,dx + \varepsilon^2x^2;$$

hieraus folgt:
$$(1-\varepsilon^2)\,x^2 + y^2 - \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\,d^2 = 0.$$

Durch Division mit $\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\,d^2$ bringt man diese Gleichung auf die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

wobei a und b die Werthe haben

$$a = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\,d = OA_1; \quad b = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,d = \sqrt{a^2 - OF^2}.$$

Unsere Curve ist daher eine Ellipse mit den Halbachsen a und b; der Punkt F ist ein Brennpunkt derselben.

Aus den bekannten Symmetrieverhältnissen der Ellipse folgt, dass es noch eine zweite Directrix giebt, die parallel zu OY im Abstande $D_1O = OD$ liegt. Ist F_1 der zweite Brennpunkt der Ellipse, und Π_1 die Normalprojection von P auf die zweite Directrix, so ist auch $F_1P : \Pi_1P = \varepsilon$.

Die Abstände OD, FD, A_1D, A_2D lassen sich durch die Strecken a, b, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ausdrücken; denn da

$$a = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\,d, \quad b = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,d, \quad c = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\,d,$$

so hat man
$$OD = \frac{1}{1-\varepsilon^2}\,d = \frac{a^2}{c}; \quad FD = d = \frac{b^2}{c};$$

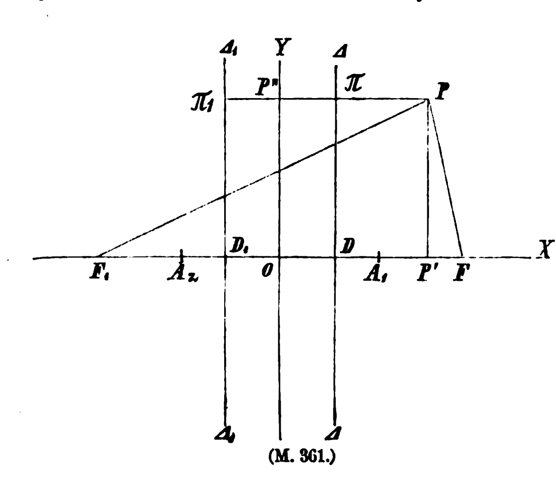
$$A_1D = OD - OA_1 = \frac{a(a-c)}{c}; \quad A_2D = A_2O + OD = \frac{a(a+c)}{c}.$$

Aus $FP = \varepsilon\cdot\Pi_1P$ und $F_1P = \varepsilon\cdot P\Pi$ folgt durch Addition $FP + F_1P = \varepsilon\cdot(\Pi_1P + P\Pi) = \varepsilon\cdot\Pi_1\Pi = 2\varepsilon\cdot OD = 2a$, also die Eigenschaft der Ellipse, durch welche wir sie in No. 1 charakterisirt haben.

9. Der Ort der Punkte, für welche $FP : \Pi P = \varepsilon$, $\varepsilon > 1$, hat mit der Geraden DF zwei Punkte A_1, A_2 gemein, für welche

$$A_1F = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\,d, \quad A_2F = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\,d.$$

Daher ist
$$OF = \frac{1}{2}(A_2F + A_1F) = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}\,d,$$



(M. 361.)

$$A_2O = OA_1 = \frac{1}{2}(A_2F - A_1F)$$
$$= \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} d$$
$$OD = OF - DF$$
$$= \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} d - d = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} d.$$

Ferner ist

$$\Pi P = OP' - OD$$
$$= x - \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} d,$$
$$FP^2 = FP'^2 + P'P^2$$
$$= (OP' - OF)^2 + P'P^2$$
$$= \left(x - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} d\right)^2 + y^2.$$

Setzt man dies in $FP : \Pi P = \varepsilon$ ein, so entsteht

$$\left(x - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} d\right)^2 + y^2 = \varepsilon^2 \left(x - \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} d\right)^2, \text{ oder}$$

$$x^2 - \frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} dx + \frac{\varepsilon^4}{(\varepsilon^2 - 1)^2} d^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2 - \frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} dx + \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 - 1)^2} d^2.$$

Hieraus folgt weiter:

1. $$(\varepsilon^2 - 1) x^2 - y^2 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} d^2 = 0.$$

Dividirt man durch $\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} d^2$ und setzt $a = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} d$, $b = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} d$, so wird aus 1.

2. $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Der Ort der Punkte, deren Entfernung von einem festen Punkte zum Abstande von einer festen Geraden ein constantes Verhältniss > 1 hat, ist also eine Hyperbel. Da

$$b^2 = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} \cdot d^2 = OF^2 - a^2,$$

so folgt, dass F ein Brennpunkt der Hyperbel ist.

Aus den bekannten Symmetrieverhältnissen der Hyperbel ergiebt sich, dass noch eine Directrix $\Delta_1\Delta_1$ vorhanden ist, und dass die beiden Directrix symmetrisch zur Nebenachse OY liegen. Ist Π_1 die Projection von P auf $\Delta_1\Delta_1$ und F_1 der zweite Brennpunkt der Hyperbel, so ist auch $F_1P : \Pi_1P = \varepsilon$.

Aus $F_1P = \varepsilon \cdot \Pi_1 P$ und $FP = \varepsilon \cdot \Pi P$ folgt $F_1P - FP = \varepsilon(\Pi_1 P - \Pi P)$ $= \varepsilon \cdot \Pi_1\Pi = 2\varepsilon \cdot OD = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} d = 2a$, also die Eigenschaft der Hyperbel, von welcher wir in No. 4 ausgegangen sind.

Die Strecken OD, DF, DA_1 und D_1A_1 lassen sich durch a, b und $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ausdrücken; wir erhalten aus

$$a = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} d, \quad b = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} d, \quad c = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} d,$$

die Werthe

$$OD = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} d = \frac{a^2}{c}, \quad DF = d = \frac{b^2}{c},$$

$$DA_1 = OA_1 - OD = a - \frac{a^2}{c} = \frac{a(a-c)}{c}, \quad D_1A_1 = \frac{a(a+c)}{c}.$$

10. Der Ort der Punkte, für welche $FP : \Pi P = 1$, geht durch die Mitte der Strecke DF; wir wählen dieselbe zum Anfangspunkt und haben daher, wenn wir diesmal DF mit p bezeichnen:

$$\Pi P = \Pi P'' + P''P = \frac{p}{2} + x,$$

$$FP^2 = (OP' - OF)^2 + P'P^2$$

$$= \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2,$$

somit erhalten wir die Gleichung

$$\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2;$$

(M. 362.)

oder $$\frac{p^2}{4} - px + x^2 + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + x^2.$$

Durch Subtraction von $\frac{p^2}{4} + x^2$ auf beiden Seiten folgt:

$$y^2 = 2px.$$

Diese Curve wird Parabel genannt; die Strecke p heisst der Parameter. Die Parabel hat nur eine Symmetrieachse, die X-Achse unseres Coordinatensystems.

Bezeichnet Q den unendlich fernen Punkt der X-Achse, so ist für denselben $FQ : OQ = 1$. Man kann daher sagen, dass die Parabel mit der Symmetrieachse (die kurzweg als »Achse der Parabel« bezeichnet wird) ausser dem Scheitel O noch den unendlich fernen Punkt gemein hat.

11. Bezeichnet man in den Figuren 9 und 12 statt der Strecken OP' die Strecken A_1P' mit x, denkt man sich also die Ordinatenachse durch A_1 statt durch O gelegt, so hat man in den Gleichungen der Ellipse und Hyperbel

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - OP'^2}, \text{ bez. } y = \frac{b}{a}\sqrt{OP'^2 - a^2}$$

zu setzen $OP' = a - x$, bez. $OP' = a + x$,

erhält also $$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2} \text{ bez. } y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax + x^2}.$$

Mit Rücksicht darauf, dass hier die Ordinatenachse durch einen Scheitel der Curve (A_1) geführt ist, bezeichnen wir diese Gleichungen als die Scheitelgleichungen der Ellipse und Hyperbel.

12. Ist der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel gleich einer gegebenen Strecke q, so ist für die Ellipse $a - c = q$, $c = a - q$, also $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{2aq - q^2}$; und für die Hyperbel $c - a = q$, $c = q + a$, also $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2aq + q^2}$. Setzen wir diese Werthe für b in die Scheitelgleichungen ein, so entsteht:

für die Ellipse: $$y = \sqrt{2q - \frac{q^2}{a}} \cdot \sqrt{2x - \frac{x^2}{a}}$$

für die Hyperbel: $$y = \sqrt{2q + \frac{q^2}{a}} \cdot \sqrt{2x + \frac{x^2}{a}}.$$

Wächst nun a über alle Grenzen, so nähern sich die Brüche $q^2 : a$ und $x^2 : a$ der Grenze Null, und die Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel gehen über in die Gleichung $y = \sqrt{4qx}$, oder $y^2 = 4qx$.

Dies ist aber die Gleichung einer Parabel, deren Parameter $p = 2q$. Hieraus gewinnen wir die werthvolle Anschauung:

Die Parabel kann als eine Ellipse oder als eine Hyperbel angesehen werden, deren Hauptachse unendlich gross wird, während der Abstand des Scheitels vom nächst gelegenen Brennpunkte einen gegebenen Werth q behält.

13. Wir untersuchen nun die Lage einer Geraden gegen eine Parabel, Ellipse und Hyperbel.

Bezeichnen wir die Reciproken der Achsenabschnitte einer Geraden T mit u und v, setzen also

$$\frac{1}{a} = u, \quad \frac{1}{b} = v,$$

so ist die Gleichung der Geraden T

$$ux + vy - 1 = 0.$$

Die Werthe von x und y, welche den Gleichungen

1. $$ux + vy - 1 = 0,$$
2. $$y^2 = 2px$$

zugleich genügen, sind Coordinaten von Punkten, welche sowol auf der Geraden T als auf der Parabel $y^2 = 2px$ liegen, sind also die Coordinaten des Schnittpunktes bez. der Schnittpunkte der Geraden und der Parabel.

Um dieselben zu erhalten, substituiren wir den aus 1. folgenden Werth $ux = 1 - vy$ in die Gleichung 2. und erhalten:

$$y^2 = 2\frac{p}{u} - 2\frac{pv}{u} \cdot y,$$

3. $$y^2 + 2\frac{pv}{u} y - 2\frac{p}{u} = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Wurzeln:

4. $$y' = \frac{1}{u}(-pv + \sqrt{2pu + p^2v^2}),$$
$$y'' = \frac{1}{u}(-pv - \sqrt{2pu + p^2v^2}),$$

die Wurzel positiv gerechnet.

Die zugehörigen Werthe von x folgen aus 1. zu

5. $$x' = \frac{1}{u^2}(u + pv^2 - v\sqrt{2pu + p^2v^2}),$$
$$x'' = \frac{1}{u^2}(u + pv^2 + v\sqrt{2pu + p^2v^2}).$$

Eine Gerade hat daher mit der Parabel zwei, einen oder keinen (realen) Punkt gemein, je nachdem

$$2u + pv^2 \gtreqless 0.$$

14. Aus der Gleichung 3. oder aus den Lösungen 4. folgt

6. $$\frac{1}{2}(y' + y'') = -p \cdot \frac{v}{u}.$$

Die Strecke $\frac{1}{2}(y' + y'')$ ist die Ordinate der Mitte der Strecke zwischen den Punkten P' und P'', in denen die Gerade die Parabel schneidet. Nach der Formel 6. ist diese Strecke nur abhängig von dem Verhältniss $v:u$, ist also unveränderlich für alle Gerade, welche dasselbe Verhältniss $v:u$ haben; da dieses Verhältniss gleich dem Verhältniss der Achsenabschnitte $a:b$ ist, so folgt, dass diese Geraden parallel sind. Für parallele Sehnen liegt also die Mitte in gleichem Abstande von der Abscissenachse, oder:

Die Mitten paralleler Parabelsehnen liegen auf einer zur Achse parallelen Geraden.

14. Ist $2u + pv^2$ positiv, so schneidet die Gerade die Parabel in zwei Punkten P' und P''. Aendert man nun die Lage der Geraden so, dass $2pu + p^2v^2$ kleiner wird, so nehmen die absoluten Werthe der Unterschiede der Abscissen $x' - x''$ und der Ordinaten $y' - y''$ ab, es nimmt also auch der Abstand $P'P''$ ab, da $P'P'' = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$, die Punkte P' und P'' rücken also näher an einander.

Wenn $2pu + p^2v^2$ verschwindet, so wird auch der Abstand $P'P''$ verschwindend klein, und die Gerade schneidet die Parabel in zwei unendlich nahe benachbarten Punkten.

Eine Gerade, die eine Curve in zwei unendlich nahen Punkten schneidet, heisst Tangente der Curve. Die Bedingung dafür, dass die Gerade T die Parabel berührt, ist also

1. $$2u + pv^2 = 0.$$

Die Coordinaten des Berührungspunktes ergeben sich nun aus den Formeln No. 13, 4. und 5. zu

2. $$x' = \frac{u + pv^2}{u^2}, \quad y' = -\frac{pv}{u}.$$

Aus diesen Formeln kann man u und v berechnen, und findet zunächst

$$x' = \frac{1}{u} + \frac{pv^2}{u^2} = \frac{1}{u} + \frac{y'^2}{p}.$$

Da nun P' auf der Parabel liegt, so ist $y'^2 = 2px'$, mithin

3. $$x' = \frac{1}{u} + 2x', \quad \frac{1}{u} = -x'.$$

Da $1:u$ der Abschnitt der Tangente auf der X-Achse ist, so folgt: Jede Parabeltangente schneidet von der X-Achse eine Strecke ab, die der Abscisse ihres Berührungspunktes entgegengesetzt gleich ist.

Ferner folgt $y' = -pv:u = pvx'$, oder da $px' = \frac{1}{2}y'^2$:

4. $$\frac{1}{v} = \frac{y'}{2}.$$

Die Strecke, welche eine Parabeltangente auf der Ordinatenachse abschneidet, ist gleich der halben Ordinate des Berührungspunktes.

Um im Punkte P (Fig. 362) eine Tangente an die Parabel zu construiren, mache man also $S_1O = OP'$, dann ist S_1P die gesuchte Tangente.

Da $DO = OF$ und $OS_2 = S_2P''$, so schneiden sich ΠF und S_1P in S_2, und es ist $FS_2 = S_2\Pi$. Da nun $FP\Pi$ ein gleichschenkeliges Dreieck ist, so folgt der Satz:

Tangente und Normale der Parabel halbiren die Winkel des Radius vector und einer Parallelen zur Parabelachse — wenn wir als Normale die Gerade bezeichnen, die normal zur Tangente durch den Be-

rührungspunkt gezogen wird, und mit Radius vector die Strecke, die den Brennpunkt mit einem Parabel- (bez. Ellipsen-, Hyperbel-)punkte verbindet.

Die Gleichung der Parabeltangente im Punkte P' erhält man, wenn man die gefundenen Werthe für u und v in die Gleichung der Geraden $ux + vy - 1 = 0$ einführt, zunächst in der Form

$$-\frac{x}{x'} + \frac{2y}{y'} - 1 = 0.$$

Hierfür kann man setzen

$$-\frac{2px}{y'^2} + \frac{2y}{y'} - \frac{2px'}{y'^2} = 0;$$

nach Multiplication mit $\frac{1}{2}y'^2$ ergiebt sich die Gleichung der Tangente zu:

$$p(x + x') - y'y = 0.$$

15. Die Coordinaten der Punkte, welche eine Gerade T und eine Ellipse gemein haben, sind die Werthe von x und y, welche die Gleichungen

1. der Geraden: $ux + vy - 1 = 0$

2. und der Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

zugleich befriedigen. Aus der Gleichung 1. folgt

3. $$y = \frac{1}{v} - \frac{u}{v}x.$$

Dies in 2. eingesetzt, ergiebt

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{u^2}{b^2v^2}\right)x^2 - \frac{2u}{b^2v^2}x + \frac{1}{b^2v^2} - 1 = 0,$$

und nach Multiplication mit $a^2b^2v^2 : (a^2u^2 + b^2v^2)$

4. $$x^2 - 2\frac{a^2u}{a^2u^2 + b^2v^2}x + \frac{a^2(1 - b^2v^2)}{a^2u^2 + b^2v^2} = 0.$$

In gleicher Weise ergiebt sich für y die quadratische Gleichung

5. $$y^2 - 2\frac{b^2v}{a^2u^2 + b^2v^2}y + \frac{b^2(1 - a^2u^2)}{a^2u^2 + b^2v^2} = 0.$$

Sind x', x'' die Wurzeln von 4., sowie y', y'' die von 5., so gehört nach Gleichung 1. zu jeder der beiden Wurzeln x' x'' eine bestimmte Wurzel von 5.; die zusammengehörigen Werthe mögen x' und y', x'' und y'' sein.

Die Gleichungen 4. und 5. lehren: Eine Gerade hat mit einer Ellipse nicht mehr als zwei Punkte gemein.

Sind P' und P'' die zu den Coordinaten $x'y'$ und $x''y''$ gehörenden Punkte, so ist nach 4. und 5.

$$\frac{1}{2}(x' + x'') = \frac{a^2u}{a^2u^2 + b^2v^2}, \quad \frac{1}{2}(y' + y'') = \frac{b^2v}{a^2u^2 + b^2v^2}.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind die Coordinaten ξ η der Mitte von $P'P''$; man hat also

$$\xi = \frac{a^2u}{a^2u^2 + b^2v^2}, \quad \eta = \frac{b^2v}{a^2u^2 + b^2v^2},$$

woraus folgt:

6. $$\frac{\eta}{\xi} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{v}{u}.$$

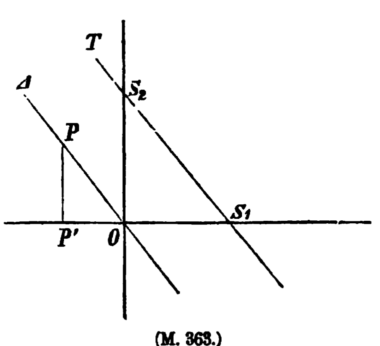
Für alle Ellipsensehnen, welche dasselbe Verhältniss $v : u$ haben, haben also auch die Coordinaten der Sehnenmitte ein constantes Verhältniss, d. i.:

Die Mitten paralleler Sehnen einer Ellipse liegen auf einer Geraden, die durch den Schnittpunkt O der Symmetrieachsen geht.

Hieraus folgt noch, dass alle Ellipsensehnen, die durch O gehen, in O

halbirt werden. Man bezeichnet daher O als das Centrum der Ellipse, und die durch O gehenden Sehnen als Diameter.

Ist Δ der zur Geraden T parallele Diameter, und ist für T das Verhältniss $v:u$ gleich dem gegebenen Werthe γ, so ist für jeden Punkt von Δ $P'P:OP' = OS_2:S_1O = \frac{1}{v}:-\frac{1}{u} = -\frac{1}{\gamma}$.



(M. 363.)

Die Gleichung von Δ ist daher
$y:x = -1:\gamma$, oder

7. $$x + \gamma y = 0.$$

Die Gleichung des Diameters Δ', auf dem die Mitten der zu T parallelen Sehnen liegen, ist nach 6. $y:x = b^2\gamma:a^2$, oder

8. $$x - \frac{a^2}{b^2\gamma}\cdot y = 0.$$

Für die Ellipsensehnen, welche parallel dem Diameter Δ' sind, liegen daher die Mitten auf dem Diameter

$$x - \frac{a^2}{b^2\left(-\frac{a^2}{b^2\gamma}\right)}\cdot y = 0, \text{ d. i. } x + \gamma y = 0,$$

mithin auf dem Diameter Δ.

Enthält also Δ' die Mitten der Sehnen, welche parallel Δ sind, so enthält Δ die Mitten der zu Δ' parallelen Sehnen. Die Beziehung der beiden Diameter Δ und Δ' ist daher reciprok. Zwei solche Diameter heissen conjugirte Diameter der Ellipse.

Setzt man $\gamma = 0$, so wird die Gleichung des Diameters Δ zu $x = 0$, Δ fällt also jetzt mit der Y-Achse zusammen.

Die Gleichung des conjugirten Diameters

$$\frac{x}{y} = -\frac{a^2}{b^2\gamma}$$

wird jetzt zu $x:y = \infty$, also zu $y = 0$, Δ' wird identisch mit der X-Achse. Die Achsen der Ellipse sind daher conjugirte Diameter.

16. Die Coordinaten der Endpunkte eines Diameters, der die Gleichung $x - \gamma y = 0$ hat, bestimmen sich aus dieser Gleichung und aus der Ellipsengleichung. Man erhält

$$x^2 = \frac{a^2b^2\gamma^2}{a^2 + b^2\gamma^2}; \quad y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2\gamma^2}.$$

Das Quadrat der Länge des halben Diameters folgt hieraus zu

1. $$r^2 = \frac{a^2b^2(1 + \gamma^2)}{a^2 + b^2\gamma^2}.$$

Der conjugirte Diameter habe die Gleichung $x - \gamma' y = 0$. Dann gilt für ihn

$$r'^2 = \frac{a^2b^2(1 + \gamma'^2)}{a^2 + b^2\gamma'^2}.$$

Nun ist aber $\gamma' = -a^2:b^2\gamma$, mithin

$$1 + \gamma'^2 = \frac{b^4\gamma^2 + a^4}{b^4\gamma^2}, \quad a^2 + b^2\gamma'^2 = \frac{a^2}{b^2\gamma^2}(a^2 + b^2\gamma^2); \text{ daher ist}$$

2. $$r'^2 = \frac{a^4 + b^4\gamma^2}{a^2 + b^2\gamma^2}.$$

Durch Addition der Formeln 1. und 2. folgt

$$r^2 + r'^2 = \frac{1}{a^2 + b^2\gamma^2}(a^2b^2 + a^2b^2\gamma^2 + a^4 + b^4\gamma^2) = a^2 + b^2.$$

Also: Die Summe der Quadrate zweier conjugirten Radien der Ellipse ist constant.

Sind φ und φ_1 die Winkel der X-Achse mit Δ und Δ_1, so ist

$$tang\,\varphi = -\gamma, \qquad tang\,\varphi' = \frac{a^2}{b^2\gamma}, \text{ mithin}$$

$$sin\,\varphi = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \qquad cos\,\varphi = -\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}},$$

$$sin\,\varphi' = \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^4\gamma^2}}, \qquad cos\,\varphi' = \frac{b^2\gamma}{\sqrt{a^4 + b^4\gamma^2}}.$$

Bezeichnet man den Winkel der beiden conjugirten Diameter Δ und Δ' mit ω, so ist $\omega = \varphi' - \varphi$, mithin

3. $$sin\,\omega = \frac{b^2\gamma^2 + a^2}{\sqrt{1+\gamma^2}\cdot\sqrt{a^4+b^4\gamma^2}}.$$

Nun ist nach 1. und 2.

4. $$rr' = \frac{ab\sqrt{1+\gamma^2}\cdot\sqrt{a^4+b^4\gamma^2}}{a^2+b^2\gamma^2}.$$

Folglich, nach Multiplication von 3. und 4.

5. $$rr'\,sin\,\omega = ab.$$

Die beiden Ellipsentangenten an den Endpunkten eines Diameters können (in Uebereinstimmung mit den Formeln des nächsten Abschnittes), als verschwindend kleine vom Diameter halbirte Sehnen betrachtet werden, sind also dem conjugirten Diameter parallel. Die vier Tangenten, welche in den Endpunkten zweier conjugirter Diameter Δ und Δ' construirt sind, bilden daher ein der Ellipse umschriebenes Parallelogramm, dessen Seiten paarweis den conjugirten Diametern parallel und gleich sind.

Wir haben nun nach 5. den Satz:

Die einer Ellipse in den Enden je zweier conjugirten Diameter umschriebenen Parallelogramme haben constante Fläche, sind nämlich gleich dem Rechteck der beiden Achsen der Ellipse.

17. Wir lösen nun die quadratischen Gleichungen No. 15, 4. und 5. auf und erhalten für die Coordinaten der Schnittpunkte P' und P'' nach einfachen Reductionen:

$$x' \text{ und } x'' = \frac{1}{a^2u^2+b^2v^2}\left(a^2u \pm abv\sqrt{a^2u^2+b^2v^2-1}\right)$$

$$y' \text{ und } y'' = \frac{1}{a^2u^2+b^2v^2}\left(b^2v \mp abu\sqrt{a^2u^2+b^2v^2-1}\right)$$

wobei die oberen und die unteren Zeichen in beiden Zeilen zusammengehören.

Diese Formeln lehren: Eine Gerade hat mit der Ellipse zwei getrennte reale Punkte, oder nur einen Punkt, oder keinen realen Punkt gemein, je nachdem $a^2u^2 + b^2v^2 - 1$ positiv, gleich Null, oder negativ ist.

18. Aendert man die Lage einer Geraden T, welche die Ellipse schneidet, so, dass $a^2u^2 + b^2v^2 - 1 \equiv R$ immer kleiner wird und dem Grenzwerthe Null sich nähert, so nähern sich auch die Differenzen

$$x' - x'' = \frac{2abv}{a^2u^2+b^2v^2}\sqrt{R}, \qquad y' - y'' = -\frac{2abu}{a^2u^2+b^2v^2}\sqrt{R}$$

sowie der Abstand $P_1P_2 = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$ der Grenze Null. Ist

1. $$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0,$$

so wird die Gerade T zur Tangente der Ellipse. Die Coordinaten des Berührungspunktes folgen mit Hülfe der Gleichung 1. aus den Formeln von No. 17:

$$x' = \frac{a^2u}{a^2u^2 + b^2v^2}, \quad y' = \frac{b^2v}{a^2u^2 + b^2v^2}.$$

Da $a^2u^2 + b^2v^2 = 1$, so ist einfacher

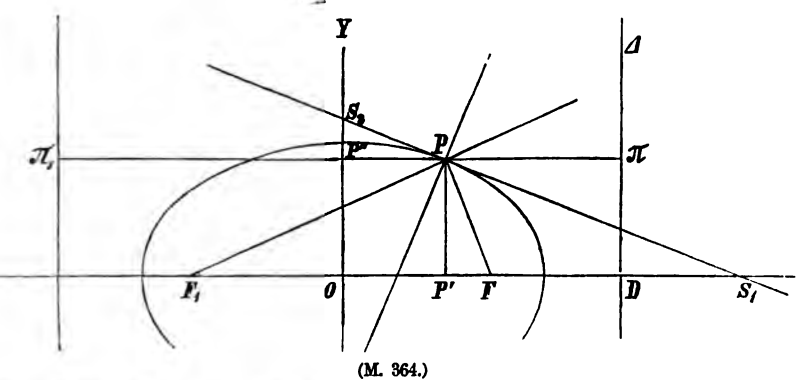
2. $$x' = a^2u, \quad y' = b^2v.$$

Hieraus folgen die Werthe

3. $$u = \frac{x'}{a^2}, \quad v = \frac{y'}{b^2};$$

durch Substitution in $ux + vy - 1 = 0$ ergiebt sich die Gleichung der Geraden, welche die Ellipse im Punkte P' berührt:

4. $$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} - 1 = 0.$$



(M. 364.)

Sind S_1S_2 die Spuren der Tangente auf den Achsen, so ist $OS_1 = 1 : u = a^2 : x'$, mithin

$$FS_1 = OS_1 - OF = \frac{a^2 - cx'}{x'}, \quad F_1S_1 = F_1O + OS_1 = \frac{a_2 + cx'}{x'}.$$

Nun ist, wenn Δ und Δ_1 die Directricen sind:

$$FP = \varepsilon \cdot P\Pi = \varepsilon \cdot (OD - OP') = \varepsilon\left(\frac{a^2}{c} - x'\right) = \frac{\varepsilon(a^2 - cx')}{c}$$

$$F_1P = \varepsilon \cdot \Pi_1P = \varepsilon(D_1O + OP') = \varepsilon\left(\frac{a^2}{c} + x'\right) = \frac{\varepsilon(a^2 + cx')}{c}.$$

Hieraus folgt die Proportion:

$$FS_1 : F_1S_1 = FP : F_1P.$$

Die Gerade, welche durch die Spitze eines Dreiecks (F_1PF) geht und die Basis (F_1F) aussen im Verhältniss der an der Spitze liegenden Seiten theilt, halbirt den Aussenwinkel an der Spitze. Berücksichtigen wir dazu noch, dass die Halbirungslinien der vier von zwei Geraden gebildeten Winkel normal sind, so folgt der Satz:

Die Tangente und Normale, die zu einer Ellipse in einem Punkte derselben construirt sind, halbiren die Winkel der Geraden, welche den Punkt mit den Brennpunkten verbinden.

19. Die Coordinaten der Schnittpunkte einer Geraden T mit einer Hyperbel genügen den Gleichungen

1. der Geraden $ux + vy - 1 = 0,$

2. und der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$

Substituirt man den für y bez. x aus 1. folgenden Werth in 2., so erhält man für die Coordinaten der Schnittpunkte die quadratischen Gleichungen:

3. $$x^2 - 2 \cdot \frac{a^2 u}{a^2 u^2 - b^2 v^2} x + \frac{a^2(1 + b^2 v^2)}{a^2 u^2 - b^2 v^2} = 0,$$

4. $$y^2 + 2 \cdot \frac{b^2 v}{a^2 u^2 - b^2 v^2} y - \frac{b^2(1 - a^2 u^2)}{a^2 u^2 - b^2 v^2} = 0.$$

Zu jeder der beider Wurzeln x' und x'' der 3. Gleichung gehört gemäss der Gleichung 1. eine bestimmte Wurzel y' bez. y'' der Gleichung 4. Man sieht daher: Eine Gerade und eine Hyperbel haben nicht mehr als zwei Punkte gemein.

Die Coordinaten ξ, η der Mitte der auf T liegenden Hyperbelsehne sind

$$\xi = \tfrac{1}{2}(x' + x'') \qquad \eta = \tfrac{1}{2}(y' + y''),$$

mithin nach 3. und 4.

5. $$\xi = \frac{a^2 u}{a^2 u^2 - b^2 v^2}, \quad \eta = -\frac{b^2 v}{a^2 u^2 - b^2 v^2}; \text{ daher ist}$$

6. $$\frac{\eta}{\xi} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{v}{u}.$$

Parallele Hyperbelsehnen haben dasselbe Verhältniss $v : u$, also ihre Mitten dasselbe Verhältniss $\eta : \xi$. Daher der Satz:

Die Mitten paralleler Hyperbelsehnen liegen auf einer Geraden, die durch den Schnittpunkt der Symmetrieachsen geht.

Hieraus folgt weiter, dass jede durch den Punkt O gehende Hyperbelsehne in O halbirt wird. Man bezeichnet daher O als Centrum, und jede durch O gehende Gerade als Diameter der Hyperbel.

Ist für eine Schaar paralleler Hyperbelsehnen $v : u = \gamma$, so ist die Gleichung des zur Schaar gehörenden (mit den Sehnen der Schaar parallelen) Diameters Δ nach No. 15, 7.

7. $$x + \gamma y = 0.$$

Die Gleichung des Diameters Δ_1, der die Mitten der Sehnen dieser Schaar enthält, ist nach 6.

8. $$x + \frac{a^2}{b^2 \gamma} y = 0.$$

Der Diameter, auf dem die Mitten der zu Δ_1 parallelen Sehnen liegen, ist nach 7. und 8.

$$x + \frac{a^2}{b^2 \cdot \frac{a^2}{b^2 \gamma}} \cdot y = 0, \text{ d. i. } x + \gamma y = 0,$$

es ist dies der Diameter Δ.

Enthält also ein Diameter Δ' die Mitten der zum Diameter Δ parallelen Sehnen, so enthält auch Δ die Mitten der zu Δ' parallelen Sehnen. Die Beziehung zweier solcher Diameter ist daher reciprok. Man bezeichnet zwei solche Diameter, deren jeder die Mitten der zum andern parallelen Sehnen enthält, als conjugirte Diameter der Hyperbel.

Lässt man Δ der Reihe nach mit den X-Achsen und den beiden Asymptoten zusammenfallen, so erhält γ die Werthe 0, $a : b$, $- a : b$, also wird die Gleichung des conjugirten Diameters

$$y = 0 \text{ bez. } x + \frac{a}{b} y = 0, \text{ bez. } x - \frac{a}{b} y = 0,$$

und man sieht daher:

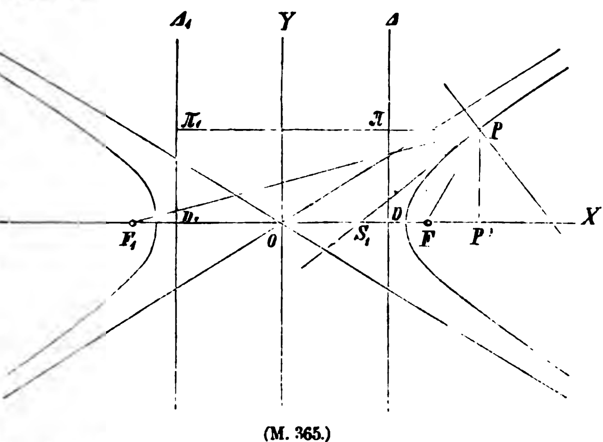
Die Symmetrieachsen der Hyperbel sind conjugirt; jede Asymptote ist sich selbst conjugirt.

20. Die Auflösung der Gleichungen 3. und 4. des vorigen Abschnittes ergiebt nach leichter Reduction:

$$x' \text{ und } x'' = \frac{1}{a^2u^2 - b^2v^2}\left(a^2u \pm abv\sqrt{1 - a^2u^2 + b^2v^2}\right)$$

$$y' \text{ und } y'' = \frac{1}{a^2u^2 - b^2v^2}\left(-b^2v \mp abu\sqrt{1 - a^2u^2 + b^2v^2}\right).$$

Eine Gerade hat also mit einer Hyperbel zwei reale Punkte, einen Punkt oder keinen realen Punkt gemein, je nachdem $a^2u^2 - b^2v^2 - 1$ negativ, gleich Null, oder positiv ist.



(M. 365.)

21. Ist $a^2u^2 - b^2v^2 - 1 = 0$, so fallen die Schnittpunkte der Geraden und der Hyperbel in einen Punkt zusammen und die Gerade wird zur Tangente der Hyperbel.

Die Coordinaten $x'\,y'$ des Berührungspunktes P ergeben sich aus den Formeln der vorigen Nummer zu:

1. $x' = a^2u, \quad y' = -b^2v.$

Die Gleichung der Tangente, welche die Hyperbel in dem gegebenen Punkte P berührt, ergiebt sich nach Einsetzung der aus 1. folgenden Werthe von u und v in die Gleichung $ux + vy - 1 = 0$ der Geraden zu:

2. $$\frac{x'x}{a^2} - \frac{y'y}{b^2} - 1 = 0.$$

Ist PS_1 Tangente der Hyperbel im Punkte P, so ist

$$OS_1 = \frac{1}{u} = \frac{a^2}{x'}.$$

Folglich ist

3. $$F_1S_1 = F_1O + OS_1 = c + \frac{a^2}{x'} = \frac{cx' + a^2}{x'}.$$
$$S_1F = OF - OS_1 = c - \frac{a^2}{x'} = \frac{cx' - a^2}{x'}.$$

Ferner ist

4. $$F_1P = \varepsilon \cdot \Pi_1 P = \varepsilon(D_1O + OP') = \varepsilon\left(\frac{a^2}{c} + x'\right) = \varepsilon \cdot \frac{cx' + a^2}{c}$$
$$FP = \varepsilon \cdot \Pi P = \varepsilon(OP' - OD) = \varepsilon\left(x' - \frac{a^2}{c}\right) = \varepsilon \cdot \frac{cx' - a^2}{c}.$$

Hieraus folgt: $F_1P : FP = F_1S_1 : S_1F$; dies lehrt den Satz: Die Tangente und Normale einer Hyperbel in einem Punkte derselben halbiren die Winkel der Geraden, die den Punkt mit den Brennpunkten der Hyperbel verbinden.

22. Unter den Hyperbeln wird die, bei welcher $b = a$ ist, mit einem

besonderen Namen ausgezeichnet; sie heisst gleichseitig. Die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf die Symmetrieachsen ist:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel bilden mit der Hauptachse Winkel, deren trigonometrische Tangente gleich der Einheit ist; hieraus folgt, dass sie miteinander rechte Winkel bilden.

Die Gleichung des zu der Geraden $\Delta = x + \gamma y = 0$ conjugirten Durchmessers ist (No. 19) bei der gleichseitigen Hyperbel

$$\Delta' = -\gamma x + y = 0.$$

Hieraus sieht man, dass der Winkel der Geraden Δ mit der X-Achse gleich dem Winkel der Geraden Δ' mit der Y-Achse ist, und daher folgt weiter: Die vier Winkel je zweier conjugirten Diameter einer gleichseitigen Hyperbel werden von den Asymptoten halbirt.

---

23. Polarcoordinaten. Die Lage eines Punktes in der Ebene kann man statt durch seine Projectionen auf die Coordinatenachsen auch durch die Strecke OP (Fig. 347) und durch den Winkel bestimmen, den die Gerade OX mit der Geraden OP einschliesst. Die Strecke OP wird in diesem Sinne als Radius vector, r, der Winkel als Anomalie, φ, des Punktes P bezeichnet.

Man hat den Begriff »Coordinaten eines Punktes« dahin ausgedehnt, dass man darunter überhaupt solche Data versteht, welche die Lage eines Punktes, zunächst in der Ebene, bestimmen.

Die bisher gebrauchten Coordinaten OP' und OP'' nennt man dann insbesondere Orthogonal-Coordinaten, oder nach dem Erfinder der Coordinaten-Geometrie Des Cartes (1596—1650) Cartesische Coordinaten.

Die Coordinaten r und φ führen den Namen Polarcoordinaten. Aus den Formeln $OP' = OP\cos\varphi$, $P'P = OP\sin\varphi$ folgen für den Zusammenhang von orthogonalen und Polarcoordinaten die Formeln

1. $$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

2. $$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}.$$

Den Punkt O bezeichnet man als Pol der Polarcoordinaten, die Gerade OX, von welcher aus die Anomalien gezählt werden, als Nulllinie (der Anomalien).

Die Formeln 1. und 2. lehren also die Beziehungen der orthogonalen und Polarcoordinaten für den Fall, dass der Pol und die Nulllinie mit dem Ursprung und der Abscissenachse der orthogonalen Coordinaten zusammenfallen.

24. Aus der Gleichung einer Curve in Orthogonalcoordinaten erhält man die Gleichung in Polarcoordinaten, welche den Nullpunkt zum Pol und die X-Achse zur Nulllinie haben, indem man in der Gleichung der Curve die Coordinaten x und y durch die Werthe $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$ ersetzt.

Man erhält so die Polargleichung der Ellipse und Hyperbel für das Centrum als Pol und die Hauptachse als Nulllinie:

1. Ellipsengleichung: $$r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) - 1 = 0,$$

2. Hyperbelgleichung: $$r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) - 1 = 0.$$

Hieraus folgt

1*. für die Ellipse: $r^2 = \frac{-a^2 b^2}{a^2 sin^2 \varphi + b^2 cos^2 \varphi}$,

2*. für die Hyperbel: $r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 sin^2 \varphi - b^2 cos^2 \varphi}$.

Nimmt man einen Brennpunkt zum Pol und die Hauptachse zur Nulllinie und rechnet die Richtung nach dem nächst gelegenen Scheitel der Ellipse bez. Hyperbel als positiv, so hat man für die Ellipse (Fig. 364):

$$r = FP = \varepsilon \cdot P\Pi = \varepsilon (FD - FP') = \varepsilon \left(\frac{b^2}{c} - r\, cos\, \varphi\right).$$

Daher ist die Polargleichung der Ellipse für dieses System:

3. $$r = \frac{\varepsilon b^2}{c(1 + \varepsilon\, cos\, \varphi)}.$$

Für die Hyperbel ergiebt sich aus Fig. 365:

$$r = FP = \varepsilon \cdot \Pi P = \varepsilon (FD - FP') = \varepsilon \left(\frac{b^2}{c} - r\, cos\, \varphi\right)$$

und hieraus die Polargleichung der Hyperbel:

4. $$r = \frac{\varepsilon b^2}{c(1 + \varepsilon\, cos\, \varphi)}.$$

Setzt man $\varphi = 90^\circ$, so resultirt aus 3. und 4. $r = \varepsilon b^2 : c$. Diese Strecke, die Ordinate der Curve im Brennpunkte, nennt man den Parameter derselben und bezeichnet ihn mit p.

Man kann nun statt 3. und 4. schreiben

5. $$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\, cos\, \varphi}.$$

Für die Parabel findet man aus Fig. 362:

$$r = FP = P\Pi = FD - FP' = p - r\, cos\, \varphi, \text{ also}$$

$$r = \frac{p}{1 + cos\, \varphi}.$$

Die Gleichung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\, cos\, \varphi}$$

ist also die Gleichung einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem ε kleiner, grösser oder gleich der Einheit ist; der Pol des Coordinatensystems ist ein Brennpunkt der Curve und die Nulllinie ist die Hauptachse, und zwar mit der positiven Seite dem nächsten Scheitel zugewandt (wobei man bei der Parabel noch den unendlich fernen Punkt der Achse als Scheitel gelten lassen kann).

§ 4. Liniencoordinaten.

1. Einer Gleichung zwischen zwei Veränderlichen haben wir dadurch eine geometrische Bedeutung abgewonnen, dass wir die beiden Veränderlichen als die Coordinaten eines Punktes ansahen und die Gesammtheit aller der Punkte betrachteten, deren Coordinaten der Gleichung genügen.

Man kann aber eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen auch auf wesentlich anderem Wege geometrisch bedeutsam machen.

Wie der Punkt, so ist auch die Gerade durch zwei Data bestimmt. Denken wir uns eine Gerade durch ihre Abschnitte OS_1 und OS_2 auf den Coordinatenachsen, oder lieber im Zusammenhange mit den gegebenen Ent-

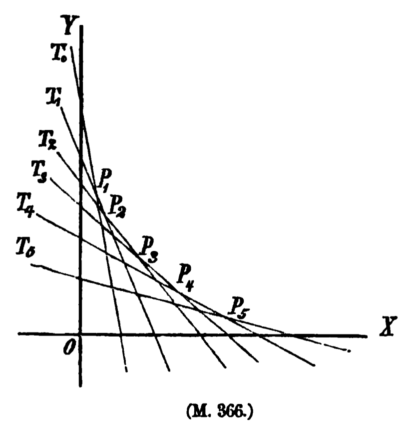
wicklungen durch die mit u und v bezeichneten reciproken Werthe der Längenzahlen dieser Strecken bestimmt, so kann man zwei durch eine Gleichung verbundene Veränderliche auch als diese Bestimmungsstücke einer Geraden denken.

So wie man die Bestimmungsstücke eines Punktes als die Coordinaten des Punktes bezeichnet, so nennt man die Grössen u und v Coordinaten der Geraden, oder kurzweg Liniencoordinaten.

Liegt nun eine Gleichung

$$f(u, v) = 0$$

vor und giebt man darin der Veränderlichen u eine Reihe auf einander folgender Werthe $u_0\, u_1\, u_2\, u_3\, u_4 \ldots$, und bestimmt die gemäss der Gleichung $f(u, v) = 0$ zugehörigen Werthe $v_0\, v_1\, v_2\, v_3\, v_4 \ldots$, so bilden die Geraden $T_0\, T_1\, T_2\, T_3\, T_4 \ldots$, welche $u_0\, v_0$, $u_1\, v_1$, $u_2\, v_2$, $u_3\, v_3$, $u_4\, v_4, \ldots$ zu Coordinaten haben, in dieser Aufeinanderfolge einen gewissen polygonalen Zug $P_1\, P_2\, P_3\, P_4 \ldots$, dessen Eckpunkte die Schnittpunkte zweier auf einander folgenden Geraden der Reihe $T_0\, T_1\, T_2\, T_3\, T_4 \ldots$ sind.



(M. 366.)

Denkt man sich nun die Unterschiede $u_1 - u_0$, $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2 \ldots$ immer kleiner, so werden auch die zugehörigen $v_0\, v_1\, v_2 \ldots$ immer dichter auf einander folgen, und die Anzahl der Geraden T, die auf ein gewisses Intervall der Coordinaten kommen, wird immer grösser. Geht man zur Grenze über und lässt u stetig wachsen, so ändert sich (im Allgemeinen) auch v stetig, die Gerade T ändert ihre Lage stetig; die Punkte $P_1\, P_2\, P_3\, P_4 \ldots$ haben verschwindend kleine Abstände von einander und bilden daher eine Curve, während die Geraden T, deren jede zwei auf einander folgende Punkte der Curve verbindet, Tangenten dieser Curve werden.

Die Geraden, deren Coordinaten u, v einer Gleichung $f(u, v) = 0$ genügen, umhüllen (d. i. berühren) eine Curve.

Die Gleichung $f(u, v) = 0$ bezeichnet man als die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten.

Die Gerade, deren Coordinaten $u = 0$ und $v = 0$, ist unendlich fern; für die Abscissenachse ist $v = \infty$; für die Ordinatenachse $u = \infty$; für alle übrigen durch den Ursprung gehenden Geraden ist $u = \infty$, $v = \infty$, doch kann man diese Geraden noch insofern von einander durch ihre Coordinaten unterscheiden, als das Verhältniss $v : u$ eine für jede dieser Geraden eindeutig bestimmte Zahl ist.

2. Die Gleichung $ux + vy - 1 = 0$ sagt aus, dass der Punkt, dessen Coordinaten x, y sind, auf der Geraden liegt, die die Coordinaten u, v hat. Diese Gleichung enthält vier unbestimmte Grössen u, v, x, y. Bisher dachten wir uns die beiden Grössen u, v gegeben; dann blieben x und y als Unbestimmte übrig und die Gleichung war die Bedingung dafür, dass der veränderliche Punkt (x, y) auf der Geraden (u, v) liegt, d. i. die Formel $ux + vy - 1 = 0$, war die Gleichung der Geraden (u, v). Denken wir uns jetzt für x und y gegebene Werthe ξ und η, dagegen u und v als unbestimmt, und schreiben die Gleichung

$$\xi u + \eta v - 1 = 0,$$

so erscheint sie als die Bedingungsgleichung, welche die Coordinaten der unend-

lich vielen Geraden T erfüllen müssen, die durch den gegebenen Punkt gehen. Die Gleichung $\xi u + \eta v - 1 = 0$ ist daher die Gleichung des Punktes ξ, η in Liniencoordinaten.

Die Gleichung $\alpha u - 1 = 0$ wird von allen Geraden erfüllt, für $u = 1 : \alpha$, während v, das in der Gleichung nicht vorkommt, unbestimmt bleibt; sie ist also die Gleichung des Punktes S_1 der Abscissenachse, für welchen $OS_1 = \alpha$; ebenso ist ersichtlich, dass $\beta v - 1 = 0$ die Gleichung eines Punktes der Ordinatenachse ist, und zwar des Punktes S_2, für welchen $OS_2 = \beta$.

Die Gleichung $\alpha u + \beta v = 0$ sagt aus, dass das Verhältniss $v : u$ den gegebenen Werth $-\alpha : \beta$ hat. Alle Geraden, deren Coordinaten ein gegebenes Verhältniss haben, sind parallel. Man kann von ihnen sagen, dass sie durch einen und denselben unendlich fernen Punkt gehen, der durch die Richtung einer Geraden bestimmt ist, auf der er liegt.

Die Gleichung $\alpha u + \beta v = 0$ ist also die Gleichung eines in bestimmter Richtung liegenden unendlich fernen Punktes.

3. In § 3, No. 18 und 21 haben wir die Gleichungen $a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0$, und $a^2u^2 - b^2v^2 - 1 = 0$ als Bedingungen für die Coordinaten einer Geraden gefunden, welche eine Ellipse, bez. Hyperbel berührt. Wir können dies nun so ausdrücken:

Die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel in Liniencoordinaten, bezogen auf die Symmetrieachsen als Coordinatenachsen, sind:

1. für die Ellipse: $a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0$,

2. für die Hyperbel: $a^2u^2 - b^2v^2 - 1 = 0$.

Ebenso folgt aus § 3, 14 die Gleichung der Parabel in Liniencoordinaten, bezogen auf die Symmetrieachse und die Scheiteltangente als Coordinatenachsen:

3. $$2u + pv^2 = 0.$$

4. Wir haben aus der Gleichung einer Geraden T und aus der Gleichung einer Ellipse in Punktcoordinaten die Coordinaten der Punkte bestimmt, welche die Gerade und die Ellipse gemein haben. Für Untersuchungen in Liniencoordinaten haben wir die analoge Aufgabe: Aus der Gleichung eines Punktes P

1. $$\xi u + \eta v - 1 = 0$$

und der Gleichung einer Ellipse in Liniencoordinaten

2. $$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0$$

die Coordinaten der Geraden zu bestimmen, die durch den Punkt P gehen und die Ellipse berühren.

Diese Coordinaten genügen den Gleichungen 1. und 2., sind also die Wurzeln dieser beiden Gleichungen.

Aus der ersten entnehmen wir $v = (1 - \xi u) : \eta$, $u = (1 - \eta v) : \xi$, substituiren dies in 2. und erhalten nach einfachen Reductionen quadratische Gleichungen für u und v:

$$u^2 - 2\frac{b^2\xi}{b^2\xi^2 + a^2\eta^2} \cdot u - \frac{\eta^2 - b^2}{b^2\xi^2 + a^2\eta^2} = 0,$$

$$v^2 - 2\frac{a^2\eta}{b^2\xi^2 + a^2\eta^2} \cdot v - \frac{\xi^2 - a^2}{b^2\xi^2 + a^2\eta^2} = 0.$$

Die Gleichungen ergeben die Lösungen

3. $$u' \text{ und } u'' = \frac{1}{b^2\xi^2 + a^2\eta^2}\left(b^2\xi \pm ab\eta\sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1}\right)$$

nebst den der Reihe nach zugehörigen

4. $$v' \text{ und } v'' = \frac{1}{b^2\xi^2 + a^2\eta^2}\left(a^2\eta \mp ab\,\xi\sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1}\right).$$

Durch einen Punkt P gehen also zwei, eine oder keine (reale) Tangente an eine Ellipse, je nachdem

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 \gtreqless 0.$$

Die Bedingung $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0$ sagt aus, dass der Punkt P auf der Ellipse liegt und bestätigt so den Satz, dass sich durch einen auf der Ellipse liegenden Punkt nur eine Tangente an die Ellipse legen lässt.

Mit Rücksicht auf $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0$, oder $b^2\xi^2 + a^2\eta^2 = a^2b^2$ ergeben sich aus 3. und 4. die Coordinaten der im Punkte P die Ellipse berührenden Tangente zu

$$u' = \xi : a^2, \qquad v' = \eta : b^2.$$

Die Coordinaten des Punktes, in welchem die Gerade u' v' die Ellipse berührt, sind daher $\xi = a^2u'$, $\eta = b^2v'$ in Uebereinstimmung mit § 3, 18.

Die Gleichung des Ellipsenpunktes, der auf der Tangente u' v' liegt, ergiebt sich durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung des Punktes $\xi u + \eta v - 1 = 0$ zu

$$a^2u'u + b^2v'v - 1 = 0.$$

5. Die Coordinaten der Tangenten, die sich von einem Punkte, dessen Gleichung

1. $$\xi u + \eta v - 1 = 0$$

ist, an die Hyperbel legen lassen, die in Liniencoordinaten die Gleichung hat:

2. $$a^2u^2 - b^2v^2 - 1 = 0$$

sind die Wurzeln der Gleichungen 1. und 2., bestimmen sich daher aus den Gleichungen, die sich durch Elimination von v und u aus 1. und 2. ergeben:

3. $$u^2 - 2\frac{b^2\xi}{b^2\xi^2 - a^2\eta^2}u + \frac{\eta^2 + b^2}{b^2\xi^2 - a^2\eta^2} = 0$$

4. $$v^2 + 2\frac{a^2\eta}{b^2\xi^2 - a^2\eta^2}v + \frac{\xi^2 - a^2}{b^2\xi^2 - a^2\eta^2} = 0$$

zu:

5. $$u' \text{ und } u'' = \frac{1}{b^2\xi^2 - a^2\eta^2}\left(b^2\xi \pm ab\,\eta\sqrt{1 + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\xi^2}{a^2}}\right)$$

nebst den dazu gehörigen Werthen

6. $$v' \text{ und } v'' = \frac{1}{b^2\xi^2 - a^2\eta^2}\left(-a^2\eta \mp ab\,\xi\sqrt{1 + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\xi^2}{a^2}}\right).$$

Durch einen Punkt lassen sich also zwei, oder eine, oder keine reale Tangente an eine Hyperbel legen, je nachdem

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - 1 \lesseqgtr 0.$$

Ist $\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0$, so liegt der Punkt (ξ, η) auf der Hyperbel; durch einen Hyperbelpunkt lässt sich also nur eine Tangente an die Hyperbel legen.

Die Coordinaten dieser Tangente folgen aus 5. und 6. zu

$$u' = \xi : a^2, \qquad v' = -\eta : b^2;$$

die Coordinaten des auf der Tangente u' v' liegenden Hyperbelpunktes sind daher

$$\xi = a^2u', \qquad \eta = -b^2v'.$$

Hieraus folgt die Gleichung des auf der Tangente u' v' liegenden Hyperbelpunktes zu

$$a^2u'u - b^2v'v - 1 = 0.$$

Für die Punkte der Ebene, deren Coordinaten der Gleichung genügen $b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = 0$, verschwindet in den quadratischen Gleichungen, in welche 3. und 4. durch Multiplication mit $b^2\xi^2 - a^2\eta^2$ übergehen, das quadratische Glied; von einer quadratischen Gleichung, deren quadratisches Glied verschwindend klein gegen die anderen beiden Glieder ist, wird die eine Wurzel unendlich gross, während die andere endlich bleibt und sich als Wurzel der Gleichung ersten Grades ergiebt, welche nach Wegfall des quadratischen Gliedes noch übrig bleibt.

Die Punkte, für welche $b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = 0$, haben das Coordinatenverhältniss $\eta : \xi = \pm b : a$, liegen also (§ 3, 5) auf den Asymptoten. Von einem Punkte einer Asymptote aus lässt sich daher (ausser der Asymptote, deren Coordinaten unendliche Werthe haben) nur eine Tangente an die Hyperbel legen.

6. Die Coordinaten der Tangenten, welche sich von dem Punkte

1. $$\xi u + \eta v - 1 = 0$$

an die Parabel legen lassen, deren Gleichung in Liniencoordinaten ist

2. $$2u + pv^2 = 0,$$

ergeben sich als Wurzeln von 1. und 2., also aus den Gleichungen

3. $$v^2 - 2\frac{\eta}{p\xi}v + \frac{2}{p\xi} = 0,$$

4. $$u^2 + 2\frac{\eta^2 - p\xi}{p\xi^2}u + \frac{1}{\xi^2} = 0$$

zu:

5. $$u' \text{ und } u'' = \frac{1}{p\xi^2}\left(-\eta^2 + p\xi \pm \eta\sqrt{\eta^2 - 2p\xi}\right)$$

6. $$v' \text{ und } v'' = \frac{1}{p\xi}\left(\eta^2 \mp \sqrt{\eta^2 - 2p\xi}\right).$$

Von einem Punkte aus lassen sich also zwei, eine oder keine reale Tangente an die Parabel legen, je nachdem $\eta^2 - 2p\xi$ positiv, gleich Null, oder negativ ist.

Ist $\eta^2 - 2p\xi = 0$, so liegt der Punkt auf der Parabel. Die durch ihn gehende Tangente hat die Coordinaten

$$u' = \frac{p\xi - \eta^2}{p\xi^2} = -\frac{1}{\xi}, \quad v' = \frac{\eta}{p\xi} = \frac{2}{\eta} \quad (\S\ 3,\ 14).$$

Die Gleichung des auf der Tangente u' v' liegenden Parabelpunktes ergiebt sich hieraus zu

$$\frac{u}{u'} - \frac{2v}{v'} + 1 = 0.$$

§ 5. Die Gleichung ersten Grades in Punkt- und Liniencoordinaten.

1. Jede Gleichung ersten Grades in Punktcoordinaten ist die Gleichung einer Geraden.

Die allgemeine Gleichung ersten Grades ist

1. $$Ax + By + C = 0.$$

Ist $C = 0$, so lautet die Gleichung

2. $$Ax + By = 0,$$

sie sagt aus, dass $y : x = -A : B$, ist also die Gleichung einer durch den

Nullpunkt gehenden Geraden, deren Winkel mit der Abscissenachse sich aus der Gleichung bestimmt

$$tang\varphi = -A : B.$$

Ist $A = 0$ oder $B = 0$, so geht die allgemeine Gleichung über in

3. $By + C = 0$, bez. 4. $Ax + C = 0$,

woraus folgt $y = -C : B$, $x = -C : A$.

Die Gleichungen $By + C = 0$ bez. $Ax + C = 0$ sind also die Gleichungen einer Parallelen zur X-Achse, bez. zur Y-Achse, die von der Y-Achse, bez. der X-Achse, die Strecke $-C : B$, bez. $-C : A$ abschneidet.

Ist keiner der Coefficienten A, B, C gleich Null, so kann man die Gleichung durch $(-C)$ dividiren und erhält

5. $$-\frac{A}{C}x \cdot + -\frac{B}{C}y - 1 = 0.$$

Der Vergleich mit der Gleichung der Geraden, die die Achsenabschnitte a und b hat

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

lehrt, dass 5. die Gleichung einer Geraden ist, welche von den Achsen die Strecken abschneidet

$$a = -C : A, \quad b = -C : B.$$

2. Ist n der Coefficient, mit dem man die Gleichung einer Geraden T $Ax + By + C = 0$ multipliciren muss, um die Normalform (§ 2, 4) zu erhalten, so ist identisch

$$nAx + nBy + nC \equiv cos\varphi \cdot x + sin\varphi \cdot y - d.$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$nA = cos\varphi, \quad nB = sin\varphi, \quad nC = -d,$$

aus welchen sich ergiebt, indem man die ersten beiden Gleichungen quadrirt und addirt:

$$n = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad d = -\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Für die Wurzel ist dabei das Vorzeichen so zu wählen, dass der Abstand d das richtige, dem positiven Sinne der Normalen zu T entsprechende Vorzeichen erhält.

Der Abstand p eines Punktes P, dessen Coordinaten xy sind, von der Geraden T ist daher (§ 2, 5)

$$p = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}(Ax + By - C).$$

3. Soll die Gerade T durch zwei gegebene Punkte P_1 und P_2 gehen, so muss die Gleichung $Ax + By + C = 0$ von den Coordinaten $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ der Punkte P_1 und P_2 erfüllt werden; es gelten also die drei Gleichungen

1. $$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ Ax_1 + By_1 + C &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + C &= 0. \end{aligned}$$

Man kann die Coefficienten A, B, C darin als Unbekannte ansehen; das Bestehen dieser Gleichungen für Werthe von A, B, C, die nicht sämmtlich Null sind, fordert dann das Verschwinden der Determinante

2. $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Bedingung, welche x und y erfüllen müssen, damit die Gleichungen 1. zusammen bestehen können, — also die Gleichung dafür, dass P auf der Geraden $P_1 P_2$ liegt, also die Gleichung der Geraden $P_1 P_2$.

Subtrahirt man von der zweiten und dritten Zeile in 2. die erste, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 - x & y_1 - y & 0 \\ x_2 - x & y_2 - y & 0 \end{vmatrix} = (x_1 - x)(y_2 - y) - (x_2 - x)(y_1 - y).$$

Die Gleichung der Geraden $P_1 P_2$ nimmt daher auch die Gestalt an:

$$3. \qquad \frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x - x_2}{y - y_2}.$$

Durch direkte Entwicklung der Determinante 2. oder aus 3. erhält man die Gleichung in der Form:

$$4. \qquad (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0.$$

Um die Gleichung der Geraden $P_1 P_2$ in Normalform zu erhalten, hat man sie nach 2. durch $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ zu dividiren. Der absolute Werth dieser Wurzel stimmt mit dem absoluten Werthe der Strecke $P_1 P_2$ überein; bezeichnet man dieselbe mit g_{12}, und ist ε die positive oder negative Einheit, so ist also die Normalform der Gleichung der Geraden $P_1 P_2$

$$5. \qquad \frac{\varepsilon}{g_{12}} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dabei ist ε so zu wählen, dass

$$\frac{\varepsilon(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{g_{12}}$$

auch im Vorzeichen mit dem Abstande der Geraden $P_1 P_2$ vom Ursprunge (§ 2, 4) übereinstimmt.

4. Der Abstand eines Punktes P_0 von der Geraden $P_1 P_2$ ist (nach § 2, 5) dem Werthe entgegengesetzt gleich, den die linke Seite der Gleichung der Geraden x in Normalform annimmt, wenn man darin die Coordinaten x, y durch die Coordinaten $x_0 y_0$ des Punktes P_0 ersetzt.

Ist also h_0 der Abstand der Geraden $P_1 P_2$ von P_0, so ist

$$h_0 = -\frac{\varepsilon}{g_{12}} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Folglich ist

$$h_0 g_{12} = \varepsilon \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Der absolute Werth des Produkts $h_0 g_{12}$ ist die doppelte Flächenzahl des Dreiecks $P_0 P_1 P_2$. Wir finden daher: Die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

stimmt dem absoluten Werthe nach mit der doppelten Fläche der Dreiecks $P_0 P_1 P_2$ überein.

5. Um auch dem Vorzeichen der Determinante Δ eine geometrische Bedeutung abzugewinnen, fügen wir einige Bemerkungen über die Unterscheidung des Vorzeichens für ebene Flächen, zunächst für Dreiecke, ein.

Durchläuft man den Perimeter eines Dreiecks ABC so, dass man von A über B nach C geht, so hat man die Fläche des Dreiecks entweder zur Linken oder zur Rechten. Im ersten Falle soll die Fläche des Dreiecks ABC als positiv, im letzten als negativ gerechnet werden.

Hieraus folgt unmittelbar, dass die Flächen $ABC = BCA = CAB$; sowie dass $BAC = ACB = CBA$; und dass $ABC = -BAC$.

Sind AB, CD, EF, ... Strecken auf derselben Geraden, und ist h der Abstand dieser Geraden von einem Punkte O, so haben die Produkte $AB \cdot h$, $CD \cdot h$; $EF \cdot h$, ... gleiche oder ungleiche Zeichen, je nachdem AB, CD, EF ... gleiche Zeichen haben oder nicht; unter derselben Bedingung haben aber auch die Dreiecksflächen OAB, OCD, OEF, ..., die mit den halben Produkten $AB \cdot h$, $CD \cdot h$, $EF \cdot h$ ... rücksichtlich des absoluten Werthes übereinstimmen, gleiche Zeichen oder nicht. Wir sehen daher: Die Hälften der Produkte $AB \cdot h$, $CD \cdot h$, $EF \cdot h$ ... sind der Reihe nach alle gleich oder alle entgegengesetzt gleich den Dreiecken OAB, OED, OCF u. s. w.

Für Punkte einer Geraden gilt die Beziehung

$$AB + BC + CA = 0.$$

Multiplicirt man links mit dem Abstande h eines Punktes O von der Geraden AB, so entsteht

$$AB \cdot h + BC \cdot h + CA \cdot h = 0.$$

Mit Rücksicht auf das so eben Entwickelte folgt hieraus:

1. $$OAB + OBC + OCA = 0,$$

woraus die weiteren Beziehungen hervorgehen:

2. $$OAB + OBC = OAC$$

3. $$OBC = OAC - OAB.$$

6. Setzt man, wie es in den Figuren bisher immer geschehen ist, voraus, dass der positive Drehungssinn für Winkel mit dem Drehungssinn übereinstimmt, in dem man sich dreht, wenn man den Perimeter ABC einer positiven Fläche (immer in der Ordnung A, B, C, in welcher die Eckpunkte bei der Bezeichnung des Dreiecks sich folgen) durchläuft, und ist S_1 ein Punkt der Abscissenachse, P ein beliebiger Punkt der Ebene, so überzeugt man sich leicht, dass das Dreieck OS_1P positiv oder negativ ist, je nachdem die Strecken OS_1 und $P'P$ gleiche oder ungleiche Zeichen haben. Daher ist auch rücksichtlich des Vorzeichens:

1. $$2 \cdot OS_1P = OS_1 \cdot P'P.$$

Nun ist nach No. 5, 3, wenn S_1 die Spur von P_1P_2 ist,

$$OP_1P_2 = OS_1P_2 - OS_1P_1,$$

also nach 1.

2. $$2 \cdot OP_1P_2 = OS_1 \cdot P_2'P_2 - OS_1 \cdot P_1'P_1 = OS_1(y_2 - y_1),$$

wenn man die Coordinaten von P_1 und P_2 wie immer mit $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ bezeichnet.

Ferner ist für jede Lage der Punkte P_1 und P_2

$$P_1'S_1 : P_2'S_1 = P_1'P_1 : P_2'P_2;$$

oder, da

$$P_1'S_1 = OS_1 - OP_1' = OS_1 - x_1,$$
$$P_2'S_1 = OS_1 - OP_2' = OS_1 - x_2,$$
$$P_1'P_1 = y_1, \quad P_2'P_2 = y_2,$$ so folgt:
$$(OS_1 - x_1) : (OS_1 - x_2) = y_1 : y_2$$

Daher 3. $$OS_1 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1},$$

Führt man dies in 2. ein, so folgt:

4. $$2 \cdot OP_1P_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

7. Der Ausdruck

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

hat für die Coordinaten eines jeden Punktes P der Ebene einen bestimmten, für zwei verschiedene Punkte im Allgemeinen verschiedene Werthe; den Werth Null hat er nur für die Punkte der Geraden $P_1 P_2$.

Geht man von einem Punkte der Ebene geradlinig zu einem andern Punkte, so kann der Ausdruck D bei diesem Uebergange sein Zeichen nur dann ändern, wenn er für wenigstens einen Punkt des Weges den Werth Null hat, also nur dann, wenn der geradlinig zurückgelegte Weg die Gerade $P_1 P_2$ schneidet. Wir schliessen daher:

Der Ausdruck D hat für alle Punkte, die auf derselben Seite $P_1 P_2$ liegen, dasselbe Zeichen, für Punkte auf verschiedenen Seiten entgegengesetzte Zeichen.

Nun sind aber auch die Dreiecke $P_0 P_1 P_2$ für zwei Punkte P_0 von gleichen oder ungleichen Zeichen, je nachdem die beiden Punkte P_0 auf derselben Seite von $P_1 P_2$ liegen oder nicht. Nehmen wir hinzu, dass der Ausdruck D für die Coordinaten des Ursprungs den Werth

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

annimmt, also auch rücksichtlich des Zeichens mit der doppelten Fläche des Dreiecks $OP_1 P_2$ übereinstimmt, so finden wir: Durch die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

ist die doppelte Fläche des Dreiecks P_0 P_1 P_2 auch rücksichtlich des Vorzeichens ausgedrückt.

8. Den Winkel δ zweier Geraden T_1, T_2, der gleich dem Winkel ihrer Normalen N_1, N_2 ist, kann man aus den Coefficienten ihrer Gleichungen

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

finden. Denn man hat

$$\delta = N_1 N_2 = XN_2 - XN_1 = \varphi_2 - \varphi_1,$$

und nach No. 2:

$$cos\, \varphi_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \quad sin\, \varphi_1 = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}},$$

$$cos\, \varphi_2 = \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad sin\, \varphi_2 = \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

mithin

1. $$cos\, \delta = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad sin\, \delta = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

9. Sind die Geraden parallel, so ist $sin\, \delta = 0$, sind sie normal, so ist $cos\, \delta = 0$. Die Bedingungen für parallele und normale Lage der beiden Geraden

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \text{ und } A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

sind daher

1. für **parallele Lage** $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, oder $A_1 : B_1 = A_2 : B_2$,
2. für **normale Lage**: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, oder $A_2 : B_2 = - B_1 : A_1$.

Die Gleichung jeder zu $Ax + By + C = 0$ **parallelen**, bez. **normalen** Geraden hat somit bei willkürlichen m, n und C_1 die Form:

Parallele: $mAx + mBy + C_1 = 0$, oder 3. $Ax + By + c = 0$,

Normale: $nBx - nAy + C_1 = 0$, oder 4. $Bx - Ay + \gamma = 0$,

wo nun c und γ willkürliche Constanten sind.

Aus der Gleichung einer Geraden wird also die Gleichung einer Parallelen erhalten, indem man das von Coordinaten freie dritte Glied durch eine willkürliche Zahl ersetzt; die Gleichung einer Normalen wird erhalten, indem man A durch B, B durch $-A$, und C durch eine willkürliche Constante ersetzt.

Sollen die Parallele und Normale durch einen gegebenen Punkt x_1, y_1 gehen, so müssen 3. und 4. von den Coordinaten x_1, y_1 erfüllt werden; man hat daher

$$Ax_1 + By_1 + c = 0, \text{ bez. } Bx_1 - Ay_1 + \gamma = 0,$$

woraus folgt:

$$c = - Ax_1 - By_1, \quad \gamma = - Bx_1 + Ay_1.$$

Setzt man diese Werthe in 3. und 4. ein, so folgen die Gleichungen

der Parallelen: 5. $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$,

der Normalen: 6. $B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$.

10. **Die Coordinaten des Schnittpunktes** zweier Geraden T_1, T_2 sind die Werthe, welche den Gleichungen der beiden Geraden zugleich genügen. Multiplicirt man die beiden Gleichungen

$$A_1x + B_1y = - C_1$$
$$A_2x + B_2y = - C_2$$

der Reihe nach erst mit B_2 und $-B_1$; dann mit $-A_2$ und A_1; und addirt, so erhält man die Coordinaten des Schnittpunktes zu

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Diese Coordinaten werden unendlich gross, wenn $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, d. i. wenn die Geraden parallel sind (No. 9).

Wenn zugleich die Zähler verschwinden $B_1C_2 - B_2C_1 = A_2C_1 - A_1C_2 = 0$, so werden die Coordinaten des Schnittpunktes unbestimmt; das Verschwinden der Zähler und des gemeinsamen Nenners der Lösungen x und y ist aber, wie man sofort sieht, gleichbedeutend mit der Proportion $A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$; ist diese erfüllt, so sind die Geraden T_1 und T_2 **identisch**.

11. **Drei Gerade** T_1, T_2, T_3 **gehen durch einen Punkt**, wenn es ein Werthepaar x, y giebt, durch welches den drei Gleichungen der Geraden:

$$1. \quad \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3 &= 0 \end{aligned}$$

zugleich genügt wird. Sollen diese Gleichungen bestehen, so muss ihre Determinante verschwinden:

$$2. \quad R = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B^2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Man kann dieser Bedingung aber noch eine andere bemerkenswerthe Form geben. Das Verschwinden der Determinante R zeigt, dass drei Zahlen m_1, m_2, m_3 vorhanden sind, für welche die drei Gleichungen bestehen:

$$3.\quad \begin{aligned} m_1A_1 + m_2A_2 + m_3A_3 &= 0 \\ m_1B_1 + m_2B_2 + m_3B_3 &= 0 \\ m_1C_1 + m_2C_2 + m_3C_3 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die erste mit einer willkürlichen Zahl x, die zweite mit einer andern y und addirt dann die drei Gleichungen, so erhält man

$$4.\quad m_1(A_1x + B_1y + C_1) + m_2(A_2x + B_2y + C_2) + m_3(A_3x + B_3y + C_3) = 0.$$

Diese Gleichung ist eine identische, sie gilt für alle möglichen Werthe der Unbestimmten x und y; und umgekehrt: wenn es drei Zahlen m_1, m_2, m_3 giebt, durch welche die Gleichung 4. identisch erfüllt wird, so gelten die Gleichungen 3., also verschwindet die Determinante R, und die drei Geraden T_1, T_2, T_3 gehen durch einen Punkt.

Sollen also die drei Geraden durch einen Punkt gehen, so muss es drei Zahlen m_1, m_2, m_3 geben, welche die Gleichung 4. zu einer identischen machen.

Eine lineare Function der Coordinaten eines Punktes $Ax + By + C$ wollen wir künftig gewöhnlich mit dem Buchstaben T bezeichnen, setzen also (unter Anwendung des Identitätszeichens $\equiv$)

$$T \equiv Ax + By + C.$$

Die Gerade, deren Gleichung $T = 0$ ist, soll im Texte als die Gerade $T = 0$, oder kurzweg im Texte und in der Figur als die Gerade T bezeichnet werden. Verschiedene lineare Functionen der Coordinaten (also auch verschiedene Gerade) unterscheiden wir durch untere oder obere Indices an den Coefficienten der Functionen und geben dem Zeichen T denselben Index, setzen also

$$T_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1, \quad T' \equiv A'x + B'y + C' \text{ u. s. w.}$$

Nun können wir die oben entwickelte Bedingung 4. in folgender Weise aussprechen: Gehen drei Gerade $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ durch einen Punkt, so giebt es drei Zahlen m_1, m_2, m_3 für welche identisch

$$5.\quad m_1T_1 + m_2T_2 + m_3T_3 \equiv 0;$$

und umgekehrt: wenn es drei Zahlen m giebt, durch welche die Identität hergestellt wird:

$$m_1T_1 + m_2T_2 + m_3T_3 \equiv 0,$$

so gehen die drei Geraden T_1, T_2, T_3 durch einen Punkt.

12. Wir wollen nun einige Anwendungen des soeben gewonnenen Satzes geben.

Die Gerade P_1P_2 hat die Gleichung (No. 3)

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Die Gerade T_0, die durch P_0 normal zu P_1P_2 gelegt wird, hat also (No. 9, 6) die Gleichung:

$$T_0 \equiv (x_1 - x_2)(x - x_0) + (y_1 - y_2)(y - y_0) = 0.$$

Ersetzt man die Indices 0 1 2 der Reihe nach durch 1 2 0 und durch 2 0 1, so erhält man die Gleichungen der Geraden T_1 und T_2, die durch die Punkte P_1 und P_2 normal zu den Geraden P_2P_0 bez. P_0P_1 gelegt sind, nämlich

$$\begin{aligned} T_1 &\equiv (x_2 - x_0)(x - x_1) + (y_2 - y_0)(y - y_1) = 0 \\ T_2 &\equiv (x_0 - x_1)(x - x_2) + (y_0 - y_1)(y - y_2) = 0. \end{aligned}$$

Dies sind also die Gleichungen der Höhen des Dreiecks $P_0P_1P_2$. Man sieht sofort, dass die Summe $T_0 + T_1 + T_2$ identisch verschwindet und hat damit eine analytisch-geometrische Herleitung des Satzes: Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

13. Theilt man die Seiten eines Dreiecks $P_0P_1P_2$ der Reihe nach durch die Punkte Π_2, Π_0, Π_1 in den Verhältnissen

$$P_0\Pi_2 : \Pi_2 P_1 = m_0 : m_1$$
$$P_1\Pi_0 : \Pi_0 P_2 = m_1 : m_2$$
$$P_2\Pi_1 : \Pi_1 P_0 = m_2 : m_0,$$

so sind (§ 2, No. 6) die Coordinaten der Theilpunkte:

$$1.\quad \begin{aligned} \xi_2 &= \frac{m_1 x_0 + m_0 x_1}{m_1 + m_0}, & \xi_0 &= \frac{m_2 x_1 + m_1 x_2}{m_2 + m_1}, & \xi_1 &= \frac{m_0 x_2 + m_2 x_0}{m_0 + m_2}, \\ \eta_2 &= \frac{m_1 y_0 + m_0 y_1}{m_1 + m_0}, & \eta_0 &= \frac{m_2 y_1 + m_1 y_2}{m_2 + m_1}, & \eta_1 &= \frac{m_1 y_2 + m_2 y_0}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Die Geraden T_0, T_1, T_2, welche die Ecken P_0, P_1, P_2 des Dreiecks mit den Theilpunkten Π_0 Π_1 Π_2 der Gegenseiten verbinden, haben die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ \xi_0 & \eta_0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man die Werthe der Coordinaten der Punkte Π_0, Π_1, Π_2 aus 1. ein, und multiplicirt die Determinanten der Reihe nach mit $(m_1 + m_0)$, $(m_2 + m_1)$, $(m_1 + m_0)$, indem man die Glieder der letzten Zeile jeder Determinante mit diesem Faktor multiplicirt, so zerfällt dann jede Determinante in die Summe zweier Determinanten, in deren jeder die Glieder der letzten Zeile eine der Zahlen m_0, m_1, m_2 als gemeinsamen Faktor haben. Setzt man nun abkürzend

$$S_0 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad S_1 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix}, \quad S_2 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix},$$

so ergeben sich die Gleichungen der Geraden T_0, T_1, T_2 schliesslich in der Form:

$$T_0 \equiv m_2 S_2 - m_1 S_1 = 0,$$
$$T_1 \equiv m_0 S_0 - m_2 S_2 = 0,$$
$$T_2 \equiv m_1 S_1 - m_0 S_0 = 0.$$

Die Summe $T_0 + T_1 + T_2$ verschwindet identisch. Wir erhalten daher

Theilt man die Seiten eines Dreiecks P_0P_1, P_1P_2, P_2P_0 der Reihe nach in den Verhältnissen $m_0 : m_1$, $m_1 : m_2$, $m_2 : m_0$, so gehen die Verbindungslinien der Theilpunkte mit den gegenüberliegenden Ecken durch einen Punkt.

Sind n_0, n_1, n_2 drei positive reale Zahlen, und theilt man durch die Punkte
Π_0 und Π_0' die Strecke P_1P_2 in den Verhältnissen $n_1 : n_2$ und $-n_1 : n_2$
Π_1 „ Π_1' „ „ P_2P_0 „ „ „ „ „ $n_2 : n_0$ „ $-n_2 : n_0$
Π_2 „ Π_2' „ „ P_0P_1 „ „ „ „ „ $n_0 : n_1$ „ $-n_0 : n_1$
und verbindet jedes auf einer Seite des Dreiecks $P_0P_1P_2$ liegende Paar Theilpunkte mit der gegenüberliegenden Ecke, so erhält man sechs Gerade. Von diesen gehen nach dem vorigen Satze zunächst die drei nach den innern Theilpunkten gehenden $P_0\Pi_0$, $P_1\Pi_1$, $P_2\Pi_2$ durch einen Punkt.

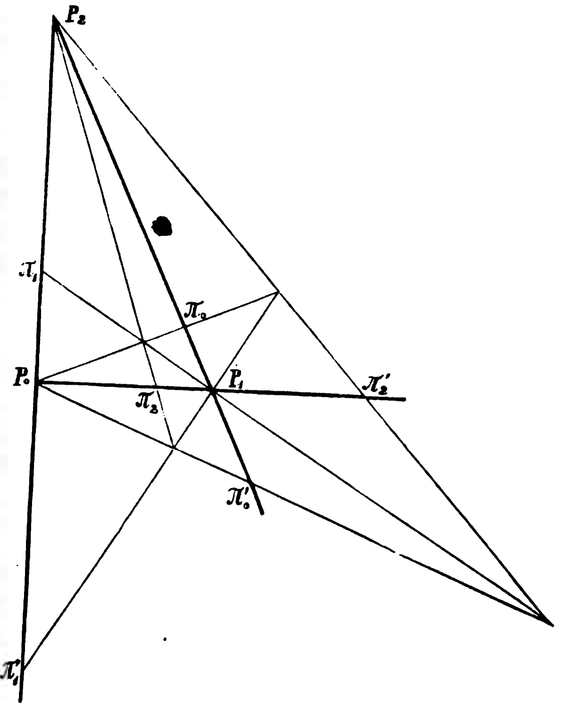
Für die Punkte $\Pi_0\Pi_1'\Pi_2'$ gelten die Theilverhältnisse

$$n_1 : n_2, \quad n_2 : (-n_0), \quad (-n_0) : n_1,$$

also gilt ebenfalls der obige Satz; ebenso für die Punkte $\Pi_0'\Pi_1'\Pi_2'$, welche die Theilverhältnisse $(-n_1) : n_2$, $n_2 : n_0$, $n_2 : (-n_1)$; und für $\Pi_0'\Pi_1'\Pi_2$, welche die Theilverhältnisse $n_1 : (-n_2)$, $(-n_2) : n_0$, $n_0 : n_1$ haben. Man kann also den Satz folgendermaassen vervollständigen.

Theilt man die Seiten P_0P_1, P_1P_2, P_2P_0 eines Dreiecks innen und aussen in Verhältnissen, die die numerischen Beträge $n_1 : n_2$, $n_2 : n_0$, $n_0 : n_1$ haben und verbindet die drei Paare Theilpunkte mit den gegenüberliegenden Ecken, so gehen diese sechs Transversalen vier-

mal zu je dreien durch einen Punkt; in einem dieser vier Punkte schneiden sich die nach den innern Theilpunkten gehenden Transversalen; in den andern drei Punkten treffen sich je zwei nach äusseren Theilpunkten mit einer nach einem innern Theilpunkte gehenden Transversale.



(M. 367.)

---

14. Wir wenden uns nun zur Betrachtung der allgemeinen linearen Gleichung in Liniencoordinaten.

Jede lineare Gleichung in Liniencoordinaten ist die Gleichung eines Punktes.

Die allgemeine Gleichung lautet:

1. $$Mu + Nv + Q = 0.$$

Ist $Q = 0$, so geht die Gleichung über in

2. $$Mu + Nv = 0, \text{ oder } u : v = -N : M,$$

ist also die Gleichung eines unendlich fernen Punktes.

Ist $M = 0$ oder $N = 0$, so wird aus 1.

3. $Nv + Q = 0$, bez. 4. $Mu = Q = 0$, woraus folgt

$v = -Q : N$, bez. $u = -Q : M$.

Die Gleichungen $Mu + Q = 0$ und $Nv + Q = 0$ sind also Gleichungen von Punkten P_1 und P_2, die auf der X-Achse bez. der Y-Achse liegen, und für welche $OP_1 = -M : Q$, bez. $OP_2 = -N : Q$.

Ist keine der Zahlen M, N, Q gleich Null, so kann man 1. durch $(-Q)$ dividiren und erhält

5. $$\frac{M}{-Q}u + \frac{N}{-Q}v - 1 = 0.$$

Vergleicht man dies mit § 4, 2, so sieht man:

Die Gleichung $Mu + Nv + Q = 0$ ist die Gleichung eines Punktes, dessen Coordinaten $(-M) : Q$ und $(-N) : Q$ sind.

15. Die Gerade, deren Coordinaten u', v' sind, hat die Gleichung $u'x + v'y - 1 = 0$; von einem Punkte, dessen Coordinaten ξ, η sind, hat also diese Gerade den Abstand

$$p = -\frac{1}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}(\xi u' + \eta v' - 1).$$

Ist die Gleichung des Punktes $Mu + Nv + Q = 0$, so sind die Coordinaten desselben $\xi = -M : Q$, $\eta = -N : Q$. Der Abstand der Geraden u', v' von dem Punkte $Mu + Nv + Q = 0$ ergiebt sich also zu

$$p = \frac{1}{Q\sqrt{u'^2 + v'^2}}(Mu' + Nv' + Q).$$

16. Die Gleichung des Schnittpunktes zweier Geraden sei

1. $$Mu + Nv + Q = 0.$$

Sind u_1, v_1, u_2, v_2 die Coordinaten der gegebenen Geraden T_1 und T_2, so erfüllen diese die Gleichung 1.; man hat also

2. $$Mu_1 + Nv_1 + Q = 0,$$

3. $$Mu_2 + Nv_2 + Q = 0.$$

Sollen für nicht verschwindende Werthe von M, N, Q diese drei Gleichungen zugleich bestehen, so müssen die Unbestimmten u, v so gewählt sein, dass die Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist daher die Gleichung des Schnittpunktes von T_1 und T_2.

17. Die Coordinaten der Geraden, welche durch die Punkte $P_1 P_2$ geht, deren Gleichungen sind

$$M_1 u + N_1 v + Q_1 = 0$$
$$M_2 u + N_2 v + Q_2 = 0,$$

genügen diesen beiden Gleichungen und ergeben sich durch Auflösung derselben zu

$$u = \frac{N_1 Q_2 - N_2 Q_1}{M_1 N_2 - M_2 N_1}, \quad v = \frac{M_2 Q_1 - M_1 Q_2}{M_1 N_2 - M_2 N_1}.$$

18. Die lineare Function der Liniencoordinaten $Mu + Nv + Q$ soll künftig mit dem Buchstaben P (oder gelegentlich durch Π, $\mathfrak{P}$ etc.) abkürzungsweise bezeichnet, verschiedene Functionen sollen durch Indices an M, N, Q und P unterschieden werden. Der Punkt, dessen Gleichung $P = 0$ ist, soll als der Punkt $P = 0$ oder schlechthin als der Punkt P bezeichnet werden.

Wenn drei Punkte

1. $$\begin{aligned} P_0 &\equiv M_0 u + N_0 v + Q_0 = 0 \\ P_1 &\equiv M_1 u + N_1 v + Q_1 = 0 \\ P_2 &\equiv M_2 u + N_2 v + Q_2 = 0 \end{aligned}$$

auf einer Geraden liegen, so müssen die Coordinaten dieser Geraden den drei Gleichungen genügen, also verschwindet deren Determinante

2. $$R \equiv \begin{vmatrix} M_0 & N_0 & Q_0 \\ M_1 & N_1 & Q_1 \\ M_2 & N_2 & Q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Das Verschwinden dieser Determinante ist aber gleichbedeutend mit dem Zusammenbestehen der Gleichungen (vergl. No. 11)

3. $$\begin{aligned} \mu_0 M_0 + \mu_1 M_1 + \mu_2 M_2 &= 0 \\ \mu_0 N_0 + \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 &= 0 \\ \mu_0 Q_0 + \mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die erste mit einer willkürlichen Zahl u, die zweite mit einer willkürlichen Zahl v und addirt, so erhält man

4. $$\mu_0 P_0 + \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 \equiv 0;$$

diese Gleichung ist identisch. Liegen also drei Punkte $P_0 = 0$, $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ auf einer Geraden, so giebt es drei Zahlen μ_0, μ_1, μ_2, für welche die Summe $\mu_0 P_0 + \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$ identisch verschwindet.

Man überzeugt sich leicht, dass auch die Umkehrung dieses Satzes gilt.

19. Die Coordinaten des Punktes Π_0, welcher die Strecke der Punkte

$$P_1 \equiv x_1 u + y_1 v - 1 = 0$$
$$P_2 \equiv x_2 u + y_2 v - 1 = 0$$

im Verhältniss $\mu_2 : \mu_1$ theilt, hat die Coordinaten

$$\xi_0 = \frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \eta_0 = \frac{\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung des Punktes Π_0

$$\xi_0 u + \eta_0 v - 1 = 0$$

ein, und multiplicirt mit $\mu_1 + \mu_2$, so erhält man als Gleichung des Punktes Π_0,

$$\Pi_0 \equiv \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 = 0,$$

im engsten Anschlusse an die vorige Nummer.

20. Die Gleichungen der Punkte Π_0, Π_1, Π_2, welche die Seiten P_1P_2, P_2P_0, P_0P_1 eines Dreiecks $P_0P_1P_2$ der Reihe nach in den Verhältnissen $n_1 : n_2$, $n_2 : n_0$, $(-n_0) : n_1$ theilen, sind nach dem Vorhergehenden

$$\Pi_0 \equiv \frac{1}{n_1} P_1 + \frac{1}{n_2} P_2 = 0$$
$$\Pi_1 \equiv \frac{1}{n_2} P_2 + \frac{1}{n_0} P_0 = 0$$
$$\Pi_2 \equiv -\frac{1}{n_0} P_0 + \frac{1}{n_1} P_1 = 0.$$

Das Trinom $\Pi_0 - \Pi_1 - \Pi_2$ verschwindet, wie man sieht, indentisch. Also liegen die drei Punkte Π_0, Π_1, Π_2 auf einer Geraden.

Sind n_0, n_1, n_2 positive reale Zahlen und construirt man die drei Punktepaare $\Pi_0\Pi_0'$, $\Pi_1\Pi_1'$, $\Pi_2\Pi_2'$, welche die Seiten des Dreiecks $P_1P_2P_0$ der Reihe nach innen und aussen in Verhältnissen theilen, die numerisch gleich $n_1 : n_2$, $n_2 : n_0$, $n_0 : n_1$ sind, so theilen also

Π_0 und Π_0' die Strecke P_1P_2 in den Verhältnissen $n_1 : n_2$ und $(-n_1) : n_2$
Π_1 „ Π_1' „ „ P_2P_0 „ „ „ „ „ $n_2 : n_0$ „ $(-n_2) : n_0$
Π_2 „ Π_2' „ „ P_0P_1 „ „ „ „ „ $n_0 : n_1$ „ $(-n_0) : n_1$.

Von den drei Paar Theilpunkten liegen daher viermal je drei auf einer Geraden, nämlich

1. Π_0, Π_1, Π_2'; 2. Π_0, Π_1', Π_2; 3. Π_0', Π_1, Π_2; 4. Π_0', Π_1', Π_2'.

Dieser Satz ist ebenso, wie der in No. 13 gegebene, einer Umkehrung fähig.

§ 6. Projective Strahlbüschel und Punktreihen.

1. Jede Gerade T_3, die durch den Schnittpunkt der Geraden T_1 und T_2 geht, hat nach § 5, 11 eine Gleichung von der Form

$$T_3 \equiv n_1 T_1 + n_2 T_2 = 0;$$

denn aus $m_1 T_1 + m_2 T_2 + m_3 T_3 \equiv 0$ leitet man ab $-m_3 T_3 \equiv m_1 T_1 + m_2 T_2$ und hieraus $T_3 \equiv n_1 T_1 + n_2 T_2$,
indem man $-m_1 : m_3$ und $-m_2 : m_3$ durch n_1 und n_2 bezeichnet.

Die Sinus der Winkel T_1T_3 und T_3T_2 ergeben sich zu

$$\sin T_1T_3 = \frac{A_1B_3 - A_3B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_3^2 + B_3^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_3^2 + B_3^2}} (A_1(n_1B_1 + n_2B_2) - (n_1A_1 + n_2A_2)B_1)$$
$$= \frac{n_2(A_1B_2 - A_2B_1)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_3^2 + B_3^2}}.$$

Ebenso findet sich $\sin T_3 T_2 = \dfrac{n_1(A_1B_2 - A_2B_1)}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}\cdot\sqrt{A_3^2+B_3^2}}$.

Hieraus folgt

$$\sin T_1T_3 : \sin T_3T_2 = \frac{1}{n_1\sqrt{A_1^2+B_1^2}} : \frac{1}{n_2\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Das Verhältniss $\sin T_1T_3 : \sin T_3T_2$ nennen wir das Sinusverhältniss, in welchem der Winkel T_1T_2 von der Geraden T_3 getheilt wird; wir haben daher den Satz: Die Gerade $T_3 \equiv n_1T_1 + n_2T_2 = 0$ theilt den Winkel T_1T_2 im Sinusverhältniss $n_2\sqrt{A_2^2+B_2^2} : n_1\sqrt{A_1^2+B_1^2}$.

2. Gehen durch den Schnittpunkt von T_1 und T_2 die beiden Geraden T_3 und T_4, und hat man $T_3 \equiv n_{13}T_1 + n_{23}T_2$, $T_4 \equiv n_{14}T_1 + n_{24}T_2$,

so ist $$\frac{\sin T_1T_3}{\sin T_3T_2} : \frac{\sin T_1T_4}{\sin T_4T_2} = \frac{n_{23}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}{n_{13}\sqrt{A_1^2+B_1^2}} : \frac{n_{24}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}{n_{14}\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{n_{23}}{n_{13}} : \frac{n_{24}}{n_{14}}.$$

Das Verhältniss

$$\frac{\sin T_1T_3}{\sin T_3T_2} : \frac{\sin T_1T_4}{\sin T_4T_2}$$

heisst das Doppelverhältniss der vier Geraden $T_1T_2T_3T_4$ und wird abkürzungsweise durch das Symbol $(T_1T_2T_3T_4)$ bezeichnet.

Das Doppelverhältniss von vier Strahlen eines Büschels ist also von den Coefficienten der Gleichungen der Strahlen unabhängig; es hängt nur von den Zahlen ab, durch welche die linken Seiten der Gleichungen zweier dieser Geraden aus den linken Seiten der Gleichungen der beiden andern abgeleitet werden können.

3. Die Coordinaten der Strahlen T_1, T_2, T_3, T_4 sind

$$u_1 = -\frac{A_1}{C_1},\quad v_1 = -\frac{B_1}{C_1},\quad u_2 = -\frac{A_2}{C_2},\quad v_2 = -\frac{B_2}{C_2};$$

1. $$\begin{aligned} u_3 &= -\frac{n_{13}A_1 + n_{23}A_2}{n_{13}C_1 + n_{23}C_2} = \frac{n_{13}C_1u_1 + n_{23}C_2u_2}{n_{13}C_1 + n_{23}C_2}\\ v_3 &= -\frac{n_{13}B_1 + n_{23}B_2}{n_{13}C_1 + n_{23}C_2} = \frac{n_{13}C_1v_1 + n_{23}C_2v_2}{n_{13}C_1 + n_{23}C_2};\\ u_4 &= -\frac{n_{14}A_1 + n_{24}A_2}{n_{14}C_1 + n_{24}C_2} = \frac{n_{14}C_1u_1 + u_{24}C_2u_2}{n_{14}C_1 + n_{24}C_2}\\ v_4 &= -\frac{n_{14}B_1 + n_{24}B_2}{n_{14}C_1 + n_{24}C_2} = \frac{n_{14}C_1v_1 + n_{24}C_2v_2}{n_{14}C_1 + n_{24}C_2}. \end{aligned}$$

Denkt man sich die Werthe u_1, v_1, u_2, v_2 gegeben, so erhält man zunächst: Die Coordinaten jeder Geraden, die durch den Schnittpunkt der Geraden T_1 und T_2 geht, werden nach den Formeln berechnet:

2. $$u = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2},\quad v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

Denkt man sich ferner die Gleichungen von T_1 und T_2 in der Form

$$T_1 \equiv u_1x + v_1y - 1 = 0,\qquad T_2 \equiv u_2x + v_2y - 1 = 0,$$

und hat man für zwei Gerade des Büschels T_1, T_2 die Coordinaten nach den Formeln abgeleitet

$$u_3 = \frac{m_{13}u_1 + m_{23}u_2}{m_{13} + m_{23}},\quad v_3 = \frac{m_{13}v_1 + m_{23}v_2}{m_{13} + m_{23}}$$

$$u_4 = \frac{m_{14}u_1 + m_{24}u_2}{m_{14} + m_{24}},\quad v_4 = \frac{m_{14}v_1 + m_{24}v_2}{m_{14} + m_{24}},$$

so ist nach No. 3 und 2 das Doppelverhältniss der Geraden $T_1T_2T_3T_4$:

$$(T_1\, T_2\, T_3\, T_4) = \frac{m_{23}}{m_{13}} : \frac{m_{24}}{m_{14}},$$

wie man sofort erkennt, wenn man mit Hülfe von u_3, v_3, u_4, v_4 die Gleichungen bildet

$$T_3 \equiv u_3 x + v_3 y - 1 = 0,$$
$$T_4 \equiv u_4 x + v_4 y - 1 = 0.$$

4. Ist das Doppelverhältniss von vier Geraden $T_1\, T_2 T_3 T_4$ gleich der negativen Einheit, so ist

$$\frac{\sin T_1\, T_3}{\sin T_3\, T_2} = -\frac{\sin T_1\, T_4}{\sin T_4\, T_2},$$

T_3 und T_4 theilen also dann den Winkel $T_1 T_2$ und den Nebenwinkel in demselben Sinusverhältniss; die Geraden $T_1\, T_2\, T_3\, T_4$ heissen dann harmonisch.

Sind $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 \equiv n_1 T_1 + n_2 T_2 = 0$ die Gleichungen oder u_1, v_1, u_2, v_2, $u_3 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}$, $v_3 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ die Coordinaten dreier Geraden, so sind daher die Gleichung, bez. die Coordinaten der vierten harmonisch zugeordneten Geraden

$$T_4 \equiv n_1 T_1 - n_2 T_2 = 0\,, \text{ bez.}$$
$$u_4 = \frac{m_1 u_1 - m_2 u_2}{m_1 - m_2}, \quad v_4 = \frac{m_1 u_1 - m_2 u_2}{m_1 - m_2}.$$

Ist $(T_1 T_2 T_3 T_4) = \frac{\sin\, T_1 T_3}{\sin\, T_3 T_2} : \frac{\sin\, T_1 T_4}{\sin\, T_4 T_2} - 1,$

so sieht man sofort, dass auch

1. $$(T_1 T_2 T_4 T_3) = \frac{\sin\, T_1 T_4}{\sin\, T_4 T_2} : \frac{\sin\, T_1 T_3}{\sin\, T_3 T_4} = -1$$

2. $$(T_2 T_1 T_3 T_4) = \frac{\sin\, T_2 T_3}{\sin\, T_3 T_1} : \frac{\sin\, T_2 T_4}{\sin\, T_4 T_1} = -1$$

3. $$(T_3 T_4 T_1 T_2) = \frac{\sin\, T_3 T_1}{\sin\, T_1 T_4} : \frac{\sin\, T_3 T_2}{\sin\, T_2 T_4} = -1.$$

Aus diesen vier Formeln folgt, dass man bei der Angabe, vier Strahlen eines Büschels seien harmonisch, nicht auf die Anordnung der vier Strahlen, sondern nur auf ihre Eintheilung in zwei Paare $T_1 T_2$ und $T_3 T_4$ zu achten hat; man sagt daher zweckmässiger: Die Strahlenpaare $T_1 T_2$ und $T_3 T_4$ sind harmonisch. Dabei ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die beiden Paare aufzählt und wie man die Strahlen jedes Paares anordnet.

5. Unter dem Doppelverhältniss von vier Punkten $P_1\, P_2\, P_3\, P_4$ einer Geraden, symbolisch bezeichnet durch $(P_1 P_2 P_3 P_4)$, versteht man den Quotienten

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{P_1 P_3}{P_3 P_2} : \frac{P_1 P_4}{P_4 P_2}.$$

Sind x_1, y_1; x_2, y_2; $x_3 = \frac{m_{13} x_1 + m_{23} x_2}{m_{13} + m_{23}}$, $y_3 = \frac{m_{13} y_1 + m_{23} y_2}{m_{13} + m_{23}}$;

$$x_4 = \frac{m_{14} x_1 + m_{24} x_2}{m_{14} + m_{24}}, \quad y_4 = \frac{m_{14} y_1 + m_{24} y_2}{m_{14} + m_{24}}$$

die Coordinaten der vier Punkte, so ist ihr Doppelverhältniss

1. $$(P_1\, P_2\, P_3\, P_4) = \frac{m_{23}}{m_{13}} : \frac{m_{24}}{m_{14}}.$$

Nach § 5, 18 besteht, wenn $P_1 = 0$ $P_2 = 0$, $P = 0$ Gleichungen dreier Punkte einer Geraden sind, zwischen den Polynomien P_1, P_2, P eine Identität von der Form $\mu P + \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 = 0$. Es ist also $\mu P \equiv -\mu_1 P_1 - \mu_2 P_2$, oder die Gleichung von P:

$$P \equiv \nu_1 P_1 + \nu_2 P_2 = 0,$$

wenn man $-\mu_1 : \mu$ und $-\mu_2 : \mu$ durch ν_1 und ν_2 bezeichnet.

Ist nun $P_1 \equiv M_1 u + N_1 v + Q_1$, $P_2 \equiv M_2 u + N_2 v + Q_2$,

so ist $P \equiv (\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2) u + (\nu_1 N_1 + \nu_2 N_2) v + (\nu_1 Q_1 + \nu_2 Q_2)$.

Die Coordinaten der Punkte P_1, P_2 und P sind daher

$$x_1 = -\frac{M_1}{Q_1}, \quad y_1 = -\frac{N_1}{Q_1}; \quad x_2 = -\frac{M_2}{Q_2}, \quad y_2 = -\frac{N_2}{Q_2},$$

und

$$x = -\frac{\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2}{\nu_1 Q_1 + \nu_2 Q_2} = \frac{\nu_1 Q_1 x_1 + \nu_2 Q_2 x_2}{\nu_1 Q_1 + \nu_2 Q_2}$$

$$y = -\frac{\nu_1 N_1 + \nu_2 N_2}{\nu_1 Q_1 + \nu_2 Q_2} = \frac{\nu_1 Q_1 y_1 + \nu_2 Q_2 y_2}{\nu_1 Q_1 + \nu_2 Q_2}.$$

Das Theilverhältniss $P_1 P : P P_2$ ist somit:

$$2. \qquad \frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{n_2 Q_2}{n_1 Q_1}.$$

Hat man nun die Gleichungen der Punkte P_3, P_4 aus den Gleichungen der Punkte P_1, P_2 nach den Formeln abgeleitet

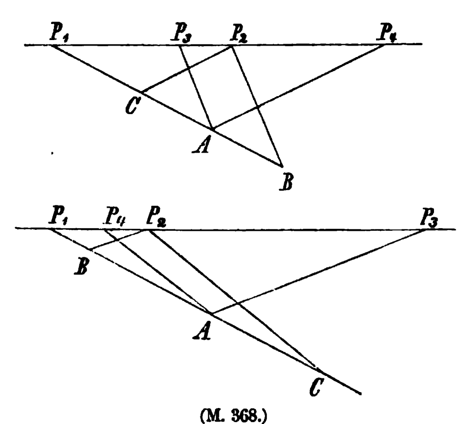
$$P_3 \equiv n_{13} P_1 + n_{23} P_2 = 0, \quad P_4 \equiv n_{14} P_1 + n_{24} P_2 = 0,$$

so ist das Doppelverhältniss der vier Punkte nach 1. und 2.

$$3. \qquad (P_1\, P_2\, P_3\, P_4) = \frac{n_{23}}{n_{13}} : \frac{n_{24}}{n_{14}}.$$

Die beiden Punktpaare $P_1\, P_2$ und $P_3\, P_4$ heissen harmonisch, wenn das Doppelverhältniss $(P_1\, P_2\, P_3\, P_4) = -1$; es ist dann, wie man sofort durch Bildung der Doppelverhältnisse sich überzeugt, auch

$$(P_1\, P_2\, P_4\, P_3) = (P_2\, P_1\, P_3\, P_4)$$
$$= (P_2\, P_1\, P_4\, P_3) = (P_3\, P_4\, P_1\, P_2)$$
$$= (P_3\, P_4\, P_2\, P_1) = (P_4\, P_3\, P_1\, P_2)$$
$$= (P_4\, P_3\, P_2\, P_1) = -1.$$



(M. 368.)

Sind die Gleichungen eines Punktpaares $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, und die Gleichungen eines anderen $P_3 \equiv n_1 P_1 + n_2 P_2 = 0$, $P_4 \equiv n_1 P_1 - n_2 P_2 = 0$, so sind die Paare harmonisch.

Sind zwei Punktpaare harmonisch, so theilt jedes Paar die Strecke des andern innen und aussen in numerisch gleichem Verhältnisse, denn aus

$$\frac{P_1 P_3}{P_3 P_2} : \frac{P_1 P_4}{P_4 P_2} = -1$$

folgt:

$$P_1 P_3 : P_3 P_2 = -(P_1 P_4 : P_4 P_2).$$

Zu drei Punkten P_1, P_2, P_3 einer Geraden kann man den vierten harmonischen finden, indem man durch P_3 und P_2 zwei Parallele $P_3 A$ und $P_2 B$ zieht, $CA = AB$ macht, und hierauf durch A eine Parallele zu CP_2 zieht; diese schneidet $P_1 P_2$ in dem gesuchten Punkte P_4. Denn man hat

$$P_1 P_3 : P_3 P_2 = P_1 A : AB = P_1 A : CA = -P_1 A : AC = -P_1 P_4 : P_4 P_2.$$

Verbindet man P_1, P_2, P_3, P_4 (No. 5) mit einem Punkte P_0, der nicht auf derselben Geraden liegt, so sind die Gleichungen der Geraden $P_0 P_1$ und $P_0 P_2$

$$T_1 \equiv \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad T_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichungen der Geraden $P_0 P_3$ und $P_0 P_4$ ergeben sich zunächst zu

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man hier die Werthe von x_3, y_3, x_4, y_4 ein und multiplicirt dann die letzte Zeile jeder Determinante mit $m_{13} + m_{23}$, bez. $m_{14} + m_{24}$, so lassen sich diese beiden Gleichungen in der Form schreiben:

$$T_3 \equiv m_{13} T_1 + m_{23} T_2 = 0, \quad T_4 \equiv m_{14} T_1 + m_{24} T_2 = 0.$$

Das Doppelverhältniss der vier Geraden ist also

$$(T_1 T_2 T_3 T_4) = \frac{m_{23}}{m_{13}} : \frac{m_{24}}{m_{14}},$$

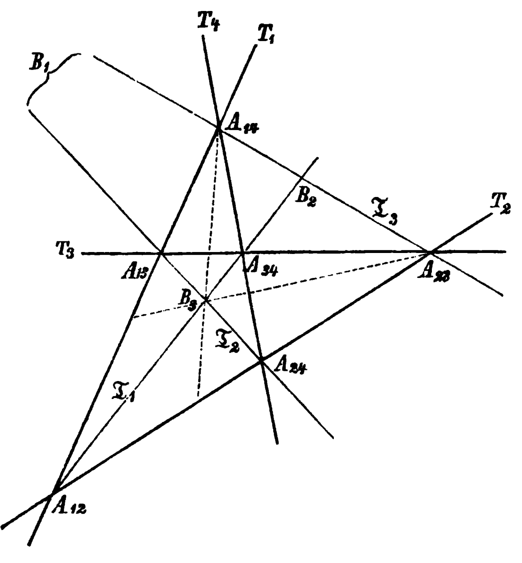
gleich dem der Punkte $P_1 P_2 P_3 P_4$. Wir haben folglich somit: Werden vier Strahlen eines Büschels von einer Geraden geschnitten, so ist das Doppelverhältniss der vier Strahlen gleich dem Doppelverhältniss der vier auf ihnen liegenden Schnittpunkte.

Insbesondere werden also vier harmonische Strahlen von jeder Geraden in vier harmonischen Punkten geschnitten, und vier harmonische Punkte von jedem Punkte aus durch vier harmonische Strahlen projicirt.

7. Das vollständige Vierseit. Unter einem vollständigen Vierseit versteht man die Figur, welche von vier Geraden einer Ebene gebildet wird, von denen nicht drei durch einen Punkt gehen. Diese vier Geraden T_1 T_2 T_3 T_4 heissen die Seiten des Vierseits; sie schneiden sich in sechs Punkten, den Ecken des Vierseits.

Der Schnittpunkt von T_i und T_k wird passend mit A_{ik} bezeichnet, so dass die Ecken des Vierecks sind A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34}.

Je drei Ecken haben einen Index gemein; diese liegen auf der Seite, die denselben Index hat. Aus den sechs Ecken lassen sich drei Paare bilden, so dass die Punkte eines Paares keinen gemeinsamen Index haben, nämlich die Paare A_{12} und A_{34}; A_{13} und A_{24}; A_{14} und A_{23}; die drei Verbindungsgeraden der Punkte jedes Paares sind von den Seiten des Vierseits verschieden und heissen die Diagonalen des Vierseits. Die vier Seiten und die drei Diagonalen bilden das vollständige System der Geraden, welche je zwei Ecken des Vierseits verbinden.



(M. 369.)

Wir wollen die Diagonale $A_{12}A_{34}$ mit $\mathfrak{T}_1$, $A_{13}A_{24}$ mit $\mathfrak{T}_2$, $A_{14}A_{23}$ mit $\mathfrak{T}_3$ bezeichnen.

Sind $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, $T_4 = 0$, $\mathfrak{T}_1 = 0$, $\mathfrak{T}_2 = 0$, $\mathfrak{T}_3 = 0$ die Gleichungen der Seiten und Diagonalen des vollständigen Vierseits, so lässt sich $\mathfrak{T}_1$, da diese Gerade durch A_{12} geht, in der Form darstellen

1. $$\mathfrak{T}_1 \equiv a_1 T_1 + a_2 T_2 = 0.$$

Da ferner $\mathfrak{T}_1$ durch A_{34} geht, so lässt sich $\mathfrak{T}_1$ auch in der Form darstellen:

2. $$\mathfrak{T}_1 \equiv a_3 T_3 + a_4 T_4 = 0.$$

Aus 1. und 2. folgt die Identität

$$a_1 T_1 + a_2 T_2 \equiv a_3 T_3 + a_4 T_4,$$

woraus sich weiter ergiebt

3. $$a_1 T_1 - a_3 T_3 \equiv a_4 T_4 - a_2 T_2.$$

Die Gleichung $a_1 T_1 - a_3 T_3 = 0$ ist die Gleichung einer Geraden, die durch A_{13} geht; $a_4 T_4 - a_2 T_2 = 0$ ist die Gleichung einer Geraden, die durch A_{24} geht; nach 3. sind diese Geraden identisch, also ist

$$a_1 T_1 - a_3 T_3 \equiv a_4 T_4 - a_2 T_2 = 0$$

die Gleichung der Geraden $A_{13}A_{24}$, d. i. der Diagonale $\mathfrak{T}_2$; es ist also

4. $$\mathfrak{T}_2 \equiv a_1 T_1 - a_3 T_3 \equiv a_4 T_4 - a_2 T_2.$$

Aus der Identität 3. folgt ferner

5. $$a_1 T_1 - a_4 T_4 \equiv a_3 T_3 - a_2 T_2.$$

Nun sind $a_1 T_1 - a_4 T_4 = 0$ bez. $a_3 T_3 - a_2 T_2 = 0$ die Gleichungen zweier Geraden, deren erste durch A_{14}, die andere durch A_{23} geht; da nach 5. diese Geraden identisch sind, so fallen sie mit der Geraden $A_{14}A_{23}$ zusammen; also ist die Gleichung dieser Diagonale

6. $$\mathfrak{T}_3 \equiv a_1 T_1 - a_4 T_4 \equiv a_3 T_3 - a_2 T_2 = 0.$$

Aus 1., 4. und 6. folgt:

7. $\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2 \equiv a_2 T_2 + a_3 T_3$; 8. $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 \equiv a_1 T_1 + a_4 T_4$

9. $\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_3 \equiv a_2 T_2 + a_4 T_4$; 10. $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_3 \equiv a_1 T_1 + a_3 T_3$

11. $\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_3 \equiv a_4 T_4 - a_3 T_3$; 12. $\mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_3 \equiv a_1 T_1 - a_2 T_2$.

Die Identität 7. lehrt, dass $\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2 = 0$ (der $a_2 T_2 - a_3 T_3 = 0$) die Gleichung der Geraden ist, welche den Schnittpunkt B_3 der Diagonalen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ mit dem Punkte A_{23} verbindet; ferner folgt aus 8., dass $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 = 0$ die Gleichung der Geraden $B_3 A_{14}$ ist. Ebenso ergiebt sich weiter, dass $\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_3 = 0$ und $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_3 = 0$ die Gleichungen der Geraden $B_2 A_{24}$ und bez. $B_2 A_{13}$, sowie dass $\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_3 = 0$ und $\mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_3 = 0$ die Gleichungen von $B_1 A_{34}$ und $B_1 A_{12}$ sind.

Nach No. 4 sind die Geraden

α) $\mathfrak{T}_1 = 0$, $\mathfrak{T}_2 = 0$, $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 = 0$, $\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2 = 0$;

β) $\mathfrak{T}_1 = 0$, $\mathfrak{T}_3 = 0$, $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_3 = 0$, $\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_3 = 0$;

γ) $\mathfrak{T}_2 = 0$, $\mathfrak{T}_3 = 0$, $\mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_3 = 0$, $\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_3 = 0$;

harmonisch. Wir haben daher: Im vollständigen Vierseit bilden je zwei Diagonalen mit den Geraden, welche vom Schnittpunkte dieser Diagonalen nach den beiden Ecken des Vierseit gehen, die nicht auf den Diagonalen liegen, zwei harmonische Strahlenpaare.

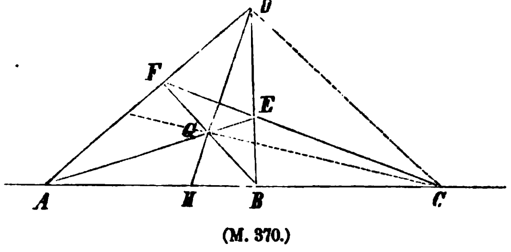
Da harmonische Strahlenpaare von jeder Geraden in harmonischen Punktpaaren geschnitten werden, so folgt weiter: Die auf jeder Diagonale liegenden Ecken des vollständigen Vierseits bilden mit den Schnittpunkten dieser Diagonale mit den beiden anderen zwei harmonische Punktpaare.

Die Ecken $A_{12}A_{24}$ bilden mit der Ecke A_{23} und dem Punkte, in welchem

die Seite von der Geraden $A_{14}B_3$ geschnitten wird, zwei harmonische Paare; oder allgemein, wenn i, k, l, m eine Permutation der Ziffern 1, 2, 3, 4 bedeutet:

Auf jeder Seite des vollständigen Vierseits bilden die Ecken A_{ik} und A_{il} mit der Ecke A_{im} und mit dem Schnitt der Seite mit der Geraden, welche die A_{im} gegenüberliegende Ecke A_{kl} mit dem Schnittpunkte der beiden durch A_{ik} und A_{il} gehenden Diagonalen verbindet, zwei harmonische Punktpaare.

Aus diesen Sätzen ergiebt sich folgende, ausschliesslich durch das Ziehen gerader Linien erfolgende Construction des vierten harmonischen Punktes zu drei gegebenen.

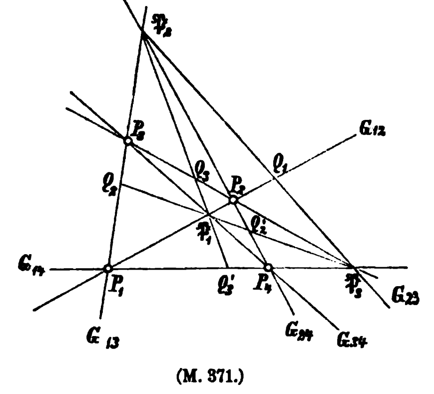


(M. 370.)

Um die vierten harmonischen Punkte zu A, B, C zu finden, ziehe man AD, BD, CE, FB und DG; dann ist H der gesuchte Punkt.

Um zu drei Strahlen DA, DB, DC eines Büschels den vierten harmonischen zu finden, schneide man die drei Strahlen durch eine Gerade in A, B und C und ziehe durch C eine zweite Gerade, die die Strahlen DA und DB in F und E schneidet; zieht man nun AE und FB, so ist DG der gesuchte Strahl.

8. Das vollständige Viereck. Unter einem vollständigen Viereck versteht man die Figur, welche aus vier Punkten P_1 P_2 P_3 P_4 und den sechs Geraden G_{12} G_{13} G_{14} G_{23} G_{24} G_{34} besteht, die je zwei von den vier Punkten verbinden. Die vier Punkte P heissen die Ecken, die sechs Geraden G die Seiten des vollständigen Vierecks. Je drei von den sechs Seiten haben einen Index gemein (z. B. G_{12} G_{13} G_{14}); diese gehen durch den Eckpunkt, der den gemeinsamen Index hat. Die Seiten lassen sich zu drei Paaren so ordnen, dass die Seiten jedes Paares keinen Index gemein haben; diese drei Paare sind G_{12} und G_{34}; G_{13} und G_{24}; G_{14} und G_{23}; je zwei solcher Seiten heissen gegenüberliegende Seiten des Vierecks. Die drei Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten, die der Reihe nach mit $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ bezeichnet werden sollen, fallen mit Ecken des Vierecks nicht zusammen; man bezeichnet sie als die Diagonalpunkte des Vierecks.



(M. 371.)

Die vier Eckpunkte und die drei Diagonalpunkte bilden das vollständige System der Schnittpunkte der sechs Seiten des Vierecks.

Da $\mathfrak{P}_1$ sowol auf P_1P_2 als auf P_3P_4 liegt, so lässt sich in der Gleichung dieses Punktes $\mathfrak{P}_1 = 0$ das Trinom $\mathfrak{P}_1$ sowol aus den Trinomen P_1 und P_2, als aus P_3 und P_4 linear ableiten, und man hat

1. $$\mathfrak{P}_1 \equiv a_1P_1 + a_2P_2 \equiv a_3P_3 + a_4P_4 = 0.$$

Aus dieser Identität folgt die weitere

$$a_1P_1 - a_3P_3 \equiv a_4P_4 - a_2P_2.$$

Die beiden Gleichungen $a_1P_1 - a_3P_3 = 0$ und $a_4P_4 - a_2P_2 = 0$ bedeuten also dasselbe; da nun die erste die Gleichung eines Punktes auf P_1P_3, die

zweite die eines Punktes auf P_2P_4 ist, so sind also die Gleichungen zwei verschiedene Formen der Gleichung des auf den Geraden G_{13} und G_{24} gelegenen Diagonalpunktes $\mathfrak{P}_2$, und man hat

2. $$\mathfrak{P}_2 \equiv a_1P_1 - a_3P_3 \equiv a_4P_4 - a_2P_2 = 0.$$

Aus 1. folgt weiter die Identität

$$a_1P_1 - a_4P_4 \equiv a_3P_3 - a_2P_2.$$

Die Gleichung

3. $$\mathfrak{P}_3 \equiv a_1P_1 - a_4P_4 \equiv a_3P_3 - a_2P_2 = 0$$

ist also die Gleichung des auf P_1P_4 und P_3P_2 gelegenen Diagonalpunktes $\mathfrak{P}_3$.

Aus 1., 2. und 3. ergeben sich weiter die Identitäten

4. $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 \equiv a_1P_1 + a_4P_4$; 5. $\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2 \equiv a_2P_2 + a_3P_3$;

6. $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_3 \equiv a_1P_1 + a_3P_3$; 7. $\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_3 \equiv a_2P_2 + a_4P_4$;

8. $\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 \equiv a_1P_1 - a_2P_2$; 9. $\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_3 \equiv a_4P_4 - a_3P_3$.

Nach No. 5. sind die dreimal vier Punkte

α) $\mathfrak{P}_1 = 0,\quad \mathfrak{P}_2 = 0,\quad \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 = 0,\quad \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2 = 0$;

β) $\mathfrak{P}_1 = 0,\quad \mathfrak{P}_3 = 0,\quad \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_3 = 0,\quad \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_3 = 0$;

γ) $\mathfrak{P}_2 = 0,\quad \mathfrak{P}_3 = 0,\quad \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 = 0,\quad \mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_3 = 0$

harmonisch. Da nun z. B. aus den Identitäten 4. und 5. folgt, dass $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 = 0$ und $\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2 = 0$ die Gleichungen der Punkte der Geraden $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ sind, in welchen dieselbe von den einander gegenüberliegenden Seiten G_{14} und G_{23} geschnitten wird, so ergiebt sich: Zwei Diagonalpunkte eines vollständigen Vierecks und die beiden Punkte, in welchen ihre Verbindungsgerade von den beiden gegenüberliegenden Vierecksseiten geschnitten wird, die nicht durch die beiden Diagonalpunkte gehen, sind harmonisch.

Der wesentliche Inhalt dieses Satzes ist von den Schlusssätzen in No. 7 nicht verschieden. Die Bemerkungen über das vollständige Viereck sind aber deswegen noch selbstständig mitgetheilt worden, um das über Punktgleichungen Erörterte in einem einfachen Beispiele anzuwenden.

Sind T_1, T_2, T_3 drei Strahlen eines Büschels, T_1', T_2', T_3' drei Strahlen eines andern Büschels, P_1, P_2, P_3 drei Punkte einer Geraden, P_1', P_2', P_3' drei Punkte einer andern Geraden, und ordnet man in den Büscheln und Geraden die Strahlen und Punkte T_1T', P_1P' einander zu, für welche die Doppelverhältnisse gleich sind

$$(T_1\,T_2\,T_3\,T) = (T_1'T_2'T_3'T') = (P_1\,P_2\,P_3\,P) = (P_1'P_2'P_3'P'),$$

so nennt man die Büschel und Punktreihen projectiv (oder projectivisch, collinear, homographisch). Die zugeordneten Strahlen und Punkte werden auch entsprechende, insbesonders projectiv entsprechende Elemente der Gebilde genannt, und die projective Verwandtschaft der Strahlenbüschel und Punktreihen, sowie das Entsprechen der einzelnen Strahlen und Punkte durch das Zeichen $\barwedge$ ausgedrückt. Man schreibt also

$$T_1\,T_2\,T_3\,T \ldots \barwedge T_1'T_2'T_3'T' \ldots \barwedge P_1\,P_2\,P_3\,P \ldots \barwedge P_1'P_2'P_3'P',$$

sowie

$$T \barwedge T' \barwedge P \barwedge P'.$$

Aus der Definition folgt ohne Weiteres die Bemerkung: Sind zwei Strahlbüschel oder Punktreihen mit demselben Strahlbüschel oder derselben Punktreihe projectiv, so sind sie unter einander projectiv.

In Rücksicht auf No. 6 folgt ferner: Ein Strahlbüschel $T_1\,T_2\,T_3\,T_4\,T_5\,T_6 \ldots$ und ein geradliniger Querschnitt desselben $P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5\,P_6 \ldots$ sind projectiv,

und zwar entspricht jedem Strahl des Büschels der auf ihm liegende Punkt des Büschelquerschnitts, $T_4 \barwedge P_4$, $T_5 \barwedge P_5$, $T_6 \barwedge P_6$, ...

Denn wenn T irgend einen Strahl des Büschels und den darauf liegenden Punkt des Querschnitts bezeichnen, so ist

$$(T_1\, T_2\, T_3\, T) = (P_1\, P_2\, P_3\, P).$$

Ferner folgt: Zwei Querschnitte desselben Büschels sind projectiv und zwar entsprechen sich je zwei Punkte, die auf demselben Strahle liegen, $P_4 \barwedge P_4'$, $P_5 \barwedge P_5'$, $P_6 \barwedge P_6'$, ...

(M. 372.)

Zwei Büschel sind projectiv, deren entsprechende Strahlen sich in Punkten einer Geraden schneiden; $T_4 \barwedge T_4'$, $T_5 \barwedge T_5'$, ...

Ferner folgt aus der Definition, dass auch $T_1 T_1' P_1 P_1$; $T_2 T_2' P_2 P_2'$; $T_3 T_3' P_3 P_3'$ als entsprechende Elemente zu bezeichnen sind. Denn es ist, wie sich aus der Definition des Doppelverhältnisses für Strahlen und Punktreihen ergiebt

$$(T_1\, T_2\, T_3\, T_1) = (T_1' T_2' T_3' T_1') = (P_1\, P_2\, P_3\, P_1)$$
$$= (P_1' P_2' P_3' P_1') = \infty\,,$$

(M. 373.)

man hat nämlich z. B.

$$(T_1\, T_2\, T_3\, T_1) = \frac{\sin T_1 T_3}{\sin T_3 T_2} : \frac{\sin T_1 T_1}{\sin T_1 T_2} = \frac{\sin T_1 T_3}{\sin T_3 T_2} : \frac{0}{\sin T_1 T_2} = \infty.$$

Ferner findet sich

$$(T_1\, T_2\, T_3\, T_2) = (T_1' T_2' T_3' T_2') = (P_1\, P_2\, P_3\, P_2) = (P_1' P_2' P_3' P_2') = 0$$
$$(T_1\, T_2\, T_3\, T_3) = (T_1' T_2' T_3' T_3') = (P_1\, P_2\, P_3\, P_3) = (P_1' P_2' P_3' P_3') = 1.$$

10. Sind $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ die Gleichungen zweier Strahlen eines Büschels oder zweier Punkte einer Geraden, so ist die Gleichung eines dritten Strahls desselben Büschels bez. eines dritten Punktes derselben Geraden $R_3 \equiv a_1 R_1 + a_2 R_2 = 0$, und die Gleichung jedes weiteren Strahls oder Punktes kann bei geeigneter Wahl der Coefficienten n_1, n_2 in der Form geschrieben werden

$$R \equiv n_1 a_1 R_1 + n_2 a_2 R_2 = 0.$$

Das Doppelverhältniss der vier Elemente ist

$$(R_1\, R_2\, R_3\, R) = \frac{a_2}{a_1} : \frac{n_2 a_2}{n_1 a_1} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Sind nun $R_1' = 0$, $R_2' = 0$, $R_3' \equiv b_1 R_1' + b_2 R_2' = 0$ die Gleichungen der entsprechenden Strahlen oder Punkte eines projectiven Büschels oder einer projectiven Punktreihe, so entspricht dem Elemente R das Element R', dessen Gleichung ist

$$R' \equiv n_1 b_1 R_1' + n_2 b_2 R_2' = 0;$$

denn es ist $$(R_1' R_2' R_3' R') = \frac{b_2}{b_1} : \frac{n_2 b_2}{n_1 b_1} = \frac{n_1}{n_2} = (R_1\, R_2\, R_3\, R).$$

11. Sind $R_5\, R_6\, R_7\, R_8$ vier Strahlen des Büschels $R_1\, R_2\, R_3$, bez. vier Punkte der Geraden $R_1\, R_2\, R_3$, und $R_5' R_6' R_7' R_8'$ die entsprechenden Elemente des Büschels bez. der Geraden $R_1' R_2' R_3'$, und hat man

$$
\begin{array}{llll}
1. & R_5 = n_{15}a_1R_1 + n_{25}a_2R_2 & 5. & R_5' = n_{15}b_1R_1' + n_{25}b_2R_2' \\
2. & R_6 = n_{16}a_1R_1 + n_{26}a_2R_2 & 6. & R_6' = n_{16}b_1R_1' + n_{26}b_2R_2' \\
3. & R_7 = n_{17}a_1R_1 + n_{27}a_2R_2 & 7. & R_7' = n_{17}b_1R_1' + n_{27}b_2R_2' \\
4. & R_8 = n_{18}a_1R_1 + n_{28}a_2R_2 & 8. & R_8' = n_{18}b_1R_1' + n_{28}b_2R_2',
\end{array}
$$

so kann man zunächst aus 1. und 2. R_1 und R_2 durch R_5 und R_6 ausdrücken. Man erhält

$$
9. \quad \begin{aligned} R_1 &= \frac{n_{26}}{\mu a_1} R_5 - \frac{n_{25}}{\mu a_1} R_6, \\ R_2 &= -\frac{n_{16}}{\mu a_2} R_5 + \frac{n_{15}}{\mu a_2} R_6, \end{aligned} \qquad \mu = n_{15}n_{26} - n_{25}n_{16}.
$$

Ebenso erhält man aus 5. und 6. R_1' und R_2' durch R_5' und R_6' ausgedrückt:

$$
10. \quad \begin{aligned} R_1' &= \frac{n_{26}}{\mu b_1} R_5' - \frac{n_{25}}{\mu b_1} R_6' \\ R_2' &= -\frac{n_{16}}{\mu b_2} R_5' - \frac{n_{15}}{\mu b_2} R_6'. \end{aligned}
$$

Setzt man die Werthe 9. in die Formeln 3. und 4., sowie die Werthe 10. in die Formeln 7. und 8. ein, so erhält man nach einigen Umstellungen die Trinome R_7 und R_8 durch R_5 und R_6, sowie die Trinome R_7' und R_8' durch R_5' und R_6' in folgender Weise ausgedrückt:

$$
11. \quad \begin{aligned} R_7 &= \frac{n_{17}n_{26} - n_{27}n_{16}}{\mu} R_5 + \frac{n_{27}n_{15} - n_{17}n_{25}}{\mu} R_6, \\ R_8 &= \frac{n_{18}n_{26} - n_{28}n_{16}}{\mu} R_5 + \frac{n_{28}n_{15} - n_{18}n_{25}}{\mu} R_6, \end{aligned}
$$

sowie

$$
12. \quad \begin{aligned} R_7' &= \frac{n_{17}n_{26} - n_{27}n_{16}}{\mu} R_5' + \frac{n_{27}n_{15} - n_{17}n_{25}}{\mu} R_6', \\ R_8' &= \frac{n_{18}n_{26} - n_{28}n_{16}}{\mu} R_5' + \frac{n_{28}n_{15} - n_{18}n_{25}}{\mu} R_6'. \end{aligned}
$$

Das Doppelverhältniss der vier Elemente $R_5 R_6 R_7 R_8$ ergiebt sich aus den Formeln 11. zu:

$$
(R_5 R_6 R_7 R_8) = \frac{n_{18}n_{26} - n_{28}n_{16}}{n_{17}n_{26} - n_{27}n_{16}} : \frac{n_{28}n_{15} - n_{18}n_{25}}{n_{27}n_{15} - n_{17}n_{25}}.
$$

Dasselbe ergiebt sich für das Doppelverhältniss der entsprechenden vier Elemente $R_5' R_6' R_7' R_8'$. Wir haben daher

$$
(R_5 R_6 R_7 R_8) = (R_5' R_6' R_7' R_8'),
$$

oder den Satz: In zwei projectiven Strahlbüscheln oder Punktreihen ist das Doppelverhältniss von je vier Elementen des einen Gebildes gleich dem Doppelverhältniss der entsprechenden vier Elemente des andern Gebildes.

Insbesondere entsprechen vier harmonische Elemente des einen vier harmonischen des andern Gebildes.

12. Wenn bei zwei concentrischen projectiven Büscheln oder zwei auf derselben Geraden liegenden projectiven Punktreihen drei Paare entsprechender Strahlen oder entsprechender Punkte sich decken, so decken sich die Büschel bez. die Punktreihen, d. h. je zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel bez. je zwei entsprechende Punkte der beiden Punktreihen liegen aufeinander.

Beweis. Decken sich die entsprechenden Elemente R_i und R_i', R_k und R_k', R_l und R_l', so decken sich auch je zwei Elemente R und R', für welche die Gleichheit der Doppelverhältnisse besteht:

$$
1. \quad (R_i R_k R_l R) = (R_i' R_k' R_l' R').
$$

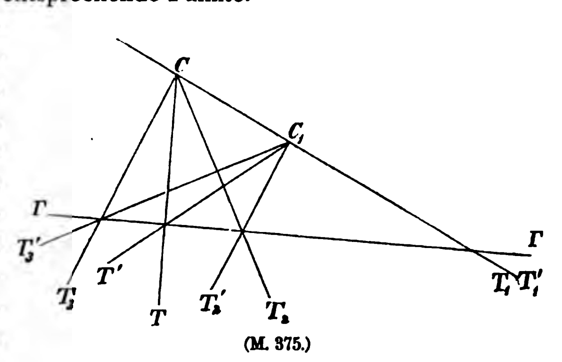
Da nun nach vorigem Satze dem Elemente R dasjenige Element des andern Gebildes (Büschels oder Punktreihe) entspricht, für welche die Gleichung 1. besteht, so folgt, dass R und R' entsprechend sind.

13. Wenn bei zwei auf verschiedenen Geraden derselben Ebene liegenden projectiven Punktreihen der Schnittpunkt der beiden Geraden sich selbst entspricht, so sind die Punktreihen perspectiv, d. h. die Verbindungsgeraden je zweier entsprechenden Punkte schneiden sich in einem Punkte (der als das gemeinsame Projectionscentrum beider Geraden bezeichnet wird).

Beweis. Bezeichnet man den Schnittpunkt der beiden Geraden mit P_1, sofern er der einen Punktreihe, und mit P_1', sofern er der andern angehört, und entsprechen sich ausser P_1 und P_1' noch die Paare $P_2 \barwedge P_2'$, $P_3 \barwedge P_3'$, so ziehe man P_2P_2' und P_3P_3'. Verbindet man nun den Schnittpunkt C dieser Geraden mit einem Punkte P' der einen Reihe, so durchschneidet dieser Strahl die andere Reihe in einem Punkte P, für welchen $(P_1P_2P_3P) = (P_1'P_2'P_3'P')$, also sind in der That P und P' entsprechende Punkte.

(M. 374.)

Wenn bei zwei projectiven Büscheln die Verbindungsgerade der beiden Träger d. i. der Punkte, durch welche sämmtliche Strahlen jedes Büschels gehen, sich selbst entspricht, so sind die Büschel perspectiv, d. h. die Schnittpunkte je zweier entsprechender Strahlen liegen auf einer Geraden.

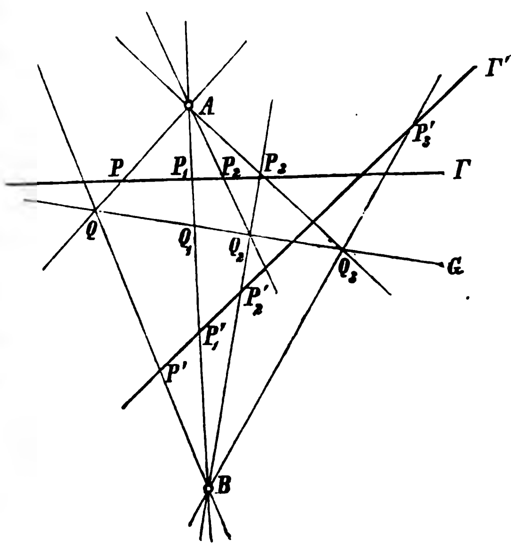


(M. 375.)

Beweis. Bezeichnet man den Strahl, welcher die Träger C und C_1 verbindet, mit T_1, sofern er dem einen, und mit T_1', sofern er dem andern Büschel angehört, verbindet man ferner durch die Gerade Γ die Schnittpunkte zweier Paare entsprechender Strahlen T_2 und T_2', T_3 und T_3', und zieht in beiden Büscheln irgend zwei Strahlen T und T', die sich auf Γ schneiden, so ist

$$(T_1T_2T_3T) = T_1'T_2'T_3'T''),$$

also sind T und T'' entsprechende Strahlen der beiden Büschel.



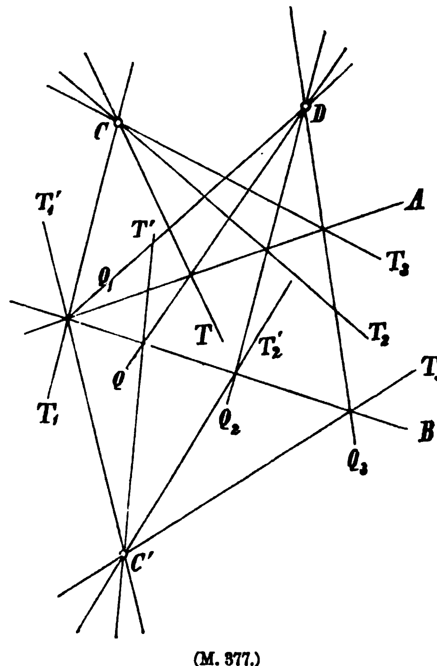
(M. 376.)

14. Die mitgetheilten Sätze geben uns die Mittel, zwei

projective Punktreihen oder Strahlbüschel zu ergänzen, d. h. wenn von zwei projectiven Punktreihen oder Strahlbüscheln drei Paare entsprechender Elemente gegeben sind, zu jedem Elemente des einen Gebildes das entsprechende Element des anderen zu finden.

Enthalten die Geraden Γ und Γ' zwei projective Punktreihen, und entsprechen sich die Punkte $P_1P_2P_3 \barwedge P_1'P_2'P_3'$, so nehme man auf der Geraden P_1P_1' zwei Punkte A und B an, ziehe von A aus Strahlen durch P_2 und P_3, sowie von B aus Strahlen nach P_2' und P_3' und verbinde Q_2 mit Q_3 durch eine Gerade G. Zieht man nun AP, durchschneidet hiermit G im Punkte Q, und zieht QB, so ist P' der P entsprechende Punkt; denn es ist

$$(P_1P_2P_3P) = (Q_1Q_2Q_3Q) = (P_1'P_2'P_3'P').$$



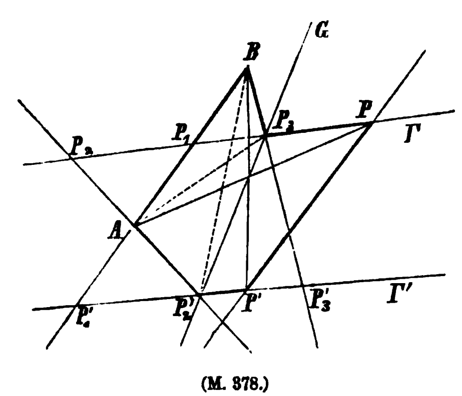
(M. 377.)

Entsprechen sich in den Büscheln C und C' die Strahlenpaare

$$T_1T_2T_3 \barwedge T_1'T_2'T_3',$$

so lege man durch den Schnittpunkt zweier entsprechenden Strahlen T_1 und T_1' zwei Gerade A und B und ziehe die Geraden Q_2, Q_3, welche die Schnittpunkte von A und B mit je zwei entsprechenden Strahlen T_2, T_2' und T_3, T_3' verbinden. Um den Strahl T' zu erhalten, der T entspricht, lege man durch den Schnittpunkt D von Q_2 und Q_3 einen Strahl Q, der T auf A trifft, und ziehe den Strahl durch C', der Q auf B trifft. Dies ist der gesuchte Strahl T', denn man hat $(T_1T_2T_3T) = (Q_1Q_2Q_3Q) = (T_1'T_2'T_3'T')$.

Durch geschickte Wahl der hierbei verwendeten Punktreihen und Strahlbüschel kann man diese Constructionen erheblich vereinfachen. Nimmt man bei der Ergänzung zweier projectiven Punktreihen $P_1P_2P_3 \barwedge P_1'P_2'P_3'$ für die Punkte A und B die Schnittpunkte von P_1P_1' mit P_2P_2' und P_3P_3', so fällt Q_2 mit P_2' und Q_3 mit P_3, also G mit $P_2'P_3$ zusammen. Um jetzt zwei entsprechende Punkte der beiden Reihen zu erhalten, hat man von A und B aus die Punkte der Geraden $P_2'P_3$ auf P_1P_3 bez. $P_1'P_3'$ zu projiciren. Fügt man zu den fünf Geraden Γ, Γ', P_1P_1' P_2P_2', P_3P_3' noch die variable Gerade PP', so erhält man das Sechseck $ABP_3PP'P_2'$, in welchem A und P, B und P', P_3 und P_2' gegenüberliegende Ecken sind; die Verbindungsgeraden dieser Gegenecken treffen sich in demselben Punkte. Wir erkennen leicht umgekehrt: Wenn von einem Sechsecke vier aufeinander folgende



(M. 378.)

Ecken ($P_2'ABP_3$) und die Richtungen der Seiten Γ und Γ' gegeben sind, auf welchen die fünfte und sechste Ecke liegen, und wenn die sechste Seite dieses Sechsecks sich so bewegt, dass die drei Diagonalen, die je zwei Gegenecken verbinden, durch denselben Punkt gehen, so sind die Reihen der fünften und sechsten Eckpunkte projectiv; dabei entsprechen sich P_1 und P_1', P_2 und P_2', P_3 und P_3'. Denn wenn die sechste Seite PP' des Sechsecks sich bewegt, die andern Seiten aber unverändert bleiben, so ändert sich die Diagonale P_3P_2' nicht und die Diagonalen AP und BP' beschreiben Strahlenbüschel mit den Trägern A und B. Da je zwei demselben Sechseck zugehörige Strahlen dieser beiden Büschel sich auf P_3P_2' schneiden, so sind diese Büschel und mithin auch die Reihen der Punkte P und der Punkte P' projectiv.

In den perspectiven Büscheln A und B ist $AP_1 \barwedge BP_1'$, $AP_2 \barwedge BP_2'$, $AP_3 \barwedge BP_3'$, zu den projectiven Reihen der fünften und sechsten Eckpunkte des Sechsecks gehören also die Punktpaare $P_1, P_2, P_3 \barwedge P_1', P_2', P_3'$.

Ein Sechseck, dessen Diagonalen zwischen Gegenecken sich in einem Punkte treffen, heisst ein BRIANCHON'sches Sechseck.

Zur Ergänzung der projectiven Strahlenbüschel C und C' legen wir die Geraden A und B durch die Punkte T_3T_3' und T_2T_2'; dann fallen die Gerade Q_2 und Q_3 mit T_2 und T_3' zusammen. Um zwei entsprechende Strahlen T und T' der beiden Büschel zu erhalten, haben wir daher den Schnittpunkt D von T_2 und T_3' aufzusuchen, durch D einen Strahl zu legen und die Schnittpunkte dieses Strahles mit A und B von den Trägern C und C' aus zu projiciren.

Die Geraden A, B, T_2, T, T', T_3' bilden ein Sechseck, in welchem den Seiten A, B, T_2 der Reihe nach die Seiten T, T', T_3' gegenüber liegen; die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten liegen auf einer Geraden, nämlich auf dem durch D gezogenen variabeln Strahle.

(M. 379.)

Umgekehrt: Wenn fünf Ecken eines Sechseckes unverändert bleiben und die sechste sich so bewegt, dass die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks sich auf Punkten einer Geraden schneiden, so beschreiben die beiden veränderlichen Seiten des Sechsecks zwei projective Strahlbüschel, in welchem sich die Strahlen entsprechen, die nach den drei festen Ecken gehen, welche nicht Träger der beiden Büschel sind.

Denn wenn die Ecken C, E, F, G, C_1 gegeben sind, so ist auch der Schnittpunkt D der gegenüberliegenden Seiten CE und GC_1 gegeben; die veränderliche Gerade, auf welcher die drei Schnittpunkte je zweier Gegenseiten liegen, geht somit durch D. Die beiden variabeln Seiten T und T' des Sechsecks projiciren

daher die beiden projectiven Punktreihen, welche von dem Strahlenbüschel D auf A und B ausgeschnitten werden. Ein Sechseck, dessen Gegenseiten sich in Punkten einer Geraden schneiden, heisst ein PASCAL'sches Sechseck.

15. Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse bei zwei projectiven Punktreihen

$$\frac{P_1P_3}{P_3P_2} : \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{P_1'P_3'}{P_3'P_2'} : \frac{P_1'P'}{P'P_2'}$$

(M. 380.)

folgt, wenn man den Quotienten

$$\frac{P_1P_3}{P_3P_2} : \frac{P_1'P_3'}{P_3'P_2'}$$

mit ν bezeichnet, die Gleichung

1. $$\frac{P_1P}{PP_2} = \nu \frac{P_1'P'}{P'P_2'},$$

die ebenfalls zur Definition der projectiven Verwandtschaft benutzt werden kann. Aus 1. lässt sich ein bemerkenswerther Zusammenhang der Strecken ableiten, um welche die entsprechenden Punkte P und P' von irgend zwei festen Punkten Q und R der beiden Geraden abstehen. Setzt man nämlich $QP_1 = a$, $QP_2 = b$; $RP_1' = a'$, $RP_2' = b'$; $QP = \lambda$, $RP' = \lambda'$; so hat man $P_1P = \lambda - a$, $PP_2 = b - \lambda$; $P_1'P' = \lambda' - a'$, $P'P_2' = b' - \lambda'$; daher geht 1. über in $(\lambda - a)(b' - \lambda') = \nu(\lambda' - a')(b - \lambda)$.

Multiplicirt und ordnet man, so entsteht hieraus:

2. $$(1 - \nu)\lambda\lambda' + (b' - \nu a')\lambda + (a - b\nu)\lambda' - (ab' - \nu a'b) = 0,$$

also eine für jede einzelne Länge λ und λ' lineare Gleichung von allgemeinster Form. Man nann diesen Satz auch umkehren: Wenn die Abstände entsprechender Punkte zweier Punktreihen von zwei festen Punkten beider Reihen einer Gleichung der Form genügen;

3. $$\alpha\lambda\lambda' + \beta\lambda + \gamma\lambda' + \delta = 0,$$

so sind die Punktreihen projectiv.

Sind zunächst P_1 und P_1' zwei entsprechende Punkte, und setzt man $QP_1 = \varepsilon$, $RP_1' = \varepsilon'$, so erfüllen ε und ε' die Gleichung 3., man hat also

4. $$\alpha\varepsilon\varepsilon' + \beta\varepsilon + \gamma\varepsilon' + \delta = 0.$$

Ferner ist $P_1P = QP - QP_1 = \lambda - \varepsilon$, $P_1'P' = RP - RP_1' = \lambda' - \varepsilon'$. Setzt man nun $P_1P = \mu$, $P_1'P' = \mu'$, so ist $\lambda = \mu + \varepsilon$, $\lambda' = \mu' + \varepsilon'$; nach Einsetzung in 3. entsteht: $\alpha(\mu + \varepsilon)(\mu' + \varepsilon') + \beta(\mu + \varepsilon) + \gamma(\mu + \varepsilon') + \delta = 0$, oder besser geordnet:

5. $$\alpha\mu\mu' + (\beta + \alpha\varepsilon')\mu + (\gamma + \alpha\varepsilon)\mu' + (\alpha\varepsilon\varepsilon' + \beta\varepsilon + \gamma\varepsilon' + \delta) = 0.$$

Da nun ε und ε' der Gleichung 4. genügen, so vereinfacht sich 5. auf

6. $$\alpha\mu\mu' + (\beta + \alpha\varepsilon')\mu + (\gamma + \alpha\varepsilon)\mu' = 0.$$

Sind P_2P_2' und P_3P_3' zwei Paare entsprechender Punkte, so hat man ausser der Gleichung 6. noch die beiden Gleichungen

7. $$\alpha\mu_2\mu_2' + (\beta + \alpha\varepsilon')\mu_2 + (\gamma + \alpha\varepsilon)\mu_2' = 0,$$

8. $$\alpha\mu_3\mu_3' + (\beta + \alpha\varepsilon')\mu_3 + (\gamma + \alpha\varepsilon)\mu_3' = 0.$$

Die Gleichungen 6., 7., 8. kann man als lineare Gleichungen für die Grössen α, $(\beta + \alpha\varepsilon')$, $(\gamma + \alpha\varepsilon)$ ansehen; ihr Zusammenbestehen bedingt das Verschwinden der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \mu\mu' & \mu & \mu' \\ \mu_2\mu_2' & \mu_2 & \mu_2' \\ \mu_3\mu_3' & \mu_3 & \mu_3' \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Division der Zeilen durch $\mu\mu'$, $\mu_2\mu_2'$, $\mu_3\mu_3'$ erhält man

9. $$\begin{vmatrix} 1 & 1:\mu' & 1:\mu \\ 1 & 1:\mu_2' & 1:\mu_2 \\ 1 & 1:\mu_3' & 1:\mu_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Subtrahirt man die zweite Zeile von der ersten und die dritte von der zweiten, so ändert sich der Werth der Determinante nicht; man erhält

10. $$\begin{vmatrix} 0, & \frac{1}{\mu'} - \frac{1}{\mu_2'}, & \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_2} \\ 0, & \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_3'}, & \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_3} \\ 1, & \frac{1}{\mu_3'} & \frac{1}{\mu_3} \end{vmatrix} = 0,$$

und dies führt endlich zu der Gleichung:

11. $$\left(\frac{1}{\mu'} - \frac{1}{\mu_2'}\right)\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_3}\right) = \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_2}\right)\left(\frac{1}{\mu_2'} - \frac{1}{\mu_3'}\right), \quad \text{oder}$$

12. $$\frac{\mu_2' - \mu'}{\mu'} \cdot \frac{\mu_3 - \mu_2}{\mu_3} = \frac{\mu_2 - \mu}{\mu} \cdot \frac{\mu_3' - \mu_2'}{\mu_3'}.$$

Da nun $\mu = P_1P$, $\mu_2 = P_1P_2$, $\mu_3 = P_1P_3$, $\mu' = P_1'P'$, $\mu_2' = P_1'P_2'$, $\mu_3' = P_1'P_3'$, so folgt: $\mu_2 - \mu = PP_2$, $\mu_3 - \mu_2 = P_2P_3$, $\mu_2' - \mu' = P'P_2'$, $\mu_3' - \mu_2' = P_2'P_3'$, und 12. geht über in:

13. $$\frac{P'P_2'}{P_1'P'} \cdot \frac{P_2P_3}{P_1P_3} = \frac{PP_2}{P_1P} \cdot \frac{P_2'P_3'}{P_1'P_3'}.$$

Hieraus folgt: $$\frac{P_1P_3}{P_3P_2} : \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{P_1'P_3'}{P_3'P_2'} : \frac{P_1'P'}{P'P_2'},$$

also sind in der That die beiden Punktreihen projectiv.

16. Aehnliche Betrachtungen lassen sich bei projectiven Büscheln durchführen.

Man wähle in den beiden Büscheln zwei beliebige Strahlen (Nullstrahlen) M und N und lege Gerade A und B normal zu M und N. Man kann den positiven Sinn von A und B immer so wählen, dass auch bezüglich der Vorzeichen für alle Geraden beider Büschel die Formeln gelten:

(M. 381.)

$$tang\, MT = \frac{QP}{CQ}, \quad tang\, NT' = tang\frac{RP'}{C'R},$$

setzt man $QP = \lambda$, $RP' = \lambda'$, $CQ = m$, $C'R = n$, $MT = \varphi$, $NT' = \varphi'$, so wird 1. $$\lambda = m\, tang\, \varphi, \quad \lambda' = n\, tang\, \varphi'.$$

Die Punktreihen auf A und B sind projectiv, also besteht zwischen λ und λ' eine Gleichung der Form:

2. $$\alpha\lambda\lambda' + \beta\lambda + \gamma\lambda' + \delta = 0.$$

Setzt man hier die Werthe 1. ein, so geht die Gleichung 2. über in

3. $$\alpha m n\, tang\, \varphi\, tang\, \varphi' + \beta m\, tang\, \varphi + \gamma n\, tang\, \varphi' + \delta = 0.$$

Wir schliessen daher: Die Tangenten der Winkel, welche je zwei

entsprechende Strahlen zweier projectiven Büschel mit beliebigen festen (Null-) Strahlen der beiden Büschel bilden, genügen einer Gleichung, die für jede der beiden Tangenten linear ist.

Umgekehrt: Sind je zwei Strahlen zweier Büschel durch eine Gleichung von der Form verbunden:

4. $$a\, tang\, \varphi\, tang\, \varphi' + b\, tang\, \varphi + c\, tang\, \varphi' + d = 0,$$

so sind die Büschel projectiv. Denn legt man Gerade A und B normal zu den Nullstrahlen, so hat man die Formeln 1., also

$$\frac{a}{mn}\lambda\lambda' + \frac{b}{m}\lambda + \frac{c}{n}\lambda' + d = 0.$$

Die Punktreihen auf A und B sind daher projectiv, und folglich auch die Strahlbüschel C und C'.

17. Bei zwei projectiven Punktreihen entspricht dem unendlich fernen Punkte jeder Reihe ein bestimmter, im Allgemeinen nicht unendlich ferner Punkt der andern Reihe. Diese beiden, den unendlich fernen entsprechenden Punkte, heissen die Gegenpunkte (G und H) der Reihen. Aus der Gleichung

1. $$\alpha\lambda\lambda' + \beta\lambda + \gamma\lambda' + \delta = 0$$

folgen durch Division mit λ und λ' die Gleichungen

2. $$\alpha\lambda' + \beta + \gamma\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\delta}{\lambda} = 0,$$

3. $$\alpha\lambda + \beta \cdot \frac{\lambda}{\lambda'} + \gamma + \frac{\delta}{\lambda'} = 0.$$

Setzt man in 2. $\lambda = \infty$, und in 3. $\lambda' = \infty$, so erhält man aus 2. und 3. die Abstände λ' und λ der Gegenpunkte H und G von den Nullpunkten zu

4. $$\lambda' = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad \lambda = -\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Wir wollen dieselben mit h und g bezeichnen. Ist $\alpha = 0$, so werden die Gegenpunkte unendlich fern; es entsprechen sich dann die unendlich fernen Punkte beider Reihen. Aus No. 15, 2 folgt, dass dann $\nu = 1$ sein muss, d. h. es ist $P_1P : PP_2 = P_1'P' : P'P_2'$. Hieraus folgt weiter:

5. $$P_1P : (P_1P + PP_2) = P_1'P' : (P_1'P' + P'P_1').$$

Setzt man das Verhältniss der Strecken $(P_1P + PP_2) : (P_1'P' + P'P_2') = P_1P_2 : P_1'P_2' = k$, so hat man aus 5.

6. $$P_1P : P_1'P' = k, \quad P_1P = k \cdot P_1'P'.$$

Es haben also je zwei entsprechende Strecken P_1P und $P_1'P'$ ein constantes Verhältniss. Zwei Punktreihen, deren Punkte sich derart entsprechen, heissen ähnlich. Wir haben daher den Satz: Projective Punktreihen, deren unendlich ferne Punkte einander entsprechen, sind ähnlich.

Ist noch ausserdem $P_1P_2 = P_1'P_2'$, so ist auch für je zwei entsprechende Punkte $P_1P = P_1'P'$; legt man die Punktreihen auf einander und vereint P_1P_2 mit $P_1'P_2'$, so decken sich daher auch je zwei entsprechende Punkte P und P'; die Punktreihen sind also congruent.

Wählt man die Gegenpunkte G und H als Nullpunkte, so ergiebt sich für die Abstände GP und HP' eine Gleichung von der Form 1., aus welcher aber für GG und HH der Werth Null hervorgehen muss, d. h. es muss (nach 4.) $\beta = \gamma = 0$ sein. Für die Strecken zwischen den Gegenpunkten und je zwei entsprechenden Punkten zweier projectiven Punktreihen besteht also die einfache Beziehung

7. $$GP \cdot HP' = -\frac{\delta}{\alpha},$$

d. i. das Produkt dieser Strecken ist constant.

18. Die Frage nach den Gegenpunkten projectiver Reihen lässt sich auch als die Frage nach entsprechenden unendlich grossen Strecken auffassen (d. i. nach unendlich grossen Strecken, deren Endpunkte sich paarweis entsprechen). Man wird nun erkennen, dass dieser Untersuchung über die Gegenpunkte projectiver Reihen für projective Büschel die Frage nach entsprechenden rechten Winkeln zur Seite gestellt werden kann (d. i. nach rechten Winkeln, deren Schenkel sich paarweis entsprechen).

Wir wählen der Einfachheit wegen entsprechende Strahlen zu Nullstrahlen; dann muss die Gleichung $a \, tang \, \varphi \, tang \, \varphi' + b \, tang \, \varphi + c \, tang \, \varphi' + d = 0$ derart sein, dass dem Werthe $\varphi = 0$ der Werth $\varphi' = 0$ zugehört, die Gleichung nimmt also die Form an:

1. $$a \, tang \varphi \, tang \varphi' + b \, tang \varphi + c \, tang \varphi' = 0.$$

Gesetzt nun, T und T' seien entsprechende Schenkel sich entsprechender rechter Winkel; dann müssen sich auch die Strahlen T_0 und T_0' entsprechen, für welche $\varphi_0 = \varphi + 90°$, $\varphi_0' = \varphi' + 90°$, es muss also auch die Gleichung erfüllt sein:

$$a \, tang \, (\varphi + 90°) \, tang \, (\varphi' + 90°) + b \, tang \, (\varphi + 90°) + c \, tang \, (\varphi' + 90°) = 0.$$

Da nun $tang \, (\varphi + 90°) = -1 : tang \varphi$, $tang \, (\varphi' + 90°) = -1 : tang \varphi'$, so geht diese Gleichung über in

$$\frac{a}{tang \varphi \, tang \varphi'} - \frac{b}{tang \varphi} - \frac{c}{tang \varphi'} = 0,$$

woraus nach Multiplication mit $tang \varphi \, tang \varphi'$ entsteht:

2. $$a - b \, tang \varphi' - c \, tang \varphi = 0.$$

Die Werthe φ und φ', welche wir suchen, sind daher die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen 1. und 2. Dieses System besteht aus einer Gleichung zweiten Grades (1) und einer linearen Gleichung (2), hat also zwei Auflösungen.

Gesetzt $\varphi = \alpha$, $\varphi' = \alpha'$ sei eine Auflösung des Sytems, es seien also die Gleichungen identisch erfüllt

3. $$a \, tang \alpha \, tang \alpha' + b \, tang \alpha + c \, tang \alpha' = 0.$$

4. $$a - b \, tang \alpha' - c \, tang \alpha = 0.$$

Hebt man aus beiden Gleichungen den Faktor $tang \alpha \, tang \alpha'$ aus, so entsteht

5. $$tang \alpha \, tang \alpha' \left(a + \frac{b}{tang \alpha'} + \frac{c}{tang \alpha}\right) = 0.$$

6. $$tang \alpha \, tang \alpha' \left(\frac{a}{tang \alpha \, tang \alpha'} - \frac{b}{tang \alpha} - \frac{c}{tang \alpha'}\right) = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen im Vergleich mit 2. und 1., dass auch die Werthe

$$tang \varphi = -1 : tang \alpha, \quad tang \varphi' = -1 : tang \alpha',$$

d. i. die Strahlen, die mit den Nullstrahlen die Winkel $\alpha + 90°$, $\alpha' + 90°$ bilden, den Gleichungen 1. und 2. genügen. Wir sehen hieraus, dass zwei projective Büschel immer ein und im Allgemeinen auch nur ein Paar entsprechende rechte Winkel haben.

Haben zwei projective Büschel mehr als ein Paar entsprechende rechte Winkel, so haben die Gleichungen 3. und 4. mehr als zwei Lösungen; dies ist aber nur dann möglich, wenn sie identisch sind; letzteres tritt nur dann ein, wenn $a = 0$ und $b = -c$. Unter dieser Voraussetzung wird die Gleichung der Pro-

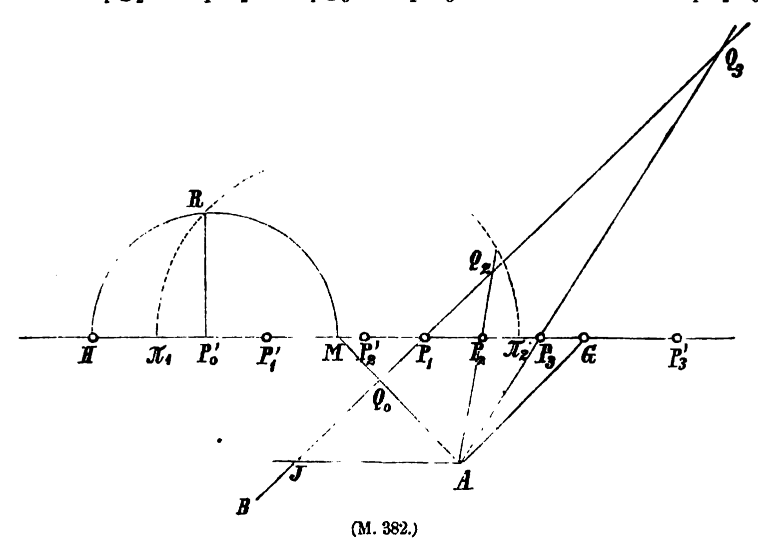
jectivität (1) zu $b\,(tang\,\varphi - tang\,\varphi') = 0$, und liefert für je zwei entsprechende Strahlen $tang\,\varphi = tang\,\varphi'$, d. i. je zwei entsprechende Strahlen bilden mit zwei festen entsprechenden Strahlen gleiche Winkel, die Büschel sind also congruent.

19. Wenn zwei projective Punktreihen denselben Träger haben, (d. i. auf derselben Geraden liegen), so fragt es sich, ob und wie oft es sich ereignet, dass zwei entsprechende Punkte zusammenfallen.

Da ein Doppelverhältniss sich nicht ändert, wenn alle vier darin auftretende Strecken das Zeichen wechseln, so kann man den positiven Sinn einer Punktreihe nach Bedarf wechseln, ohne ihre projective Beziehung zu einer anderen Punktreihe zu stören. Wir können daher unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass bei zwei auf einander liegenden projectiven Punktreihen die positiven Richtungen übereinstimmen.

Wir bestimmen zunächst die Gegenpunkte G und H. Hierzu, wie auch zur Ergänzung der Punktreihen kann folgendes Verfahren angewandt werden:

Sind $P_1P_2P_3 \barwedge P_1'P_2'P_3'$, so ziehe man durch P_1 eine Gerade B und mache $P_1Q_2 = P_1'P_2'$, $P_1Q_3 = P_1'P_3'$; die Punktreihen $P_1P_2P_3$ und $P_1Q_2Q_3$ sind perspectiv (No. 13) und der Schnittpunkt A der Geraden P_2Q_2 und P_3Q_3 ist ihr gemeinsames Projectionscentrum. Zieht man nun AG parallel B, so entspricht G dem unendlich fernen Punkte auf B, also auch dem unendlich fernen der Reihe $P_1'P_2'P_3'$; zieht man ferner AJ parallel P_1P_3, so trifft AJ die Gerade P_1P_3 in einem unendlich fernen Punkte, J ist also der Punkt der Reihe B, welcher dem unendlich fernen Punkte der Reihe $P_1P_2P_3$ entspricht; macht man nun $P_1'H = P_1J$, so ist H der Gegenpunkt der Reihe $P_1'P_2'P_3'$.



(M. 382.)

Nach No. 17 hat man für je zwei entsprechende Punkte

1. $$GP \cdot HP' = GP_1 \cdot HP_1', \quad \text{oder}$$
$$GP(GP' - GH) = GP_1 \cdot HP_1'.$$

Ist nun Π ein Doppelpunkt beider projectiven Reihen, d. i. ein Punkt, der mit dem ihm entsprechenden zusammenfällt, so gilt für denselben die Gleichung:
$$G\Pi\,(G\Pi - GH) = GP_1 \cdot HP_1', \quad \text{woraus folgt}$$
2. $$(G\Pi - \tfrac{1}{2}GH)^2 = GP_1 \cdot HP_1' + \tfrac{1}{4}GH^2.$$

Ist M die Mitte von GH, so ist $GM = MH = \frac{1}{2}GH$; ist ferner P_0' der Punkt der Reihe $P_1'P_2'P_3' \ldots$, welcher dem Punkte M, als Punkt der Reihe $P_1P_2P_3$ betrachtet, entspricht (man findet P_0', indem man MA zieht und

$P_1'P_0' = P_1Q_0$ macht), so ist $GP_1 \cdot HP_1' = GM \cdot HP_0' = MH \cdot HP_0'$; man hat daher aus 2.:

3. $$(G\Pi - GM)^2 = MH(MH + HP_0').$$

Setzt man hier $M\Pi$ für $G\Pi - GM$, und MP_0' für $MH + HP_0'$, so hat man schliesslich

4. $$M\Pi^2 = MH \cdot MP_0'.$$

Die Gleichung wird durch keinen realen Werth von $M\Pi$ erfüllt, wenn das Produkt $MH \cdot MP_0'$ ein negatives Zeichen hat, d. i. wenn H und P_0' auf verschiedenen Seiten von M liegen.

Finden sich P_0' und H auf derselben Seite von M, so construire man das geometrische Mittel aus MH und MP_0' (indem man über MH einen Halbkreis construirt, und in P_0' ein Loth zu HM bis an den Halbkreis errichtet); die Strecke MR trage man von M aus nach beiden Seiten auf der Geraden ab; dann sind Π_1 und Π_2 die gesuchten Doppelpunkte.

Wie man sieht, haben die Strecke zwischen den Gegenpunkten und die Strecke zwischen den Doppelpunkten zweier auf einander liegenden projectiven Punktreihen eine gemeinsame Mitte.

20. Zwei auf einander liegende projective Strahlbüschel, d. i. zwei Strahlbüschel mit gemeinsamem Träger, schneide man durch eine Gerade A; diese Gerade wird von den entsprechenden Strahlen der beiden Büschel in entsprechenden Punkten zweier auf einander liegenden projectiven Punktreihen getroffen.

Haben die Strahlbüschel Doppelstrahlen, d. i. zusammenfallende entsprechende Strahlen, so haben die Punktreihen Doppelpunkte, und durch die Doppelpunkte der beiden Reihen gehen die Doppelstrahlen der beiden Büschel.

21. Ist bei zwei auf einander liegenden projectiven Punktreihen das Produkt $GP \cdot HP'$ entgegengesetzt gleich dem Quadrat der Strecke GM, so fällt M mit P_0' zusammen und es ist $M\Pi_1 = \Pi_2 M = 0$; die beiden Doppelpunkte fallen also dann mit M zusammen.

22. Liegen die Gegenpunkte zusammen, so ist $MH = 0$, $MP_0' = \infty$; die Gleichung No. 17, 7 vereinfacht sich alsdann zu

$GP \cdot GP' = GP_1 \cdot GP_1'$, also für Doppelpunkte Π gilt $G\Pi^2 = GP_1 \cdot GP_1'$.

Man sieht hieraus: Wenn bei zwei auf einander liegenden projectiven Punktreihen die Gegenpunkte zusammenfallen, so giebt es zwei oder keine Doppelpunkte, je nachdem zwei entsprechende Punkte auf gleicher Seite des Gegenpunktes liegen oder nicht.

Jeder Punkt der Geraden, auf welcher die beiden Punktreihen vereint liegen, ist sowol ein Punkt der Reihe $P_1P_2P_3 \ldots$ als auch der Reihe $P_1'P_2'P_3$; bezeichnen wir einen Punkt, sofern er zur ersten Reihe gehört, mit P_i und, sofern er zur andern gehört, mit P_k', und sind P_i' und P_k die ihnen entsprechenden Punkte, so hat man, wenn die Gegenpunkte zusammenfallen, zunächst

$$GP_k \cdot GP_k' = GP_i \cdot GP_i'.$$

Da nun $GP_i = GP_k'$, so folgt, dass auch $GP_k = GP_i'$.

Wir erhalten daher den Satz: Wenn zwei projective Punktreihen so auf einander liegen, dass die Gegenpunkte zusammenfallen, so entspricht jedem Punkte der Geraden ein und derselbe Punkt, gleichgültig, zu welcher der beiden Reihen man den Punkt zählt.

Von projectiven Reihen, die derart auf einander liegen, sagt man, dass sie involutorisch liegen und das Punktgebilde, das sie zusammen bilden, heisst eine quadratische Punktinvolution. In gleicher Weise gelangt man zu

involutorisch liegenden Strahlenbüscheln und erkennt, dass die involutorische Lage zweier Strahlenbüschel eintritt, wenn zwei nicht entsprechende Gegenstrahlen zusammenfallen.

Mit quadratischen Involutionen werden wir uns im nächsten Abschnitt von einem andern Gesichtspunkte ausgehend beschäftigen.

§ 7. Die quadratische Punkt- und Strahleninvolution.

1. Denkt man sich die Punkte einer Punktreihe einzeln, unabhängig von einander, so ist über die Punktreihe nichts geometrisch zu bemerken. Ein geometrisches Interesse entsteht erst, indem man zwei solche Punktreihen zu einander in (z. B. projective) Beziehung setzt, indem man jedem Punkte der einen Reihe einen oder mehrere bestimmte Punkte der anderen zuordnet.

Man kann nun aber die Punkte einer Geraden auch nach bestimmten Methoden zu zweien (oder dreien etc.) in Gruppen vereinigen; dann wird diese Einordnung in Gruppen einen Gegenstand für geometrische Untersuchungen bilden können.

Bezeichnet man den Abstand eines beliebigen Punktes P der Geraden von einem festen Nullpunkte Q mit λ, so kann man die n Werthe von λ, welche den Punkten einer $n$punktigen Gruppe zugehören, als die Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades ansehen

1. $$M_1 \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Die Werthe λ für die Punkte einer zweiten Gruppe seien die Wurzeln der Gleichung

2. $$M_2 \equiv b_0 \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0.$$

Dann kann man mit Hülfe zweier realer Zahlen r_1 und r_2 die Gleichung $n$ten Grades in λ bilden

3. $$r_1 M_1 + r_2 M_2 = 0.$$

Durch diese Gleichung ist eine neue Gruppe von n Punkten definirt. Um die Gruppen zu erhalten, zu denen ein bestimmter Punkt P_0 gehört, hat man den zugehörigen Werth λ_0 in 3. einzusetzen und dann das Verhältniss r_1 und r_2 zu bestimmen. Bezeichnet man die Werthe, welche die Polynome M_1 und M_2 annehmen, wenn man statt λ darin den bestimmten Werth λ_0 setzt, mit M_{10} und M_{20}, so entsteht $r_1 M_{10} + r_2 M_{20} = 0$, also folgt für das Verhältniss $r_1 : r_2$ ein eindeutig bestimmter Werth; man kann nehmen $r_1 = M_{20}$, $r_2 = - M_{10}$. Bei dieser Art der Gruppenbildung gehört also jeder Punkt der Geraden nur zu einer Gruppe, und wenn man das Verhältniss $r_1 : r_2$ die reale Zahlenreihe durchlaufen lässt, so erhält man durch die Gleichung 3. alle Gruppen auf der Geraden.

Eine Punktreihe, deren Punkte in dieser Weise in Gruppen von je n Punkten geordnet sind, nennt man eine Involution $n$ten Grades.

Aus dem soeben Mitgetheilten hat man den Satz:

Wenn zwei Gruppen einer Involution $n$ten Grades gegeben sind, so sind auch alle anderen Gruppen bestimmt.

Gleichlautendes kann man über Strahlbüschel bemerken.

Bezeichnet man mit φ den Winkel eines Strahles mit einem festen Nullstrahle, so lassen sich die Strahlen einer $n$strahligen Gruppe durch eine Gleichung $n$ten Grades definiren:

4. $$M_1 \equiv a_0 \tang^n \varphi + a_1 \tang^{n-1}\varphi + \ldots + a_{n-1} \tang \varphi + a_n = 0.$$

Eine zweite Gruppe werde definirt durch die Gleichung

5. $$M_2 \equiv b_0 \tang^n \varphi + b_1 \tang^{n-1}\varphi + \ldots + b_{n-1} \tang \varphi + b_n = 0.$$

Dann kann man durch geeignete Wahl der Zahlen r_1 und r_2 mittelst der Formel

6. $$r_1 M_1 + r_2 M_2 = 0$$

beliebige neue Gruppen erzeugen. Ein Büschel, dessen Strahlen so in $n$strahlige Gruppen geordnet sind, heisst eine **Strahleninvolution $n$ten Grades.**

2. Wir beschränken uns auf **Punkt- und Strahleninvolutionen zweiten Grades.**

Bei quadratischen Punktinvolutionen sind M_1 und M_2 quadratische Functionen von λ $\quad M_1 = a_0\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_2, \quad M_2 = b_0\lambda^2 + 2b_1\lambda + b_2,$

bei quadratischen Strahleninvolutionen ist

$M_1 = a_0 \tang^2\varphi + 2a_1 \tang\varphi + a_2, \quad M_2 = b_0 \tang^2\varphi + 2b_1 \tang\varphi + b_2.$

3. Wir fragen zunächst nach dem Punkte einer quadratischen Punktinvolution, der mit dem unendlich fernen Punkte der Geraden zusammen ein Paar bildet. Wir haben dazu das Verhältniss $r_1 : r_2$ so zu wählen, dass die Gleichung

1. $$r_1 M_1 + r_2 M_2 = 0$$

eine unendlich grosse Wurzel hat. Die Wurzeln einer quadratischen Gleichung $\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda + \gamma = 0$ sind bekanntlich

$$\lambda = -\frac{\beta}{\alpha} \pm \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{1 - \frac{\alpha\gamma}{\beta^2}}.$$

Entwickelt man den irrationalen Theil, so findet man

$$\sqrt{1-\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\gamma}{\beta^2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta^4} - \frac{1}{16}\cdot\frac{\alpha^3\gamma^3}{\beta^6} - \ldots$$

Die folgenden Ausdrücke enthalten höhere Potenzen von α, als die dritte. Hieraus ergiebt sich für die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\lambda = -\frac{\beta}{\alpha} \pm \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma}{\beta} - \frac{1}{8}\cdot\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} - \frac{1}{16}\cdot\frac{\alpha^2\gamma^3}{\beta^5} - \ldots\right)$$

oder einzeln $$\lambda' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma}{\beta} - \frac{1}{8}\cdot\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} - \ldots$$

$$\lambda'' = -\frac{2\beta}{\alpha} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma}{\beta} + \frac{1}{8}\cdot\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} + \ldots$$

Eine dieser Wurzeln, λ'', wird unendlich gross, wenn $\alpha = 0$; die andere nimmt dann den Werth $(-\gamma) : 2\beta$ an.

Soll also die Gleichung 1. eine unendlich grosse Wurzel haben, so muss der Coefficient von λ^2 verschwinden, d. i. es muss die Gleichung gelten

2. $$r_1 a_0 + r_2 b_0 = 0,$$

aus welcher, da es nur auf das Verhältniss von $r_1 : r_2$ ankommt, die Werthe gezogen werden können $\quad r_1 = b_0, \quad r_2 = -a_0.$

Durch Benutzung dieser Werthe reducirt sich 1. auf die **lineare** Gleichung:

3. $$2(a_1 b_0 - a_0 b_1)\lambda + (a_2 b_0 - a_0 b_2) = 0,$$

aus welcher hervorgeht

4. $$\lambda = -\frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{2(a_0 b_1 - a_1 b_0)}.$$

Der durch diesen Werth bestimmte Punkt heisst der **Centralpunkt der Involution**, und soll mit O bezeichnet werden. Wählt man den Centralpunkt zum Nullpunkte (statt des beliebigen Nullpunktes Q), so müssen die Coefficienten in 1. und 2. so beschaffen sein, dass der in 4. gegebene Werth von λ verschwindet. Dazu ist nothwendig, dass $a_0 : b_0 = a_2 : b_2$; unbeschadet der Allgemeinheit kann man setzen $a_0 = b_0, \; a_2 = b_2$. Daher lauten die Gleichungen 1., 2., 3. jetzt: $\; M = a_0\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_2 = 0, \quad M_2 = a_0\lambda^2 + 2b_1\lambda + a_2 = 0,$

$$M = (r_1 + r_2)a_0\lambda^2 + 2(r_1 a_1 + r_2 b_1)\lambda + (r_1 + r_2)a_2 = 0.$$

Bezeichnet man die Wurzeln von $M = 0$ mit λ' und λ'', so wird

5. $$\lambda' \cdot \lambda'' = OP \cdot OP' = \frac{(r_1 + r_2) a_2}{(r_1 + r_2) a_0} = \frac{a_2}{a_0}.$$

Hieraus folgt der Satz: Das Produkt der Abstände der beiden Punkte jedes Paares einer quadratischen Punktinvolution vom Centralpunkte ist constant.

Je nachdem der Quotient $a_2 : a_0$ positiv oder negativ ist, liegen je zwei Punkte eines Paares auf derselben Seite des Centralpunktes oder nicht.

Der Vergleich der Formel 5. mit § 6, No. 21 lehrt, dass die dort gegebene Definition der quadratischen Involution mit der aus einem allgemeineren Gesichtspunkte in diesem Abschnitte aufgestellten gleichbedeutend ist.

4. Wir fragen nun nach solchen Punktpaaren einer Involution zweiten Grades, deren Punkte vereinigt liegen (in einen Punkt zusammenfallen). Dies kann offenbar nur dann eintreten, wenn die Punkte jedes Paares auf derselben Seite des Centrums O liegen, wenn also das constante Produkt $OP \cdot OP'$ (die Potenz der Involution) positiv ist. Bezeichnet λ den Abstand eines aus zwei zusammenfallenden Punkten bestehenden Paares vom Centrum, so bestimmt sich λ nach 5. der vorigen Nummer aus $\lambda^2 = OP \cdot OP'$.

Ist also die Potenz einer quadratischen Involution positiv, so giebt es zwei Paare, deren Punkte vereinigt liegen; diese Paare liegen symmetrisch zum Centrum; man bezeichnet sie als die Asymptotenpunkte der Involution.

F_1 O P F P'

(M. 383.)

Sind F und F_1 die Asymptotenpunkte, O das Centrum, P und P' ein Punktpaar einer quadratischen Involution, so ist also $OF^2 = OF_1^2 = OP \cdot OP'$, $F_1O = OF$.

Nun ist

1. $PF_1 = PO - F_1O$, 3. $PF = PO + OF$,
2. $FP' = FO + OP'$, 4. $F_1P' = F_1O - P'O$.

Durch Multiplication der Formeln 1. und 2., sowie 3. und 4. folgt

5. $PF_1 \cdot FP' = PO \cdot OP' - FO \cdot F_1O + PO \cdot FO - OP' \cdot F_1O$,

6. $PF \cdot F_1P' = -PO \cdot P'O + OF \cdot F_1O + PO \cdot F_1O - OF \cdot P'O$.

Da nun $PO \cdot OP' = FO \cdot OF = FO \cdot F_1O$, so folgt

$$PF_1 \cdot FP' = PO \cdot FO - OP' \cdot F_1O,$$
$$PF \cdot F_1P' = PO \cdot F_1O - OF \cdot P'O.$$

Ferner ist $PO \cdot FO - OP' \cdot F_1O = -(PO \cdot F_1O - P'O \cdot OF)$.

Also ist $PF_1 \cdot FP' = -PF \cdot F_1P'$, oder $PF : FP' = -PF_1 : F_1P'$.

Dies ergiebt den Satz: Je zwei Punkte eines Paares einer quadratischen Involution mit positiver Potenz liegen harmonisch zu den Asymptoten der Involution.

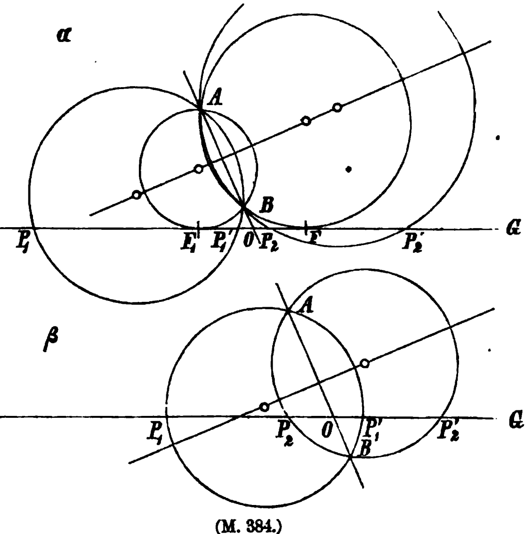
5. Die Formel $OP \cdot OP' = OP_1 \cdot OP_1'$ lehrt eine Involution zu ergänzen, d. i. aus zwei gegebenen Punktpaaren einer quadratischen Involution das Centrum der Involution und den zu jedem Punkte der Geraden zugehörigen Punkt zu bestimmen.

Construiren wir die beiden Kreise, die durch einen beliebig gewählten Punkt A und durch die Punkte je eines der beiden gegebenen Paare P_1P_1', P_2P_2' bestimmt sind, so schneiden diese sich noch in einem Punkte B (der im Falle der Berührung der beiden Kreise als unendlich nahe bei A anzusehen wäre). Die Gerade AB trifft die Gerade G im Centrum der Involution, denn es ist nach bekannten planimetrischen Sätzen $OP_1 \cdot OP_1' = OA \cdot OB = OP_2 \cdot OP_2'$.

Um nun zu einem Punkte P den zugehörigen zu bestimmen, construiren wir den Kreis PAB; der Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden G ist der gesuchte Punkt P', denn es ist

$$OP \cdot OP' = OP_1 \cdot OP_1'.$$

Construiren wir die beiden Kreise, welche durch A und B gehen und G berühren, so sind die Berührungspunkte die Asymptotenpunkte der Involution; wir erhalten sie bekanntlich, indem wir OF $(= F_1O)$ als das geometrische Mittel aus OA und OB construiren.



(M. 384.)

6. Wir wollen nun untersuchen, ob es in einer Strahleninvolution Strahlenpaare giebt, deren Strahlen auf einander senkrecht stehen.

Bestimmen sich die Winkel φ, welche die Strahlen zweier Paare N_1 und N_2 mit einem festen Nullstrahle bilden, aus den beiden quadratischen Gleichungen

1. $$N_1 \equiv a_0 tang^2 \varphi + 2a_1 tang \varphi + a_2 = 0,$$

2. $$N_2 \equiv b_0 tang^2 \varphi + 2b_1 tang \varphi + b_2 = 0,$$

so erhält man bekanntlich (No. 2) die Winkel φ jedes Strahlenpaares durch geeignete Wahl der Zahlen r_1 und r_2 aus den Wurzeln der Gleichung

3. $$N \equiv r_1 N_1 + r_2 N_2 = 0.$$

Soll diese Gleichung durch zwei auf einander senkrechte Strahlen erfüllt werden, so gilt, wenn φ und φ' der Gleichung genügen, die Beziehung

$$tang \varphi' = tang (\varphi + 90^\circ) = -1 : tang \varphi, \quad \text{oder}$$

4. $$tang \varphi' \cdot tang \varphi = -1.$$

Die Gleichung 3. lautet vollständig ausgeschrieben:

$$N \equiv (r_1 a_0 + r_2 b_0) tang_2 \varphi + 2(r_1 a_1 + r_2 b_1) tang \varphi + (r_1 a_2 + r_2 b_2) = 0.$$

Das Produkt ihrer Wurzeln ist $(r_1 a_2 + r_2 b_2) : (r_1 a_0 + r_2 b_0)$; dies soll nach 4. gleich der negativen Einheit sein; daher hat man die Bedingungsgleichung:

$$\frac{r_1 a_2 + r_2 b_2}{r_1 a_0 + r_2 b_0} = -1, \quad \text{aus welcher folgt:}$$

5. $$r_1 (a_0 + a_2) + r_2 (b_0 + b_2) = 0.$$

Da es nur auf das Verhältniss der Zahlen r_1, r_2 ankommt, so kann man setzen

6. $$r_1 = b_0 + b_2, \quad r_2 = -(a_0 + a_2).$$

Hieraus folgt: In jeder quadratischen Strahleninvolution giebt es ein und nur ein Paar auf einander senkrechte Strahlen; diese Strahlen werden als die Achsen der Involution bezeichnet.

Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn die Gleichung 5. identisch erfüllt ist, d. i. wenn $a_2 = -a_0$, $b_2 = -b_0$; dann sind die Strahlen der Paare N_1, N_2, sowie überhaupt die Strahlen jedes Paares auf einander senkrecht. Eine solche Strahleninvolution wird als Kreissystem bezeichnet.

7. Die Gleichung, durch welche die Achsen bestimmt werden, ergiebt sich durch Einsetzung der Werthe 6. in $N = 0$ zu:

1. $(a_0 b_2 - a_2 b_0) tang^2 \varphi + 2[a_1(b_0 + b_2) - b_1(a_0 + a_2)] tang \varphi - (a_0 b_2 - a_2 b_0) = 0.$
Wählt man eine Achse zum Nullstrahl, so muss diese Gleichung die beiden Wurzeln haben $tang\, \varphi = 0$ und $tang\, \varphi = \infty$; beides tritt ein, wenn $a_0 b_2 - a_2 b_0 = 0$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man setzen $a_0 = b_0$, $a_2 = b_2$. Dann werden die Gleichungen 1., 2. und 3. zu

$$N_1 \equiv a_0\, tang^2 \varphi + 2 a_1\, tang\, \varphi + a_2 = 0,$$
$$N_2 \equiv a_0\, tang^2 \varphi + 2 b_1\, tang\, \varphi + a_2 = 0,$$
$$N \equiv a_0 (r_1 + r_2)\, tang^2 \varphi + 2 (a_1 r_1 + b_1 r_2)\, tang\, \varphi + a_2 (r_1 + r_2) = 0.$$

Sind $tang\, \varphi$, $tang\, \varphi'$ die Wurzeln der letzten Gleichung, so folgt:

$$1. \qquad tang\, \varphi \cdot tang\, \varphi' = \frac{a_2 (r_1 + r_2)}{a_0 (r_1 + r_2)} = \frac{a_2}{a_0}.$$

Hieraus folgt der Satz: Das Produkt der Tangenten der Winkel, welche je zwei Strahlen eines Paares einer quadratischen Strahleninvolution mit einer Achse bilden, ist constant.

Sind A und A_1 die Achsen, und ist A die Nulllinie, so ist

$$tang\, AT = tang(AA_1 + A_1 T) = tang(90^\circ + A_1 T) = -1 : tang\, A_1 T.$$

Setzt man $AT = \psi$, $A_1 T = \psi'$, so ist $tang\, \varphi = -1 : tang\, \psi$, $tang\, \varphi' = -1 : tang\, \psi'$. Dies in 1. eingesetzt, ergiebt:

$$tang\, \psi \cdot tang\, \psi' = \frac{a_0}{a_2}.$$

Die Produkte der Tangenten der Winkel, welche je zwei Strahlen eines Paares mit der einen und mit der andern Achse bilden, sind also reciprok.

Ist $a_2 : a_0$ positiv, so sind die Winkel φ, φ', sowie die Winkel ψ, ψ' beide spitz oder beide stumpf; hieraus folgt, dass in diesem Falle die Strahlen jedes Paares durch dasselbe Scheitelwinkelpaar der Achsen gehen, oder dass die Strahlen jedes Paares durch die Achsen nicht getrennt werden; ist hingegen $a_2 : a_0$ negativ, so werden die Strahlen jedes Paares durch die beiden Achsen getrennt.

8. Nur im ersteren Falle kann es reale Strahlenpaare geben, deren Strahlen zusammenfallen. Sie werden aus der Gleichung bestimmt:

$$tang^2 \varphi = \frac{a_2}{a_0},$$

aus welcher zwei entgegengesetzt gleiche Werthe von φ folgen.

Strahlen, in welchen zwei Strahlen eines Paares zuzammenfallen, werden als Asymptoten der Involution bezeichnet. Wir haben daher den Satz: Die Asymptoten einer quadratischen Strahleninvolution liegen symmetrisch zu den Achsen der Involution.

Strahleninvolutionen und Punktinvolutionen heissen hyperbolisch oder elliptisch, je nachdem sie reale Asymptoten, bez. Asymptotenpunkte besitzen oder nicht.

9. Legt man eine Gerade G normal zum Nullstrahle durch den Punkt Q desselben, und schneidet damit die Strahlen T und T' in P und P', so ist bei geeigneter Wahl des positiven Sinnes von G:

$$tang\, \varphi = \frac{QP}{CQ}, \quad tang\, \varphi' = \frac{QP'}{CQ}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, $N = 0$ ein und setzt $CQ = \gamma$, $QP = \lambda$, $QP' = \lambda'$, so erhält man für die Punktpaare, in denen G von den Strahlenpaaren der Involution geschnitten wird, die Gleichungen:

$$M_1 \equiv \frac{a_0}{\gamma^2}\lambda^2 + 2\frac{a_1}{\gamma}\lambda + a_2 = 0\,, \quad M_2 \equiv \frac{b_0}{\gamma^2}\lambda^2 + 2\frac{b_1}{\gamma}\lambda + b_2 = 0\,,$$
$$M \equiv r_1 M_1 + r_2 M_2 = 0.$$

Hieraus folgt: Eine Strahleninvolution wird von jeder Geraden in einer Punktinvolution geschnitten; die Schnittpunkte eines Strahlenpaars bilden ein Punktpaar.

Dieser Satz zeigt, wie man eine quadratische Strahleninvolution ergänzt. Man schneidet die Strahlenpaare N_1, N_2 durch eine Gerade in den Punktpaaren M_1 und M_2, ergänzt die durch diese beiden Paare bestimmte Punktinvolution und verbindet jedes Punktpaar derselben mit dem Träger der Strahleninvolution, so erhält man die Strahlenpaare derselben. Insbesondere erhält man die Asymptoten der Strahleninvolution aus den Asymptotenpunkten der Punktinvolution.

10. Den Begriff projectiver Verwandtschaft hat man auch auf Involutionen ausgedehnt.

Sind $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 \equiv \gamma_1 K_1 + \gamma_2 K_2 = 0$ drei Paare einer Involution, so kann die Gleichung für jedes vierte Paar in der Form geschrieben werden

$$K \equiv r_1\gamma_1 K_1 + r_2\gamma_2 K_2 = 0.$$

Das Verhältniss $r_1 : r_2$ heisst das Doppelverhältniss der vier Paare $K_1 K_2 K_3 K$ und wird symbolisch durch $(K_1\, K_2\, K_3\, K)$ bezeichnet.

Dieser Begriff lässt sich geometrisch anschaulich machen. Ist A ein fester Punkt der Geraden, auf welcher eine quadratische Punktinvolution liegt, und ist α sein Abstand vom Nullpunkte O, so wollen wir den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{P}$ zu jedem Paare der Involution und zu A bestimmen. Ist $O\mathfrak{P} = l$, so ist, wenn $\mathfrak{P}$ die Strecke PP' im Verhältnisse $\nu_2 : \nu_1$ theilt:

$$1. \qquad l = \frac{\nu_1\lambda + \nu_2\lambda'}{\nu_1 + \nu_2}.$$

Nun sind aber $PP'A\mathfrak{P}$ harmonisch; also ist nach dem Begriffe harmonischer Punktpaare $\nu_2 : \nu_1 = -PA : AP' = -(\alpha - \lambda) : (\lambda' - \alpha)$; folglich, wenn man in 1. direkt $\nu_2 = -(\alpha - \lambda)$, $\nu_1 = \lambda' - \alpha$ setzt:

$$2. \qquad l = \frac{2\lambda\lambda' - \alpha(\lambda + \lambda')}{\lambda + \lambda'}.$$

Sind nun $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, $M_3 \equiv \gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2 = 0$, $M \equiv r_1\gamma_1 M_1 + r_2\gamma_2 M_2 = 0$ die Gleichungen zur Bestimmung der Punktepaare M_1, M_2, M_3, M, so ergeben sich für $\lambda\lambda'$ und $\lambda + \lambda'$ aus der Gleichung $M = 0$ die Werthe

$$3. \qquad \lambda\lambda' = \frac{r_1\gamma_1 a_2 + r_2\gamma_2 b_2}{r_1\gamma_1 a_0 + r_2\gamma_2 b_0}\,, \quad -(\lambda + \lambda') = 2\,\frac{r_1\gamma_1 a_1 + r_2\gamma_2 b_1}{r_1\gamma_1 a_0 + r_2\gamma_2 b_0}.$$

Aus diesen folgt weiter

$$4. \qquad l = -\frac{r_1\gamma_1(a_2 + \alpha a_1) + r_2\gamma_2(b_2 + \alpha b_1)}{r_1\gamma_1 a_1 + r_2\gamma_2 b_1}.$$

Setzt man hierin der Reihe nach $r_2 = 0$, $r_1 = 0$, $r_2 = r_1 = 1$, so ergiebt sich für die Punkte $\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3$, welche den Paaren $M_1\,M_2\,M_3$ und dem Punkte A harmonisch zugeordnet sind

$$5. \qquad l_1 = -\frac{a_2 + \alpha a_1}{a_1}\,, \quad l_2 = -\frac{b_2 + \alpha b_1}{b_1}$$
$$l_3 = -\frac{\gamma_1(a_2 + \alpha a_1) + \gamma_2(b_2 + \alpha b_1)}{\gamma_1 a_1 + \gamma_2 b_1} = \frac{\gamma_1 a_1 l_1 + \gamma_2 b_1 l_2}{\gamma_1 a_1 + \gamma_2 b_1}.$$

Hiernach lässt sich für l schreiben:

$$6. \qquad l = \frac{r_1\gamma_1 a_1 l_1 + r_2\gamma_2 b_1 l_2}{r_1\gamma_1 a_1 + r_2\gamma_2 b_1}.$$

Das Doppelverhältniss der vier Punkte $\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3\,\mathfrak{P}$ folgt aus 5. und 6. zu:

$$(\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3\,\mathfrak{P}) = r_1 : r_2 .$$

Dies ergiebt den Satz: Vier Punktpaare einer quadratischen Punktinvolution und die vier Punkte, welche den vier Paaren und einem festen Punkte harmonisch zugeordnet sind, haben gleiches Doppelverhältniss.

Schneidet man eine Strahleninvolution durch eine Gerade und beachtet, dass harmonische Strahlen in harmonischen Punkten geschnitten werden, so findet man, dass sich der soeben mitgetheilte Satz auch auf Strahleninvolutionen ausdehnen lässt: Vier Strahlenpaare einer quadratischen Strahleninvolution und die Strahlen, die den vier Paaren und einem festen Strahle harmonisch zugeordnet sind, haben dasselbe Doppelverhältniss.

11. Sind $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 \equiv \gamma_1 K_1 + \gamma_2 K_2 = 0$ drei Paare einer Punkt- oder Strahleninvolution; sind ferner $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 \equiv \delta_1 L_1 + \delta_2 L_2 = 0$ Paare einer andern Punkt- und Strahleninvolution, oder Punkte einer Geraden, oder Strahlen eines Büschels, so heissen die beiden Gebilde projectiv, wenn jedem Paare der Involution das Paar der andern Involution, bez. der Punkt der Geraden oder der Strahl des Büschels zugeordnet wird, für welche die Gleichung der Doppelverhältnisse besteht:

$$(K_1\,K_2\,K_3\,K) = (L_1\,L_2\,L_3\,L) .$$

Es entsprechen sich also dann

$$K \equiv r_1\gamma_1 K_1 + r_2\gamma_2 K_2 = 0 \text{ und } L \equiv r_1\delta_1 L_1 + r_2\delta_2 L_2 = 0.$$

Die Ergänzung projectiver Involutionen wird erst später, bei Gelegenheit der Entwicklungen über Curvenbüschel zweiter Ordnung, mitgetheilt werden.

12. Wir schliessen diesen Abschnitt mit der Betrachtung einer Entartung der quadratischen Punkt- und der Strahleninvolution, die sich in ähnlicher Weise auch auf Involutionen dritten, vierten etc. Grades ausdehnen lässt.

Haben zwei Punktpaare M_1 und M_2 einer Involution einen gemeinsamen Punkt, so wollen wir diesen Punkt zum Nullpunkte wählen. Die Gleichungen $M_1 = 0$ und $M_2 = 0$ vereinfachen sich jetzt zu

1. $$M_1 \equiv a_0\lambda^2 + 2a_1\lambda = 0,$$
2. $$M_2 \equiv b_0\lambda^2 + 2b_1\lambda = 0.$$

Die Gleichung eines beliebigen Paares M wird daher

3. $$M \equiv r_1 M_1 + r_2 M_2 \equiv (r_1 a_0 + r_2 b_0)\lambda^2 + 2(r_1 a_1 + r_2 b_1)\lambda = 0.$$

Diese Gleichung hat ebenso, wie 1. und 2., die Wurzel $\lambda = 0$.

Die Abstände $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda$ der übrigen nicht in den Nullpunkt fallenden Punkte $P_1\,P_2\,P$ der Paare $M_1\,M_2\,M$ bestimmen sich aus den Gleichungen

$$P_1 \equiv a_0\lambda + 2a_1 = 0,$$
$$P_2 \equiv b_0\lambda + 2b_1 = 0,$$
$$P \equiv r_1 P_1 + r_2 P_2 \equiv (r_1 a_0 + r_2 b_0)\lambda + 2(r_1 a_1 + r_2 b_1) = 0.$$

Fügt man zu M_1 und M_2 ein drittes und viertes Paar M_3 und M derart, dass man setzt

$$M_3 \equiv \gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2 = 0, \quad M \equiv \rho_1\gamma_1 M_1 + \rho_2\gamma_2 M_2 = 0,$$

so wird $P_3 \equiv \gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 = 0, \quad P \equiv \rho_1\gamma_1 P_1 + \rho_2\gamma_2 P_2 = 0$

und hieraus folgen für die Abstände OP_1, OP_2, OP_3, OP die Werthe

$$\lambda_1 = -\frac{2a_1}{a_0}, \quad \lambda_2 = -\frac{2b_1}{b_0}, \quad \lambda_3 = -\frac{2\gamma_1 a_1 + 2\gamma_2 b_1}{\gamma_1 a_0 + \gamma_2 b_0} = \frac{\gamma_1 a_0 \lambda_1 + \gamma_2 b_0 \lambda_2}{\gamma_1 a_0 + \gamma_2 b_0}$$

$$\lambda = -\frac{2\rho_1\gamma_1 a_1 + 2\rho_2\gamma_2 b_1}{\rho_1\gamma_1 a_0 + \rho_2\gamma_1 b_0} = \frac{\rho_1\gamma_1 a_0\lambda_1 + \rho_2\gamma_2 b_0\lambda_2}{\rho_1\gamma_1 a_0 + \rho_2\gamma_2 b_0} .$$

Aus diesen vier Werthen erhält man das Doppelverhältniss der vier Punkte

$$(P_1 P_2 P_3 P) = \rho_1 : \rho_2 ,$$

es ist daher gleich dem Doppelverhältniss der vier Paare der Involution:

$$(P_1 P_2 P_3 P) = (M_1 M_2 M_3 M) .$$

Wir übertragen diese Bemerkungen sogleich auf Strahleninvolutionen und haben daher den Satz: Haben zwei Paare einer quadratischen Involution ein Element gemein, so gehört dieses Element allen Paaren der Involution an; die Reihe der übrigen Elemente ist mit der Involution projectiv.

§ 8. Der Kreis.

1. Hat das Centrum M eines Kreises die Coordinaten a und b und ist ρ der Radius des Kreises, so gilt für jeden Punkt P des Kreises die Gleichung

$$\overline{MP}^2 = \rho^2 ,$$

das ist $\qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 = \rho^2$, oder entwickelt und geordnet:

1. $\qquad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - \rho^2 = 0.$

Dies ist die Gleichung des Kreises.

Giebt man dem Centrum besondere Lagen gegen die Coordinatenachsen, so gehen aus der allgemeinen Gleichung des Kreises besondere Modificationen derselben hervor.

Y, P, M, X, 0, M′, P′

(M. 385.)

Liegt das Centrum im Nullpunkte, so ist $a = b = 0$; die Gleichung des Kreises lautet daher

2. $\qquad x^2 + y^2 - \rho^2 = 0.$

Liegt das Centrum auf der X-Achse, so ist $b = 0$, und die Gleichung ändert sich ab zu:

3. $\qquad x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - \rho^2 = 0.$

Liegt das Centrum auf der Y-Achse, so erhält man

4. $\qquad x^2 + y^2 - 2by + b^2 - \rho^2 = 0.$

Geht der Kreis durch den Nullpunkt, so hat das rechtwinklige Dreieck $OM'M$ die Hypotenuse ρ, daher ist

$$a^2 + b^2 = \rho^2 ,$$

also erhält man die Gleichung:

5. $\qquad x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0.$

Berührt der Kreis die Y-Achse im Nullpunkte, so vereinen sich die Fälle 3. und 5. und man hat die Gleichung:

6. $\qquad x^2 + y^2 - 2ax = 0$, oder $y = \sqrt{2ax - x^2}$.

Berührt der Kreis die X-Achse im Nullpunkte, so hat man:

7. $\qquad x^2 + y^2 - 2by = 0.$

2. Die Gleichung des Kreises

1. $\qquad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - \rho^2 = 0$

ist eine Gleichung zweiten Grades. Sie zeigt gegenüber einer allgemeinen Gleichung zweiten Grades in den Coordinaten x und y

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

die Besonderheiten, dass das Glied mit dem Coordinatenfaktor xy fehlt, und dass ferner die Glieder x^2 und y^2 den Coefficienten 1 haben.

Liegt umgekehrt eine Gleichung zweiten Grades vor

2. $\qquad mx^2 + my^2 + 2nx + 2py + q = 0,$

in welcher das Glied mit dem Coordinatenfaktor xy fehlt und in welcher x^2 und y^2 gleiche Coefficienten haben, so schreibe man für dieselbe

3. $$x^2 + y^2 + 2\frac{n}{m}x + 2\frac{p}{m}y + \frac{q}{m} = 0.$$

Der Vergleich von 3. mit 1. zeigt, dass 3. die Gleichung eines Kreises ist, dessen Centrum die Coordinaten hat

4. $$a = -n : m, \quad b = -p : m.$$

Ferner ist

$$a^2 + b^2 - \rho^2 = \frac{q}{m},$$

daher durch Verwendung der Werthe 4.

$$\rho^2 = \frac{1}{m^2}(n^2 + p^2 - qm).$$

Die Gleichung 2. ist also die Gleichung des Kreises, dessen Centrum die Coordinaten $(-n) : m$ und $(-p) : m$ und dessen Radius die Länge hat:

$$\rho = \frac{1}{m}\sqrt{n^2 + p^2 - qm}.$$

Es fragt sich, welche geometrische Bedeutung es hat, wenn der Radicand $n^2 + p^2 - qm$ negativ ist. Setzen wir $n^2 + p^2 = qm - s^2$, so wird also $qm = n^2 + p^2 + s^2$, daher geht die Gleichung 2. nach Multiplication mit m über in

$$m^2x^2 + m^2y^2 + 2nmx + 2pmy + n^2 + p^2 + s^2 = 0$$

oder

$$(mx + n)^2 + (my + p)^2 + s^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist durch reale Werthe von x und y nicht erfüllbar; denn für jeden realen Werth von x und y sind $(mx + n)^2$ und $(my + p)^2$ positive Grössen, die mit der positiven Grösse s^2 nicht die Summe Null geben können.

Ist also $n^2 + p^2 - qm$ negativ, so wird der Gleichung

$$mx^2 + my^2 + 2nx + 2py + q = 0$$

durch keinen realen Punkt genügt.

Nimmt m ab, während n, p und q gegebene endliche Werthe behalten, so wachsen die Grössen

$$a = -\frac{n}{m}, \quad b = -\frac{p}{m}, \quad \rho = \frac{1}{m}\sqrt{n^2 + p^2 - qm},$$

es wachsen also die Coordinaten des Kreiscentrums und der Radius. Geht m zur Grenze Null über, so werden a, b und ρ unendlich gross; die Gleichung des Kreises geht zugleich in die lineare Gleichung über $2nx + 2py + q = 0$.

Man kann daher eine gerade Linie als einen Kreis mit unendlich grossem Radius betrachten.

3. Setzt man abkürzend $a^2 + b^2 - \rho^2 = c$, so erscheinen in der Gleichung des Kreises

1. $$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

drei Constante, a, b und c.

Wird verlangt, dass ein Kreis K durch den Punkt P_1 geht, so muss die Gleichung 1. durch die Coordinaten $x_1\, y_1$ des Punktes P_1 erfüllt werden; die noch unbestimmten Constanten a, b, c müssen also der Gleichung genügen

2. $$x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + c = 0.$$

Dies ist eine lineare Gleichung; drei lineare Gleichungen sind zu vollständiger und eindeutiger Bestimmung von a, b und c ausreichend und nothwendig. Wir haben daher den analytisch-geometrischen Beweis des Satzes: Ein Kreis ist durch drei Punkte bestimmt.

Soll P auf dem Kreise liegen, der durch die gegebenen Punkte P_1 P_2 P_3 geht, so müssen die Coordinaten xy, $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ die Gleichung 1. erfüllen. Man hat daher die vier in a, b, c linearen Gleichungen

3.
$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + c &= 0 \\
x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 a - 2y_1 b + c &= 0 \\
x_2^2 + y_2^2 - 2x_2 a - 2y_2 b + c &= 0 \\
x_3^2 + y_3^2 - 2x_3 a - 2y_3 b + c &= 0.
\end{aligned}$$

Ihr Verein bedingt das Verschwinden der Determinante

4.
$$\begin{vmatrix} (x^2 + y^2) & x & y & 1 \\ (x_1^2 + y_1^2) & x_1 & y_1 & 1 \\ (x_2^2 + y_2^2) & x_2 & y_2 & 1 \\ (x_3^2 + y_3^2) & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist also die Gleichung des Kreises P_1 P_2 P_3.

Liegt P_3 auf der Geraden P_1 P_2, und theilt P die Strecke P_1 P_2 im Verhältniss $\lambda_2 : \lambda_1$, so hat man

$$x_3 = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad y_3 = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Multiplicirt man die letzte Zeile der Determinante 4. mit $\lambda_1 + \lambda_2$, ferner die zweite Zeile mit λ_1, die dritte mit λ_2, setzt in die vierte Zeile die Werthe ein

$$(\lambda_1 + \lambda_2) x_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad (\lambda_1 + \lambda_2) y_3 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

und subtrahirt dann von den Gliedern der vierten Zeile die Summen der homologen Glieder der zweiten und dritten Zeile, so wird das erste Glied der vierten Zeile zu $(\lambda_1 + \lambda_2)(x_3^2 + y_3^2) - \lambda_1 (x_1^2 + y_1^2) - \lambda_2 (x_2^2 + y_2^2)$. Die anderen Glieder der letzten Zeile werden sämmtlich gleich Null. Dividirt man dann die letzte Zeile durch das erste, von den veränderlichen Coordinaten x, y unabhängige Glied, so erhält man schliesslich als Gleichung des Kreises die Determinante:

$$\begin{vmatrix} (x^2 + y^2), & x, & y, & 1 \\ (x_1^2 + y_1^2) & x_1 & y_1 & 1 \\ (x_2^2 + y_2^2) & x_2 & y_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung reducirt sich bei Entwicklung der Determinante nach den Gliedern der letzten Zeile auf

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

d. i. auf die Gleichung der Geraden P_1 P_2, in Uebereinstimmung mit der vorigen Nummer.

4. Wird durch einen Punkt P_1 eine Gerade T gelegt, die mit der X-Achse den Winkel α bildet, so gilt für jeden Punkt P dieser Geraden:

$$OP' = OP_1' + P_1'P', \quad OP'' = OP_1'' + P_1''P''.$$

Setzt man $P_1 P = r$, so ist $P_1'P' = P_1 P \cos\alpha = r\cos\alpha$, $P_1''P'' = P_1 P \sin\alpha = r\sin\alpha$.

Da nun weiter $OP' = x$, $OP'' = y$, $OP_1' = x_1$, $OP_1'' = y_1$, so folgen die Formeln

$$x = x_1 + r\cos\alpha, \quad y = y_1 + r\sin\alpha.$$

Wir bestimmen nun die Strecken der Geraden T, welche von P_1 bis an die Peripherie des Kreises

2.
$$K \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

reichen; zu diesem Zwecke haben wir die Coordinatenwerthe aus 1. in 2. einzusetzen und die sich ergebende Gleichung für r aufzulösen. Wir erhalten

$$(x_1 + r\cos\alpha)^2 + (y_1 + r\sin\alpha)^2 - 2a(x_1 + r\cos\alpha) - 2b(y_1 + r\sin\alpha) + c = 0$$

oder nach fallenden Potenzen der Unbekannten r geordnet:

3. $r^2 + 2[(x_1 - a)\cos\alpha + (y_1 - b)\sin\alpha]r + x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + c = 0.$

Bezeichnet man die Wurzeln mit r', r'', so folgt aus 3. das Produkt der Wurzeln zu

4. $$r'r'' = x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + c.$$

Dieser Werth ist unabhängig von der Richtung der Geraden T, er hängt nur von den Constanten des Kreises und von den Coordinaten des Punktes P_1 ab. Wir haben daher den (aus der Planimetrie bekannten) Satz: Wird ein Strahlenbüschel von einem Kreise geschnitten, so ist das Produkt der Strecken, die auf jedem Strahle vom Büschelträger bis an den Kreis reichen, von constanter Grösse. Dieses constante Produkt wird bekanntlich die Potenz des Punktes P_1 in Bezug auf den Kreis genannt; die rechte Seite der Gleichung 4. lehrt: Die Potenz eines Punktes P_1 in Bezug auf den Kreis $K \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ ist der Werth, den die Function $K \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$ annimmt, wenn man in dieselbe die Coordinaten x_1, y_1 des Punktes P_1 einsetzt.

Ist $r'r''$ positiv, so haben r' und r'' gleiches Zeichen, erstrecken sich also auf derselben Seite von P_1; ist $r'r''$ negativ, so haben r' und r'' verschiedene Zeichen und erstrecken sich daher zu beiden Seiten von P_1. Der Werth K ist also positiv für alle Punkte P_1 ausserhalb und negativ für alle Punkte innerhalb des Kreises $K = 0$.

5. Die Punkte, welche der Kreis

1. $$K \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

mit der Geraden

2. $$T \equiv mx + ny + p = 0$$

gemein hat, besitzen Coordinaten, welche die Gleichungen 1. und 2. befriedigen; dieselben sind also die Wurzeln dieser Gleichungen. Multiplicirt man 1. mit n^2 und dann mit m^2 und setzt die aus 2. genommenen Werthe

$$ny = -(mx + p),$$
$$mx = -(ny + p)$$

in die multiplicirten Gleichungen ein, so erhält man für x und y die Gleichungen:

3. $$(m^2 + n^2)x^2 + 2(mp - an^2 + bnm)x + p^2 + 2bnp + n^2c = 0,$$

4. $$(m^2 + n^2)y^2 + 2(np - bm^2 + anm)y + p^2 + 2amp + m^2c = 0.$$

Die Auflösungen dieser beiden quadratischen Gleichungen sind, wie man durch Substitution von $a^2 + b^2 - \rho^2$ für c und nach leichter Umformung gewinnt:

5. $$x = \frac{-mp + an^2 - bnm}{m^2 + n^2} \pm \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \sqrt{\rho^2 - \frac{(ma + nb + p)^2}{m^2 + n^2}}$$
$$y = \frac{-np + bm^2 - anm}{m^2 + n^2} \mp \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \sqrt{\rho^2 - \frac{(ma + nb + p)^2}{m^2 + n^2}}.$$

Der Subtrahend des Radicanden, nämlich

$$\frac{(ma + nb + p)^2}{m^2 + n^2}$$

ist das Quadrat des Abstandes des Punktes a, b, d. i. des Kreiscentrums, von der Geraden T. Wir haben daher: Eine Gerade schneidet einen Kreis in zwei Punkten, oder berührt ihn in einem Punkte, oder verfehlt

ihn, je nachdem ihr Abstand vom Kreiscentrum kleiner, ebenso gross oder grösser als der Halbmesser des Kreises ist.

6. Die Bedingung der Berührung kann man schreiben

$$(m^2 + n^2)\rho^2 - (ma + nb + p)^2 = 0;$$

hieraus folgt weiter

$$1. \quad \left(\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{p^2}\right)\rho^2 - \left(\frac{m}{-p}a + \frac{n}{-p}b - 1\right)^2 = 0.$$

Da nun $\frac{m}{-p}$ und $\frac{n}{-p}$ die Coordinaten u, v der Geraden T sind, so folgt aus 1. die Gleichung des Kreises in Liniencoordinaten zu

$$2. \quad (u^2 + v^2)\rho^2 - (au + bv - 1)^2 = 0.$$

Wir bemerken hierzu, dass $au + bv - 1 = 0$ die Gleichung des Kreismittelpunktes in Liniencoordinaten ist.

Wir wollen die linke Seite der Gleichung des Kreises in Liniencoordinaten mit $\mathfrak{K}$ (für verschiedene Kreise mit $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}_1$, . .), und mit denselben Buchstaben auch den durch die Gleichung $\mathfrak{K} = 0$ dargestellten Kreis bezeichnen. Ein Kreis wird daher mit K oder $\mathfrak{K}$ bezeichnet, je nachdem wir von seiner Gleichung in Punkt- oder in Liniencoordinaten ausgehen.

7. Die Gleichung der Geraden, die den Kreis

$$K \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

im Punkte P_1 berührt, kann aus der Bemerkung gewonnen werden, dass die Tangente durch P_1 geht und normal zu MP_1 ist. Die Gleichung von MP_1 ist (§ 5, No. 3) $(y_1 - b)x - (x_1 - a)y + (x_1 b - y_1 a) = 0$, folglich ist die Gleichung der Tangente (§ 5, No. 9)

$$(x_1 - a)(x - x_1) + (y_1 - b)(y - y_1) = 0.$$

8. Um die Coordinaten der gemeinsamen Tangenten zweier Kreise $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ zu erhalten, haben wir die Gleichungen beider Kreise in Liniencoordinaten aufzustellen

$$1. \quad \mathfrak{K}_0 \equiv (u^2 + v^2)\rho_0^2 - (a_0 u + b_0 v - 1)^2 = 0,$$

$$2. \quad \mathfrak{K}_1 \equiv (u^2 + a^2)\rho_1^2 - (a_1 u + b_1 v - 1)^2 = 0,$$

und die Wurzeln dieses Systems zu bestimmen.

Wir wollen die Ausdrücke $a_0 u + b_0 v - 1$ und $a_1 u + b_1 v - 1$ mit P_0 und P_1 bezeichnen, so dass also $P_0 = 0$ und $P_1 = 0$ die Gleichungen der Mittelpunkte beider Kreise sind. Dann gewinnen wir aus 1. und 2.

$$3. \quad \rho_0^2\mathfrak{K}_1 - \rho_1^2\mathfrak{K}_0 \equiv \rho_1^2 P_0^2 - \rho_0^2 P_1^2 = 0.$$

Die linke Seite der Gleichung 3. zerfällt in Faktoren

$$4. \quad (\rho_1 P_0 - \rho_0 P_1)(\rho_1 P_0 + \rho_0 P_1) = 0,$$

also zerfällt die Gleichung in die linearen Gleichungen

$$5. \quad \mathfrak{P} \equiv \rho_1 P_0 - \rho_0 P_1 = 0, \qquad 6. \quad \mathfrak{P}' \equiv \rho_1 P_0 + \rho_0 P_1 = 0.$$

Die Coordinaten der gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ erfüllen also entweder die Gleichung 5. oder 6., gehen also durch den Punkt $\mathfrak{P} = 0$ oder durch den $\mathfrak{P}' = 0$; und umgekehrt: Jede Gerade, welche durch $\mathfrak{P} = 0$ oder durch $\mathfrak{P}' = 0$ geht und der Gleichung $\mathfrak{K}_0 = 0$ genügt, d. i. also jede von $\mathfrak{P}$ oder von $\mathfrak{P}_1$ an den Kreis $\mathfrak{K}_0$ gelegte Tangente, genügt auch der Gleichung $\mathfrak{K}_1 = 0$, ist also gemeinsame Tangente beider Kreise.

Wie aus den Gleichungen 5. und 6. ersichtlich ist, liegen die beiden Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ auf der Geraden $P_0 P_1$, also auf der Centralen beider Kreise. Nach § 2, No. 6, theilen sie die Strecke $P_0 P$ in den Verhältnissen

$$P_0\mathfrak{P} : \mathfrak{P}P_1 = -\rho_0 : \rho_1, \quad P_0\mathfrak{P}' : \mathfrak{P}'P_1 = \rho_0 : \rho_1.$$

Die beiden Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ theilen also die Strecke zwischen den Centren P_0 und P_1 aussen und innen im Verhältniss der Kreisradien ρ_0 und ρ_1. Diese beiden Punkte werden als der äussere und der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise bezeichnet.

Der soeben mitgetheilte Satz über die Lage der Aehnlichkeitspunkte liefert folgende Construction derselben: Die Verbindungsgerade zweier parallelen gleichgerichteten Radien zweier Kreise trifft die Centrale im äusseren Aehnlichkeitspunkte; die Verbindungsgerade zweier parallelen Radien von entgegengesetzter Richtung trifft die Centrale im innern Aehnlichkeitspunkte.

9. Die Aehnlichkeitspunkte je zweier von drei Kreisen $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ werden erhalten, indem man die Seiten des von den Kreismittelpunkten P_0, P_1, P_2 gebildeten Dreiecks der Reihe nach in den Verhältnissen $\rho_0 : \rho_1$, $\rho_1 : \rho_2$, $\rho_2 : \rho_0$ innen und aussen theilt. Nach § 5, No. 20 liegen diese sechs Aehnlichkeitspunkte viermal zu je dreien auf einer Geraden; diese vier Geraden nennt man die Aehnlichkeitsachsen der drei Kreise. Eine Aehnlichkeitsachse enthält die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte; jede der drei andern Aehnlichkeitsachsen enthält zwei innere und einen äusseren Aehnlichkeitspunkt.

10. Die Coordinaten der gemeinsamen Punkte zweier Kreise

1. $$K_1 \equiv x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0,$$

2. $$K_2 \equiv x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = 0$$

sind die Wurzeln Gleichungen 1. und 2.

Bei der Aufsuchung der Wurzeln zweier Gleichungen höhern Grades hat man zunächst zu untersuchen, ob gemeinsame unendlich grosse Wurzeln vorhanden sind.

Zu diesem Zwecke führt man bekanntlich für x und y neue Unbekannte ein, indem man $x = r\omega$, $y = s\omega$ setzt und dann ω ins Unendliche wachsen lässt. Hat man diese Einsetzung in der Gleichung $f(x, y) = 0$ vorgenommen, so ordene man die Gleichung nach Potenzen von ω und dividire dann durch die höchste Potenz von ω (deren Exponent gleich dem Grade der Function $f(x, y)$ ist). Dann werden die Glieder von $f(x, y)$, welche den Grad der Function besitzen, von ω befreit; alle anderen Glieder, deren Grad niedriger ist als der Grad der Function, erhalten eine Potenz von ω als Divisor. Ist die Function $f(x, y)$ vom Grade n, so ist die Gesammtheit der Glieder vom Grade n eine homogene Function von x und y:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny_n.$$

Nachdem man $x = r\omega$, $y = s\omega$ eingesetzt und die Gleichung durch ω^n dividirt hat, geht die Gleichung $f(x, y)$ über in

1. $$a_0r^n + a_1r^{n-1}s + a_2r^{n-2}s^2 + \ldots + a_{n-1}rs^{n-1} + a_ns^n + Q = 0,$$

wobei Q aus Gliedern besteht, deren jedes eine Potenz von ω als Divisor enthält.

Lässt man nun ω über alle Grenzen wachsen, so nähert sich Q der Grenze Null, die Gleichung reducirt sich also auf

2. $$a_0r^n + a_1r^{n-1}s + \ldots + a_{n-1}rs^{n-1} + a_ns^n = 0.$$

Aus dieser folgt nach Division durch s^n:

3. $$a_0\left(\frac{r}{s}\right)^n + a_1\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{r}{s}\right)^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\frac{r}{s} + a_n = 0.$$

Die Gleichung liefert n Werthe für das Verhältniss $r : s$, die zum Theil oder auch, bei geraden n, sämmtlich aus conjugirt complexen Werthpaaren bestehen können.

Die Gleichung $f(x, y) = 0$ ist die Gleichung einer Curve $n$ten Grades. Wir haben daher den Satz: Eine Curve $n$ten Grades hat n in unendlicher Entfernung liegende Punkte; dieselben liegen in der Richtung der durch den Nullpunkt gezogenen Geraden, die die Gleichung haben $x:y = r:s$, wobei $r:s$ eine Wurzel der Gleichung ist:

$$a_0 \left(\frac{r}{s}\right)^n + a_1 \left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \frac{r}{s} + a_n = 0.$$

11. Wir können diesen Satz auch für den Fall gelten lassen, dass die Gleichung 3. conjugirt complexe Wurzeln enthält; mir müssen uns nur dann dazu entschliessen, auch von imaginären Punkten zu sprechen, und zwar in dem Sinne, dass wir sagen: ein Punkt mit den complexen Coordinaten $x = a + ib$, $y = c + id$, $(i \equiv \sqrt{-1})$ liegt auf einer Curve $f(x, y) = 0$, wenn diese complexen Werthe der Gleichung genügen. Imaginäre Punkte sind allerdings nicht construirbar und geometrisch nicht vorstellbar; durch ihre Einführung in die Geometrie gewinnen aber solche Sätze, die durch analytische Operationen abgeleitet worden sind, einen höhern Grad von Allgemeinheit, und es zeigt sich auf geometrischem Gebiete derselbe Vortheil, den die Algebra durch Anerkennung der complexen Zahlen erlangt hat.

Hat man sich zu imaginären Punkten verstanden, so liegt nun kein Bedenken dagegen vor, in besonderen Fällen auch complexe Gerade oder überhaupt complexe Curven einzuführen, indem man darunter solche Linien versteht, in deren Gleichungen complexe Coefficienten vorkommen.

Die allgemeinste Form der Gleichung einer complexen Geraden ist

$$T \equiv (a + ia')x + (b + ib')y + (c + ic') = 0.$$

Soll diese Gleichung durch einen realen Punkt erfüllt werden, so müssen dessen Coordinaten den einzelnen Gleichungen genügen

$$ax + by + c = 0,$$
$$a'x + b'y + c' = 0.$$

Hieraus folgt ein einziges Wurzelpaar x, y. Wir können daher den Satz aufstellen: Jede imaginäre Gerade enthält einen, aber auch nur einen, realen Punkt.

Als conjugirt complexe Gerade werden wir folgerichtig zwei Gerade bezeichnen, deren Coefficienten der Reihe nach conjugirt complex sind.

Die conjugirt complexe Gerade zu T ist also

$$T' \equiv (a - ai')x + (b - ib')y + (c - ic') = 0.$$

Wir haben daher den Satz: Conjugirt complexe Gerade haben einen realen Punkt gemein.

Unter conjugirt complexen Punkten haben wir zwei Punkte zu verstehen, deren Abscissen und deren Ordinaten conjugirt complexe Werthe haben. Sind also $x = \xi + i\mathfrak{x}$, $y = \eta + i\mathfrak{y}$ die Coordinaten eines Punktes P, so hat der conjugirt complexe Punkt P' die Coordinaten $x = \xi - i\mathfrak{x}$, $y = \eta - i\mathfrak{y}$. Soll durch P eine reale Gerade gehen, $ax + by + c = 0$, so müssen die beiden Gleichungen erfüllt sein $a\xi + b\eta + c = 0$, $a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} = 0$. Hieraus folgt

$$\frac{a}{c} = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}\eta - \xi\mathfrak{y}}, \quad \frac{b}{c} = -\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}\eta - \xi\mathfrak{y}}.$$

Hierdurch ist die reale Gerade eindeutig bestimmt; die Coefficientenverhältnisse $a:c$ und $b:c$ ändern sich nicht, wenn die Werthe $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ihre Zeichen wechseln, d. i. wenn man den Punkt P mit dem conjugirt complexen Punkt P' vertauscht. Wir erhalten daher die Sätze: Durch einen complexen Punkt

geht eine, und nur eine reale Gerade. Zwei conjugirt complexe Punkte liegen auf derselben realen Geraden.

12. Wir kehren nun zu der in No. 9 abgebrochenen Untersuchung zurück.

Setzen wir in der Gleichung eines Kreises $K \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, für x und y die Werthe $x = r\omega$, $y = s\omega$, und dividiren dann durch ω^2, so entsteht: $r^2 + s^2 - 2a \cdot \frac{1}{\omega} - 2b \cdot \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = 0$. Setzen wir nun, um die im Unendlichen liegenden Punkte des Kreises zu bestimmen, $\omega = \infty$, so folgt die Gleichung $r^2 + s^2 = 0$, welche für das Verhältniss $r:s$ die beiden conjugirten Werthe liefert $r:s = \pm i$.

Alle Punkte, deren Coordinatenverhältniss einen gegebenen Werth ν hat, liegen auf der durch den Ursprung gehenden Geraden $x:y = \nu$, oder $x - \nu y = 0$.

Wir sehen daher: Auf jedem Kreise liegen die beiden unendlich fernen conjugirt complexen Punkte, welche auf den durch den Ursprung gehenden conjugirt complexen Geraden $x - iy = 0$ und $x + iy = 0$ enthalten sind. Hieraus folgt weiter: Alle Kreise einer Ebene haben zwei conjugirt complexe unendlich ferne Punkte mit einander gemein. Diese beiden Punkte bezeichnet man demgemäss als die imaginären Kreispunkte der Ebene.

13. Um die nicht unendlich fern gelegenen gemeinsamen Punkte zweier Kreise zu erhalten, subtrahiren wir die Gleichungen der beiden Kreise

1. $$K_1 \equiv x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0,$$
2. $$K_2 \equiv x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = 0,$$

und erhalten

3. $$L \equiv K_1 - K_2 \equiv 2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y - (c_2 - c_1) = 0.$$

Die Gleichung 3. ist linear, ist also die Gleichung einer von beiden Kreisen abhängigen Geraden; man nennt dieselbe die Chordale der beiden Kreise. Jeder Punkt, den die Chordale mit einem der beiden Kreise K_1 oder K_2 gemein hat, genügt der Gleichung 3. und einer der Gleichungen 1. oder 2.; seine Coordinaten annulliren also das Polynom $L \equiv K_1 - K_2$, und eines der Polynome K_1 oder K_2; folglich annulliren sie auch das andere, der Punkt liegt daher auch auf dem andern Kreise. Die im Endlichen liegenden Schnittpunkte der beiden Kreise sind mithin die Punkte, in welchem einer derselben von der Chordalen geschnitten wird. Dies ergiebt: Zwei Kreise haben ausser den unendlich fernen imaginären Kreispunkten noch zwei Punkte gemein, die conjugirt complex, oder real sind; im letzteren Falle können sie von einander getrennt oder unendlich nahe beisammen liegen; beide Schnittpunkte sind auf der Chordalen enthalten.

Wenn die beiden Kreiscentra unendlich nahe zusammenrücken, die Radien aber von einander verschieden sind, so nähern sich die Differenzen $a_2 - a_1$ und $b_2 - b_1$ der Grenze Null, während die Differenz $c_1 - c_2$ einen endlichen Werth behält. Der Gleichung der Chordalen $L = 0$ kann dann nur durch unendlich grosse Werthe der Coordinaten genügt werden. Hieraus folgt: Zwei concentrische Kreise haben eine unendlich ferne Chordale; ihre vier Schnittpunkte sind sämmtlich unendlich fern und imaginär.

Die Verbindungsgerade der Centra zweier Kreise hat die Gleichung

$$(b_2 - b_1)x - (a_2 - a_1)y + (a_2b_1 - a_1b_2) = 0.$$

Hält man dieselbe mit der Gleichung der Chordalen zusammen

$$(a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y - (c_2 - c_1) = 0,$$

so folgt (§ 5, 9): Die Chordale zweier Kreise steht senkrecht auf der Verbindungslinie der Kreismittelpunkte.

14. Für jeden Punkt der Chordalen zweier Kreise K_1 und K_2 ist $L \equiv K_1 - K_2 = 0$, oder $K_1 = K_2$. Nach No. 4 folgt hieraus: Die Chordale zweier Kreise ist der Ort der Punkte, welche für beide Kreise gleiche Potenz haben.

Für zwei Kreise, die sich nicht in realen Punkten schneiden, ist daher die Chordale der Ort der Punkte, von denen aus gleich lange Tangenten an beide Kreise gezogen werden können; für Kreise, die zwei reale Schnittpunkte haben, ist sie nur, soweit sie ausserhalb der beiden Kreise liegt, der Ort der Punkte gleicher Tangenten; soweit sie innerhalb beider Kreise liegt, ist sie der Ort der Punkte, für welche die durch sie hindurchgehenden kürzesten Sehnen beider Kreise gleich sind.

15. Die Gleichungen der Chordalen je zweier der drei Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ ergeben sich zu

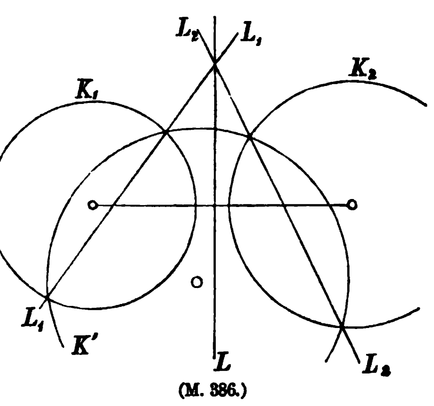
$$L_3 \equiv K_1 - K_2 = 0, \quad L_1 \equiv K_2 - K_3 = 0, \quad L_2 \equiv K_3 - K_1 = 0.$$

Wie man sieht, verschwindet die Summe $L_3 + L_1 + L_2$ identisch. Wir schliessen daher (§ 5, 11): Die drei Chordalen je zweier von drei Kreisen gehen durch einen Punkt; dieser Punkt hat gleiche Potenz für alle drei Kreise, er wird der Chordalpunkt der drei Kreise genannt.

Der Chordalpunkt ist unendlich fern, wenn zwei Chordalen (und mithin alle drei) parallel sind. Die Bedingung dafür, dass L_3 und L_1 parallel sind, ist (§ 5, 9) $\quad (a_1 - a_2) : (a_2 - a_3) = (b_1 - b_2) : (b_2 - b_3)$.

Aus § 5, 3 ist ersichtlich, dass alsdann die Centra der drei Kreise auf einer Geraden liegen.

16. Mit Hülfe des Chordalpunktes construirt man die Chordale zweier Kreise K_1 und K_2, die sich nicht in realen Punkten schneiden. Man construirt einen Kreis K', der K_1 und K_2 schneidet, zeichnet die Chordalen L_1 und L_2 dieses Kreises und der Kreise K_1 und K_2, indem man die realen Punkte verbindet, in denen K_1 und K_2 von K' geschnitten werden; durch den Schnittpunkt von L_1 und L_2 geht die gesuchte Chordale und ist normal zur Verbindungslinie der Centren von K_1 und K_2.



(M. 386.)

17. Es entsteht die Frage, ob die drei Kreise auch so gelegen sein können, dass die Chordalen L_3 und L_1, und mithin alle drei Chordalen L_1, L_2, L_3 zusammenfallen.

Wenn $L_3 = 0$ und $L_1 = 0$ geometrisch identisch sind, so kann die Function L_3 von der Function L_1 nur um einen constanten Faktor verschieden sein, es giebt also dann eine Zahl m, für welche die Identität gilt $L_1 \equiv mL_3$.

Hieraus folgen die einzelnen Beziehungen:

$$a_3 - a_2 = m(a_2 - a_1); \quad b_3 - b_2 = m(b_2 - b_1); \quad c_3 - c_2 = m(c_2 - c_1).$$

Aus denselben folgen:

1. $a_3 = -ma_1 + (1+m)a_2$; $b_3 = -mb_1 + (1+m)b_2$; $c_3 = -mc_1 + (1+m)c_2$.

Setzt man $-m = n_1$, $1 + m = n_2$, so gehen die Formeln 1. über in
2. $a_3 = n_1 a_1 + n_2 a_2$, $b_3 = n_1 b_1 + n_2 b_2$, $c_3 = n_1 c_1 + n_2 c_2$, wobei $n_1 + n_2 = 1$.

Die Gleichung des Kreises K_3 erscheint nun in der Form:

$$K_3 \equiv x^2 + y^2 + 2(n_1 a_1 + n_2 a_2)x + 2(n_1 b_1 + n_2 b_2)y + n_1 c_1 + n_2 c_2 = 0.$$

Schreibt man für die Summe $x^2 + y^2$ den Ausdruck $(n_1 + n_2)x^2 + (n_1 + n_2)y^2$, so erhält man für K_3 die Darstellung $K_3 \equiv n_1 K_1 + n_2 K_2$.

Wenn also die Gleichung eines Kreises K_3 aus den Gleichungen zweier gegebenen Kreise K_1 und K_2 in der Weise abgeleitet wird:

$$K_3 \equiv n_1 K_1 + n_2 K_2 = 0,$$

so haben die drei Kreise eine gemeinsame Chordale. Wir bezeichnen dieselbe mit L.

Das Verhältniss $n_1 : n_2$ kann man beliebig ändern; denn es giebt immer zwei Zahlen, die zusammen 1 geben und ein gegebenes Verhältniss haben. Giebt man nun dem Verhältnisse $n_1 : n_2$ alle realen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man eine unendliche Anzahl von Kreisen K, die alle mit K_1 und mit K_2 die Chordale L haben. Sind K_α und K_β zwei dieser Kreise, so haben K_α und K_1, sowie K_β und K_1 die Chordale L, also ist L auch die Chordale von K_α und K_β. Je zwei Kreise dieser Folge von Kreisen haben also die Chordale L, die somit als die gemeinsame Chordale aller dieser Kreise bezeichnet werden kann.

Eine solche Gruppe von Kreisen nennt man ein Kreisbüschel. Durch zwei Kreise ist ein Kreisbüschel bestimmt; sind K_1 und K_2 zwei Kreise, so werden die Gleichungen aller andern Kreise des durch sie bestimmten Büschels in der Form erhalten: $K \equiv n_1 K_1 + n_2 K_2 = 0$. Alle Punkte, für welche $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$, annulliren auch K; also hat man den Satz: Alle Kreise eines Büschels haben gemeinsame reale oder imaginäre Schnittpunkte. Hieraus, sowie aus den Formeln 2. folgt ferner: Die Mittelpunkte aller Kreise eines Büschels liegen auf einer Geraden; dieselbe heisst die Centrale des Büschels.

18. Durch jeden Punkt der Ebene geht ein (und nur ein) Kreis eines gegebenen Kreisbüschels.

Denn soll der Büschelkreis

1. $$K \equiv n_1 K_1 + n_2 K_2 = 0$$

durch den Punkt P' (x', y') gehen, so müssen die Zahlen n_1 und n_2 so gewählt sein, dass K von den Coordinaten von P' annullirt wird. Bezeichnet man die Werthe, welche die Polynome K_1 und K_2 annehmen, wenn man darin die unbestimmten Coordinaten x, y durch die gegebenen Werthe x', y' ersetzt, mit K_1' und K_2', so hat man die Bedingung

$$n_1 K_1' + n_2 K_2' = 0, \quad \text{oder } n_1 : n_2 = K_2' : -K_1'.$$

Führt man dies in 1. ein, so ergiebt sich die Gleichung des durch P' gehenden Büschelkreises zu

2. $$K_2' K_1 - K_1' K_2 = 0.$$

Die Bedingung $n_1 + n_2 = 1$ braucht nicht festgehalten zu werden; um sie einzuhalten, hätte man die Gleichung 2. durch $K_2' - K_1'$ zu dividiren, doch ändert sich die geometrische Bedeutung einer Curvengleichung nicht, wenn man alle Glieder mit einem constanten Faktor multiplicirt oder dividirt.

Liegt der Punkt P' auf der Chordale, so ist bekanntlich $K_1' = K_2'$; man kann dann diesen Faktor aus der Gleichung 2. weglassen, und dieselbe geht daher über in $K_1 - K_2 = 0$, d. i. in die Gleichung der Chordale. Die

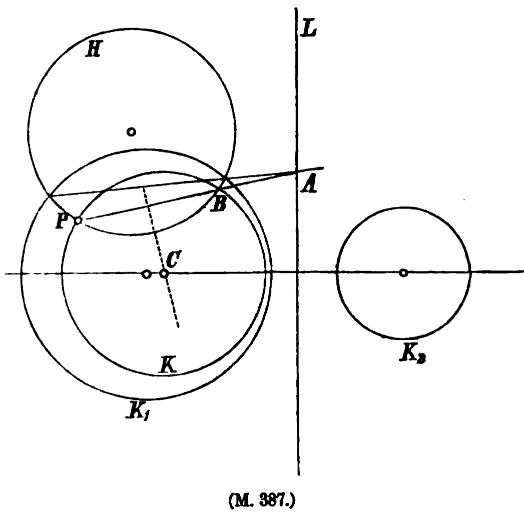
Chordale eines Kreisbüschels ist also selbst als Kreis des Büschels (mit unendlich grossem Radius) anzusehen.

19. Jeder Punkt der Chordale eines Büschels hat gleiche Potenz für alle Kreise des Büschels.

Von jedem Punkte der Chordale aus, der ausserhalb der Büschelkreise liegt, gehen gleich lange Tangenten an alle Büschelkreise.

Da nun ein Kreis, dessen Radius gleich der von seinem Centrum bis an einen Kreis K reichenden Tangente dieses Kreises ist, den Kreis K unter rechten Winkeln schneidet, so ergiebt sich der Satz: Von jedem Punkte der Chordale eines Kreisbüschels als Centrum lässt sich ein Kreis construiren, der alle Kreise des Büschels unter rechten Winkeln schneidet.

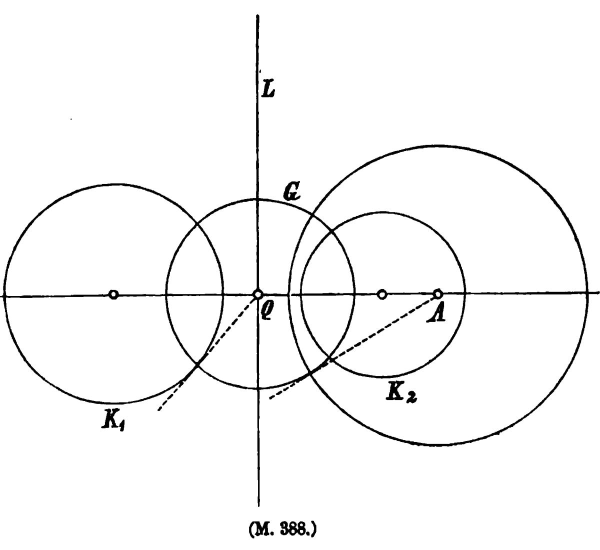
20. Die Aufgabe: »Den Kreis eines Büschels zu bestimmen, der durch einen gegebenen Punkt geht,« die in No. 18 ihre analytische Lösung gefunden hat, lässt sich auf Grund der mitgetheilten Sätze in folgender Weise constructiv lösen:



(M. 387.)

Durch den gegebenen Punkt P lege man einen Kreis H, der den Kreis K_1 (oder K_2) in zwei Punkten schneidet. Man ziehe die Chordale von H und K_1 und durchschneide damit die Büschelchordale L. Von diesem Schnittpunkte A aus ziehe man eine Gerade durch P, und bemerke den Punkt B, in welchem sie den Hülfskreis H zum zweiten Male trifft. Dann geht der gesuchte Büschelkreis K durch B, und sein Centrum ist also der Durchschnitt C der Normalhalbirenden von PB und der Centralen von K_1 und K_2.

Denn der Punkt A hat gleiche Potenz für H und K_1, sowie für H und K, also auch für K und K_1, mithin ist L die Chordale von K und K_1, also gehört K zu dem Büschel K_1K_2.

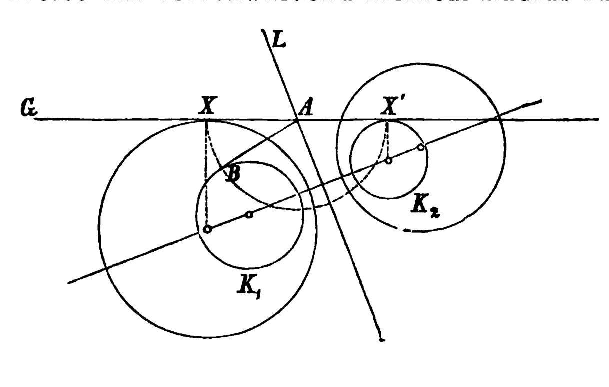


(M. 388.)

21. Den Kreis eines Büschels, der einen gegebenen Mittelpunkt A hat, findet man, wenn die Büschelkreise keine realen Schnittpunkte haben, durch folgende Construction:

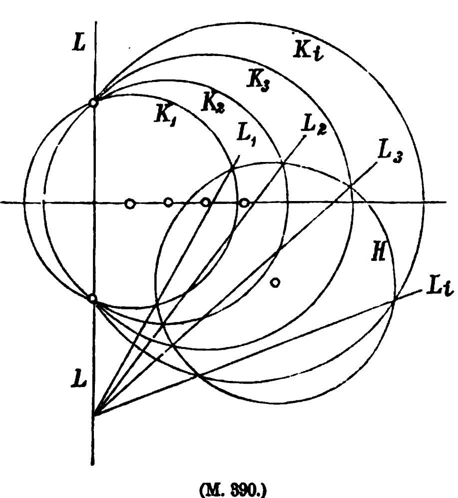
Von einem beliebigen Punkte der Büschelchordale aus (z. B. von dem Punkte Q aus, in welchem dieselbe die Büschelcentrale schneidet, lege man eine Tangente an einen der Büschelkreise und mit dieser Tangente als Halbmesser beschreibe man einen Kreis G; dieser Kreis trifft alle Kreise des Büschels unter rechten Winkeln (No. 19). Legt man daher von A aus Tangenten an G, so sind diese Tangenten Radien des gesuchten Kreises.

Hat man den Schnittpunkt Q der Büschelchordale und der Centrale zum Mittelpunkte von G genommen, so ist ersichtlich, dass die Aufgabe nur lösbar ist, wenn QA grösser ist als die von Q an die Büschelkreise gelegte Tangente. Ist QA gleich dieser Tangente, oder entgegengesetzt gleich, so verschwindet der Radius des gesuchten Kreises und derselbe zieht sich zu einem Punkte zusammen. Wir finden daher: Wenn die Kreise eines Büschels keine realen Schnittpunkte haben, so giebt es Centra der Büschelkreise nur ausserhalb des Kreises, der vom Schnittpunkte der Chordale und der Centrale aus normal zu den Büschelkreisen construirt wird; die beiden Gegenpunkte dieses Kreises, die auf der Centrale liegen, sind als Büschelkreise mit verschwindend kleinem Radius zu betrachten.



(M. 389.)

22. Um einen Kreis eines Büschels zu finden, der eine gegebene Gerade G berührt, bestimmen wir den Punkt X, in welchem der gesuchte Kreis die Gerade berührt. Durchschneiden wir (in A) die Gerade G mit der Büschelchordale L, und legen durch A eine Tangente AB an einen Kreis des Büschels, so ist (No. 19) AX gleich oder entgegengesetzt gleich der Strecke AB. Machen wir also $X'A = AX = AB$ und construiren die Büschelkreise, die durch X' und X gehen, so sind diese die Lösungen der Aufgabe.



(M. 390.)

23. Construirt man die Chordalen L_1, L_i eines beliebigen Kreises H mit den Kreisen K_1 und K_i des durch K_1 und K_2 bestimmten Büschels, so schneiden sich die Geraden L_1 (Chordale von H und K_1), L (Chordale von K_1 und K_i) und L_i (Chordale von K_i und H) in einem Punkte (nach No. 15), L_i trifft also L in dem Punkte, in welchem L von L_1 geschnitten wird; dieser Punkt bleibt unverändert derselbe, wenn man für K_i der Reihe nach alle Kreise des Büschels setzt. Wir haben daher: Die Chordalen, welche ein beliebiger fester Kreis mit allen den

einzelnen Kreisen eines Kreisbüschels bestimmt, treffen die Büschelchordale in demselben Punkte.

Wie man leicht sieht, ist die Construction No. 20 eine Anwendung dieses Satzes.

Man kann denselben auch leicht analytisch beweisen:

Die Gleichung des Kreises K_i sei

$$K_i \equiv n_{1i} K_1 + n_{2i} K_2 = 0\,, \qquad n_{1i} + n_{2i} = 1\,.$$

Die Gleichung der Chordale von K_i und H ist dann:

$$L_i \equiv K_i - H \equiv n_{1i} K_1 + n_{2i} K_2 - H = 0,$$

oder wenn man $n_{1i} = 1 - n_{2i}$ einsetzt:

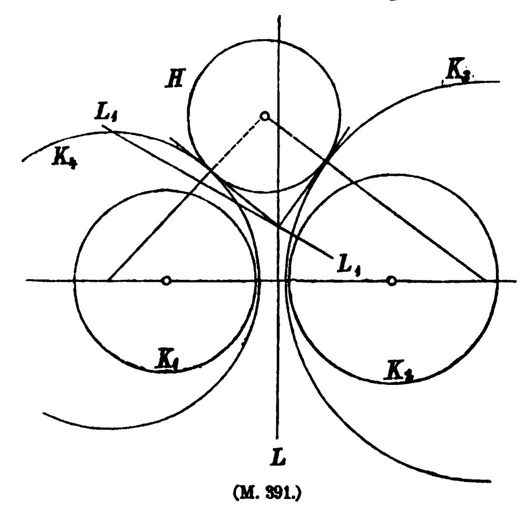
$$L_i \equiv K_1 - H - n_{2i}(K_1 - K_2) = 0.$$

Nun ist $K_1 - K_2 \equiv L = 0$ die Gleichung der Büschelchordale, und $K_1 - H = L_1 = 0$ die Gleichung der Chordale von K_1 und H; man hat also

$$L_i \equiv L_1 - n_{2i} L = 0$$

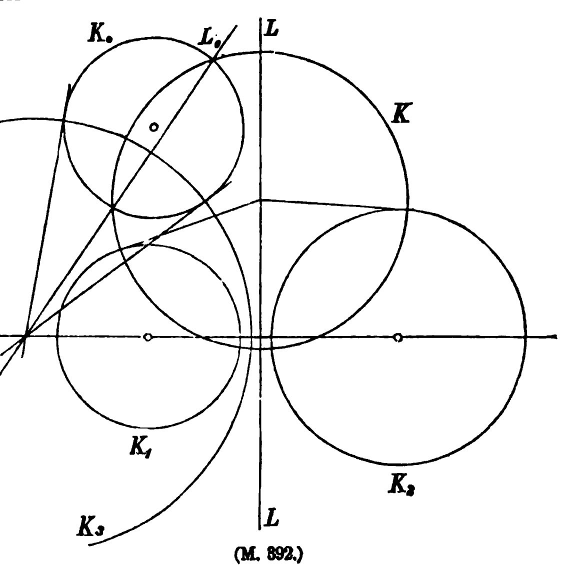
und erkennt daraus, dass L_i durch den Schnittpunkt von L und L_1 geht.

24. **Für die Kreise eines Büschels, die einen gegebenen Kreis** H berühren, ergiebt sich folgende Construction:



(M. 391.)

Man construire die Chordale L_1 des gegebenen Kreises H und des Büschelkreises K_1 und durchschneide damit die Büschelchordale L. Durch diesen Schnittpunkt C gehen dann auch die gemeinsamen Tangenten des Kreises H und der ihn berührenden Büschelkreise, da diese Tangenten die Chordalen des Kreises H und der gesuchten Kreise sind. Man lege also von C aus Tangenten an H, und construire die beiden Büschelkreise K_3 und K_4, welche durch die Berührungspunkte dieser Tangenten gehen.



(M. 392.)

Liegt C ausserhalb H, so giebt es zwei Büschelkreise, die den Kreis H berühren; liegt C auf H, so giebt es nur einen solchen Kreis; liegt C im Innern von H, so ist die Aufgabe nicht lösbar.

Der Kreis eines Büschels, der mit H eine Sehne von gegebener Länge a gemein hat, wird mit Hülfe des Punktes C und des Kreises gefunden, den die Sehnen

des Kreises H umhüllen, die von der Länge a sind. An diesen Kreis hat man von C aus Tangenten zu legen.

25. Den Kreis eines Büschels, der einen gegebenen Kreis K_0 unter rechten Winkeln schneidet, findet man nun leicht durch folgende Construction.

Von einem beliebigen Punkte der Chordale L als Centrum aus construire man einen Kreis K, der alle Büschelkreise rechtwinkelig schneidet. Hierauf construire man die Chordale L_0 von K und K_0; der Schnittpunkt von B_0' und der Büschelcentralen ist das Centrum des gesuchten Kreises, und die von diesem Centrum an die Kreise K und K_0 gelegten Tangenten, die alle vier gleiche Länge haben, sind Radien des gesuchten Kreises K_3.

§ 9. Transformation der Coordinaten.

1. Nachdem wir im vorigen Abschnitte eine besondere Curve zweiten Grades, den Kreis, untersucht haben, liegt uns nun zunächst ob, die Eigenschaften der Curven zweiten Grades ohne jede Beschränkung zu untersuchen.

Eine Gleichung zweiten Grades zwischen den Coordinaten x und y hat im allgemeinen Falle drei Glieder von der zweiten Potenz, nämlich mit den Coordinatenfaktoren x^2, xy, y^2; zwei Glieder von der ersten Potenz, nämlich Vielfache von x und y; und ein constantes Glied; die allgemeine Form der Gleichung einer Curve zweiten Grades ist daher

$$f \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Diese Gleichung enthält sechs unveränderliche Zahlen, a, b, c, d, e, f, die man durch Division durch eine derselben auf fünf reduciren kann. Giebt man allen oder einigen dieser Zahlen andere Werthe, so ändert sich die Curve f. Diese Aenderung kann zweierlei Art sein: entweder ändert sich nur die Lage der Curve gegen das Coordinatensystem, oder es ändert sich die Gestalt der Curve.

Das wesentliche Interesse ist, Eigenschaften einer Curve kennen zu lernen, die unabhängig von der zufälligen Lage des Coordinatensystems gegen die Curve sind. Wir fragen daher zunächst nach den Aenderungen, die die Coefficienten einer Curvengleichung erfahren, wenn man das Coordinatensystem ändert.

Die Ableitung einer Curvengleichung in Bezug auf ein neues System aus der Curvengleichung bezüglich des ursprünglichen Systems wird als die Transformation der Curvengleichung vom ursprünglichen in das neue System bezeichnet.

Die Transformation erfolgt in der Weise, dass man die Coordinaten eines Punktes, bez. einer Geraden, in Bezug auf das ursprüngliche System durch die Coordinaten bezüglich des neuen Systems ausdrückt, diese Werthe — die Transformationsformeln — in die Curvengleichung einführt und dieselbe schliesslich geeignet ordnet.

Die Coefficienten der transformirten Gleichung setzen sich aus den Coefficienten der ursprünglichen Gleichung und aus den Grössen zusammen, durch welche die Lage der neuen Coordinatenachsen gegen die ursprünglichen bestimmt wird. Durch geschickte Wahl des neuen Systems wird man es daher dahin bringen können, dass einige Coefficienten der Gleichung besonders einfache Werthe annehmen, und damit die transformirte Curvengleichung selbst eine einfachere, für weitere Untersuchungen besonders geeignete Gestalt erhält.

2. Die einfachste Aenderung des Coordinatensystems besteht in einer parallelen Verschiebung der Achsen; dabei ändert der Nullpunkt seine Lage, während die Achsenrichtungen unverändert bleiben. Eine fernere Aenderung

besteht in der Drehung des Coordinatensystems um den unveränderten Nullpunkt.

Jede beliebige Aenderung der Lage des Coordinatensystems kann, wie man leicht sieht, durch eine Verschiebung und nachherige Drehung (oder in umgekehrter Reihenfolge) erzeugt werden.

Wir wollen nun die Transformationsformeln der Punktcoordinaten zunächst für eine Verschiebung, dann für eine Drehung des Coordinatensystems um den Nullpunkt, und schliesslich für eine beliebige Aenderung des Coordinatensystems aufstellen; hierauf werden die Transformationsformeln der Liniencoordinaten folgen.

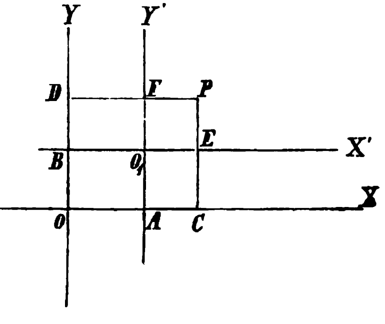
3. Transformationsformeln für eine parallele Verschiebung des Coordinatensystems.

Der Nullpunkt des neuen Coordinatensystems sei O_1, $OA = a$, $OB = b$ seien die Coordinaten von O_1 in Bezug auf das ursprüngliche System XOY, und die neuen Achsen OX_1 und OY_1 seien parallel und gleichgerichtet mit OX und OY; ferner sei $PC \parallel OY$, $PD \parallel OX$; dann sind OC und OD die Coordinaten des Punktes P bezüglich des ursprünglichen und O_1E und O_1F die Coordinaten bezüglich des neuen Systems. Nun ist

$$OC = OA + AC = OA + O_1E$$
$$OD = OB + BD = OB + O_1F.$$

Bezeichnet man mit x, y die Coordinaten von P im System XOY und mit x', y' die Coordinaten im neuen System $X'O_1Y'$, so folgt hieraus:

2. $\quad x = x' + a\,, \qquad y = y' + b\,.$



(M. 393.)

Dies sind die gesuchten Transformationsformeln.

Ist $f(x, y) = 0$ die Gleichung einer Curve in Bezug auf das System XOY, so erhält man also die Gleichung bezüglich des Systems $X'O_1Y'$, indem man in der Function $f(x, y)$ die Grössen x und y durch $x' + a$ und $y' + b$ ersetzt.

4. Transformationsformeln für eine Drehung des Coordinatensystems.

Hat das neue Coordinatensystem $X'OY'$ den Nullpunkt mit dem ursprünglichen XOY gemein und ist der Winkel $XOX' = \omega$; ist ferner $XOP = \varphi$, $X'OP = \varphi'$ und $OP = r$, so hat man bekanntlich, wenn x, y die Coordinaten von P im System XOY, und x', y' die im neuen System $X'OY'$ sind:

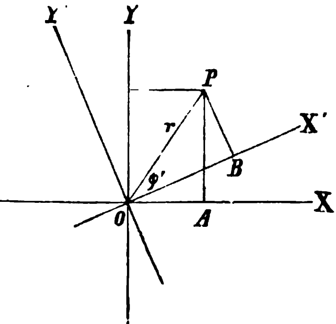
$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,.$$

Ersetzt man φ durch $\omega + \varphi'$, so entsteht:

$$x = r\cos(\omega + \varphi') = r\cos\omega\cos\varphi' - r\sin\omega\sin\varphi'$$
$$y = r\sin(\omega + \varphi') = r\sin\omega\cos\varphi' + r\cos\omega\sin\varphi'.$$

Nun ist aber $r\cos\varphi' = x'$, $r\sin\varphi' = y'$, also hat man die Transformationsformeln:

$$x = \cos\omega \cdot x' - \sin\omega \cdot y',$$
$$y = \sin\omega \cdot x' + \cos\omega \cdot y'.$$



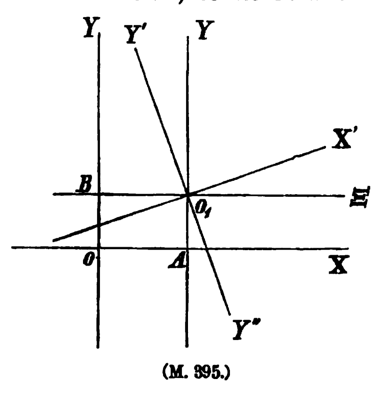
(M. 394.)

Ist $f(x, y) = 0$ die Gleichung einer Curve für das System XOY, so ist also die Gleichung dieser Curve für das System $X'OY'$:

$$f[(\cos\omega \cdot x' - \sin\omega \cdot y'), (\sin\omega \cdot x' + \cos\omega \cdot y')] = 0.$$

5. Transformationsformeln für eine beliebige Veränderung des Coordinatensystems.

Der Nullpunkt des neuen Systems sei O_1 und habe die Coordinaten $OA = a$ und $OB = b$; ferner sei O_1X' die positive Seite der neuen X-Achse; ist $Y'Y''$ normal zu OX', so ist entweder O_1Y' oder O_1Y'' die positive Hälfte der neuen Y-Achse. Wir können das Coordinatensystem XOY zunächst unter Beibehaltung der Achsenrichtungen verschieben, bis der Ursprung nach O_1 kommt und die Coordinatenachsen mit den zu OX und OY parallelen Geraden $O_1\Xi$ und $O_1\Upsilon$ zusammenfallen. Drehen wir hierauf das Coordinatensystem um den Punkt O_1, bis die positive Hälfte der Abscissenachse mit der positiven Hälfte der neuen Abscissenachse zusammenfällt, so falle dabei (wie in der Figur angedeutet) die positive Seite der Ordinatenachse auf O_1Y'. Ist nun O_1Y' die positive Hälfte der neuen Ordinatenachse, so ist also durch die erste Verschiebung und die nachfolgende Drehung das ursprüngliche System in das neue übergeführt. Ist aber O_1Y'' die positive Hälfte des neuen Systems, so kann man das ursprüngliche nicht durch Verschiebung und Drehung in das neue überführen; man muss vielmehr schliesslich das System noch im Raume um die Gerade O_1X' um einen gestreckten Winkel drehen, um die positive Hälfte der Ordinatenachse in die neue Lage zu bringen.



(M. 395.)

Wir wollen das ursprüngliche und das neue System im ersten Falle gleichsinnig, im letzteren ungleichsinnig nennen.

Sind x, y, ξ, η, x', y' die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf die Systeme XOY, $\Xi O_1\Upsilon$ und in Bezug auf das mit denselben gleichsinnige System $X'OY'$, so hat man nach No. 3. und 4.:

1. $$x = \xi + a, \quad y = \eta + b,$$

2. $$\xi = \cos\omega \cdot x' - \sin\omega \cdot y', \quad \eta = \sin\omega \cdot x' + \cos\omega \cdot y'.$$

Hieraus folgen die Transformationsformeln für gleichsinnige Systeme:

3. $$x = \cos\omega \cdot x' - \sin\omega \cdot y' + a$$
$$y = \sin\omega \cdot x' + \cos\omega \cdot y' + b.$$

Die Coordinaten eines Punktes in den Systemen $X'O_1Y'$ und $X'O_1Y''$ unterscheiden sich nur durch Vorzeichenwechsel der Ordinate; sind x', y' die Coordinaten von P in dem System, welches O_1X' und OY'' zu positiven Achsenhälften hat, so hat man daher für ungleichsinnige Systeme:

4. $$x = \cos\omega \cdot x' + \sin\omega \cdot y' + a$$
$$y = \sin\omega \cdot x' - \cos\omega \cdot y' + b.$$

6. Wir wenden uns nun zu den Transformationsformeln der Liniencoordinaten, und zwar zunächst für eine Verschiebung des Coordinatensystems.

Sind u, v die Coordinaten einer Geraden T im ursprünglichen Systeme, so ist die Gleichung von T in diesem Systeme:

1. $$ux + vy - 1 = 0.$$

Um die Gleichung im neuen Systeme $X'O_1Y'$ zu erhalten, setze man in 1. (No. 3) $$x = x' + a, \quad y = y' + b.$$

Man erhält dann $u(x' + a) + v(y' + b) - 1 = 0$, oder geordnet

2. $$ux' + vy' - (1 - au - bv) = 0.$$

Sind nun u', v' die Coordinaten von T im neuen Systeme, so folgt aus 2.

3. $$u' = \frac{u}{1 - au - bv}, \quad v' = \frac{v}{1 - au - bv}.$$

Diese Formeln lehren die Coordinaten von T im neuen System aus denen im ursprünglichen zu berechnen. Aus denselben folgt

$$u'(1 - au - bv) = u, \quad v'(1 - au - bv) = v.$$

Berechnet man hieraus u und v, so erhält man die Transformationsformeln

$$u = \frac{u'}{1 + au' + bv'}, \quad v = \frac{v'}{1 + au' + bv'}.$$

7. Transformationsformeln der Liniencoordinaten für eine Drehung des Systems um den Ursprung.

Ist $ux + vy - 1 = 0$ die Gleichung der Geraden im Systeme XOY, so erhält man ihre Gleichung im Systeme $X'O_1Y'$, indem man für x und y die Werthe einsetzt (No. 4) $x = \cos\omega \cdot x' - \sin\omega \cdot y'$, $y = \sin\omega \cdot x' + \cos\omega \cdot y'$:

$$u(\cos\omega \cdot x' - \sin\omega \cdot y') + v(\sin\omega \cdot x' + \cos\omega \cdot y') - 1 = 0,$$

oder $$(\cos\omega \cdot u + \sin\omega \cdot v)x' + (\sin\omega \cdot u + \cos\omega \cdot v)y' - 1 = 0.$$

Die Faktoren von x' und y' sind die Coordinaten der Geraden im neuen Systeme; also hat man die Formeln

1. $$\begin{aligned} u' &= \cos\omega \cdot u + \sin\omega \cdot v, \\ v' &= -\sin\omega \cdot u + \cos\omega \cdot v. \end{aligned}$$

Dieselben lehren u' und v' aus den Coordinaten des ursprünglichen Systems zu finden. Um u und v durch u' und v' auszudrücken, multipliciren wir die Gleichungen 1. erst der Reihe nach mit $\cos\omega$ und $(-\sin\omega)$, dann mit $\sin\omega$ und $\cos\omega$, und addiren jedesmal. Wir erhalten dann die gesuchten Formeln:

2. $$\begin{aligned} u &= \cos\omega \cdot u' - \sin\omega \cdot v', \\ v &= \sin\omega \cdot u' + \cos\omega \cdot v'. \end{aligned}$$

8. Transformationsformeln der Liniencoordinaten für beliebige Systeme.

Sind $u, v, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, u', v'$ die Coordinaten von T im Systeme XOY, $\Xi O_1 \Upsilon$ und dem zu ihnen gleichsinnigen $X'OY'$, so ist nach No. 6. und 7.:

1. $$\mathfrak{u} = \cos\omega \cdot u' - \sin\omega \cdot v', \quad \mathfrak{v} = \sin\omega \cdot u' + \cos\omega \cdot v';$$

2. $$u = \frac{\mathfrak{u}}{1 + a\mathfrak{u} + b\mathfrak{v}}, \quad v = \frac{\mathfrak{v}}{1 + a\mathfrak{u} + b\mathfrak{v}}.$$

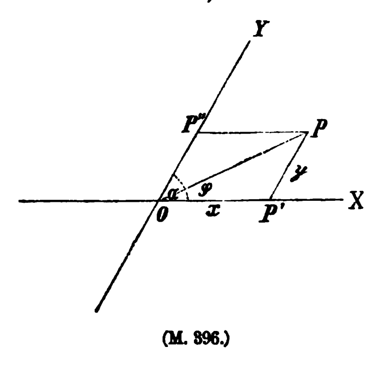
Setzt man nun in 2. für $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ die Werthe aus 1., so erhält man die Formeln für gleichsinnige Systeme:

3. $$\begin{aligned} u &= \frac{\cos\omega \cdot u' - \sin\omega \cdot v'}{1 + (a\cos\omega + b\sin\omega)u' - (a\sin\omega - b\cos\omega)v'}, \\ v &= \frac{\sin\omega \cdot u' + \cos\omega \cdot v'}{1 + (a\cos\omega + b\sin\omega)u' - (a\sin\omega - b\cos\omega)v'}. \end{aligned}$$

Für ungleichsinnige Systeme erhält man die Formeln, wenn man in den Formeln für gleichsinnige das Zeichen von v' wechselt:

4. $$\begin{aligned} u &= \frac{\cos\omega \cdot u' + \sin\omega \cdot v'}{1 + (a\cos\omega + b\sin\omega)u' + (a\sin\omega - b\cos\omega)v'}, \\ v &= \frac{\sin\omega \cdot u' - \cos\omega \cdot v'}{1 + (a\cos\omega + b\sin\omega)u' + (a\sin\omega - b\cos\omega)v'}. \end{aligned}$$

9. Schiefwinkelige Parallelcoordinaten. Bei einigen Untersuchungen macht man mit Vortheil von einer allgemeineren Coordinatenbestimmung Gebrauch, die darin besteht, dass man die Coordinatenachsen OX und OY nicht mehr rechtwinkelig, sondern schiefwinkelig zu einander annimmt, und jeden Punkt durch Strahlen, die mit OY und OX parallel sind, auf die X-Achse und die Y-Achse projicirt, so dass der Nullpunkt O, ein Punkt P und seine Projectionen auf die beiden Achsen die Paare gegenüberliegender Ecken eines Parallelogramms sind.

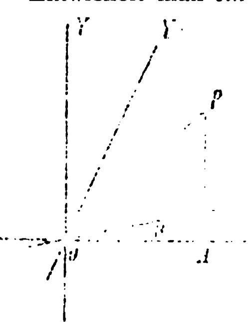


(M. 896.)

Ist $XOY = \alpha$, $XOP = \varphi$, $OP = r$, so folgt aus $OP'P$:

$$x = \frac{r}{\sin\alpha} \cdot \sin(\alpha - \varphi), \quad y = \frac{r}{\sin\alpha} \sin\varphi .$$

Entwickelt man $\sin(\alpha - \varphi)$, so erhält man die beiden Formeln:


(M. 897.)

1. $x = r\cos\varphi - y\cos\alpha, \quad y = \frac{r}{\sin\alpha} \cdot \sin\varphi .$

10. Wir entwickeln nun die Formeln für den Uebergang aus einem rechtwinkeligen in ein schiefwinkeliges System und beschränken uns dabei auf den einfacheren Fall, dass die beiden Systeme einen gemeinsamen Anfangspunkt haben.

Ist wieder $X'OY' = \alpha$, $XOX' = \omega$, $X'OP = \varphi$, $OP = r$, sind ferner x, y, x', y' die Coordinaten eines Punktes bezüglich der Systeme XOY und $X'OY'$, so ist

1. $$\begin{aligned} x &= r\cos(\omega + \varphi) = r\cos\omega \cdot \cos\varphi - r\sin\omega\sin\varphi \\ y &= r\sin(\omega + \varphi) = r\sin\omega \cdot \cos\varphi + r\cos\omega\sin\varphi, \end{aligned}$$

ferner ist nach No. 9:

2. $$\begin{aligned} x' &= r\cos\varphi - y'\cos\alpha, \quad \text{also} \quad r\cos\varphi = x' + y'\cos\alpha, \\ y' &= \frac{r}{\sin\alpha}\sin\varphi, \quad \text{also} \quad r\sin\varphi = y'\sin\alpha . \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe für $r\cos\varphi$ und $r\sin\varphi$ in 1. ein, so erhält man die Transformationsformeln:

3. $$\begin{aligned} x &= \cos\omega \cdot x' + \cos(\omega + \alpha) \cdot y' \\ y &= \sin\omega \cdot x' + \sin(\omega + \alpha) \cdot y' . \end{aligned}$$

11. Gleichung der Geraden in einem schiefwinkeligen Coordinatensysteme. Denkt man sich ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, das mit dem schiefwinkeligen den Nullpunkt gemein hat, und sind ξ, η die Coordinaten eines Punktes in diesem Systeme, x, y die Coordinaten im schiefwinkeligen Systeme und

1. $$m\xi + n\eta - 1 = 0$$

die Gleichung einer Geraden T im rechtwinkeligen Systeme, so erhält man die Gleichung von T im schiefwinkeligen Systeme, indem man in den Formeln No. 10, 3. statt x, y, x', y' der Reihe nach die jetzt geltenden Bezeichnungen ξ, η, x, y setzt und hierauf die Werthe für ξ, η in die Gleichung 1. einsetzt.

Wie man sofort sieht, erhält man eine Gleichung von der Form

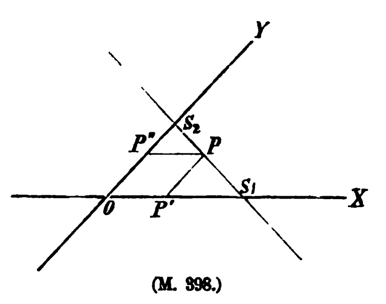
2. $$Mx + Ny - 1 = 0,$$

wobei M und N von m, n und den Winkeln ω und α abhängen.

Sind S_1 und S_2 die Spuren der Geraden auf den Coordinatenachsen, und setzt man $OS_1 = a$, $OS_2 = b$, so sind

die Coordinaten von S_1: $x = a$, $y = 0$,

„ „ „ S_2: $x = 0$, $y = b$.



(M. 398.)

Beide Coordinatenpaare genügen der Gleichung der Geraden. Setzt man sie in diese Gleichung ein, so erhält man

3. $$Ma - 1 = 0, \quad \text{also } M = 1 : a,$$
$$Nb - 1 = 0, \quad „ \quad N = 1 : b.$$

Führt man diese Werthe in die Gleichung der Geraden ein, so erhält man dieselbe in der Gestalt:

4. $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$

die vollständig mit der Gleichung für rechtwinkelige Achsen übereinstimmt.

Man betrachtet die reciproken Werthe der Achsenabschnitte a und b als die Coordinaten der Geraden im schiefwinkeligen Systeme und bezeichnet sie wieder mit u und v. Die Bedingung, welche die Coordinaten eines Punktes und einer Geraden erfüllen, wenn der Punkt auf der Geraden liegt, lautet also auch für ein schiefwinkeliges System

5. $$ux + vy - 1 = 0.$$

12. Um die Transformationsformeln der Liniencoordinaten beim Uebergang aus einem rechtwinkeligen zu einem schiefwinkeligen Systeme mit demselben Nullpunkte zu erhalten, haben wir die im Anfange der vorigen Nummer angedeutete Substitution auszuführen. Sind u, v die Coordinaten einer Geraden im ursprünglichen (rechtwinkeligen), u', v' die im schiefwinkeligen Systeme, so sind also $u\xi + v\eta - 1 = 0$, und $u'x + v'y - 1 = 0$ die Gleichungen der Geraden in den beiden Systemen. Nun ist nach den Transformationsformeln in No. 10.

$$\xi = \cos\omega \cdot x + \cos(\omega + \alpha)y, \quad \eta = \sin\omega \cdot x + \sin(\omega + \alpha)y,$$

führt man dies in $u\xi + v\eta - 1 = 0$ ein, so entsteht:

$$(\cos\omega \cdot u + \sin\omega \cdot v)\,x + [\cos(\omega + \alpha) \cdot u + \sin(\omega + \alpha) \cdot v]\,y - 1 = 0.$$

Hieraus folgen die Formeln:

1. $$u' = \cos\omega \cdot u + \sin\omega \cdot v,$$
$$v' = \cos(\omega + \alpha) \cdot u + \sin(\omega + \alpha) \cdot v.$$

Sie dienen dazu, die Coordinaten der Geraden im schiefwinkeligen Systeme aus denen im rechtwinkeligen zu berechnen.

Multiplicirt man die erste dieser Formeln mit $+\sin(\omega + \alpha)$, die zweite mit $-\sin\omega$ und addirt, so erhält man

3. $$\sin(\omega + \alpha) \cdot u' - \sin\omega \cdot v' = [\sin(\omega + \alpha)\cos\omega - \cos(\omega + \alpha)\sin\omega]\,u$$

Multiplicirt man ferner die erste Gleichung in 1. mit $-\cos(\omega + \alpha)$, die andere mit $\cos\omega$ und addirt, so entsteht

4. $$-\cos(\omega + \alpha)\,u' + \cos\omega \cdot v' = [-\sin\omega \cdot \cos(\omega + \alpha) + \sin(\omega + \alpha)\cos\omega]\,v.$$

Aus den Gleichungen 3. und 4. gehen die gesuchten Transformationsformeln hervor:

5. $$u = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot [\sin(\omega + \alpha) \cdot u' - \sin\omega \cdot v']$$
$$v = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot [-\cos(\omega + \alpha)\,u' + \cos\omega \cdot v'].$$

13. Wir entwickeln nun noch die Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel in Bezug auf ein Coordinatensystem, auf dessen Achsen conjugirte Diameter liegen. Ist $m\xi^2 + n\eta^2 - 1 = 0$ die Gleichung der einen und der andern Curve in Bezug auf die Symmetrieachsen, und sind x, y die Coordinaten eines Punktes für das schiefwinkelige System, so hat man in $m\xi^2 + n\eta^2 - 1 = 0$ die Werthe für ξ, η einzusetzen, die man aus den Formeln No. 10, 3. erhält, wenn man darin x, y, x', y' gegen ξ, η, x, y vertauscht. Wie man sieht, erhält man eine Gleichung von der Form:

1. $$Mx^2 + 2Nxy + Py^2 - 1 = 0.$$

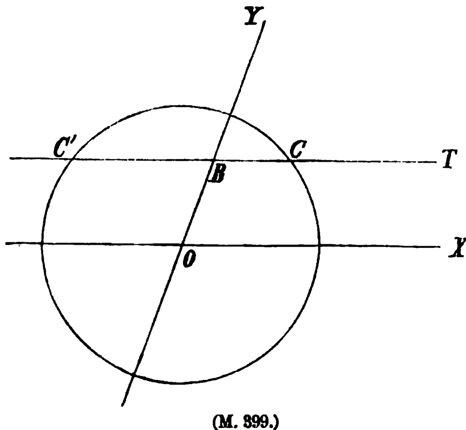
Von dieser Form also ist die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel in Bezug auf ein beliebiges schiefwinkeliges Coordinatensystem, das den Mittelpunkt der Curve zum Nullpunkte hat.

Eine Gerade T, die der X-Achse parallel ist und von der Y-Achse die Strecke $OB = \beta$ abschneidet, hat die Gleichung $y = \beta$.

Setzt man diesen Werth in 1. ein, so erhält man

2. $$Mx^2 + 2N\beta x + P\beta^2 - 1 = 0,$$

also eine gemischt quadratische Gleichung in x, deren beide Wurzeln die Strecken BC und BC' sind, welche die Curve von der Geraden T abschneidet.



(M. 399.)

Sind nun die Richtungen der Achsen conjugirt, so sind die Strecken BC und BC' für jeden Werth von β entgegengesetzt gleich, die Gleichung 2. also ist rein quadratisch. Dies trifft nur dann ein, wenn $N = 0$.

Die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel in Bezug auf conjugirte Diameter als Achsen lautet also:

3. $$Mx^2 + Py^2 - 1 = 0.$$

Bezeichnet man mit A_1 und B_1 die Schnittpunkte der Ellipse mit der positiven X- und Y-Achse, und setzt $OA_1 = a_1$, $OB_1 = b_1$, so sind

die Coordinaten von $A_1 : x = a_1, \quad y = 0$

„ „ „ $B_1 : x = 0, \quad y = b_1$.

Setzt man diese Werthe in die Gleichung 3. ein, so erhält man

$$Ma_1^2 - 1 = 0, \quad \text{also } M = 1 : a_1^2,$$
$$Pb_1^2 - 1 = 0, \quad „ \quad P = 1 : b_1^2.$$

Daher ist die Gleichung der Ellipse für zwei conjugirte Diameter:

4. $$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0.$$

Bei der Hyperbel fragen wir zunächst nach den Asymptoten. Dividiren wir die Gleichung 3. durch x^2, so entsteht

$$M + P \cdot \frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Setzen wir $x = \infty$, so verschwindet das letzte Glied und man erhält

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{-\frac{M}{P}}.$$

Die unendlich fernen Punkte der Curve 3. liegen also auf den beiden Geraden, deren Gleichungen sind

$$\frac{y}{x} = \sqrt{-\frac{M}{P}}, \quad \frac{y}{x} = -\sqrt{-\frac{M}{P}}.$$

Diese Geraden sind die Asymptoten der Curve. Für die Ellipse ist $-M:P = -a_1^2 : b_1^2$, die Asymptoten sind also imaginär. Die Hyperbel hingegen hat reale Asymptoten, also ist für die Hyperbel der Quotient $-M:P$ positiv; folglich haben M und P ungleiche Zeichen. Man kann nun die Bezeichnung der Coordinatenachsen immer so wählen, dass M positiv, P negativ ist. Setzen wir zur Verdeutlichung dessen:

$$M = 1 : a_1^2, \quad P = -1 : b_1^2,$$

so erhält die Hyperbel die Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

Die X-Achse wird von der Hyperbel in den realen Punkten geschnitten, für welche $y = 0$ und daher $x = \pm a$ ist. Die Y-Achse wird in imaginären Punkten geschnitten, deren Ordinaten $y = \pm b_1 \sqrt{-1}$ sind.

Die Asymptoten haben die Gleichungen

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{b_1}{a_1},$$

sie schneiden daher von den Hyperbeltangenten, die parallel der Y-Achse sind, die Strecken $\pm b_1$ ab (vom Tangentialpunkte aus gerechnet).

14. Die Gleichung einer Hyperbel in Bezug auf ihre Asymptoten kann in folgender Weise erhalten werden. Sind OX und OY die Asymptoten und ist P ein Hyperbelpunkt, so ist bekanntlich (§ 3, 6)

$$1. \qquad S_2P \cdot PS_1 = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\beta \, \sin\gamma} \cdot b^2,$$

wenn mit α der halbe Winkel der Asymptoten und mit β und γ die Winkel OS_2S_1 und S_2S_1X bezeichnet werden.

Nun ist
$S_2P : P''P = \sin 2\alpha : \sin\beta$,
$PS_1 : P'P = \sin 2\alpha : \sin\gamma$,
also, wenn man x und y für $P'P$ und $P''P$ setzt:

$$S_2P \cdot PS_1 = \frac{\sin^2 2\alpha}{\sin\beta \, \sin\gamma} \cdot xy.$$

Setzt man dies in 1. ein, so erhält man

$$xy = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2 2\alpha} \cdot b^2,$$

oder, da $\sin^2 2\alpha = 4\cos^2\alpha \sin^2\alpha$:

(M. 400.)

$$2. \qquad xy = \frac{b^2}{4\sin^2\alpha}.$$

Für die gleichseitige Hyperbel hat man $b = a$, $\alpha = 45°$, daher $4\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$ und die Gleichung in Bezug auf das in diesem Falle orthogonale Coordinatensystem der beiden Asymptoten wird daher $xy = \frac{1}{2}a^2$.

§ 10. Transformation der Gleichungen zweiten Grades in Punkt- und in Liniencoordinaten.

1. Unter einer Curve $n$ter Ordnung versteht man eine Curve, deren Gleichung in Punktcoordinaten vom $n$ten Grade ist; unter einer Curve $n$ter Klasse versteht man eine Curve, deren Gleichung in Liniencoordinaten vom $n$ten Grade ist.

Die Linie erster Ordnung ist die Gerade; das Gebilde erster Klasse ist der Punkt.

2. Die allgemeinste Gleichung einer Curve zweiter Ordnung ist:

1. $$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0;$$

Die allgemeinste Gleichung einer Curve zweiter Klasse:

2. $$\alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v + \varkappa = 0.$$

Wir werden nun die Gleichungen zu anderen Coordinatensystemen transformiren, und dann die neuen Systeme so wählen, dass die transformirten Gleichungen sich möglichst vereinfachen; wir beginnen mit der Transformation der Gleichung in Punktcoordinaten.

3. Verschiebt man die Coordinatenachsen, ohne ihre Richtung zu ändern, so dass der neue Ursprung die Coordinaten μ, ν hat, so gelten die Transformationsformeln (§ 9, No. 3)

$$x = x' + \mu, \quad y = y' + \nu;$$

aus ihnen folgt:

$$x^2 = x'^2 + 2\mu x' + \mu^2,$$
$$y^2 = y'^2 + 2\nu y' + \nu^2,$$
$$xy = x'y' + \nu x' + \mu y' + \mu\nu.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

1. $$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

und ordnet, so erhält man

2. $$ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + 2(a\mu + b\nu + d)x' + (b\mu + c\nu + e)y' + a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2 + 2d\mu + 2e\nu + f = 0.$$

Dies zeigt: Bei einer Verschiebung der Coordinatenachsen werden die Coefficienten der drei quadratischen Glieder einer Gleichung zweiten Grades in Punktcoordinaten nicht geändert.

Man überzeugt sich leicht, dass eine ähnliche Bemerkung auch für alle Gleichungen höheren Grades gilt.

4. Wir wollen nun das neue Coordinatensystem so wählen, dass die Coefficienten im vierten und fünften Gliede der transformirten Gleichung verschwinden. Dies erfolgt, wenn

1. $$a\mu + b\nu = -d,$$
$$b\mu + c\nu = -e.$$

Multiplicirt man daher die erste Gleichung mit $-c$, die zweite mit b; dann die erste mit b, die andere mit $-a$ und addirt jedesmal die beiden multiplicirten Gleichungen, so erhält man die Lösungen

2. $$\mu = \frac{cd - be}{b^2 - ac}, \quad \nu = \frac{ae - bd}{b^2 - ac}.$$

5. Der Punkt, der diese Grössen μ und ν zu Coordinaten hat, ist zum Nullpunkte eines neuen Coordinatensystems untauglich, wenn er unendlich fern ist. Dies tritt dann ein, wenn

3. $$b^2 - ac = 0,$$

ohne dass gleichzeitig die Zähler von μ und ν verschwinden.

6. Wenn die drei Bedingungen 1. $b^2 - ac = 0$, 2. $cd - be = 0$, 3. $ae - bd = 0$ zugleich erfüllt sind, werden μ und ν unbestimmt.

Aus den Gleichungen $b^2 = ac$, $cd = be$ folgt durch Multiplication der linken und rechten Seiten $b^2 cd = abce$.

Ist nun weder $b = 0$, noch $c = 0$, so ergiebt die letzte Gleichung $bd = ae$, also folgt dann aus den ersten beiden Bedingungen die dritte.

Ist $b = 0$, so folgt, dass entweder auch $c = 0$ oder $a = 0$; im ersten Falle ist dann zugleich 2. erfüllt, im andern zugleich 3.; im ersteren ist also μ unbestimmt und $\nu = \infty$, im andern ist $\mu = \infty$ und ν unbestimmt.

7. Wir wollen diese besonderen Fälle zunächst ins Auge fassen, und bemerken noch vorher, dass, wenn b, a und c zugleich Null sind, die Gleichung der Curve aufhört vom zweiten Grade zu sein.

a) Ist $b = 0$, und $c = 0$, (und $a \gtrless 0$), so ist die Gleichung der Curve

$$x^2 + 2\frac{d}{a}x + 2\frac{e}{a}y + \frac{f}{a} = 0.$$

Wir schreiben statt dessen $x^2 + 2\frac{d}{a}x + \frac{d^2}{a^2} + 2\frac{e}{a}y + \frac{f}{a} - \frac{d^2}{a^2} = 0$, wofür gesetzt werden kann

$$1. \qquad \left(x + \frac{d}{a}\right)^2 + 2\frac{e}{a}\left(y - \frac{d^2 - af}{2ae}\right) = 0.$$

Verschieben wir die Achsen, so dass der neue Nullpunkt die Coordinaten $-d:a$ und $(d^2 - af):2ae$ hat, so sind die Transformationsformeln

$$x = x' - \frac{d}{a}, \quad y = y' + \frac{d^2 - af}{2ae}.$$

Setzen wir diese in die Gleichung ein, so entsteht die transformirte Gleichung

$$2. \qquad x'^2 + 2\frac{e}{a}y' = 0.$$

Hieraus folgt (vergl. § 2, 10): Die Gleichung $ax^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ ist die Gleichung einer Parabel; der Scheitel derselben hat die Coordinaten $-d:a$ und $(d^2 - af):2ae$, die Symmetrieachse ist der Ordinatenachse parallel; die Curve erstreckt sich in der Richtung der positiven oder negativen Seite der Ordinatenachse, je nachdem e und a ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

b) Ist $a = 0$, $b = 0$, (und $c \gtrless 0$), so ist die Gleichung

$$y^2 + 2\frac{d}{c}x + 2\frac{e}{c}y + \frac{f}{c} = 0.$$

Man kann hierfür schreiben:

$$3. \qquad \left(y + \frac{e}{c}\right)^2 + 2\frac{d}{c}\left(x - \frac{d^2 - cf}{2cd}\right) = 0.$$

Verschiebt man diesmal die Coordinatenachsen so, dass der neue Ursprung die Coordinaten hat $(d^2 - cf):2cd$ und $-e:c$, so ergiebt sich

$$4. \qquad y'^2 + 2\frac{d}{c}x' = 0.$$

Die Gleichung $cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ ist daher die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel die Coordinaten $(d^2 - cf):2cd$ und $-e:c$ hat, und die sich in der Richtung der positiven oder negativen Seite der Abscissenachse erstreckt, je nachdem die Coefficienten d und c ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

8. Sind a, b, c von Null verschieden und ist zugleich

1. $b^2 - ac = 0$, 2. $cd - be = 0$, also auch 3. $ae - bd = 0$,
so schreibe man die Curvengleichung

$$a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2\right) + 2d\left(x + \frac{e}{d}y\right) + f = 0,$$

und setze dann $c = b^2 : a$, und (nach 3.) $e : d = b : a$; man erhält

$$a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + 2d\left(x + \frac{b}{a}y\right) + f = 0,$$

und nach Multiplication mit a:

4. $$(ax + by)^2 + 2d(ax + by) + af = 0.$$

Setzt man abkürzend $ax + by = S$, so erhält man:

5. $$S^2 + 2dS + af = 0.$$

Die linke Seite lässt sich in zwei bezüglich S lineare Faktoren zerlegen, die man durch Auflösung der quadratischen Gleichung 5. erhält. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $-d + \sqrt{d^2 - af}$ und $-d - \sqrt{d^2 - af}$, daher gilt die Identität

$$S^2 + 2ds + af \equiv (S + d - \sqrt{d^2 - af})(S + d + \sqrt{d^2 - af}).$$

Setzt man für S wieder $ax + by$, so hat man nun 4. umgestaltet zu

6. $$(ax + by + d - \sqrt{d^2 - af})(ax + by + d + \sqrt{d^2 - af}) = 0.$$

Diese Gleichung löst sich in die beiden linearen auf:

7. $$ax + by + d - \sqrt{d^2 - af} = 0,$$

8. $$ax + by + d + \sqrt{d^2 - af} = 0.$$

Ist also $b^2 - ac = 0$, $cd - be = 0$, und $ae - bd = 0$, so stellt die Gleichung $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ zwei parallele Gerade dar, welche die Gleichungen haben:

$$ax + by + d - \sqrt{d^2 - af} = 0,$$
$$ax + by + d + \sqrt{d^2 - af} = 0.$$

Ist $d^2 - af < 0$, so sind diese Geraden conjugirt complex; ist $d^2 - af = 0$, so fallen sie in eine Gerade $ax + by + d = 0$, und die linke Seite der Curvengleichung ist die zweite Potenz der linearen Function $ax + by + d$; ist $d^2 - af > 0$, so sind die Geraden real und von einander verschieden.

9. Ist $b^2 - ac = 0$, und $cd - be$, sowie $ae - bd$ von Null verschieden, so multipliciren wir die Curvengleichung

1. $$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

zunächst mit a und ersetzen dann ac durch b^2; wir erhalten dann

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + 2adx + 2aey + af = 0, \quad \text{oder}$$

2. $$(ax + by)^2 + 2adx + 2aey + af = 0.$$

Es liegt nun nahe, nach einer solchen Drehung des Coordinatensystems zu suchen, durch welche der Klammerinhalt $ax + by$ durch ein Vielfaches einer Coordinate allein ersetzt wird, z. B. durch ein Vielfaches von x'. Aus den für eine Drehung des Systems geltenden Formeln § 9, No. 4

$$x = \cos\omega\, x' - \sin\omega\, y'$$
$$y = \sin\omega\, x' + \cos\omega\, y'$$

folgt $$ax + by = (a\cos\omega + b\sin\omega)x' - (a\sin\omega - b\cos\omega)y'.$$

Soll dies nur ein Vielfaches von x' sein, so muss der Coefficient von y' verschwinden; man hat also für ω die Bedingung

3. $$a\sin\omega - b\cos\omega = 0.$$

Setzt man den hieraus folgenden Werth $\sin\omega = b\cos\omega : a$ in die Gleichung $\cos^2\omega + \sin^2\omega = 1$ ein, so erhält man

4. $$\cos\omega = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\omega = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Da es genügt, einen Winkel ω zu erhalten, der der Bedingung 3. genügt, so können wir festsetzen, dass der positive Werth der Quadratwurzel genommen werde. Mit Hülfe der Werthe 4. wird nun

$$ax + by = \left(a \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + b \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) x' = \sqrt{a^2+b^2} \cdot x'.$$

Ferner liefert die Transformation:

$$2adx + 2aey = \frac{2ad}{\sqrt{a^2+b^2}}(ax' - by') + \frac{2ae}{\sqrt{a^2+b^2}}(bx' + ay').$$

Hieraus ergiebt sich die transformirte Gleichung

5. $$(a^2+b^2)x'^2 + 2a \cdot \frac{ad+be}{\sqrt{a^2+b^2}} x' + 2a\frac{ae-bd}{\sqrt{a^2+b^2}} y' + af = 0.$$

Die Curve ist daher (No. 7, a) eine Parabel, deren Achse parallel der Y'-Achse ist. Die Coordinaten des Parabelscheitels im System $X'OY'$ sind:

6. $$x' = -a\frac{ad+be}{\sqrt{a^2+b^2}^3}, \quad y' = \frac{a(ad+be)^2 - (a^2+b^2)^2 f}{2(ae-bd)\cdot\sqrt{a^2+b^2}^3}.$$

Die Coordinaten des Scheitels im ursprünglichen System ergeben sich aus x' und y' durch die Transformationsformeln:

7. $$x = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(ax' - by'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(bx' + ay').$$

Man erhält:

$$x = \frac{1}{2(a^2+b^2)^2(ae-bd)}\left[-2a^2(ad+be)(ae-bd) - ab(ad+be)^2 + bf(a^2+b^2)^2\right].$$

Hieraus findet man durch einfache Rechnung:

8. $$x = \frac{(a^2+b^2)^2\,bf - a(ad+be)\left[e(a^2+b^2) + a(ae-bd)\right]}{2(a^2+b^2)^2(ae-bd)}.$$

Ebenso ergiebt sich

9. $$y = \frac{-(a^2+b^2)^2\,af + a(ad+be)\left[d(a^2+b^2) - b(ae-bd)\right]}{2(a^2+b^2)^2(ae-bd)}.$$

Wenn daher $b^2 - ac = 0$, und $ae - bd$ und $cd - be$ von Null verschieden sind, so ist $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ die Gleichung einer Parabel, deren Achse mit der Y-Achse den Winkel ω bildet, für welchen $\cos\omega = a : \sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\omega = b : \sqrt{a^2+b^2}$, $\tang\omega = b : a$, und deren Scheitel die Coordinaten hat, die unter 8. und 9. mitgetheilt worden sind. Die Parabel erstreckt sich in der Richtung der positiven oder negativen Seite der Geraden OY', für welche $YOY' = \omega$, je nachdem $a(ae - bd)$ negativ oder positiv ist.

Ist also $b^2 - ac = 0$, so bedeutet die Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

entweder eine Parabel, oder zwei parallele reale oder conjugirt complexe Gerade, oder eine (zwei zusammenfallende) Gerade.

10. Ist $b^2 - ac$ von Null verschieden, so geben die Formeln No. 4, 2 endliche Werthe für μ und ν, und wir können die beabsichtigte Verschiebung des Coordinatensystems ausführen. Die transformirte Gleichung ist

$$ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + f' = 0,$$

wobei $$f' = a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2 + 2d\mu + 2e\nu + f.$$

Setzt man $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, so findet sich

$$r^2(a\cos^2\varphi + 2b\cos\varphi\sin\varphi + c\sin^2\varphi) + f' = 0,$$

also eine Gleichung für r, die für jeden Werth von φ rein quadratisch ist und daher für jedes φ zwei entgegengesetzt gleiche Werthe für r liefert. Jede durch den Ursprung des neuen Systems gehende Curvensehne wird also im Ursprunge halbirt. Der Ursprung des neuen Systems ist daher der Mittelpunkt der Curve.

11. Der Ausdruck f' vereinfacht sich erheblich; wenn man ihn schreibt

$$f' = (a\mu + b\nu + d)\,\mu + (b\mu + c\nu + e)\,\nu + d\mu + e\nu + f = 0,$$

und bedenkt, dass (No. 4, 1) $a\mu + b\nu + d = 0$, $b\mu + c\nu + e = 0$, so erhält man zunächst $f' = d\mu + e\nu + f$; hieraus folgt schliesslich

$$f' = \frac{ae^2 + cd^2 - 2bde + (b^2 - ac)f}{b^2 - ac}.$$

Den Zähler $ae^2 + cd^2 - 2bde + (b^2 - ac)f$ wollen wir mit γ bezeichnen, den Nenner $b^2 - ac$ mit δ, so dass nun $f' = \gamma : \delta$.

12. Ist $\gamma = 0$, so ist auch $f' = 0$ und die transformirte Gleichung wird homogen:

1. $$ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 = 0.$$

Aus derselben folgt $\left(\frac{x'}{y'}\right)^2 + 2\frac{b}{a}\cdot\frac{x'}{y'} + \frac{c}{a} = 0,$

also $$\frac{x'}{y'} = -\frac{b}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{b^2 - ac}.$$

Die linke Seite von 1. zerfällt daher in zwei lineare Faktoren; nach Multiplication mit a ergiebt sich aus 1.:

2. $$[ax' + (b - \sqrt{b^2 + ac})y'][ax' + (b + \sqrt{b^2 - ac})y'] = 0.$$

Die Gleichung zerfällt daher in die beiden linearen Gleichungen

3. $$ax' + (b - \sqrt{b^2 - ac})y' = 0,$$

4. $$ax' + (b + \sqrt{b^2 - ac})y' = 0.$$

Ist also $b^2 - ac$ von Null verschieden und $\gamma = 0$, so ist

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

die Gleichung des Vereins zweier sich schneidenden Geraden; der Schnittpunkt hat die Coordinaten $\mu = (cd - be) : \delta$, $\nu = (ae - bd) : \delta$ und die Gleichungen der Geraden sind (wie man aus 3. und 4. findet)

5. $$ax + (b - \sqrt{b^2 - ac})y + d + (ae - bd) : \sqrt{b^2 - ac} = 0,$$

6. $$ax + (b - \sqrt{b^2 - ac})y + d - (ae - bd) : \sqrt{b^2 - ac} = 0.$$

Ist $b^2 - ac > 0$, so sind diese Geraden real, ist $b^2 - ac < 0$, so sind sie conjugirt complex.

13. Ist γ von Null verschieden, so suchen wir die Gleichung

$$ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + f' = 0$$

durch Drehung des Coordinatensystems um den Nullpunkt weiter zu vereinfachen Werden die Coordinaten im neuen System durch ξ, η bezeichnet, so ist

$$x' = \cos\omega\cdot\xi - \sin\omega\cdot\eta,$$
$$y' = \sin\omega\cdot\xi + \cos\omega\cdot\eta,$$

also:

$$x'^2 = \cos^2\omega\,\xi^2 - 2\cos\omega\sin\omega\cdot\xi\eta + \sin^2\omega\cdot\eta^2$$
$$x'y' = \cos\omega\sin\omega\,\xi^2 + (\cos^2\omega - \sin^2\omega)\cdot\xi\eta - \cos\omega\sin\omega\cdot\eta^2$$
$$y'^2 = \sin^2\omega\,\xi^2 + 2\cos\omega\sin\omega\cdot\xi\eta + \cos^2\omega\cdot\eta^2.$$

Wir erhalten eine Gleichung von der Form $g\xi^2 + 2h\xi\eta + k\eta^2 + f' = 0$, wenn

1. $$g = a\cos^2\omega + 2b\cos\omega\sin\omega + c\sin^2\omega,$$

2. $$h = -a\cos\omega\sin\omega + b(\cos^2\omega - \sin^2\omega) + c\cos\omega\sin\omega,$$

3. $$k = a\sin^2\omega - 2b\cos\omega\sin\omega + c\cos^2\omega.$$

Wir wollen nun den Winkel ω so wählen, dass der Coefficient h verschwindet, also gemäss der Gleichung $b(\cos^2\omega - \sin^2\omega) - (a-c)\cos\omega\sin\omega = 0$.

Hieraus folgt, wenn wir $\cos^2\omega - \sin^2\omega$ durch $\cos 2\omega$, und $\cos\omega\sin\omega$ durch $\frac{1}{2}\sin 2\omega$ ersetzen: $b\cos 2\omega - \frac{1}{2}(a-c)\sin 2\omega = 0$, also:

4. $$\tan 2\omega = \frac{2b}{a-c}.$$

Dieser Gleichung genügen unzählige Winkel 2ω; einer derselben liegt innerhalb $-90°$ und $+90°$, die anderen sind von diesem um ganze Vielfache von $180°$ verschieden. Da es nur darauf ankommt, einen Winkel zu haben, der der Gleichung 4. genügt, so wollen wir den auswählen, der zwischen $-90°$ und $+90°$ liegt, so dass $\cos 2\omega$ positiv ist.

Für die Coefficienten g und k kann man zunächst schreiben

$$g = a\cos^2\omega + b\sin 2\omega + c\sin^2\omega,$$
$$k = a\sin^2\omega - b\sin 2\omega + c\cos^2\omega.$$

Hieraus folgen die Gleichungen:

5. $$g + k = a + c,$$

6. $$g - k = (a-c)\cos 2\omega + 2b\sin 2\omega.$$

Aus 6. folgt:

$$g - k = \frac{(a-c)\cos 2\omega \cdot \sin 2\omega + 2b\sin^2 2\omega}{\sin 2\omega}.$$

Nun ist nach 4. $(a-c)\sin 2\omega = 2b\cos 2\omega$, also wird

$$g - k = \frac{2b\cos^2 2\omega + 2b\sin^2 2\omega}{\sin 2\omega} = \frac{2b}{\sin 2\omega}.$$

Ferner ist $\sin 2\omega = \dfrac{\tan 2\omega}{\sqrt{1+\tan^2 2\omega}}$, und nach 4.

$$\sqrt{1+\tan^2 2\omega} = \frac{1}{a-c}\sqrt{a^2+c^2-2ac+4b^2}$$
$$= \frac{1}{a-c}\sqrt{(a+c)^2+4\delta}.$$

Daher hat man

7. $$g - k = \sqrt{(a+c)^2+4\delta}.$$

Aus dieser Gleichung und aus 5. erhält man nun die Coefficienten

8. $$g = \tfrac{1}{2}\left(a + c + \sqrt{(a+c)^2+4\delta}\right)$$

9. $$k = \tfrac{1}{2}\left(a + c - \sqrt{(a+c)^2+4\delta}\right).$$

Die Gleichung der Curve können wir nun schreiben

$$-\frac{g}{f'}\xi^2 - \frac{h}{f'}\eta^2 - 1 = 0, \quad \text{oder, da } f' = \frac{\gamma}{\delta}:$$

10. $$\frac{-g\delta}{\gamma}\xi^2 + \frac{-k\delta}{\gamma}\eta^2 - 1 = 0.$$

14. Wir haben nun zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Coefficienten von ξ^2 und η^2 positiv oder negativ sind.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass a positiv ist.

A. Ist $\delta = b^2 - ac$ negativ, so muss c positiv sein; die Grösse $\sqrt{(a+c)^2+4\delta}$, die nach der über ω gemachten Voraussetzung positiv zu rechnen ist, ist dann kleiner als $a+c$, mithin sind g und k positiv.

a) Ist nun γ positiv, so sind die Quotienten $(-g\delta):\gamma$ und $(-k\delta):\gamma$ beide positiv, und wir können setzen

1. $$\frac{-g\delta}{\gamma} = \frac{1}{\alpha^2}, \quad \frac{-k\delta}{\gamma} = \frac{1}{\beta^2}.$$

Die Curvengleichung wird dann:

2. $$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0,$$

die Curve ist also eine Ellipse mit den Halbachsen α und β.

b) Ist hingegen γ negativ, so sind die Quotienten $(-g\delta):\gamma$ und $(-k\delta):\gamma$ beide negativ; die Gleichung $\frac{-g\delta}{\gamma}\xi^2 + \frac{-k\delta}{\gamma}\eta^2 - 1 = 0$ ist dann für reale Werthe von ξ und η nicht erfüllbar. Man kann formal die Gleichung mit 2. in Uebereinstimmung bringen, nur dass α^2 und β^2 negative, α und β also imaginäre Werthe haben müssen, und bezeichnet sie demgemäss als die Gleichung einer imaginären Ellipse, von der man dann sagen kann, dass sie zwar keinen realen Peripheriepunkt habe, dass aber doch ihr Mittelpunkt real sei; auf jedem durch diesen realen Mittelpunkt gezogenen Strahl (Diameter) liegen zwei conjugirt complexe Punkte der imaginären Ellipse.

B. Ist $\delta \equiv b^2 - ac$ positiv, so ist $\sqrt{(a+c)^2 + 4\delta}$ grösser als der absolute Werth von $a + c$; also ist g positiv und h negativ.

Ist nun γ negativ, so sind die Quotienten $(-g\delta):\gamma > 0$, $(-k\delta):\gamma < 0$.

Ist hingegen γ positiv, so hat man $(-g\delta):\gamma < 0$, $(-k\delta):\gamma > 0$.

Im ersten Falle kann man setzen $(-g\delta):\gamma = 1:\alpha^2$, $(-k\delta):\gamma = -1:\beta^2$; im andern Falle: $(-g\delta):\gamma = -1:\alpha^2$, $(-k\delta):\gamma = 1:\beta^2$.

Die Curvengleichung wird also

im ersten Falle: $$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0;$$

im andern Falle: $$-\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0.$$

Die Curve ist in beiden Fällen eine Hyperbel; im ersten Falle liegt ihre Hauptachse auf der Abscissenachse, im andern auf der Ordinatenachse.

15. Wir fassen die Ergebnisse dieser Untersuchungen übersichtlich zusammen.

Die Gleichung $F \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ stellt eine Gerade, zwei parallele Gerade, eine Parabel, zwei sich schneidende Gerade, eine Ellipse oder eine Hyperbel dar.

A. a) Ist $b = 0$, $c = 0$, die anderen Coefficienten von Null verschieden, so ist $F \equiv 0$ die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel die Coordinaten

$$-\frac{d}{a} \text{ und } \frac{d^2 - af}{2ae}$$

hat, deren Achse der Ordinatenachse parallel und deren Parameter $\pm e:a$ ist; die Curve erstreckt sich entlang der positiven oder negativen Seite der Ordinatenachse, je nachdem e und a ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

b) Ist $a = 0$, $b = 0$, die anderen Coefficienten von Null verschieden, so ist $F = 0$ die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel die Coordinaten

$$\frac{d^2 - cf}{2cd} \text{ und } -\frac{e}{c}$$

hat, deren Achse der Abscissenachse parallel und deren Parameter $\pm d:c$ ist; die Curve erstreckt sich entlang der positiven oder negativen Seite der Abscissenachse, je nachdem d und c ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

B. Sind a, b, c von Null verschieden und ist zugleich $\delta \equiv b^2 - ac = 0$, $cd - be = 0$, also auch $ae - bd = 0$, so ist $aF = 0$ das Produkt der Gleichungen der beiden parallelen Geraden:

$$ax + by + d - \sqrt{d^2 - af} = 0,$$
$$ax + by + d + \sqrt{d^2 - af} = 0.$$

Ist $d^2 - af < 0$, so sind sie conjugirt complex; ist $d^2 - af = 0$, so fallen sie in eine Gerade zusammen, deren Gleichung ist $ax + by + d = 0$; ist $d^2 - af > 0$, so sind die beiden Parallelen real und von einander verschieden.

C. Sind a, b, c von Null verschieden, und $\delta \equiv b^2 - ac = 0$, $cd - be \gtrless 0$, $ae - bd \gtrless 0$, so ist $F = 0$ die Gleichung einer Parabel; die Achse derselben ist der Geraden OY' parallel, für welche

$$\cos YOY' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin YOY' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \operatorname{tang} YOY' = \frac{b}{a},$$

und die Curve erstreckt sich entlang der positiven oder negativen Hälfte der Geraden OY', je nachdem $a(ae - bd)$ negativ oder positiv ist. Die Coordinaten des Parabelscheitels sind

$$x = \frac{(a^2 + b^2)^2 bf - a(ad + be)\big(e(a^2 + b^2) + a(ae - bd)\big)}{2(a^2 + b^2)^2 (ae - bd)},$$
$$y = \frac{-(a^2 + b^2)^2 af + a(ad + be)\big(d(a^2 + b^2) - b(ae - bd)\big)}{2(a^2 + b^2)^2 (ae - bd)}.$$

Der Parameter stimmt dem absoluten Werthe nach mit $\frac{a(ae - bd)}{\sqrt{a^2 + b^2}^3}$ überein.

D. Ist $\delta \equiv b^2 - ac$ von Null verschieden und

$$\gamma \equiv ae^2 + cd^2 - 2bde + (b^2 - ac)f = 0,$$

so zerfällt aF in zwei lineare Faktoren; die Curve $F = 0$ zerfällt in die beiden Geraden:

$$ax + (b - \sqrt{b^2 - ac})y + d + (ae - bd) : \sqrt{b^2 - ac} = 0,$$
$$ax + (b + \sqrt{b^2 - ac})y + d - (ae - bd) : \sqrt{b^2 - ac} = 0.$$

Diese Geraden sind real oder conjugirt complex, je nachdem $b^2 - ac$ positiv oder negativ ist; ihr Schnittpunkt hat die Coordinaten $x = (cd - be) : \delta$, $y = (ae - bd) : \delta$, und ist in jedem Falle real.

E. Ist $a > 0$, $b^2 - ac < 0$, und $\gamma \gtrless 0$, so ist $F = 0$ die Gleichung einer Ellipse. Das Centrum derselben hat die Coordinaten

$$x = (cd - be) : \delta, \quad y = (ae - bd) : \delta;$$

eine Halbachse hat die Länge

$$\alpha = \sqrt{-\frac{2(ae^2 + cd^2 - 2bde + \delta f)}{\delta\big(a + c + \sqrt{(a + c)^2 + 4\delta}\big)}}$$

und bildet mit der Abscissenachse einen zwischen $-45°$ und $+45°$ liegenden Winkel ω, für welchen $\operatorname{tang} 2\omega = \frac{2b}{a - c}$; die andere Halbachse hat die Länge

$$\beta = \sqrt{-\frac{2(ae^2 + cd^2 - 2bde + \delta f)}{\delta\big(a + c - \sqrt{(a + c)^2 + 4\delta}\big)}}.$$

Die Ellipse ist real oder imaginär, je nachdem der Zähler im Radicanden negativ oder positiv ist.

F. Ist $a > 0$, $b^2 - ac > 0$ und $\gamma \gtrless 0$, so ist $F = 0$ die Gleichung einer Hyperbel. Je nachdem $\gamma \equiv ae^2 + cd^2 - 2bde + (b^2 - ac)f \gtrless 0$, bildet ihre Hauptachse entweder mit der Abscissenachse den zwischen $-45°$ und $+45°$ liegenden Winkel, für welchen $\operatorname{tang} 2\omega = \frac{2b}{a - c}$, oder einen um $90°$ grösseren Winkel.

Im ersten Falle ist

die halbe Hauptachse: $\alpha = \sqrt{-\dfrac{2(ae^2 + cd^2 - 2bde + \delta f)}{\delta\left(a + c + \sqrt{(a+c)^2 + 4\delta}\right)}}$,

die halbe Nebenachse: $\beta = \sqrt{\dfrac{2(ae^2 + cd^2 - 2bde + \delta f)}{\delta\left(a + c - \sqrt{(a+c)^2 + 4\delta}\right)}}$.

Im andern Falle ist

die halbe Hauptachse: $\beta = \sqrt{-\dfrac{2(ae^2 + cd^2 - 2bdc + \delta f)}{\delta\left(a + c - \sqrt{(a+c)^2 - 4\delta}\right)}}$,

die halbe Nebenachse: $\alpha = \sqrt{\dfrac{2(ae^2 + cd^2 - 2bde + \delta f)}{\delta\left(a + c + \sqrt{(a+c)^2 - 4\delta}\right)}}$.

16. Wir wenden uns nun zur *Transformation der Gleichung zweiten Grades in Liniencoordinaten*

$$\Phi \equiv \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v + \varkappa = 0.$$

Wenn in der Gleichung einer Curve in Punktcoordinaten das von veränderlichen Faktoren freie letzte Glied der linken Seite verschwindet, so wird der Gleichung durch die Coordinaten $x = 0$, $y = 0$ genügt; das Verschwinden dieses Gliedes bedeutet also , dass der Nullpunkt auf der Curve liegt, sagt aber für die Gestalt der Curve Nichts aus. Ganz andere Bedeutung hat es, wenn das von veränderlichen Faktoren freie letzte Glied der linken Seite in einer Curvengleichung für Liniencoordinaten gleich Null ist. Dann wird der Curvengleichung durch $u = 0$, $v = 0$ genügt, und diese Coordinaten gehören einer unendlich fernen Geraden der Ebene an, da u und v die Werthe $1 : OS_1$ und $1 : OS_2$ haben, ihr Verschwinden also unendlich grosse Werthe von OS_1 und OS_2 bedingt.

Bei unserer Coordinatenbestimmung ist nur für dies eine Coordinatenpaar $u = v = 0$ die zugehörige Gerade unendlich fern; übertragen wir die Aussage, dass für endliche Coordinatenwerthe zu jedem Paar Werthe von u und v nur eine Gerade gehört, auch auf den Grenzfall $u = v = 0$, so haben wir nicht von mehreren, sondern nur von einer unendlich fernen Geraden zu sprechen.

Wir finden daher: *Wenn das von veränderlichen Faktoren freie Glied auf der linken Seite der Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten gleich Null ist, so wird die Curve von der unendlich fernen Geraden berührt.*

17. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\varkappa \gtrless 0$, also die Curve $\Phi = 0$ keine unendlich ferne Tangente hat.

Wir transformiren zunächst die Gleichung *durch Verschiebung des Coordinatensystems.*

Sind μ, ν die Coordinaten des Nullpunktes des neuen Systems, so sind bekanntlich die Transformationsformeln:

$$u = \frac{u'}{1 + \mu u' + \nu v'}, \quad v = \frac{v'}{1 + \mu u' + \nu v'}.$$

Also hat man die transformirte Gleichung nach Multiplication mit $(1 + \mu u' + \nu v')^2$:

1. $\alpha u'^2 + 2\beta u'v' + \gamma v'^2 + 2(\delta u' + \varepsilon v')(1 + \mu u' + \nu v') + \varkappa(1 + \mu u' + \nu v')^2 = 0$

oder geordnet:

2. $(\alpha + 2\delta\mu + \varkappa\mu^2)u'^2 + 2(\beta + \varepsilon\mu + \delta\nu + \varkappa\mu\nu)u'v' + (\gamma + 2\varepsilon\nu + \varkappa\nu^2)v'^2$
$+ 2(\delta + \varkappa\mu)u' + 2(\varepsilon + \varkappa\nu)v' + \varkappa = 0.$

Wir wollen nun das neue System so wählen, dass die Coefficienten von u' und v' in der transformirten Gleichung verschwinden, dass also

3. $\delta + \varkappa\mu = 0, \quad \varepsilon + \varkappa\nu = 0.$

Dies tritt ein, wenn

4. $$\mu = -\frac{\delta}{\varkappa}, \quad \nu = -\frac{\varepsilon}{\varkappa}.$$

Führt man diese Werthe in die Coefficienten der Gleichung 2. ein, so erhält man

5. $$\alpha + 2\delta\mu + \varkappa\mu^2 = \frac{\alpha\varkappa - \delta^2}{\varkappa},$$

6. $$\beta + \varepsilon\mu + \delta\nu + \varkappa\mu\nu = \frac{\beta\varkappa - \delta\varepsilon}{\varkappa},$$

7. $$\gamma + 2\varepsilon\nu + \varkappa\nu^2 = \frac{\gamma\varkappa - \varepsilon^2}{\varkappa}.$$

Die transformirte Gleichung wird daher nach Multiplication mit $\varkappa$ zu:

8. $$(\alpha\varkappa - \delta^2)u'^2 + 2(\beta\varkappa - \delta\varepsilon)u'v' + (\gamma\varkappa - \varepsilon^2)v'^2 + \varkappa^2 = 0.$$

18. Legt man durch den Nullpunkt eine Normale N zu einer Geraden T, und bezeichnet den Winkel XON mit φ, und die vom Nullpunkte bis zur Geraden T reichende Strecke mit r, so ist, wenn S_1 und S_2 die Spuren von T auf den Achsen sind, bekanntlich $OS_1 = r : cos\varphi$, $OS_2 = r : sin\varphi$, mithin hat T die Coordinaten $u = cos\varphi : r$, $v = sin\varphi : r$.

Setzt man diese Werthe in die Gleichung 8. der vorigen Nummer, so erhält man nach Multiplication mit r^2:

$$(\alpha\varkappa - \delta^2)cos^2\varphi + 2(\beta\varkappa - \delta\varepsilon)cos\varphi\, sin\varphi + (\gamma\varkappa - \varepsilon^2)sin^2\varphi + \varkappa^2 r^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist rein quadratisch für r, liefert also für r zwei entgegengesetzt gleiche Werthe. Der Punkt mit den Coordinaten $(-\delta):\varkappa$ und $(-\varepsilon):\varkappa$ hat also die Eigenschaft, dass er den Abstand je zweier parallelen Tangenten der Curve halbirt.

19. Wir suchen nun die Gleichung durch Drehung des Coordinatensystems weiter zu vereinfachen.

Ist der Winkel der Achse OX' und der neuen Abscissenachse ω, und werden die Liniencoordinaten im neuen System mit U, V bezeichnet, so hat man die Transformationsformeln (§ 9, 7).

1. $$u' = cos\,\omega \cdot U - sin\,\omega \cdot V$$
$$v' = sin\,\omega \cdot U + cos\,\omega \cdot V.$$

Mithin $$u'^2 = cos^2\omega\, U^2 - 2\,cos\,\omega\, sin\,\omega\, UV + sin^2\omega\, V^2$$

2. $$u'v' = cos\,\omega\, sin\,\omega\, U^2 + (cos^2\omega - sin^2\omega)\,UV - sin\,\omega\, cos\,\omega\, V^2$$
$$v'^2 = sin^2\omega\, U^2 + 2\,sin\,\omega\, cos\,\omega\, UV + cos^2\omega\, V^2.$$

Schreibt man für die letzte Gleichung in No. 17 abkürzungsweise

3. $$\alpha' u'^2 + 2\beta' u'v' + \gamma' v'^2 + \varkappa^2 = 0$$

und setzt nun die Werthe 2. ein, so erhält man die transformirte Gleichung

$$\rho U^2 + 2\sigma UV + \tau V^2 + \varkappa^2 = 0, \quad \text{wenn}$$

4. $$\rho = \alpha' cos^2\omega + 2\beta' cos\,\omega\, sin\,\omega + \gamma' sin^2\omega$$

5. $$\sigma = -\alpha' cos\,\omega\, sin\,\omega + \beta'(cos^2\omega - sin^2\omega) + \gamma' cos\,\omega\, sin\,\omega$$

6. $$\tau = \alpha' sin^2\omega - 2\beta' cos\,\omega\, sin\,\omega + \gamma' cos^2\omega.$$

Wir wählen nun ω so, dass σ verschwindet, also dass

$$-\alpha' cos\,\omega\, sin\,\omega + \beta'(cos^2\omega - sin^2\omega) + \gamma' cos\,\omega\, sin\,\omega = 0, \quad \text{oder}$$

7. $$\tfrac{1}{2}(\alpha' - \gamma')\, sin\,2\omega = \beta' cos\,2\omega, \quad \text{also}$$

8. $$tang\,2\omega = \frac{2\beta'}{\alpha' - \gamma'},$$

oder, wenn man für α', γ', β' die Werthe einsetzt:

9. $$tang\,2\omega = \frac{2(\beta\varkappa - \delta\varepsilon)}{(\alpha - \gamma)\varkappa - \delta^2 + \varepsilon^2}.$$

Wir wählen für 2ω den zwischen $-90°$ und $+90°$ liegenden Winkel, der dieser Gleichung genügt, so dass also ω zwischen $-45°$ und $+45°$ liegt und $\cos 2\omega$, mithin auch $\sqrt{1+\tang^2 2\omega}$, positiv ist. Es ist dann

10. $$\sin 2\omega = \frac{2\beta'}{\sqrt{(\alpha'-\gamma')^2+4\beta'^2}}.$$

Aus 4. und 6. folgen durch Addition und Subtraction die Gleichungen

11. $$\rho+\tau = \alpha'+\gamma',$$
$$\rho-\tau = (\alpha'-\gamma')\cos 2\omega + 2\beta'\sin 2\omega$$
$$= \frac{(\alpha'-\gamma')\cos 2\omega \sin 2\omega + 2\beta'\sin^2 2\omega}{\sin 2\omega},$$

oder in Rücksicht auf 7.

$$\rho-\tau = \frac{2\beta'\cos^2 2\omega + 2\beta'\sin^2 2\omega}{\sin 2\omega} = \frac{2\beta'}{\sin 2\omega}.$$

Daher hat man

12. $$\rho-\tau = \sqrt{(\alpha'-\gamma')+4\beta'^2}.$$

Aus 11. und 12. folgen die Werthe:

13. $$\rho = \tfrac{1}{2}(\alpha'+\gamma'+\sqrt{(\alpha'-\gamma')^2+4\beta'^2}),$$
$$\tau = \tfrac{1}{2}(\alpha'+\gamma'-\sqrt{(\alpha'-\gamma')^2+4\beta'^2});$$

oder, wenn man $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ durch die Coefficienten α, β, ... ersetzt:

14. $$\rho = \tfrac{1}{2}\left[(\alpha+\gamma)\varkappa-\delta^2-\varepsilon^2+\sqrt{[(\alpha-\gamma)\varkappa-(\delta^2-\varepsilon^2)]^2+4(\beta\varkappa-\delta\varepsilon)^2}\right],$$

15. $$\tau = \tfrac{1}{2}\left[(\alpha+\gamma)\varkappa-\delta^2-\varepsilon^2-\sqrt{[(\alpha-\gamma)\varkappa-(\delta^2-\varepsilon^2)]^2+4(\beta\varkappa-\delta\varepsilon)^2}\right].$$

Die transformirte Gleichung ist $\rho U^2+\tau V^2+\varkappa^2=0$, oder nach Division durch $-\varkappa^2$:

16. $$\frac{-\rho}{\varkappa^2}U^2+\frac{-\tau}{\varkappa^2}V^2-1=0.$$

20. a) Sind ρ und τ beide negativ, so kann man setzen

$$\frac{-\rho}{\varkappa^2}=a^2, \quad \frac{-\tau}{\varkappa^2}=b^2,$$

hat also

$$a=\frac{1}{\varkappa}\sqrt{-\rho}, \quad b=\frac{1}{\varkappa}\sqrt{-\tau}$$

und die Gleichung 16. geht über in

$$a^2U^2+b^2V^2-1=0.$$

b) Sind ρ und τ beide positiv, so kann der Gleichung 16. durch reale Werthe von U und V nicht genügt werden.

c) Wenn ρ und τ nicht gleiche Zeichen haben, so kann, da $\rho-\tau$ positiv ist, nur ρ positiv und τ negativ sein. Setzen wir in diesem Falle

$$\frac{\rho}{\varkappa^2}=a^2, \quad \frac{-\tau}{\varkappa^2}=b^2,$$

so dass also

$$a=\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\rho}, \quad b=\frac{1}{\varkappa}\sqrt{-\tau},$$

so geht die Gleichung 16. über in

$$-a^2U^2+b^2V^2-1=0.$$

d) Der Radicand in den Formeln 13. kann umgeformt werden:

$$(\alpha'-\gamma')^2+4\beta'^2 = (\alpha'+\gamma')^2+4(\beta'^2-\alpha'\gamma').$$

Durch die ursprünglichen Coefficienten ausgedrückt, ist, was schon in 14. und 15. benutzt wurde, $\alpha'+\gamma'=(\alpha+\gamma)\varkappa-(\delta^2+\varepsilon^2)$
und $\beta'^2-\alpha'\gamma'=(\beta\varkappa-\delta\varepsilon)^2-(\alpha\varkappa-\delta^2)(\gamma\varkappa-\varepsilon^2)$.

Ist nun $\beta'^2-\alpha'\gamma'$ von Null verschieden, so verschwinden weder ρ noch τ, ist aber $\beta'^2-\alpha'\gamma'=0$, und $\alpha'+\gamma'>0$, so ist $\rho=\alpha'+\gamma'$, $\tau=0$.

Ist $\beta'^2 - \alpha'\gamma' = 0$, und $\alpha' + \gamma' < 0$, so ist $\rho = 0$, $\tau = \alpha' + \gamma'$.

Die Curvengleichung wird in dem einen Falle: $(\alpha' + \gamma')\, U^2 + x^2 = 0$ und kann, da beide Glieder der linken Seite positiv sind, durch reale Gerade nicht befriedigt werden; man erhält aus ihr die imaginären Werthe

1. $$U = \pm \frac{x}{\sqrt{-(\alpha' + \gamma')}},$$

also zwei imaginäre Punkte der neuen Abscissenachse, vom Nullpunkte des neuen Systems um $\pm \sqrt{-(\alpha' + \gamma')} : x$ entfernt.

Im andern Falle hat man $(\alpha' + \gamma')\, V^2 + x^2 = 0$ und kann setzen $(\alpha' + \gamma') = -b^2$, so dass die Gleichung entsteht: $b^2 V^2 - x^2 = 0$, aus welcher folgt:

2. $$V = \pm \frac{x}{b}.$$

Die Curve zerfällt daher in zwei reale, auf der neuen Ordinatenachse gelegene Punkte.

21. Ist $x = 0$, die Curvengleichung somit

1. $$\alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v = 0,$$

so suchen wir zunächst durch Drehung des Coordinatensystems die Gleichung zu vereinfachen. Die Transformationsformeln

$$\begin{aligned}
u &= \cos\omega \cdot u' - \sin\omega \cdot v', \quad v = \sin\omega \cdot u' + \cos\omega \cdot v' \text{ ergeben:}\\
u^2 &= \cos^2\omega \cdot u' - 2\cos\omega \sin\omega \cdot u'v' + \sin^2\omega \cdot v',\\
uv &= \cos\omega \cdot \sin\omega \cdot u'^2 + (\cos^2\omega - \sin^2\omega)\, u'v' - \cos\omega \sin\omega \cdot v'^2,\\
v^2 &= \sin^2\omega \cdot u'^2 + 2\sin\omega \cos\omega \cdot u'v' + \cos^2\omega \cdot v'^2.
\end{aligned}$$

Daher hat man die transformirte Gleichung:

2. $$\begin{aligned}
&(\alpha\cos^2\omega + 2\beta\cos\omega\sin\omega + \gamma\sin^2\omega)\, u'^2 - 2\,([\alpha - \gamma]\sin\omega\cos\omega - \beta\cos 2\omega)\, u'v'\\
&+ (\alpha\sin^2\omega - 2\beta\cos\omega\sin\omega + \gamma\cos^2\omega)\, v'^2 + 2\,(\delta\cos\omega + \varepsilon\sin\omega)\, u'\\
&- 2\,(\delta\sin\omega - \varepsilon\cos\omega)\, v' = 0.
\end{aligned}$$

Wir wählen nun ω so, dass der Coefficient von v' verschwindet, also gemäss der Gleichung $\delta\sin\omega - \varepsilon\cos\omega = 0$, welche ergiebt

3. $$\tan g\,\omega = \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Wir nehmen den dieser Gleichung entsprechenden Winkel, für welchen

4. $$\cos\omega = \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}}, \quad \sin\omega = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}},$$

die Wurzel positiv gerechnet.

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung 2., so wird dieselbe zu:

5. $$\alpha' u'^2 - 2\beta' u'v' + \gamma' v'^2 + \delta' u' = 0,$$

wo die Coefficienten die Werthe haben:

6. $$\begin{aligned}
\alpha' &= \alpha\cos^2\omega + 2\beta\cos\omega\sin\omega + \gamma\sin^2\omega = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2}(\alpha\delta^2 + 2\beta\delta\varepsilon + \gamma\varepsilon^2)\\
\beta' &= (\alpha - \gamma)\cos\omega\sin\omega - \beta(\cos^2\omega - \sin^2\omega) = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2}[(\alpha - \gamma)\delta\varepsilon + \beta(\varepsilon^2 - \delta^2)]\\
\gamma' &= \alpha\sin^2\omega - 2\beta\cos\omega\sin\omega + \gamma\cos^2\omega = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2}(\alpha\varepsilon^2 - 2\beta\delta\varepsilon + \gamma\delta^2)\\
\delta' &= \sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

22. Hierauf verschieben wir die Coordinatenachsen, so dass der Nullpunkt des neuen Systems die Coordinaten μ, ν hat. Bezeichnen U, V die Coordinaten im neuen Systeme, so haben wir die Transformationsformeln

$$u' = \frac{U}{1 + \mu U + \nu V}, \quad v' = \frac{V}{1 + \mu U + \nu V},$$

also die transformirte Gleichung, nach Multiplication mit $(1 + \mu U + \nu V)^2$

$$\alpha' U^2 - 2\beta' UV + \gamma' V^2 + 2\delta'(1 + \mu U + \nu V) U = 0,$$

oder geordnet

1. $$(\alpha' + 2\delta'\mu) U^2 - 2(\beta' - \delta'\nu) UV + \gamma' V^2 + 2\delta' U = 0.$$

Wir wählen nun den Nullpunkt des neuen Systems so, dass die Coefficienten von U^2 und UV verschwinden, haben also für μ und ν die Gleichungen:

$$\alpha' + 2\delta'\mu = 0, \quad \beta' - \delta'\nu = 0,$$

aus denen die Werthe folgen:

2. $$\mu = -\frac{\alpha'}{2\delta'}, \quad \nu = \frac{\beta'}{\delta'},$$

Diese Transformation ist nur dann nicht möglich, wenn $\delta' = 0$, und dies kann nach den Formeln 6. in No. 21 nur eintreten, wenn ε und δ zugleich Null sind. Diesen besonderen Fall werden wir am Schlusse betrachten.

Setzt man aus No. 21, 6. die Werthe ein, so hat man

3. $$\mu = -\frac{\alpha\delta^2 + 2\beta\delta\varepsilon + \gamma\varepsilon^2}{2\sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}^3}, \quad \nu = \frac{(\alpha - \gamma)\delta\varepsilon + \beta(\varepsilon^2 - \delta^2)}{\sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2}^3}.$$

Die Gleichung 1. geht nun über in

4. $$(\alpha\varepsilon^2 - 2\beta\delta\varepsilon + \gamma\delta^2) \cdot V^2 + 2\sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}^3 \cdot U = 0.$$

Dies ist (§ 4, No. 3) die Gleichung einer Parabel mit dem Parameter

$$p = \pm \frac{\alpha\varepsilon^2 - 2\beta\delta\varepsilon + \gamma\delta^2}{\sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2}^3}.$$

23. Ist $\varkappa = \varepsilon = \delta = 0$, so reducirt sich die Curvengleichung auf:

1. $$\alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 = 0.$$

Die linke Seite zerfällt nach Multiplication mit α in die beiden linearen Faktoren $\alpha u + (\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}) v$ und $\alpha u + (\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}) v$, die Curvengleichung zerfällt also in die linearen Gleichungen

2. $$\alpha u + (\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}) v = 0,$$

3. $$\alpha u + (\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}) v = 0.$$

Dies sind die Gleichungen zweier unendlich fernen Punkte (§ 4, No. 2); ist $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$, so sind dieselben real und verschieden; ist $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$, so sind sie real und fallen zusammen; ist $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$, so sind sie conjugirt complex.

24. Wir fassen die Ergebnisse der Untersuchung der Gleichung $\Phi = 0$ nochmals zusammen:

A. Ist in der Gleichung $\Phi \equiv \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v + \varkappa = 0$ die Zahl $\varkappa$ von Null verschieden, und haben die Grössen

$$\rho = \tfrac{1}{2}\left[(\alpha + \gamma)\varkappa - \delta^2 - \varepsilon^2 + \sqrt{((\alpha - \gamma)\varkappa - \delta^2 + \varepsilon^2)^2 + 4(\beta\varkappa - \delta\varepsilon)^2}\right]$$
$$\tau = \tfrac{1}{2}\left[(\alpha + \gamma)\varkappa - \delta^2 - \varepsilon^2 - \sqrt{((\alpha - \gamma)\varkappa - \delta^2 + \varepsilon^2)^2 + 4(\beta\varkappa - \delta\varepsilon)^2}\right]$$

gleiches Vorzeichen, so ist die Curve $\Phi = 0$ eine Ellipse; der Mittelpunkt hat die Coordinaten $x = -\delta : \varkappa$, $y = -\varepsilon : \varkappa$, oder die Gleichung $\delta u + \varepsilon v + \varkappa = 0$; die Halbachsen haben die Längen $a = \sqrt{-\rho : \varkappa}$, $b = \sqrt{-\tau : \varkappa}$.

Der Winkel ω der Abscissenachse mit der ersteren Halbachse ist der zwischen $+45°$ und $-45°$ enthaltene Winkel, der der Gleichung genügt:

$$\tang 2\omega = \frac{2(\beta\varkappa - \delta\varepsilon)}{(\alpha - \gamma)\varkappa - \delta^2 + \varepsilon^2}.$$

Sind ρ und τ negativ, so ist die Ellipse real; sind ρ und τ positiv, so ist die Ellipse imaginär; der Mittelpunkt ist in jedem Falle real.

B. Ist $\varkappa$ von Null verschieden und ρ positiv, τ negativ, so ist die Curve $\Phi = 0$ eine Hyperbel. Der Mittelpunkt hat die Coordinaten $x = -\delta : \varkappa$,

$y = -\varepsilon : \varkappa$, die halbe Hauptachse und Nebenachse sind $\sqrt{-\tau} : \varkappa$ und $\sqrt{\rho} : \varkappa$; der Winkel der Abscissenachse mit der Nebenachse ist der zwischen -45° und $+45^\circ$ enthaltene Winkel, der der Gleichung genügt:

$$tang\, 2\omega = \frac{2(\beta\varkappa - \delta\varepsilon)}{(\alpha - \gamma)\varkappa - \delta^2 + \varepsilon^2}.$$

C. a) Ist $\tau = 0$, so ist $\Phi = 0$ die Gleichung zweier conjugirt complexen Punkte; dieselben sind auf der realen Geraden enthalten, mit welcher die Abscissenachse den Winkel ω bildet.

b) Ist $\rho = 0$, so ist $\Phi = 0$ die Gleichung zweier realen Punkte, mit deren Geraden die Ordinatenachse den Winkel ω einschliesst. Die Gleichungen der beiden Punkte sind, wie man leicht erhält, wenn man in No. 20, 2 V mit Hülfe der Transformationsformeln durch u, v ersetzt

$$\left(-\sqrt{-(\alpha+\gamma)\varkappa+\delta^2+\varepsilon^2}\, sin\,\omega + \delta\right) u - \left(\sqrt{-(\alpha+\gamma)\varkappa+\delta^2+\varepsilon^2}\, cos\,\omega + \varepsilon\right) v + \varkappa = 0,$$
$$\left(-\sqrt{-(\alpha+\gamma)\varkappa+\delta^2+\varepsilon^2}\, sin\,\omega - \delta\right) u + \left(\sqrt{-(\alpha+\gamma)\varkappa+\delta^2+\varepsilon^2}\, cos\,\omega - \varepsilon\right) v - \varkappa = 0.$$

D. Ist $\varkappa = 0$, und nicht zugleich $\varepsilon = \delta = 0$, so ist die Curve $\Phi = 0$ eine Parabel.

Die Coordinaten des Parabelscheitels ergeben sich aus No. 21, 3 mittelst der der Transformationsformeln zu

$$x = \frac{1}{2(\delta^2 + \varepsilon^2)^2}(\alpha\delta^3 + 2\alpha\delta\varepsilon^3 - \gamma\delta\varepsilon^2 + 2\beta\varepsilon^3),$$
$$y = \frac{1}{2(\delta^2 + \varepsilon^2)^2}(\gamma\varepsilon^3 + 2\gamma\delta^2\varepsilon - \alpha\delta^2\varepsilon + 2\beta\delta^3).$$

Der Parameter stimmt dem absoluten Werthe nach überein mit

$$\frac{\alpha\varepsilon^2 - 2\beta\delta\varepsilon + \gamma\delta^2}{\sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2}^3};$$

die Parabelachse schliesst mit der Abscissenachse den Winkel ω ein und erstreckt sich entlang der positiven oder negativen Seite dieser Geraden, je nachdem $\alpha\varepsilon^2 - 2\beta\delta\varepsilon + \gamma\delta^2$ positiv oder negativ ist.

E. Ist $\varkappa = 0$ und zugleich $\varepsilon = \delta = 0$, so zerfällt die Curve in die zwei unendlich fernen Punkte

$$\alpha u + (\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma})v = 0,$$
$$\alpha u + (\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma})v = 0.$$

Je nachdem $\beta^2 - \alpha\gamma$ positiv, Null, oder negativ ist, sind diese beiden Punkte (Richtungen) real und verschieden, real und vereint, oder conjugirt complex.

25. Wie zu erwarten war, haben wir die Gebilde ersten Grades — die Gerade und den Punkt — unter den Gebilden zweiten Grades wieder vorgefunden.

Eigentliche Curven zweiter Ordnung und zweiter Klasse giebt es, wie wir gesehen haben, nur die drei: Ellipse, Hyperbel und Parabel.

§ 11. Bestimmung einer Curve zweiten Grades durch fünf Punkte und durch fünf Tangenten.

1. Die Gleichung einer Linie zweiten Grades

$$F \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

enthält sechs Constante, a, b, c, d, e, f. Wird von einer Curve zweiten Grades verlangt, dass sie durch einen gegebenen Punkt $P_1(x_1, y_1)$ geht, so müssen die Coefficienten $a \ldots f$ so beschaffen sein, dass die Gleichung erfüllt wird:

$$ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 + 2dx_1 + 2ey_1 + d = 0.$$

Durch einen Punkt einer Curve zweiten Grades ist also eine homogene lineare Gleichung zwischen den sechs Constanten der Curvengleichung gegeben.

Durch fünf homogene lineare, von einander unabhängige Gleichungen sind die Verhältnisse der sechs Constanten $a : b : c : d : e : f$ eindeutig bestimmt; da nun die geometrische Bedeutung der Gleichung $F = 0$ nicht von den Einzelwerthen der Coefficienten $a \ldots f$, sondern nur von ihren Verhältnissen abhängt, so folgt: Eine Curve zweiter Ordnung ist durch fünf Punkte bestimmt.

2. Um die Gleichung einer Curve zweiten Grades herzustellen, die durch fünf gegebene Punkte geht, bemerken wir zunächst, dass diese Gleichung nichts anderes sein kann, als die Bedingung dafür, dass der Punkt P auf der durch die fünf gegebenen Punkte bestimmten Curve zweiten Grades liegt. Sind $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, $x_4 y_4$, $x_5 y_5$ die Coordinaten dieser fünf Punkte, a, b, c, d, e, f die Constanten der durch sie gehenden Curve zweiten Grades, so gelten die fünf Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a x_1^2 + 2 b x_1 y_1 + c y_1^2 + 2 d x_1 + 2 e y_1 + f = 0, \\
a x_2^2 + 2 b x_2 y_2 + c y_2^2 + 2 d x_2 + 2 e y_2 + f = 0, \\
a x_3^2 + 2 b x_3 y_3 + c y_3^2 + 2 d x_3 + 2 e y_3 + f = 0, \\
a x_4^2 + 2 b x_4 y_4 + c y_4^2 + 2 d x_4 + 2 e y_4 + f = 0, \\
a x_5^2 + 2 b x_5 y_5 + c y_5^2 + 2 d x_5 + 2 e y_5 + f = 0.
\end{aligned}$$

Soll nun auch der Punkt P auf derselben Curve liegen, so kommt die sechste Gleichung hinzu $a x^2 + 2 b x y + c y^2 + 2 d x + 2 e y + f = 0$.

Die Bedingung für das Zusammenbestehen dieser sechs, für a, b, c, d, e, f homogenen linearen Gleichungen ist das Verschwinden ihrer Determinante:

$$\begin{vmatrix}
x^2 & y^2 & x y & x & y & 1 \\
x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\
x_2^2 & y_2^2 & x_2 y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\
x_3^2 & y_3^2 & x_3 y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\
x_4^2 & y_4^2 & x_4 y_4 & x_4 & y_4 & 1 \\
x_5^2 & y_5^2 & x_5 y_5 & x_5 & y_5 & 1
\end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung, die in der That, wie man sieht, zweiten Grades für x und y ist.

3. Die Gleichung einer Curve zweiter Klasse

$$\Phi = \alpha u^2 + 2 \beta u v - \gamma v^2 + 2 \delta u + 2 \varepsilon v + \varkappa = 0$$

enthält sechs Constante α, β, γ, δ, ε, $\varkappa$, durch deren Verhältnisse die Curve bestimmt ist.

Ist eine Tangente T_1 $(u_1 v_1)$ der Curve gegeben, so haben die Constanten der Gleichung zu genügen:

$$\alpha u_1^2 + 2 \beta u_1 v_1 + \gamma v_1^2 + 2 \delta u_1 + 2 \varepsilon v_1 + \varkappa = 0.$$

Dies ist eine homogene lineare Gleichung. Durch fünf solcher Gleichungen sind die Verhältnisse $\alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon$ bestimmt; wir schliessen daher: Eine Curve zweiter Klasse ist durch fünf Tangenten bestimmt.

Da wir im vorigen Paragraphen gefunden haben, dass die eigentlichen Curven zweiten Grades zugleich auch zweiter Klasse sind, und umgekehrt, so haben wir für diese Curven nicht mehr nöthig, den Unterschied des Grades und der Klasse zu erwähnen und bezeichnen sie als Curven zweiter Ordnung. Wenn die Bezeichnung »zweiten Grades« oder »zweiter Klasse« noch gebraucht wird, so soll sie nur die Bedeutung haben, dass bei dieser Gelegenheit von der Gleichung der Curve zweiter Ordnung in Punktcoordinaten, bez. in Liniencoordinaten ausgegangen wird.

Wir fassen die Ergebnisse von No. 1 und 3 daher in den Satz zusammen:

Eine Curve zweiter Ordnung ist durch fünf Punkte oder durch fünf Tangenten eindeutig bestimmt.

4. Sind T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 fünf Tangenten einer Curve zweiter Klasse, und α, β, γ, δ, ε, $\varkappa$ die Coefficienten ihrer Gleichung, so bestehen für dieselben die fünf Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha u_1^2 + 2\beta u_1 v_1 + \gamma v_1^2 + 2\delta u_1 + 2\gamma v_1 + \varkappa &= 0,\\
\alpha u_2^2 + 2\beta u_2 v_2 + \gamma v_2^2 + 2\delta u_2 + 2\gamma v_2 + \varkappa &= 0,\\
\alpha u_3^2 + 2\beta u_3 v_3 + \gamma v_3^2 + 2\delta u_3 + 2\gamma v_3 + \varkappa &= 0,\\
\alpha u_4^2 + 2\beta u_4 v_4 + \gamma v_4^2 + 2\delta u_4 + 2\gamma v_4 + \varkappa &= 0,\\
\alpha u_5^2 + 2\beta u_5 v_5 + \gamma v_5^2 + 2\delta u_5 + 2\gamma v_5 + \varkappa &= 0.
\end{aligned}$$

Soll auch die Gerade T die Curve berühren, so besteht noch die Gleichung

$$\alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v + \varkappa = 0.$$

Der Verein dieser sechs für die Coefficienten α, β, γ, δ, ε, $\varkappa$ homogenen linearen Gleichungen bedingt das Verschwinden ihrer Determinante:

$$\begin{vmatrix}
u^2 & uv & v^2 & u & v & 1\\
u_1^2 & u_1v_1 & v_1^2 & u_1 & v_1 & 1\\
u_2^2 & u_2v_2 & v_2^2 & u_2 & v_2 & 1\\
u_3^2 & u_3v_3 & v_3^2 & u_3 & v_3 & 1\\
u_4^2 & u_4v_4 & v_4^2 & u_4 & v_4 & 1\\
u_5^2 & u_5v_5 & v_5^2 & u_5 & v_5 & 1
\end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Gleichung der durch $T_1 \ldots T_5$ bestimmten Curve zweiter Klasse.

5. Die Gleichung einer Parabel in Liniencoordinaten ist

$$\alpha\beta u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v = 0.$$

Diese Gleichung enthält nur noch fünf Coefficienten, deren Verhältnisse durch vier homogene lineare Gleichungen bestimmt werden. Sind T_1, T_2, T_3, T_4 vier gegebene Tangenten einer Parabel und ist T eine beliebige andere Parabeltangente, so hat man für die Coefficienten α, β, γ, δ, ε die fünf Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v &= 0,\\
\alpha u_1^2 + 2\beta u_1v_1 + \gamma v_1^2 + 2\delta u_1 + 2\varepsilon v_1 &= 0,\\
\alpha u_2^2 + 2\beta u_2v_2 + \gamma v_2^2 + 2\delta u_2 + 2\varepsilon v_2 &= 0,\\
\alpha u_3^2 + 2\beta u_3v_3 + \gamma v_3^2 + 2\delta u_3 + 2\varepsilon v_3 &= 0,\\
\alpha u_4^2 + 2\beta u_4v_4 + \gamma v_4^2 + 2\delta u_4 + 2\varepsilon v_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Aus dem Verein dieser fünf Gleichungen folgt das Verschwinden ihrer Determinante:

$$\begin{vmatrix}
u^2 & uv & v^2 & u & v\\
u_1^2 & u_1v_1 & v_1^2 & u_1 & v_1\\
u_2^2 & u_2v_2 & v_2^2 & u_2 & v_2\\
u_3^2 & u_3v_3 & v_3^2 & u_3 & v_3\\
u_4^2 & u_4v_4 & v_4^2 & u_4 & v_4
\end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Parabel, welche die vier Geraden T_1, T_2, T_3, T_4 zu Tangenten hat.

Durch vier Tangenten ist also eine Parabel eindeutig bestimmt.

6. Soll durch *vier Punkte eine Parabel* gelegt werden, so bestehen für die sechs Coefficienten der Gleichung in Punktcoordinaten $F = 0$ zunächst die vier Gleichungen:

$$1.\quad \begin{aligned}
ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 + 2dx_1 + 2ey_1 + f &= 0,\\
ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 + 2dx_2 + 2ey_2 + f &= 0,\\
ax_3^2 + 2bx_3y_3 + cy_3^2 + 2dx_3 + 2ey_3 + f &= 0,\\
ax_4^2 + 2bx_4y_4 + cy_4^2 + 2dx_4 + 2ey_4 + f &= 0.
\end{aligned}$$

Ausserdem gilt noch die für die Parabel charakteristische Gleichung

2. $$b^2 - ac = 0.$$

Setzt man $b : a = \lambda$, also $b = a\lambda$, so folgt aus 2. $c = a\lambda^2$; wenn man diese Werthe für b und c in die Gleichungen 1. einführt, so erhält man:

3. $$\begin{aligned} a(x_1^2 + 2\lambda x_1 y_1 + \lambda^2 y_1^2) + 2dx_1 + 2ey_1 + f = 0, \\ a(x_2^2 + 2\lambda x_2 y_2 + \lambda^2 y_2^2) + 2dx_2 + 2ey_2 + f = 0, \\ a(x_3^2 + 2\lambda x_3 y_3 + \lambda^2 y_3^2) + 2dx_3 + 2ey_3 + f = 0, \\ a(x_4^2 + 2\lambda x_4 y_4 + \lambda^2 y_4^2) + 2dx_4 + 2ey_4 + f = 0. \end{aligned}$$

Sieht man dieselben als homogene lineare Gleichungen von a, d, e, f an, so folgt das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + 2\lambda x_1 y_1 + \lambda^2 y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + 2\lambda x_2 y_2 + \lambda^2 y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + 2\lambda x_3 y_3 + \lambda^2 y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + 2\lambda x_4 y_4 + \lambda^2 y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante lässt sich als Summe dreier Determinanten schreiben und führt damit auf die quadratische Gleichung für λ

4. $$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} + 2\lambda \begin{vmatrix} x_1 y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 y_4 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} + \lambda^2 \begin{vmatrix} y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch diese Gleichung ist nun λ bestimmt. Setzt man den so berechneten Werth von λ in die Parabelgleichung

5. $$a(x^2 + 2\lambda xy + \lambda^2 y^2) + 2dx + 2ey + f = 0$$

ein, so enthält dieselbe noch die vier Constanten a, d, e, f. Man kann nun diese eliminiren, wenn man 5. mit drei Gleichungen der Gruppe 3., z. B. mit den ersten dreien dieser Gleichungen, zusammenstellt. Man hat dann vier homogene lineare Gleichungen für a, d, e, f und folgert aus ihnen das Verschwinden ihrer Determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2 + 2\lambda xy + \lambda^2 y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + 2\lambda x_1 y_1 + \lambda^2 y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + 2\lambda x_2 y_2 + \lambda^2 y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + 2\lambda x_3 y_3 + \lambda^2 y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die gesuchte Parabelgleichung.

Da λ aus der quadratischen Gleichung 4. gefunden wird, so haben wir den Satz: Durch vier Punkte kann man zwei Parabeln legen; dieselben sind real und verschieden, oder real und zusammenfallend, oder conjugirt complex; bei besonderer Wahl der vier Punkte können auch beide oder eine zu zwei parallelen Geraden ausarten.

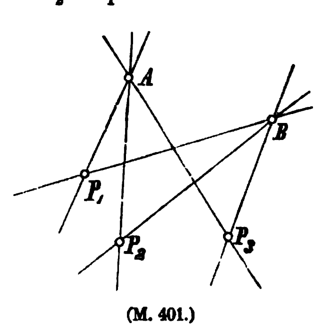
7. Die in No. 2 und No. 4 gegebenen Gleichungen einer Curve zweiter Ordnung in Punkt- und Liniencoordinaten sind keine geeigneten Ausgangspunkte für geometrische Folgerungen. Wir wollen daher noch eine andere Methode angeben, die Gleichung einer Curve zweiter Ordnung zu bilden, die durch fünf gegebene Punkte geht, bez. fünf gegebene Gerade berührt; wir werden durch dieselbe die Gleichungen in einer solchen Form erhalten, dass wir mit Leichtigkeit werthvolle geometrische Sätze aus ihnen ableiten können.

8. Um die Gleichung des Kegelschnitts zu finden, der durch die fünf Punkte A, B, P_1, P_2, P_3 geht, betrachten wir zunächst die vier Punkte A, B, P_1, P_2. Zu den unendlich vielen Kegelschnitten, die durch diese Punkte gehen, gehören die Linienpaare AP_1, BP_2 und AP_2, BP_1. Sind $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_1' = 0$,

$T_2' = 0$ die Gleichungen der Geraden AP_1, AP_2, BP_1, BP_2, so ist
die Gleichung des Linienpaares AP_1, BP_2: $T_1 \cdot T_2' = 0$, und
" " " " " " AP_2, BP_1: $T_2 \cdot T_1' = 0$.

Multiplicirt man beide Gleichungen mit irgend zwei Zahlen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, und addirt, so erhält man eine neue Gleichung zweiten Grades

1. $F \equiv \varkappa_1 T_1 T_2' + \varkappa_2 T_2 T_1' = 0$.



(M. 401.)

Die zu dieser Gleichung gehörige Curve zweiter Ordnung geht nun offenbar durch die Punkte, für welche zugleich

$T_1 = 0$ und $T_2 = 0$, d. i. Punkt A,
$T_1 = 0$ " $T_1' = 0$, d. i. " P_1,
$T_2' = 0$ " $T_1' = 0$, d. i. " B,
$T_2' = 0$ " $T_2 = 0$, d. i. " P_2.

Das Verhältniss $\varkappa_1 : \varkappa_2$ kann nun immer so bestimmt werden, dass der Gleichung $F = 0$ noch durch einen beliebigen fünften Punkt P_3 der Ebene genügt werden kann.

Liegt P_3 auf den durch A und B gehenden Geraden

2. $T_3 \equiv a_1 T_1 + a_2 T_2 = 0, \quad T_3' \equiv b_1 T_1' + b_2 T_2' = 0,$

so ist für die Coordinaten von P_3

3. $a_1 T_1 = - a_2 T_2, \quad b_1 T_1' = - b_2 T_2'.$

Multiplicirt man 1. mit $a_1 b_1$, so entsteht

$$a_1 b_1 \varkappa_1 T_1 T_2' + a_1 b_1 \varkappa_2 T_2 T_1' = 0.$$

Setzt man hier die Werthe 3. ein und dividirt dann durch $T_2 T_2'$, so erhält man:

4. $a_2 b_1 \varkappa_1 + a_1 b_2 \varkappa_2 = 0.$

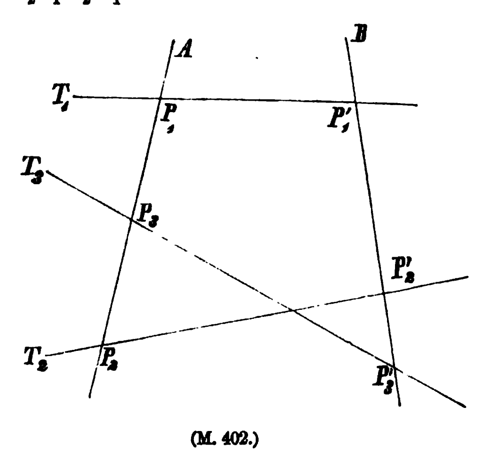
Dieser Gleichung genügt man durch

5. $\varkappa_1 = a_1 b_2, \quad \varkappa_2 = - a_2 b_1.$

Setzt man nun diese Werthe in 1. ein, so erhält man die Gleichung des Kegelschnitts*) durch die fünf gegebenen Punkte $ABP_1P_2P_3$ zu

6. $a_1 b_2 T_1 T_2' - a_2 b_1 T_2 T_1' = 0.$

9. In ähnlicher Weise erhalten wir die Gleichung eines Kegelschnitts, von welchem fünf Tangenten gegeben sind.



(M. 402.)

Die gegebenen Tangenten seien A, B, T_1, T_2, T_3. Zu den Curven zweiter Klasse, welche die vier Tangenten A, B, T_1, T_2 enthalten, gehören auch die beiden Punktpaare AT_1, BT_2 und AT_2, BT_1 (wobei wir unter dem Punkte AT_1 den Schnittpunkt der Geraden A und T_1 verstehen u. s. w.). Man stelle nun die Gleichungen der vier Punkte AT_1,

*) In der descriptiven Geometrie ist bewiesen worden, dass jeder ebene Schnitt eines Rotationskegels, der die Kegelspitze nicht enthält, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, und dass umgekehrt jede Ellipse, Parabel und Hyperbel als ebner Schnitt eines Rotationskegels erhalten werden kann; daher werden die Curven zweiter Ordnung als Kegelschnitte bezeichnet.

AT_2, BT_1, BT_2 auf; dieselben seien der Reihe nach $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_1' = 0$, $P_2' = 0$.

Die Gleichungen der beiden Punktpaare sind dann

$$P_1 \cdot P_2' = 0 \text{ und } P_2 \cdot P_1' = 0.$$

Multiplicirt man sie mit zwei Zahlen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ und addirt, so erhält man die Gleichung einer Curve zweiter Ordnung

1. $$\varkappa_1 \cdot P_1 P_2' + \varkappa_2 P_2 P_1' = 0.$$

Dieser Gleichung wird durch die vier Geraden ABT_1T_2 genügt, denn

für die Coordinaten von A wird $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$,
" " " " B " $P_1' = 0$ " $P_2' = 0$,
" " " " T_1 " $P_1 = 0$ " $P_1' = 0$,
" " " " T_2 " $P_2 = 0$ " $P_2' = 0$.

Man kann nun das Verhältniss $\varkappa_1 : \varkappa_2$ immer so wählen, dass die Gleichung 1. durch eine beliebige fünfte Gerade T_3 der Ebene erfüllt wird. Man bilde die Gleichungen der Punkte P_3 und P_3', in welchen A und B von T_3 geschnitten werden; dieselben werden in der Form erhalten

2. $P_3 \equiv a_1 P_1 + a_2 P_2 = 0$, 3. $P_3' \equiv b_1 P_1' + b_2 P_2' = 0$.

Die Coordinaten von T_3 erfüllen die Gleichungen 2. und 3.; also ist für dieselben $a_1 P_1 = - a_2 P_2$, $b_1 P_1' = - b_2 P_2'$.

Setzt man dies in 1. ein, nachdem man 1. mit $a_1 b_1$ multiplicirt hat, und dividirt dann durch $P_2 P_2'$, so erhält man

4. $$a_2 b_1 \varkappa_1 + a_1 b_2 \varkappa_2 = 0.$$

Wir können daher für $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die Werthe wählen

5. $$\varkappa_1 = a_1 b_2, \quad \varkappa_2 = - a_2 b_1,$$

durch welche die Gleichung 4. identisch erfüllt wird. Hierdurch erhalten wir die verlangte Gleichung des durch die fünf Tangenten $ABT_1T_2T_3$ bestimmten Kegelschnitts

6. $$a_1 b_2 \cdot P_1 P_2' - a_2 b_1 \cdot P_2 P_1' = 0.$$

10. A.*) Aus der in No. 8 gefundenen Gleichung des durch fünf gegebene Punkte gehenden Kegelschnitts

1. $$a_1 b_2 \cdot T_1 T_2' - a_2 b_1 \cdot T_2 T_1' = 0$$

können wir leicht die Gleichungen zweier durch die Punkte A und B gehenden Geraden ableiten, die sich in einem Punkte der Curve schneiden. Ist nämlich

2. $$T \equiv \lambda_1 a_1 T_1 + \lambda_2 a_2 T_2 = 0$$

die Gleichung der durch A nach irgend einem Curvenpunkte P gezogenen Geraden, so ist für jeden Punkt derselben

3. $$\lambda_1 a_1 T_1 = - \lambda_2 a_2 T_2.$$

Setzt man dies in die Curvengleichung 1. ein, nachdem man dieselbe mit λ_1 multiplicirt hat, so erhält man

4. $$(\lambda_2 b_2 T_2' + \lambda_1 b_1 T_1') a_2 T_2 = 0.$$

Daher liegen auf dem Kegelschnitte 1. die Punkte, welche zugleich 2. und 4. genügen, d. i. die Punkte, welche die Gleichungspaare

a) $T = 0$ und $a_2 T_2 = 0$,
b) $T = 0$ und $\lambda_2 b_2 T_2' + \lambda_1 b_1 T_1' = 0$

*) Um den Dualismus der Entwicklungen in Punkt- und in Liniencoordinaten deutlicher hervortreten zu lassen, werden wir einige Sätze so anordnen, dass in derselben Nummer unter A) eine Entwicklung in Punktcoordinaten, unter B. die entsprechende Entwicklung in Liniencoordinaten enthalten ist. Will man den Gedankengang verfolgen, ohne abwechselnd von Punkt- auf Liniencoordinaten überzugehen, so hat man zunächst 10A, 11A, 12A ... und dann 10B, 11B, 12B ... zu lesen.

befriedigen. Das erste Paar von Gleichungen wird durch den Punkt A erfüllt, den die Geraden T und T_2 gemein haben; das andere Paar von dem neuen Curvenpunkte P; die Gerade

5. $$T' \equiv \lambda_1 b_1 T_1' + \lambda_2 b_2 T_2' = 0,$$

die sich mit T in einem Punkte P durchschneidet, geht, wie ihre Gleichung lehrt, durch B, ist also die gesuchte Gerade.

Aendert man das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ stetig, so beschreiben T und T' die Büschel, deren Träger A und B sind, und P beschreibt damit den ganzen Kegelschnitt.

Die Gleichungen 2. und 5. lehren (§ 6, 10), dass die beiden Büschel A und B projectiv sind, und je zwei nach demselben Curvenpunkte gehende Strahlen sich entsprechen. Wir haben daher den Satz: Die Punkte einer Curve zweiter Ordnung werden von irgend zwei Punkten der Curve aus durch projective Strahlbüschel projicirt, und zwar entsprechen sich die Strahlen, die nach demselben Curvenpunkte gehen.

B. Aus der Gleichung eine Curve zweiter Klasse, die fünf gegebene Gerade A, B, T_1, T_2, T_3 berührt

1. $$a_1 b_2 \cdot P_1 P_2' - a_2 b_1 \cdot P_2 P_1' = 0,$$

findet man leicht die Gleichung des Punktes der Geraden B, der mit einem gegebenen Punkte P der Geraden A auf einer Tangente der Curve liegt.

Die Gleichung von P sei

2. $$P \equiv \lambda_1 a_1 P_1 + \lambda_2 a_2 P_2 = 0.$$

Für die Coordinaten jeder durch P gehenden Geraden ist daher

3. $$\lambda_1 a_1 P_1 = - \lambda_2 a_2 P_2 .$$

Multiplicirt man 1. mit λ_1 und setzt dann den Werth 3. für $\lambda_1 a_1 P_1$ ein, so erhält man

4. $$a_2 P_2 (\lambda_2 b_2 P_2' + \lambda_1 b_1 P_1') = 0.$$

Die durch P gehenden Tangenten der Curve befriedigen also ausser der Gleichung $P = 0$ noch eine der Gleichungen $P_2 = 0$, $\lambda_2 b_2 P_2' + \lambda_1 b_1 P_1' = 0$.

Die Tangente durch P und P_2 ist die gegebene Gerade A; die neue durch P gehende Tangente verbindet P mit dem Punkte

5. $$P' \equiv \lambda_1 b_1 P_1' + \lambda_2 b_2 P_2' = 0$$

der Geraden B.

Aus den Gleichungen 2. und 5. folgt, dass die Tangenten der Curve zweiter Ordnung die festen Tangenten A und B in projectiven Punktreihen treffen. Wir haben daher den Satz: Die Tangenten eines Kegelschnitts werden von zwei (oder mehr) Tangenten desselben in projektiven Punktreihen geschnitten, und zwar sind die Punkte entsprechend, welche auf derselben Tangente liegen.

11. A. Der Satz 10 A., der ebenso wie B. für die Curven zweiter Ordnung von grösster Bedeutung ist, lehrt, wie man alle Punkte eines Kegelschnitts construiren kann, von dem fünf Punkte gegeben sind.

Man verbinde zwei der gegebenen fünf Punkte A und B mit den drei übrigen $P_1 P_2 P_3$ durch die Strahlen $T_1 T_2 T_3$ bez. $T_1' T_2' T_3'$. Um nun den Punkt des Kegelschnitts zu erhalten, der auf einem beliebigen durch A gezogenen Strahle T liegt, construire man durch B den Strahl T', für welchen die Doppelverhältnissgleichung gilt: $(T_1 T_2 T_3 T) = (T_1' T_2' T_3' T_4')$. Der Schnittpunkt von T und T' ist der gesuchte Curvenpunkt. Lässt man T das ganze Büschel A zurücklegen, so bekommt man alle Punkte der Curve.

Die Construction besteht in der Vervollständigung der projectiven Büschel A und B und erfolgt nach § 6, 14.

B. Der Satz 10 B. lehrt, jede Tangente eines Kegelschnitts aus fünf gegebenen Tangenten zu construiren.

Man bemerke die Schnittpunkte $P_1P_2P_3$ bez. $P_1'P_2'P_3'$, welche drei von den gegebenen Tangenten mit den beiden anderen A und B haben.

Um nun die Tangente des Kegelschnitts zu finden, die durch einen beliebigen Punkt P der Geraden A geht, construire man auf B den Punkt P', für welchen die Gleichheit der Doppelverhältnisse besteht $(P_1P_2P_3P) = (P_1'P_2'P_3'P')$.

Die Gerade PP' ist die gesuchte Tangente.

Um alle Tangenten der Curve zu erhalten, hat man also zu den sämmtlichen Punkten der Geraden A die projectiv entsprechenden Punkte der Geraden B zu construiren, und je zwei entsprechende Punkte zu verbinden.

12. A. Nähert sich der Strahl T der Geraden AB (Fig. 401) so rückt auch der auf T gelegene Curvenpunkt P näher an B. Verschwindet der Winkel zwischen T und AB, so verschwindet auch der Abstand BP und der durch B und P gehende Strahl T' wird zur Tangente der Curve im Punkte B.

Diese Bemerkung setzt uns in den Stand, die Tangente eines Kegelschnitts in einem direkt gegebenen oder durch Construction gefundenen Punkte desselben zu construiren. Ist Q dieser Punkt, so verbinde man ihn durch die Strahlen $T_1T_2T_3$ mit drei anderen bekannten Punkten A, B, C der Curve; ferner verbinde man A, B, C durch die Strahlen $T_1'T_2'T_3'$ mit einem vierten bekannten Punkte R der Curve. Hierauf verbinde man R mit Q durch den Strahl T' und construire nun durch Q den Strahl T, für welchen $(T_1T_2T_3T) = (T_1'T_2'T_3'T')$; dann ist T die gesuchte Tangente der Curve in Q.

B. Nähert sich der Punkt P (Fig. 402) dem Schnittpunkte S der Geraden A und B, so nimmt der Winkel ab, den die Gerade B mit der Tangente PP' bildet; verschwindet die Strecke PS, so verschwindet auch der Winkel dieser Geraden, während doch ihr Schnittpunkt P' ein ganz bestimmter ist. Dieser Punkt ist also dann der Schnittpunkt zweier unendlich naher Tangenten, ist mithin der auf der Tangente B liegende Curvenpunkt.

Dies lehrt, den Punkt zu construiren, in welchem ein Kegelschnitt von einer direkt gegebenen oder durch Construction gefundenen Tangente berührt wird. Ist Q diese Tangente, so bemerke man die Schnittpunkte $P_1P_2P_3$ derselben mit drei bekannten Tangenten ABC der Curve; ferner durchschneide man ABC mit einer vierten bekannten Tangente R in den Punkten $P_1'P_2'P_3'$, und bemerke noch den Punkt P', in welchem Q und R sich schneiden. Construirt man nun auf Q den Punkt P, für welchen

$$(P_1P_2P_3P) = (P_1'P_2'P_3'P'),$$

so ist P der gesuchte Berührungspunkt.

13. A. Aufgabe. Von einem Kegelschnitte sind fünf Punkte gegeben; man soll die Punkte bestimmen, in welchen er von einer beliebigen Geraden geschnitten wird.

Sind $ABP_1P_2P_3$ die gegebenen Punkte und G die gegebene Gerade, so bilde man die Strahlenbüschel $T_1T_2T_3$ und $T_1'T_2'T_3'$, durch welche $P_1P_2P_3$ von A und B aus projicirt werden, und bemerke die Schnittpunkte dieser Strahlen mit G.

G werde von $T_1T_2T_3$ in den Punkten $R_1R_2R_3$, von $T_1'T_2'T_3'$ in den Punkten $R_1'R_2'R_3'$ geschnitten.

Construirt man nun zwei entsprechende Punkte R und R' der beiden auf einander liegenden projectiven Punktreihen, welche durch die entsprechenden Paare $R_1R_2R_3 \barwedge R_1'R_2'R_3'$ bestimmt sind, so sind die Strahlen T und T' entsprechend, welche R und R' von A und B aus projiciren, ihr Schnittpunkt ist also ein Punkt des Kegelschnitts.

Sind insbesondere Π und Π_1 die Doppelpunkte der beiden auf G liegenden projectiven Punktreihen (§ 6, 19), so ist in den Strahlbüscheln A und B

$$A\Pi \barwedge B\Pi, \quad A\Pi_1 \barwedge B\Pi_1,$$

also sind Π und Π_1 die gesuchten Schnittpunkte.

Wir entnehmen hieraus den Satz: Wenn man die Punkte eines Kegelschnitts von beliebig vielen Punkten dieser Curve aus projicirt, und die so entstehenden projectiven Strahlbüschel mit einer Geraden G durchschneidet, so erhält man auf G mehrere projective Punktreihen, die alle ein gemeinsames Paar selbstentsprechender Punkte haben, nämlich die Schnittpunkte der Geraden G mit dem Kegelschnitte.

Wenn G den Kegelschnitt nicht trifft, so haben die auf G erzeugten projectiven Punktreihen imaginäre Doppelpunkte. In diesem Falle hat man diese imaginären Doppelpunkte als die Schnittpunkte der Geraden G und des Kegelschnitts zu betrachten.

B. Aufgabe. Von einem Kegelschnitte sind fünf Tangenten gegeben. Man soll die Tangenten bestimmen, welche durch einen gegebenen Punkt C der Ebene gehen.

Werden zwei der gegebenen Tangenten A und B von den übrigen drei in den Punkten $P_1P_2P_3$ bez. $P_1'P_2'P_3'$ geschnitten, verbindet man C mit $P_1P_2P_3$ bez. $P_1'P_2'P_3'$ durch die Strahlen $R_1R_2R_3$ bez. $R_1'R_2'R_3'$, und construirt nun durch C zwei entsprechende Strahlen, R und R' der durch die Paare

$$R_1R_2R_3 \barwedge R_1'R_2'R_3'$$

bestimmten projectiven Strahlbüschel, so werden die Geraden A und B von R und R' in zwei entsprechenden Punkte P und P' der auf A und B liegenden projectiven Reihen $P_1P_2P_3 \ldots \barwedge P_1'P_2'P_3' \ldots$ geschnitten, die Gerade PP' ist daher eine Tangente der Curve.

Sind insbesondere Π und Π_1 die Doppelstrahlen der beiden concentrischen Strahlbüschel R und R', so sind Π und Π_1 zugleich Tangenten des Kegelschnitts. Also sind Π und Π_1 die gesuchten Tangenten.

Wir haben hiernach den Satz: Wenn die projectiven Punktreihen, welche die Tangenten eines Kegelschnitts auf beliebig vielen festen Tangenten ausschneiden, von einem beliebigen Punkte C der Ebene aus projicirt werden, so entstehen mehrere concentrische projective Strahlbüschel, die alle zwei selbstentsprechende Strahlen haben, nämlich die Tangenten des Kegelschnitts, die durch C gehen.

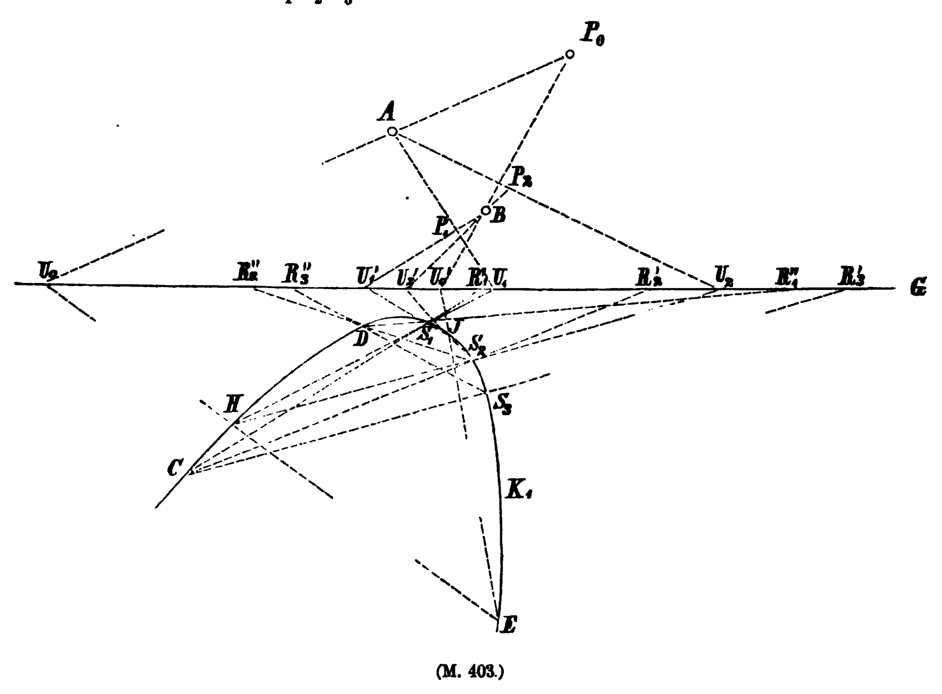
Haben die Strahlbüschel keine realen Doppelstrahlen, so sind die imaginären Doppelstrahlen als die (imaginären) durch C gehenden Curventangenten zu betrachten.

14. A. Aufgabe. Einen Kegelschnitt zu construiren, von welchem drei reale und zwei conjugirt complexe Punkte gegeben sind.

Die realen Punkte seien ABP_0. Die imaginären Punkte seien die Doppelpunkte Π und Π_1 zweier auf einer gegebenen Geraden G liegenden, durch drei Paare entsprechender Punkte $R_1'R_2'R_3' \barwedge R_1''R_2''R_3''$ gegebenen projectiven Punktreihen.

Wir verbinden $R_1'R_2'R_3'$ mit irgend einem Punkte C und $R_1''R_2''R_3''$ mit

einem andern Punkte D. Die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen dieser beiden Büschel seien $S_1 S_2 S_3$.



(M. 403.)

Durch $CDS_1S_2S_3$ ist ein Kegelschnitt K_1 bestimmt, der von G ebenso, wie der gesuchte Kegelschnitt K, in den imaginären Doppelpunkten der auf G liegenden projectiven Punktreihen getroffen wird.

Die Punkte des gesuchten Kegelschnitts K werden von den beiden Punkten A und B aus in projectiven Strahlbüscheln projicirt, und diese treffen G in zwei projectiven Punktreihen u und u' mit den Doppelpunkten Π und Π_1. Von diesen beiden Punktreihen sind ausser den Doppelpunkten noch die beiden entsprechenden Punkte U_0 und U_0' bekannt, in welchen G von den Strahlen AP_0 und BP_0 geschnitten wird.

Verbindet man nun U_0 und U_0' mit irgend einem Punkte auf K_1, z. B. mit E, und construirt die Punkte H und I, in denen diese Geraden den Kegelschnitt K_1 zum zweiten Male (ausser E) treffen, so werden die Punkte auf K_1 von H und I aus in zwei projectiven Strahlbüscheln projicirt, und diese schneiden auf der Geraden G zwei projective Punktreihen v und v' aus, die die Doppelpunkte Π und Π_1 und die entsprechenden Punkte U_0 und U_0' haben; folglich sind diese Reihen mit den Reihen u und u' identisch.

Verbindet man nun noch S_1 mit H und I, sowie S_2 mit H und I, und durchschneidet mit diesen beiden Strahlenpaaren die Gerade G in U_1U_1', U_2U_2', so hat man damit zwei weitere Paare entsprechender Punkte der Reihen u und u'. Zieht man AU_1 und BU_1', sowie AU_2 und BU_2', so sind die Schnittpunkte P_1 und P_2 dieser beiden Strahlenpaare zwei Punkte des gesuchten Kegelschnitts.

Man hat nun im Ganzen fünf reale Punkte A, B, P_0, P_1, P_2, und kann daher den Kegelschnitt vervollständigen.

B. Aufgabe. Einen Kegelschnitt zu construiren, von welchem drei reale und zwei conjugirt complexe Tangenten gegeben sind.

Die realen Tangenten seien A, B und T_0, die beiden conjugirt complexen seien die Doppelstrahlen Σ und Σ_1 zweier concentrischer, durch drei Paare entsprechende Strahlen $R_1'R_2'R_3' \barwedge R_1''R_2''R_3''$ gegebener Strahlbüschel mit dem Träger Γ.

Durchschneidet man die Strahlen $R_1'\,R_2'\,R_3'$ mit einer beliebigen Geraden C und die Strahlen $R_1''\,R_2''\,R_3''$ mit einer andern Geraden D, und verbindet die entsprechenden Schnittpunkte durch die drei Geraden S_1, S_2, S_3, so ist durch die fünf Geraden $C\,D\,S_1\,S_2\,S_3$ ein Kegelschnitt K_1 bestimmt, der ebenso, wie der gesuchte Kegelschnitt K, die imaginären Doppelstrahlen der beiden auf Γ liegenden concentrischen Büschel zu Tangenten hat.

Die beiden Punktreihen, in welchen die Tangenten des gesuchten Kegelschnittes von den Tangenten A und B getroffen werden, werden von Γ in zwei projectiven Büscheln u und u' projicirt, die Σ und Σ_1 zu Doppelstrahlen haben; von diesen beiden Büscheln sind die beiden entsprechenden Strahlen U_0 und U_0' bekannt, welche die Schnittpunkte der Geraden A und B mit der Geraden T_0 projiciren.

Durchschneidet man nun U_0 und U_0' mit einer Tangente des Kegelschnitts K_1, z. B. mit S_1, und bestimmt die Tangenten E und F, welche von diesen Schnittpunkten sich ausser S_1 noch an K_1 legen lassen, so werden auch die Tangenten des K_1 von E und F in zwei Punktreihen geschnitten, die von Γ aus in projectiven Strahlbüscheln v und v' projicirt werden, welche die Doppelstrahlen Σ und Σ_1 haben und in denen U_0 und U_0' entsprechende Strahlen sind.

Die Büschel v und v' sind daher mit den Büscheln u und u' identisch.

Projicirt man von Γ aus die Punkte, in denen die Tangenten E und F des Kegelschnitts K_1 von den Tangenten S_2 S_3 geschnitten werden, so erhält man zwei Paare entsprechender Strahlen; diese treffen A und B in zwei Paar entsprechenden Punkten, deren Verbindungsgerade T_2 und T_3 zwei Tangenten des gesuchten Kegelschnitts K sind.

Man hat nun von demselben fünf reale Tangenten A, B, T_1, T_2, T_3 und kann ihn daher ergänzen.

15. A. **Alle Punkte, von denen aus vier Punkte $ABCD$, die nicht zu dreien auf derselben Geraden liegen, durch Strahlen von gegebenem Doppelverhältniss $\varkappa$ projicirt werden, liegen auf einem Kegelschnitt, der durch die vier Punkte geht.**

Es sei E ein Punkt, von dem aus die gegebenen Punkte unter dem Doppelverhältniss $\varkappa$ projicirt werden. Construirt man den Kegelschnitt K, der durch $ABCDE$ bestimmt ist, so werden die Punkte $ABCD$ von jedem Punkte dieses Kegelschnitts aus unter dem Doppelverhältniss $\varkappa$ projicirt.

Liegt X nicht auf dem Kegelschnitte K, so ziehe man XA, und durchschneide damit K in Y.

Angenommen, das Doppelverhältniss der vier Strahlen $X(ABCD)$ d. i. der von X nach A, B, C, D gezogenen Strahlen wäre $\varkappa$, so hätte man

$$X(ABCD) = \varkappa = Y(ABCD),$$

also wären die Büschel $X(ABCD)$ und $Y(ABCD)$ projectiv. Da nun der Verbindungsstrahl der Centren XY sich selbst entspricht, so sind die Büschel $X(ABCD)$ und $Y(ABCD)$ perspectiv, also liegen BCD in einer Geraden. Dies widerspricht der Voraussetzung, also können die Punkte $ABCD$ von keinem Punkte ausserhalb des Kegelschnitts K unter dem Doppelverhältniss $\varkappa$ projicirt werden.

B. Die Geraden, welche vier feste Gerade $ABCD$, von denen nicht drei durch einen Punkt gehen, in Punkten treffen, die ein gegebenes Doppelverhältniss $\varkappa$ haben, umhüllen einen Kegelschnitt.

Es sei E eine solche Gerade. Construirt man den Kegelschnitt K, der durch die fünf Tangenten A, B, C, D, E bestimmt ist, so schneidet jede Tangente dieses Kegelschnitts die vier Geraden $ABCD$ unter dem Doppelverhältniss $\varkappa$.

Angenommen, eine Gerade X, die K nicht berührt, schneide $ABCD$ unter dem Doppelverhältniss $\varkappa$, so lege man von dem Punkte, in welchem X von A getroffen wird, eine Tangente Y an K. Bezeichnet man mit $X(ABCD)$ das Doppelverhältniss der vier Punkte, in dem X von $ABCD$ getroffen wird, so hat man
$$X(ABCD) = \varkappa = Y(ABCD).$$

Die Punktreihen $X(ABCD)$ und $Y(ABCD)$ sind daher projectiv. Da nun der Schnittpunkt A der Geraden X und Y sich selbst entspricht, so sind die beiden Reihen perspectiv, es gehen also die Geraden BCD durch einen Punkt. Dies widerspricht der Voraussetzung; also wird keine Gerade, die K nicht berührt, von den Geraden $ABCD$ unter dem Doppelverhältniss $\varkappa$ geschnitten.

16. A. Den Kegelschnitt, auf dem die Punkte liegen, von denen aus vier gegebene Punkte $ABCD$ unter einem gegebenen Doppelverhältniss projicirt werden, kann man in folgender Weise construiren.

Soll das Doppelverhältniss $\varkappa$ gleich dem von vier durch einen Punkt gehenden Strahlen $T_1 T_2 T_3 T_4$ sein, so projicire man BCD von A aus durch die Strahlen $R_2 R_3 R_4$ und bestimme nun durch A den Strahl R_1, für welchen
$$(R_1 R_2 R_3 R_4) = (T_1 T_2 T_3 T_4).$$

Hierauf projicire man ACD von B aus durch die Geraden $R_1'R_3'R_4'$, und construire den Strahl R_2' durch B so, dass $(R_1' R_2' R_3' R_4') = (T_1 T_2 T_3 T_4)$.

Die Büschel $R_1 R_2 R_3 R_4$ und $R_1'R_2'R_3'R_4'$ haben dann beide das Doppelverhältniss $\varkappa$, sind also projectiv. Ergänzt man diese Büschel, so schneiden sich die entsprechenden Strahlen in den Punkten des gesuchten Kegelschnitts.

Ist M ein Punkt dieses Kegelschnitts, so ist $M(ABCD) = (R_1 R_2 R_3 R_4)$, also $= \varkappa$, wie verlangt war.

B. Den Kegelschnitt, dessen Tangenten vier gegebene Gerade $ABCD$ unter einem gegebenen Doppelverhältniss $\varkappa$ schneiden, kann man construiren wie folgt:

Das Doppelverhältniss $\varkappa$ sei als das Doppelverhältniss von vier Punkten $P_1 P_2 P_3 P_4$ einer Geraden gegeben.

Man schneide mit A durch die Geraden BCD in den Punkten $R_2 R_3 R_4$ und construire auf A den Punkt R_1, für welchen $(R_1 R_2 R_3 R_4) = (P_1 P_2 P_3 P_4)$.

Ferner bemerke man auf B die Schnittpunkte $R_1'R_2'R_4'$ mit den Geraden ACD und bestimmt den Punkt R_2', für welchen $(R_1'R_2'R_3'R_4' = (P_1 P_2 P_3 P_4)$.

Ergänzt man nun die projectiven Reihen $R_1 R_2 R_3 R_4$ und $R_1'R_2'R_3'R_4'$, so sind die Verbindungsgeraden je zweier entsprechenden Punkte die Tangenten des gesuchten Kegelschnitts.

Ist M eine dieser Tangenten, so ist in der That
$$M(ABCD) = R_1 R_2 R_3 R_4, \text{ also } = \varkappa.$$

17. A. Wenn die sechs Punkte A, B, C, D, E, F, G auf einem Kegelschnitte liegen, so kann man zwei beliebige von ihnen als Träger zweier projectiven Büschel ansehen, von denen entsprechende Strahlen sich in den übrigen vier Punkten schneiden. Sechs Punkte eines Kegelschnitts bilden also, ganz willkürlich angeordnet, die Ecken eines PASCAL'schen Sechsecks (§ 6 No. 4); wir haben

somit den nach seinem Erfinder benannten PASCAL'schen Satz: In jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecke liegen die drei Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten auf Punkten einer Geraden. Diese Gerade heisst die PASCAL'sche Gerade des Sechsecks.

Verbindet man sechs Punkte in jeder beliebigen Anordnung zu einem Sechsecke und bedenkt, dass es gleichgültig ist, von welchem Perimeterpunkte aus man die Peripherie desselben durchläuft, und in welcher Richtung man sie durchläuft, so wird ersichtlich, dass die $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ Permutationen der sechs Punkte $A \,..\, F$ nur $720 : 12 = 60$ verschiedene Sechsecke liefern.

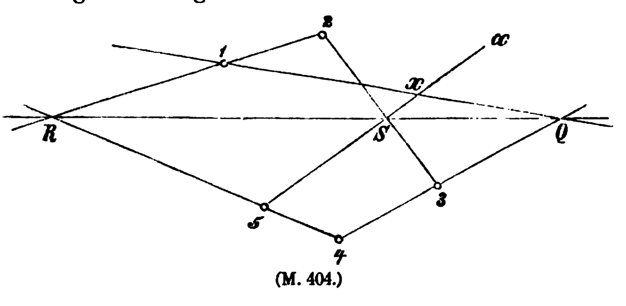
Zu sechs Punkten eines Kegelschnitts gehören daher 60 PASCAL'sche Gerade.

B. Der BRIANCHON'sche Satz. Ist das Sechsseit $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ einem Kegelschnitte umschrieben, so kann man irgend zwei Seiten desselben als Träger zweier projectiven Punktreihen ansehen, die auf ihnen von den Tangenten der Curve ausgeschnitten werden; in diesen Reihen entsprechen sich insbesondere die Schnittpunkte der beiden Träger mit den übrigen vier Seiten des Sechsseits. Man kann daher sechs Tangenten eines Kegelschnitts in willkürlicher Ordnung als die Seiten eines BRIANCHON'schen Sechsecks (§ 6 No. 4) ansehen und hat somit den Satz: In jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Sechsseite gehen die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Ecken durch einen Punkt. Dieser Punkt heisst der BRIANCHON'sche Punkt des Sechsseits.

Sechs Gerade lassen $6! = 720$ Anordnungen zu. Da es aber gleichgültig ist, mit welcher Geraden man beginnt, um den Perimeter eines Sechsseits zu durchlaufen, sowie in welcher Richtung man ihn durchläuft, so ist die Anzahl der geometrisch verschiedenen Sechsecke nur $6! : 12 = 60$.

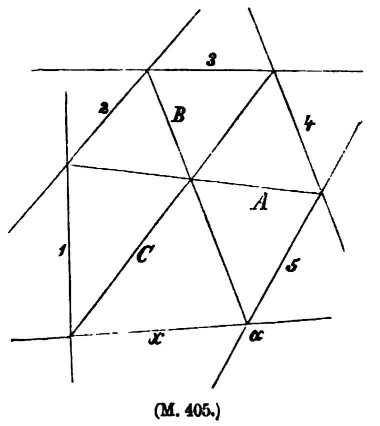
Zu sechs Tangenten eines Kegelschnitts gehören also 60 BRIANCHON'sche Punkte.

18. Mit Hülfe des PASCAL'schen und des BRIANCHON'schen Satzes kann man die Construction von Punkten und Tangenten eines Kegelschnitts aus fünf gegebenen Punkten bez. fünf gegebenen Tangenten in leicht übersichtlicher Weise vornehmen.



(M. 404.)

A. Sind 1 2 3 4 5 die gegebenen Punkte und sucht man den Punkt x, der auf einer durch 5 gezogenen Geraden α liegt, so betrachte man 1 2 3 4 5 x als ein Sechseck und suche die Schnittpunkte R und S der gegenüberliegenden Seitenpaare 1 2, 4 5 und 2 3, α auf; dann ist RS die PASCAL'sche Gerade des Sechsecks. Legt man durch den Schnitt Q der Geraden RS und 3 4 und durch 1 eine Gerade, so trifft diese α in dem gesuchten Punkte x.



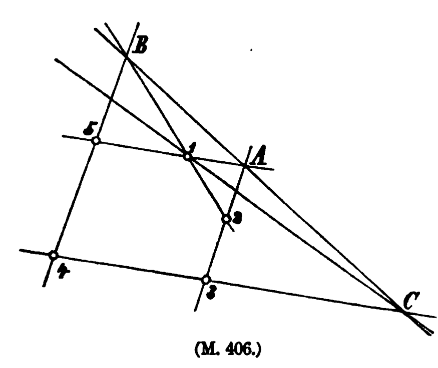
(M. 405.)

B. Sind fünf Tangenten 1 2 3 4 5 gegeben, und sucht man die Tangente x, die durch einen Punkt α auf 5 geht, so betrachte man

1 2 3 4 5 x als ein Sechseck; ist A die Gerade zwischen den Punkten, in denen 1 und 2, sowie die gegenüberliegenden Seiten 4 und 5 sich schneiden, ferner B die Gerade zwischen dem Eckpunkte 2, 3 und der gegenüberliegenden Ecke α, so ist der Schnitt von A und B der BRIANCHON'sche Punkt des Sechsecks. Legt man also C durch diesen Punkt und den Punkt 3, 4, und eine Gerade durch den Schnitt C, 1 und den Punkt α, so ist diese die gesuchte Tangente x.

19. A. Wenn eine Seite eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecks verschwindend klein wird, so geht die Gerade, auf der sie liegt, in eine Tangente der Curve über, und die beiden unendlich nahen Eckpunkte fallen in den Berührungspunkt dieser Tangente. Der PASCAL'sche Satz erhält für diesen Fall folgende Aenderung: Die Schnittpunkte der 1. und 3., sowie der 2. und 4. Seite eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Fünfecks liegen mit dem Schnittpunkte der 5. Seite und der Tangente in dem dieser Seite gegenüberliegenden Eckpunkte auf einer Geraden.

Dieser Satz lehrt, die Tangente in einem Punkte eines Kegelschnitts zu construiren, wenn noch ausserdem vier Punkte desselben bekannt sind.

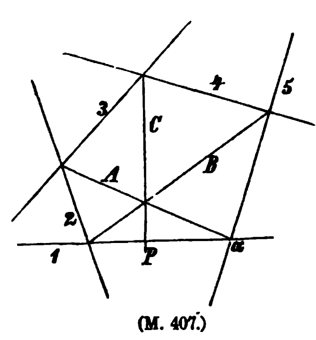


(M. 406.)

Sind die Punkte 1 2 3 4 5 gegeben, und sucht man die Tangente in 1, so bestimme man den Schnitt A der Geraden 1 5 und 2 3, sowie den Schnitt B der Geraden 1 2 und 4 5, ziehe AB und verbinde den Schnitt C dieser Geraden und der Geraden 3 4 mit dem Punkte 1. Dann ist AC die gesuchte Tangente.

B. Wenn zwei Seiten eines einem Kegelschnitte umschriebenen Sechsseits unendlich nahe benachbart sind, so gehen sie in eine einzige Tangente über und der ihnen gemeinsame Eckpunkt wird der Berührungspunkt dieser Tangente. Der BRIANCHON'sche Satz liefert uns nun: In einem einer Curve zweiter Ordnung umschriebenen Fünfseite geht die Gerade, welche den Schnitt der Seiten 1 und 2 mit dem Schnitt von 4 und 5 verbindet und die Gerade, die den Schnitt 1, 5 mit dem Schnitt 2, 3 verbindet, mit der Geraden, die den Berührungspunkt der Seite 1 mit dem Schnitt der Seiten 3 und 4 verbindet, durch einen Punkt.

Man sieht hieraus, wie man den Berührungspunkt auf einer Tangente einer Curve zweiter Klasse bestimmen kann, wenn man noch ausserdem vier Tangenten kennt.



(M. 407.)

Sind nämlich die Tangenten 1 2 3 4 5 gegeben, und sucht man den Berührungspunkt der Tangente 1, so bestimme man die Gerade A, welche den Schnittpunkt der Tangenten 1 und 5 mit dem Schnittpunkt von 2 und 3 verbindet; ferner die Gerade B, die den Schnitt von 1 und 2 mit dem Schnitt von 4 und 5 verbindet, und ziehe ferner eine Gerade C durch den Schnitt von 3 und 4 und den von A und B. Der Schnitt von C und 1 ist der gesuchte Tangentialpunkt.

20. A. Der Satz 19 A lehrt die Construction eines Kegelschnitts,

wenn vier Punkte und die Tangente in einem derselben gegeben sind.

Sind die Punkte 1 2 3 4 und die Tangente in 1 gegeben (Fig. 406), und sucht man den Punkt 5 der Curve, der auf einer durch 1 gezogenen Geraden liegt, so bestimme man den Schnitt A dieser Geraden mit der Geraden 2 3; den Schnitt C der Geraden 4 3 und der Tangente in 1, und den Schnitt B der Geraden 1 2 und der Geraden AC. Zieht man nun B 4, so durchschneidet diese Gerade die durch 1 gezogene in dem gesuchten Curvenpunkte 5.

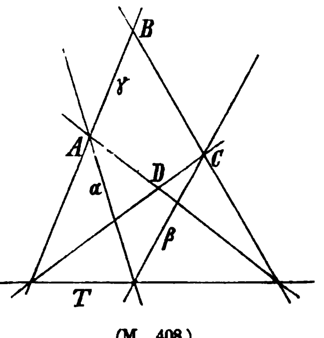
B. Der Satz 19 B lehrt die Construction der Tangenten einer Curve zweiten Grades, wenn vier Tangenten und der Tangentialpunkt auf einer derselben gegeben sind.

Sind die Tangenten 1 2 3 4, sowie der Tangentialpunkt P auf 1 gegeben, (Fig. 407) und sucht man die von einem Punkte α der Geraden 1 ausgehende Curventangente, so ziehe man die Gerade A, welche α mit dem Schnitt von 2 und 3 verbindet; ferner die Gerade C, welche den Schnitt von 3 und 4 mit dem Tangentialpunkte P verbindet; und verbinde dann den Schnitt von 1 und 2 mit dem Schnitt von A und C durch eine Gerade B. Verbindet man den Schnitt von B und 4 mit α, so ist diese Gerade die gesuchte Tangente 5.

21. A. Wenn zwei gegenüberliegende Seiten eines eingeschriebenen Sechsecks verschwinden, so ergiebt sich der Satz: Der Schnitt der ersten und dritten Seite und der Schnitt der zweiten und vierten Seite eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecks liegt mit den Schnitten je zweier Tangenten in den gegenüberliegenden Ecken auf einer Geraden.

Man sieht leicht, wie man auf Grund dieses Satzes die Punkte eines Kegelschnitts construiren kann, von dem drei Punkte und die Tangenten in zweien derselben gegeben sind.

Sind ACD die gegebenen Punkte, sowie α und β die Tangenten in A und C, und sucht man den auf γ liegenden Curvenpunkt B, so ziehe man T, durchschneide T mit AD und lege durch diesen Schnittpunkt und durch C eine Gerade; diese trifft γ in dem gesuchten Punkte.



(M. 408.)

B. Wenn zwei Tangenten eines umschriebenen Sechsseits und die beiden gegenüberliegenden zusammenfallen, so liefert die Anwendung des BRIANCHON'schen Satzes: Die Diagonalen eines einem Kegelschnitt umschriebenen Vierseits und die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte gegenüberliegender Seiten gehen durch einen Punkt.

Man kann in leicht ersichtlicher Weise auf Grund dieses Satzes die Tangenten eines Kegelschnitts construiren, von dem drei Tangenten und die Berührungspunkte auf zweien derselben gegeben sind.

22. Wenn drei abwechselnde Seiten eines Sehnensechsecks verschwinden, so erhält man: Die Seiten eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecks werden von den Tangenten in den gegenüberliegenden Ecken in Punkten geschnitten, die auf einer Geraden liegen.

Hiernach erhält man die Tangente in einem Curvenpunkte, wenn zwei andere Punkte und die Tangenten in diesen Punkten bekannt sind; ebenso erhält

man durch diesen Satz den Tangentialpunkt, der auf einer gegebenen Tangente liegt, wenn ausserdem zwei Tangenten und ihre Berührungspunkte bekannt sind.

Die entsprechende Umgestaltung eines Tangentensechsseits führt auf denselben Satz.

§ 12. Homogene Coordinaten des Punktes und der Geraden.

1. Wir wenden uns nun zu einer neuen Coordinatenbestimmung, den homogenen Coordinaten. Die homogenen Coordinaten sind, wie wir bald sehen werden, ebenso anschaulich wie die Parallelcoordinaten und haben vor diesen den Vorzug voraus, dass die analytischen Entwicklungen und Formeln in homogenen Coordinaten, insbesondere bei Problemen allgemeinerer Art, einen höheren Grad von Einfachheit und Uebersichtlichkeit besitzen, und dadurch zur Ableitung geometrischer Sätze besser geeignet sind, als bei Anwendung von Parallelcoordinaten.

Wir werden drei Bestimmungsstücke — Coordinaten — des Punktes und der Geraden benutzen. Da in der Ebene die Lage eines Punktes und einer Geraden durch zwei Stücke bestimmt ist, so muss sich aus zweien der drei homogenen Coordinaten die dritte berechnen lassen; zwischen den drei homogenen Coordinaten eines Punktes und einer Geraden besteht also eine Gleichung, durch die man dann wieder eine derselben, wenn erwünscht, eliminiren kann.

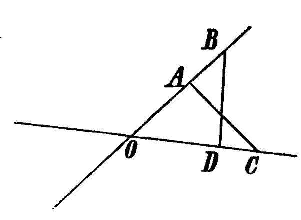
Wir werden die Coordinaten so wählen, dass diese Gleichung eine lineare ist.

Es zeigt sich leicht, dass man in den Stand gesetzt ist, jede Gleichung in homogenen Coordinaten in eine homogene Gleichung zu transformiren, d. i. in eine Gleichung, deren Glieder gleich viele veränderliche Faktoren enthalten; und in der Möglichkeit liegt der wesentliche Vorzug der homogenen Coordinaten.

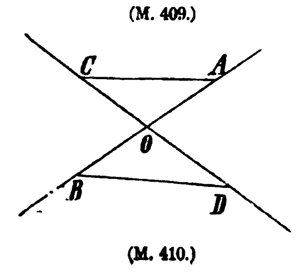
Ehe wir zur Aufstellung dieser Coordinaten vorschreiten, schicken wir einige Bemerkungen über das Vorzeichen von Dreiecksflächen voraus, die sich an § 5, 5 anschliessen.

2. Wenn zwei Gerade sich in einem Punkte O schneiden und auf der einen Geraden zwei Punkte A und B, auf der andern zwei Punkte C und D liegen, so ist:

$$1. \qquad \frac{OAC}{OBD} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{OC}{OD}.$$



(M. 409.)



(M. 410.)

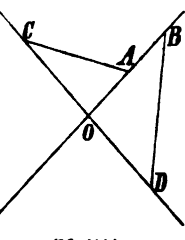
Beweis. Aus den Elementen ist bekannt, dass dieser Satz richtig ist, wenn man die beiden Dreiecksflächen sowie die vier Strecken alle positiv rechnet. Wir haben also noch nachzuweisen, dass die Gleichnug richtig bleibt, wenn auf die Vorzeichen Rücksicht genommen wird.

a) Liegen die Punkte A und B, sowie die Punkte C und D auf derselben Seite von O, so haben die Flächen OAC und OBD dasselbe Zeichen, es ist daher jeder der drei Quotienten $OAC : OBD$, $OA : OB$, $OC : OD$ positiv, und somit die Gleichung 1. auch hinsichtlich des Vorzeichens richtig.

b) Liegen die Punkte A und B, sowie die Punkte C und D auf verschiedenen Seiten von O, so sind die Dreiecke OAC und OBD gleichen Sinnes, der

Quotient $OAC : OBD$ ist also positiv. Die Strecken OA und OB, sowie OC und OD sind aber ungleichen Sinnes, und daher die beiden Quotienten $OA : OB$ und $OC : OD$ negativ, ihr Produkt also wieder positiv; die Gleichung 1. ist daher auch in diesem Falle gültig.

c) Liegen die Punkte eines der beiden Paare AB und CD, z. B. die des Paares AB, auf derselben Seite von O, die des andern Paares auf verschiedenen Seiten, so ist einer der Quotienten $OA : OB$ und $OC : OD$ positiv, der andere negativ. Die beiden Dreiecke OAC und OBD sind in diesem Falle ungleichen Sinnes, ihr Quotient also negativ. Beide Seiten der Gleichung 1. haben also jetzt das negative Zeichen.



(M. 411.)

Somit stimmen für jede Lage der Punkte $ABCD$ der Quotient $OAC : OBD$ und das Produkt $(OA : OB)\,(OC : OD)$ auch rücksichtlich der Vorzeichen überein.

3. Für vier Punkte der Ebene gilt die Gleichung:

$$ABC - BCD + CDA - DAB = 0.$$

Beweis. a) Liegt einer der Punkte im Dreieck der drei anderen, z. B. D im Dreieck ABC, so haben die Dreiecke ABC und DBC dasselbe Zeichen, und ebenso die Dreiecke BCA und DCA, sowie CAB und DAB. Da nun $ABC = BCA = CAB$, só haben die vier Dreiecke ABC, DBC, DCA, DAB dasselbe Zeichen. Da nun für die absoluten Werthe die Gleichung gilt

1. $$ABC = DAB + DBC + DCA,$$

so gilt diese Gleichung auch mit Rücksicht auf den Sinn der Flächen.

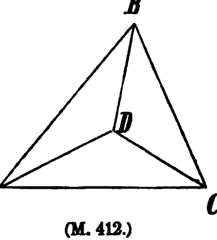
Bemerkt man, dass $DBC = BCD$, $DCA = -CDA$, so erhält man aus 1.

2. $$ABC - BCD + CDA - DAB = 0.$$

Es ist nun nachzuweisen, dass die Gleichung auch für jede andere Reihenfolge der Punkte $ABCD$ gilt.

Zunächst ist ersichtlich, dass die Formeln gelten:

3. $$BCD - CDA + DAB - ABC = 0,$$
4. $$CDA - DAB + ABC - BCD = 0,$$
5. $$DAB - ABC + BCD - CDA = 0.$$



(M. 412.)

Wenn also die Formel 2. für eine Reihenfolge der vier Punkte erwiesen ist, so gilt sie auch für jede cyklische Permutation der Reihe. Kehrt man in 2., 3., 4. die Buchstabenfolge um, macht also die Anordnungen

$$DCBA,\ ADCB,\ BADC,\ CBAD,$$

so wechseln sämmtliche Flächen den Sinn, also bleibt die behauptete Gleichung auch für diese Permutationen richtig.

Es ist nun noch nachzuweisen, dass sie auch für die Anordnungen $ABDC$ und $ACDB$ gilt; denn aus diesem gehen alle übrigen durch cyklische Vertauschung und Umkehrung hervor.

Da $ABD = DAB$, $BDC = -BCD$, $DCA = -CDA$, $CAB = ABC$, so folgt aus 2. durch Einsetzung dieser Werthe und Wechsel der Vorzeichen

6. $$ABD - BDC + DCA - CAB = 0.$$

Die Gleichung gilt also auch für die Reihenfolge $ABCD$.

Bemerkt man weiter, dass

$$ACB = -ABC,\ CBD = -BCD,\ BDA = DAB,\ DAC = CDA,$$

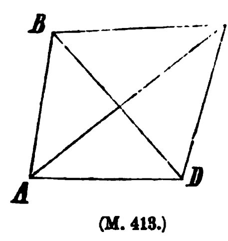
so folgt aus 2.

7. $$ACB - CBD + BDA - DAC = 0;$$

somit gilt die Gleichung auch für die Anordnung $ACBD$.

Wenn also einer von den vier Punkten $ABCD$ im Dreieck der drei anderen liegt, so gilt die Formel $ABC - BCD + CDA - DAB = 0$, gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die Punkte mit A, B, C und D bezeichnet hat.

b) Liegt nicht einer der vier Punkte im Dreiecke der drei andern, so bilden sie in einer bestimmten Reihenfolge die Ecken eines Vierecks mit lauter concaven Winkeln. Ist $ABCD$ eine solche Reihenfolge, so gilt zunächst für die absoluten Werthe der Dreiecke die Gleichung:



(M. 413.)

8. $$ABC + ACD = ABD + BCD.$$

Da B und D auf verschiedenen Seiten von AC liegen, so sind ABC und ADC ungleichen Sinnes, mithin ABC und ACD gleichen Sinnes; da ferner B und C auf derselben Seite von AD liegen, so sind ACD und ABD gleichen Sinnes; und da endlich A und D auf derselben Seite von BC liegen, so sind ABC und DBC, also auch ABC und BCD, gleichen Sinnes; es sind also alle vier Dreiecke ABC, ACD, ABD und BCD gleichen Sinnes, und die Formel 8. gilt daher auch in Rücksicht auf die Vorzeichen.

Bemerkt man nun, dass $ACD = CDA$, $ABD = DAB$, so folgt aus 8.

9. $$ABC - BCD + CDA - DAB = 0.$$

Die allgemeine Gültigkeit der Formel für jede Permutation der Buchstaben $ABCD$ wird nun anschliessend an 9. ebenso bewiesen, wie in a).

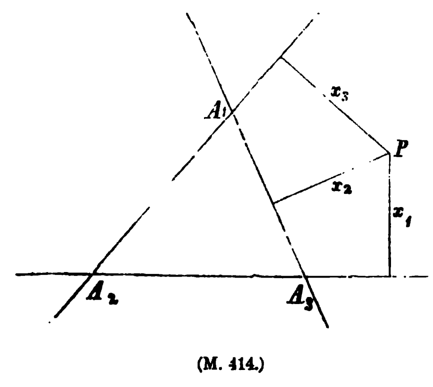
Für jede Lage von vier Punkten $ABCD$ einer Ebene und für jede Reihenfolge der Punkte gilt also die Gleichung der Flächen

$$ABC - BCD + CDA - DAB = 0.$$

Beachtet man, dass $BCD = DBC$, $CDA = -DCA$, so kann man hieraus noch die bemerkenswerthe Formel ziehen:

10. $$DAB + DBC + DCA = ABC.$$

4. Als homogene Coordinaten eines Punktes in der Ebene verwenden wir die senkrechten Abstände des Punktes von den Seiten eines Dreiecks $A_1A_2A_3$. Das Dreieck heisst das Coordinatendreieck, die Geraden A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 werden als die Achsen bezeichnet. Die Abstände eines Punktes P von den drei Achsen A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 werden mit x_1, x_2, x_3 bezeichnet.



(M. 414.)

Wir rechnen x_1 positiv, wenn P und A_1 auf derselben Seite von A_2A_3 liegen, im Gegenfalle negativ, und ebenso für die andern Coordinaten.

Rechnen wir das Dreieck $A_1A_2A_3$ positiv und die Strecken $A_2A_3 = g_1$, $A_3A_1 = g_2$, $A_1A_2 = g_3$ ebenfalls positiv, so ist, wenn ik eines der Paare 1 2, 2 3, 3 1 und ikl eine Permutation von 1 2 3 bezeichnet, das Dreieck PA_iA_k positiv oder negativ, je nachdem x_l positiv oder negativ ist; also ist auch rücksichtlich des Zeichens

1. $$PA_iA_k = \frac{1}{2}g_l x_l.$$

Für die vier Punkte $P A_1 A_2 A_3$ gilt die Gleichung No. 3, 10:

2. $$PA_1A_2 + PA_2A_3 + PA_3A_1 = A_1A_2A_3.$$

Setzt man hier die Werthe 1. ein und setzt $A_1A_2A_3 = \Delta$, so erhält man

3. $$g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3 = 2\Delta.$$

Bezeichnet man die Coordinaten der Eckpunkte $A_1\ A_2\ A_3$ mit h_1, h_2, h_3, dividirt beide Seiten von 3. durch 2Δ, und bemerkt dass $g_k : 2\Delta = 1 : h_k$, so erhält man

4. $$\frac{1}{h_1}x_1 + \frac{1}{h_2}x_2 + \frac{1}{h_3}x_3 = 1.$$

Das ist die lineare Gleichung, die drei Strecken erfüllen müssen, wenn sie die homogenen Coordinaten eines Punktes sein sollen.

Ist nun eine nichthomogene Gleichung $n$ten Grades zwischen den Coordinaten x_1, x_2, x_3 gegeben und ist die Anzahl der veränderlichen Faktoren eines Gliedes um δ Einheiten kleiner, als der Grad n, so multiplicire man dies Glied mit dem der Einheit gleichen Faktor

$$\left(\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3}\right)^\delta;$$

alsdann gehen aus diesem Gliede eine Folge von Gliedern $n$ten Grades hervor. Macht man dies nun mit allen Gliedern der Gleichung, die nicht $n$ten Grades sind, so erhält man nach Auflösung aller Klammern lauter Glieder $n$ten Grades, und hat somit die nichthomogene Gleichung durch eine homogene ersetzt.

5. Um aus einem homogenen Systeme zu einem rechtwinkeligen überzugehen und umgekehrt, nehme man die Gleichungen der Achsen des homogenen Systems in Bezug auf das rechtwinkelige in Normalform gegeben an; dieselben seien

$$\text{für } A_2A_3: \quad \cos\varphi_1 \cdot x + \sin\varphi_1 \cdot y - d_1 = 0,$$
$$\text{für } A_3A_1: \quad \cos\varphi_2 \cdot x + \sin\varphi_2 \cdot y - d_2 = 0,$$
$$\text{für } A_1A_2: \quad \cos\varphi_3 \cdot x + \sin\varphi_3 \cdot y - d_3 = 0.$$

Alsdann ist bekanntlich

1. $$\begin{aligned} \pm x_1 &= -\cos\varphi_1 \cdot x - \sin\varphi_1 \cdot y + d_1, \\ \pm x_2 &= -\cos\varphi_2 \cdot x - \sin\varphi_2 \cdot y + d_2, \\ \pm x_3 &= -\cos\varphi_3 \cdot x - \sin\varphi_3 \cdot y + d_3; \end{aligned}$$

hierbei ist links in jeder dieser Gleichungen das Vorzeichen + oder — zu wählen, je nachdem die gleichnamige homogene Coordinate des Nullpunkts positiv oder negativ ist.

Dies sind die Transformationsformeln für Punktcoordinaten zum Uebergange aus einem homogenen in ein rechtwinkeliges Coordinatensystem.

Löst man zwei der Gleichungen 1., z. B. die erste und zweite, nach x und y auf, so erhält man Transformationsformeln zum Uebergange aus einem rechtwinkeligen in ein homogenes System; dieselben haben die Gestalt:

2. $$\begin{aligned} x &= \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma, \\ y &= \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma'. \end{aligned}$$

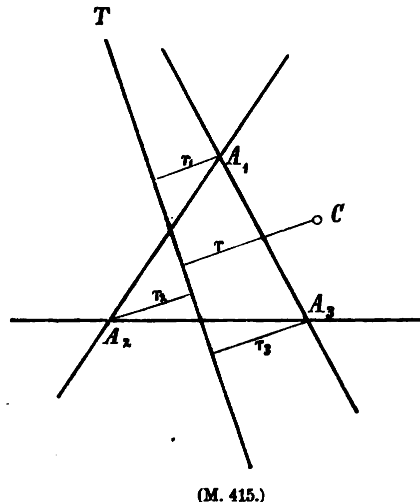
Die dritte Coordinate x_3 wird eingeführt, indem man entweder die linken Seiten dieser Formeln homogen macht (No. 4), oder indem man die Curvengleichung nach der Transformation homogen macht.

Bei jedem der beiden Uebergänge hat man also die Coordinaten des ursprünglichen Systems durch lineare Functionen der Coordinaten des neuen Systems zu ersetzen. Hierdurch erhält man Gleichungen in den neuen Coordinaten, die von demselben Grade sind, wie die Gleichungen im ursprünglichen Systeme. Wir schliessen daher: Durch Transformation aus einem recht-

winkeligen in ein homogenes System und umgekehrt, — und ebenso durch Transformation aus einem rechtwinkeligen in ein anderes rechtwinkeliges oder in ein schiefwinkeliges und umgekehrt — **wird der Grad einer Curvengleichung nicht geändert.**

6. **Als homogene Coordinaten einer Geraden** wollen wir die Abstände der Geraden von den Ecken des Achsendreiecks, jeden dividirt durch den Abstand der Geraden von einem beliebig gewählten festen Punkte, verstehen.

Ist C der feste Punkt und r der Abstand einer Geraden T vom Punkte C, sind ferner r_1, r_2, r_3 die Abstände der Geraden T von den Eckpunkten A_1, A_2, A_3 des Achsendreiecks, so sind



(M. 415.)

1. $u_1 = \frac{r_1}{r}, \quad u_2 = \frac{r_2}{r}, \quad u_3 = \frac{r_3}{r}$

die Coordinaten von T.

Die Coordinate u_k wird positiv oder negativ gerechnet, je nachdem A_k und C auf derselben Seite von T liegen, oder nicht.

Liegt C im Innern des Achsendreiecks, so sind bei den Geraden, die das Coordinatendreieck nicht schneiden, alle drei Coordinaten positiv; die Geraden, welche das Achsendreieck schneiden, haben eine oder zwei Coordinaten negativ.

Sind ρ_1, ρ_2, ρ_3 die Coordinaten des Punktes C (d. i. die Abstände von den drei Achsen A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2), so sind die Coordinaten von

$$A_2A_3: \quad u_1 = \frac{h_2}{\rho_1}, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0,$$

$$A_3A_1: \quad u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{h_2}{\rho_2}, \quad u_3 = 0,$$

$$A_1A_2: \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = \frac{h_3}{\rho_3}.$$

(M. 416.)

Sind Q_1, Q_2, Q_3 die Schnittpunkte der Geraden T mit den Geraden A_1C, A_2C, A_3C, so ist

2. $$\frac{A_1Q_1}{CQ_1} = \frac{r_1}{r} = u_1, \quad \frac{A_2Q_2}{CQ_2} = \frac{r_2}{r} = u_2, \quad \frac{A_3Q_3}{CQ_3} = \frac{r_3}{r} = u_3.$$

Hieraus folgt weiter

3. $$\frac{CA_1}{CQ_1} = \frac{CQ_1 - A_1Q_1}{CQ_1} = 1 - \frac{A_1Q_1}{CQ_1} = 1 - u_1,$$
$$\frac{CA_2}{CQ_2} = \frac{CQ_2 - A_2Q_2}{CQ_2} = 1 - u_2, \quad \frac{CA_3}{CQ_3} = 1 - u_3.$$

Ferner hat man:

$$\frac{CA_1A_2}{CQ_1Q_2} = \frac{CA_1}{CQ_1} \cdot \frac{CA_2}{CQ_2} = (1 - u_1)(1 - u_2).$$

Nun ist $CA_1A_2 = \frac{1}{2} g_3 \rho_3$, daher

4. $$CQ_1Q_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{g_3 \rho_3}{(1 - u_1)(1 - u_2)}.$$

Ebenso findet man

5. $CQ_2Q_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{g_1 \rho_1}{(1-u_1)(1-u_2)}, \quad CQ_3Q_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{g_2 \rho_2}{(1-u_3)(1-u_1)}.$

Nun ist bekanntlich $CQ_1Q_2 + CQ_2Q_3 + CQ_3Q_1 = 0.$

Setzt man hier die Werthe 4. und 5. ein, so erhält man nach Multiplication mit $2(1-u_1)(1-u_2)(1-u_3)$

$$g_1\rho_1(1-u_1) + g_2\rho_2(1-u_2) + g_3\rho_3(1-u_3) = 0,$$

oder nach Auflösung der Klammern:

$$g_1\rho_1 u_1 + g_2\rho_2 u_2 + g_3\rho_3 u_3 = g_1\rho_1 + g_2\rho_2 + g_3\rho_3.$$

Ersetzt man die rechte Seite durch 2Δ, dividirt dann rechts und links durch 2Δ und bemerkt, dass $g_k : 2\Delta = 1 : h_k$, so entsteht schliesslich

6. $$\frac{\rho_1}{h_1} u_1 + \frac{\rho_2}{h_2} u_2 + \frac{\rho_3}{h_3} u_3 = 1.$$

Dieser linearen Gleichung genügen also die drei Coordinaten jeder Geraden; und umgekehrt: Wenn drei Zahlen u_1, u_2, u_3 dieser Gleichung genügen, so sind sie die Coordinaten einer Geraden.

Mit Hülfe der Gleichung 6. kann man jede nicht homogene Gleichung der Liniencoordinaten u_1, u_2, u_3 homogen machen. Ist n der Grad der Gleichung und ist die Anzahl der veränderlichen Faktoren eines Gliedes um δ Einheiten kleiner als n, so multiplicire man das Glied mit dem der Einheit gleichen Faktor

$$\left(\frac{\rho_1}{h_1} u_1 + \frac{\rho_2}{h_2} u_2 + \frac{\rho_3}{h_3} u_3\right)^\delta.$$

Hierdurch gehen aus dem Gliede eine Reihe von Gliedern vom Grade n hervor. Verfährt man so mit allen Gliedern der Gleichung, die den Grad n nicht erreichen, so geht aus der gegebenen Gleichung eine neue hervor, deren Glieder sämmtlich den Grad n haben, also ist die neue Gleichung homogen.

7. Sind x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, $\xi\eta$ die Coordinaten der Punkte $A_1A_2A_3C$ in Bezug auf ein rechtwinkeliges System und uv die Coordinaten einer Geraden T in diesem System, so sind die Abstände der Punkte $A_1A_2A_3C$ von T bekanntlich

1. $$r_1 = \frac{x_1u + y_1v - 1}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad r_2 = \frac{x_2u + y_2v - 1}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad r_3 = \frac{x_3u + y_3v - 1}{\sqrt{u^2+v^2}},$$
$$r = \frac{\xi u + \eta v - 1}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Hieraus ergeben sich die homogenen Coordinaten von T zu:

2. $$u_1 = \frac{r_1}{r} = \frac{x_1u + y_1v - 1}{\xi u + \eta v - 1},$$
$$u_2 = \frac{r_2}{r} = \frac{x_2u + y_2v - 1}{\xi u + \eta v - 1},$$
$$u_3 = \frac{r_3}{r} = \frac{x_3u + y_3v - 1}{\xi u + \eta v - 1}.$$

Eine homogene Gleichung $n$ten Grades in homogenen Liniencoordinaten kann mit Hülfe dieser Transformationsformeln in eine Gleichung in gewöhnlichen Liniencoordinaten transformirt werden. Jedes Glied der transformirten Gleichung enthält den Divisor $(\xi u + \eta v - 1)^n$. Lässt man diesen gemeinsamen Divisor aller Glieder weg, so bleibt eine (im Allgemeinen nicht homogene) Gleichung $n$ten Grades in u und v.

Um aus einem gewöhnlichen System zu einem homogenen überzugehen, lösen wir zwei der Gleichungen 2., z. B. die erste und zweite, nach u und v auf. Wir erhalten

$$u_1(\xi u + \eta v - 1) = x_1u + y_1v - 1,$$
$$u_2(\xi u + \eta v - 1) = x_2u + y_2v - 1,$$

und hieraus
$$(\xi u_1 - x_1)u + (\eta u_1 - y_1)v = u_1 - 1,$$
$$(\xi u_2 - x_2)u + (\eta u_2 - y_2)v = u_2 - 1.$$

Dieses System hat die Auflösungen $u = R_1 : R$, $v = R_2 : R$, wenn R, R_1, R_2 die Determinanten bedeuten:

$$R = \begin{vmatrix} \xi u_1 - x_1, & \eta u_1 - y_1 \\ \xi u_2 - x_2, & \eta u_2 - y_2 \end{vmatrix}, \quad R_1 = \begin{vmatrix} u_1 - 1, & \eta u_1 - y_1 \\ u_2 - 1, & \eta u_2 - y_2 \end{vmatrix}$$
$$R_2 = \begin{vmatrix} \xi u_1 - x_1, & u_1 - 1 \\ \xi n_2 - x_2, & u_2 - 1 \end{vmatrix}.$$

Die erste zerfällt in

$$\begin{vmatrix} \xi u_1, & \eta u_1 \\ \xi u_2, & \eta u_2 \end{vmatrix} - \xi \begin{vmatrix} u_1 & y_1 \\ u_2 & y_2 \end{vmatrix} - \eta \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} y_1\xi - \eta x_1, & u_1 \\ y_2\xi - \eta x_2, & u_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Die zweite und dritte geben

$$\begin{vmatrix} u_1, & \eta u_1 \\ u_2, & \eta u_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1 & y_1 \\ u_2 & y_2 \end{vmatrix} - \eta \begin{vmatrix} 1 & u_1 \\ 1 & u_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 - \eta, & u_1 \\ y_2 - \eta, & u_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix}.$$
$$\begin{vmatrix} \xi u_1, & u_1 \\ \xi u_2, & u_2 \end{vmatrix} - \xi \begin{vmatrix} u_1 & 1 \\ u_2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 - \xi, & u_1 \\ x_2 - \xi, & u_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

Rechnet man diese Determinanten aus, so erhält man schliesslich

$$3. \quad \begin{aligned} u &= \frac{(y_2 - \eta)u_1 - (y_1 - \eta)u_2 + (y_1 - y_2)}{(\xi y_2 - x_2\eta)u_1 - (\xi y_1 - x_1\eta)u_2 - (x_1y_2 - x_2y_1)}, \\ v &= -\frac{(x_2 - \eta)u_1 - (x_1 - \xi)u_2 + (x_1 - x_2)}{(\xi y_2 - x_2\eta)u_1 - (\xi y_1 - x_1\eta)u_2 - (x_1y_2 - x_2y_1)}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in eine Gleichung $n$ten Grades ein und multiplicirt die Gleichung alsdann mit $[(\xi y_2 - x_2\eta)u_1 - (\xi y_1 - x_1\eta)u_2 - (x_1y_2 - x_2y_1)]^n$, so erhält man eine ganze Function $n$ten Grades von u_1 und u_2; man kann dieselbe in der in No. 6 angegebenen Weise homogen machen und führt dabei die dritte Coordinate u_3 ein.

Bei der Transformation einer Gleichung in Liniencoordinaten aus einem rechtwinkeligen System in ein homogenes und umgekehrt ändert sich also der Grad der Gleichung nicht.

S_1 A_2 P S_2 A_3 A_1

(M. 417.)

8. Wenn eine Gerade T auf den Achsen A_2A_3 und A_1A_3 die Spuren S_1 und S_2 hat, so ist

$$1. \quad \begin{aligned} A_3S_2 : A_1S_2 &= r_3 : r_1 = u_3 : u_1, \\ A_3S_1 : A_2S_1 &= r_3 : r_2 = u_3 : u_2. \end{aligned}$$

Die Coordinaten von S_1 seien $x_1'x_2'x_3'$, so ist $x_1' = 0$; für x_2' und x_3' hat man die Proportionen

$$2. \quad \begin{aligned} x_2' : h_2 &= A_3S_1 : A_3A_2, \\ x_3' : h_3 &= A_2S_1 : A_2A_3. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$3. \quad \begin{aligned} x_2' : h_2 &= A_3S_1 : (A_3S_1 + S_1A_2) = 1 : \left(1 - \frac{u_2}{u_3}\right) = u_3 : (u_3 - u_2), \\ x_3' : h_3 &= A_2S_1 : (A_2S_1 + S_1A_3) = 1 : \left(1 - \frac{u_3}{u_2}\right) = u_2 : (u_2 - u_3). \end{aligned}$$

Sind ferner $x_1''x_2''x_3''$ die Coordinaten von S_2, so ist $x_2'' = 0$, und für x_1 und x_3 hat man
$$x_1'' : h_1 = A_3S_2 : A_3A_1$$
$$x_3'' : h_3 = A_1S_2 : A_1A_3,$$

woraus folgt

$$x_1'' : h_1 = A_3S_2 : (A_3S_2 + S_2A_1) = 1 : \left(1 - \frac{u_1}{u_3}\right) = u_3 : (u_3 - u_1)$$

$$x_2'' : h_3 = A_1S_2 : (A_1S_2 + S_2A_3) = 1 : \left(1 - \frac{u_3}{u_1}\right) = u_1 : (u_1 - u_3).$$

Die Coordinaten der Spuren S_1 und S_2 ergeben sich hiernach zu:

$$4. \quad \begin{aligned} x_1' &= 0, \quad x_2' = \frac{u_3}{u_3 - u_2} \cdot h_2, \quad x_3' = \frac{u_2}{u_2 - u_3} \cdot h_3, \\ x_1'' &= \frac{u_3}{u_3 - u_1} h_1, \quad x_2'' = 0, \quad x_3'' = \frac{u_1}{u_1 - u_3} \cdot h_3. \end{aligned}$$

Liegt ein Punkt P auf der Geraden T, und theilt er die Strecke S_1S_2 im Verhältniss $\lambda_2 : \lambda_1$, so sind die Coordinaten von P

$$x_1 = \frac{\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_1''}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad x_2 = \frac{\lambda_1 x_2' + \lambda_2 x_2''}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad x_3 = \frac{\lambda_1 x_3' + \lambda_2 x_3''}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Setzt man die Werthe für $x_1'x_2'x_3'$, $x_1''x_2''x_3''$ ein, so erhält man

$$5. \quad x_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{u_3 h_1}{u_3 - u_1}, \quad \text{also} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{u_3 - u_1}{u_3} \cdot \frac{x_1}{h_1},$$

$$6. \quad x_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{u_3 h_2}{u_3 - n_2}, \quad \text{"} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{u_3 - u_2}{u_3} \cdot \frac{x_2}{h_2},$$

$$7. \quad x_3 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{u_2}{u_2 - u_3} \cdot h_3 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{u_1}{u_1 - u_3} \cdot h_3.$$

Führt man in 7. die Werthe für $\lambda_1 : (\lambda_1 + \lambda_2)$ und $\lambda_2 : (\lambda_1 + \lambda_2)$ aus 5. und 6. ein, so erhält man zunächst

$$x_3 = -\frac{u_2 h_3 x_2}{u_3 h_2} - \frac{u_1 h_3 x_1}{u_3 h_1}.$$

Multiplicirt man mit $u_3 : h_3$, reducirt auf Null und ordnet, so entsteht die Gleichung:

$$8. \quad \frac{1}{h_1} u_1 x_1 + \frac{1}{h_2} u_2 x_2 + \frac{1}{h_3} u_3 x_3 = 0.$$

Wir haben damit den Satz gefunden: **Wenn ein Punkt P und eine Gerade T vereint liegen** (d. i. wenn der Punkt auf der Geraden liegt), **so erfüllen die Coordinaten des Punktes und der Geraden die Gleichung**

$$\frac{1}{h_1} u_1 x_1 + \frac{1}{h_2} u_2 x_2 + \frac{1}{h_3} u_3 x_3 = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, dass auch die Umkehrung dieses Satzes gilt: **Wenn die Coordinaten eines Punktes und einer Geraden der Gleichung genügen** $\frac{1}{h_1} u_1 x_1 + \frac{1}{h_2} u_2 x_2 + \frac{1}{h_3} u_3 x_3 = 0$, **so liegt der Punkt vereint mit der Geraden.**

9. Sind die Coordinaten von T gegebene Werthe, so ist die Gleichung

$$1. \quad \frac{1}{h_1} u_1 x_1 + \frac{1}{h_2} u_2 x_2 + \frac{1}{h_3} u_3 x_3 = 0$$

die Bedingungsgleichung dafür, dass der Punkt P auf T liegt. **Die Gleichung der Geraden T ist also**

$$2. \quad \frac{u_1}{h_1} \cdot x_1 + \frac{u_2}{h_2} \cdot x_2 + \frac{u_3}{h_3} \cdot x_3 = 0.$$

Sind dagegen die Coordinaten des Punktes P gegeben, so enthält die Gleichung 1. die Bedingung für die Coordinaten der Geraden T, welche durch den gegebenen Punkt gehen. **Die Gleichung des Punktes P ist daher**

$$3. \quad \frac{x_1}{h_1} \cdot u_1 + \frac{x_2}{h_2} \cdot u_2 + \frac{x_3}{h_3} \cdot u_3 = 0.$$

Wir schliessen hieraus weiter: Jede homogene lineare Gleichung in Punktcoordinaten

4. $$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

ist die Gleichung einer Geraden.

Die Coordinaten dieser Geraden finden sich aus dem Vergleich von 4. mit 2.; man ersieht zunächst

$$\frac{u_1}{h_1} : \frac{u_2}{h_2} : \frac{u_3}{h_3} = a_1 : a_2 : a_3 .$$

Nimmt man hierzu noch die Gleichung No. 6, 6

$$\frac{\rho_1 u_1}{h_1} + \frac{\rho_2 u_2}{h_2} + \frac{\rho_3 u_3}{h_3} = 1,$$

so erhält man

5. $$u_1 = \frac{a_1}{\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \rho_3 a_3} \cdot h_1, \quad u_2 = \frac{a_2}{\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \rho_3 a_3} \cdot h_2,$$
$$u_3 = \frac{a_3}{\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \rho_3 a_3} \cdot h_3 .$$

Ferner ergiebt sich: Jede homogene lineare Gleichung in Liniencoordinaten $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$ ist die Gleichung eines Punktes.

Für die Coordinaten dieses Punktes hat man die Proportion

$$\frac{x_1}{h_1} : \frac{x_2}{h_2} : \frac{x_3}{h_3} = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$$

und die Gleichung No. 4, 4 $\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1$, woraus man findet:

6. $$x_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot h_1, \quad x_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot h_2, \quad x_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot h_3 .$$

10. Das Verhältniss der Entfernungen der unendlich fernen Geraden von zwei Punkten, die nicht unendlich fern sind, ist der positiven Einheit gleich. Die unendlich ferne Gerade hat also die Coordinaten $u_1 = u_2 = u_3 = 1$.

Die Coefficienten der Gleichung der unendlich fernen Geraden ergeben sich aus den Formeln No. 9, 5:

$$\frac{a_1 h_1}{\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \rho_3 a_3} = u_1 = 1, \quad \frac{a_2 h_2}{\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \rho_3 a_3} = u_2 = 1,$$
$$\frac{a_3 h_3}{\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \rho_3 a_3} = u_3 = 1 .$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst $a_1 h_1 = a_2 h_2 = a_3 h_3$.

Wird der gemeinsame Werth dieses Produkts mit m bezeichnet, so hat man:

$$a_1 = \frac{m}{h_1}, \quad a_2 = \frac{m}{h_2}, \quad a_3 = \frac{m}{h_3} .$$

Also folgt die Gleichung der unendlich fernen Geraden zu

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 0.$$

Es ist ersichtlich, dass diese Gleichung mit der für die Coordinaten jedes Punktes geltenden $\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1$ nur für unendlich grosse Werthe von x_1, x_2, x_3 zusammen bestehen kann.

Ferner folgt aus den Formeln No. 9, 6: Die Gleichung

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

ist die Gleichung eines unendlich fernen Punktes, wenn

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 .$$

Unter dieser Bedingung sind also alle Geraden, deren Coordinaten der Gleichung $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$ genügen, einer festen Richtung parallel. Die Richtung ergiebt sich aus dem Verhältniss der Coordinaten des auf ihr liegenden unendlich fernen Punktes $x_1 : x_2 : x_3 = \alpha_1 h_1 : \alpha_2 h_2 : \alpha_3 h_3$.

Zieht man durch A_3 eine Parallele G zu dieser Richtung, so geht sie durch diesen unendlich fernen Punkt; da nun für alle Punkte von G das Verhältniss $x_1 : x_2$ constant ist, so folgt die Gleichung dieser Parallelen zu

$$x_1 : x_2 = \alpha_1 h_1 : \alpha_2 h_2 .$$

11. Die Coordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden $T' \equiv a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 = 0$ und $T'' = a_1''x_1 + a_2''x_2 + a_3''x_3 = 0$ sind die Lösungen des Systems

$$1.\qquad \begin{aligned} a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 &= 0, \\ a_1''x_1 + a_2''x_2 + a_3''x_3 &= 0, \\ \frac{1}{h_1}x_1 + \frac{1}{h_2}x_2 + \frac{1}{h_3}x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Die Coordinaten der Geraden, welche durch die beiden Punkte geht $P' \equiv \alpha_1'u_1 + \alpha_2'u_2 + \alpha_3'u_3 = 0$, $P'' \equiv \alpha_1''u_1 + \alpha_2''u_2 + \alpha_3''u_3 = 0$ sind die Lösungen des Systems

$$2.\qquad \begin{aligned} \alpha_1'u_1 + \alpha_2'u_2 + \alpha_3'u_3 &= 0, \\ \alpha_1''u_1 + \alpha_2''u_2 + \alpha_3''u_3 &= 0, \\ \frac{\rho_1}{h_1}u_1 + \frac{\rho_2}{h_2}u_2 + \frac{\rho_3}{h_3}u_3 &= 1. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Geraden, welche durch die beiden Punkte P' und P'' geht, deren Coordinaten $x_1'x_2'x_3'$, $x_1''x_2''x_3''$ sind, ergiebt sich wie in § 5 No. 3 in Determinantenform zu

$$3.\qquad T \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung des Punktes, durch den die Geraden T' und T'' gehen, deren Coordinaten $u_1'u_2'u_3'$ und $u_1''u_2''u_3''$ sind, ist

$$4.\qquad P \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

16. Wenn drei Gerade $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ durch einen Punkt gehen, so giebt es (§ 5 No. 11) drei Zahlen m_1, m_2, m, welche die Identität herstellen

$$mT \equiv m_1 T_1 + m_2 T_2 .$$

Ist nun $T_1 \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, $T_2 \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$, so ist $mT \equiv (m_1a_1 + m_2b_1)x_1 + (m_1a_2 + m_2b_2)x_2 + (m_1a_3 + m_2b_3)x_3$.

Die Coordinaten von T sind daher:

$$u_1 = \frac{m_1a_1 + m_2b_1}{\sigma}h_1, \quad u_2 = \frac{m_1a_2 + m_2b_2}{\sigma}h_2, \quad u_3 = \frac{m_1a_3 + m_2b_3}{\sigma}h_3,$$

$$\sigma = (m_1a_1 + m_2b_1)\rho_1 + (m_1a_2 + m_2b_2)\rho_2 + (m_1a_3 + m_2b_3)\rho_3 .$$

Die Coordinaten von T_1 und von T_2 sind

$$u_1' = \frac{a_1h_1}{\sigma'}, \quad u_2' = \frac{a_2h_2}{\sigma'}, \quad u_3' = \frac{a_3h_3}{\sigma'}, \quad \sigma' = a_1\rho_1 + a_2\rho_2 + a_3\rho_3;$$

$$u_1'' = \frac{b_1h_1}{\sigma''}, \quad u_2'' = \frac{b_2h_2}{\sigma''}, \quad u_3'' = \frac{b_3h_3}{\sigma''}, \quad \sigma'' = b_1\rho_1 + b_2\rho_2 + b_3\rho_3 .$$

Daher hat man $\quad u_\varkappa = \dfrac{m_1\sigma'u_\varkappa' + m_2\sigma''u_\varkappa''}{\sigma}; \quad \varkappa = 1, 2, 3.$

Nun ist $\sigma = m_1\sigma' + m_2\sigma''$, also folgt der Satz: Die Coordinaten jeder Geraden, die durch den Schnittpunkt der beiden Geraden T_1 und T_2 geht, ergeben sich aus den Coordinaten dieser Geraden nach den Formeln

$$u_\varkappa = \frac{\lambda_1 u_\varkappa' + \lambda_2 u_\varkappa''}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad \varkappa = 1, 2, 3.$$

Gehen vier Gerade T_1, T_2, T_3 und T_4 durch einen Punkt, und sind die Coordinaten von T_3 und T_4

$$u_{\varkappa 3} = \frac{\lambda_1 u_\varkappa' + \lambda_2 u_\varkappa''}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad u_{\varkappa 4} = \frac{\mu_1 u_\varkappa' + \mu_2 u_\varkappa''}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \varkappa = 1, 2, 3,$$

so überzeugt man sich leicht (vergl. § 6, No. 6), dass das Doppelverhältniss der vier Geraden den Werth hat $(T_1 T_2 T_3 T_4) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

Ist insbesondere

$$u_{\varkappa 3} = \frac{\lambda_1 u_\varkappa' + \lambda_2 u_\varkappa''}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad u_{\varkappa 4} = \frac{\lambda_1 u_\varkappa' - \lambda_2 u_\varkappa''}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \varkappa = 1, 2, 3,$$

so sind die Geraden T_1, T_2, T_3, T_4 harmonisch.

---

12. A. Die Gleichung einer Curve zweiter Ordnung in homogenen Punktcoordinaten ist im Allgemeinen

1. $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$

Geht die Curve durch den Eckpunkt A_3 des Coordinatendreiecks, so wird die Gleichung von den Coordinaten $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = h_3$ dieses Punktes erfüllt; es ist also $a_{33} = 0$.

Ein Kegelschnitt, der dem Achsendreieck umschrieben ist, hat daher die Gleichung

2. $$a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 = 0.$$

B. Die Gleichung einer Curve zweiter Klasse in Liniencoordinaten ist im Allgemeinen

3. $\alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0.$

Wird die Curve von einer Achse, z. B. von A_1A_2 berührt, so genügen der Gleichung die Coordinaten von A_1A_2, nämlich $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = h_3 : \rho_3$; folglich ist $\alpha_{33} = 0$.

Ein Kegelschnitt, der dem Achsendreieck eingeschrieben ist, hat daher die Gleichung

4. $$\alpha_{12}u_1u_2 + \alpha_{13}u_1u_3 + \alpha_{23}u_2u_3 = 0.$$

13. A. Die Coordinaten der Punkte, in welchen der Kegelschnitt

$$K \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

die Achse A_1A_2 schneidet, bestimmen sich aus den drei Gleichungen

1. $$x_3 = 0, \quad K = 0, \quad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$

Setzt man aus der ersten in die zweite ein, so ergiebt sich

2. $$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0,$$

und aus dieser Gleichung folgt das Verhältniss der Coordinaten $x_1 : x_2$ der beiden Schnittpunkte.

Wenn der Kegelschnitt K die Achse A_1A_2 berührt, so hat die Gleichung 2. zwei gleiche Wurzeln; die Bedingung hierfür ist

3. $$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0.$$

Soll A_2 der Berührungspunkt sein, so muss die Gleichung 2. die Wurzeln

$x_1 = 0$ ergeben, es muss also $a_{12} = a_{22} = 0$ sein. Berührt der Kegelschnitt K auch die Achse A_1A_3 im Punkte A_3, so ist $a_{13} = a_{33} = 0$. Die Gleichung eines Kegelschnitts, der die Achsen A_1A_2 und A_1A_3 in A_2 und A_3 berührt, ist daher

4. $$a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

In jedem Kegelschnitt hat also das Produkt der Abstände jedes Punktes von zwei Tangenten des Kegelschnitts (A_1A_2 und A_1A_3) zum Quadrat des Abstandes von der Berührungssehne (A_2A_3) ein constantes Verhältniss ($-a_{11} : 2a_{23}$).

B. Die Coordinaten der durch A_3 gehenden Tangenten eines Kegelsschnitts
$\mathfrak{K} \equiv \alpha_1 u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + 2\alpha_{13}u_1u_4 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0$
ergeben sich aus den Gleichungen:

$$u_3 = 0, \quad \mathfrak{K} = 0,$$

5. $$\frac{\rho_1 u_1}{h_1} + \frac{\rho_2 u_2}{h_2} + \frac{\rho_3 u_3}{h_3} = 1.$$

Setzt man aus der ersten in die zweite ein, so ergiebt zur Bestimmung des Verhältnisses der Coordinaten $u_1 : u_2$ der gesuchten Tangenten die quadratische Gleichung

6. $$\alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + \alpha_{22}u_2^2 = 0.$$

Geht $\mathfrak{K}$ durch A_3, so fallen beide Tangenten in eine zusammen, die Gleichung 6. hat daher zwei gleiche Wurzeln. Die Bedingung hierfür ist

7. $$\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} = 0.$$

Soll A_3A_1 die Tangente in A_3 sein, so müssen beide Wurzeln der Gleichung 6. $u_1 = 0$ sein, es ist also $\alpha_{12} = \alpha_{22} = 0$.

Geht der Kegelschnitt auch durch A_2 und berührt A_1A_2, so ist $\alpha_{13} = \alpha_{33} = 0$.

Die Gleichung eines Kegelschnitts in Liniencoordinaten, der die Achsen A_1A_2 und A_1A_3 in A_2 und A_3 berührt, ist also: $\alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{23}u_2u_3 = 0$.

Multiplicirt man diese Gleichung mit r^2, so ergiebt sich

$$\alpha_{11}r_1^2 + 2\alpha_{23}r_2r_3 = 0.$$

Für jede Tangente eines Kegelschnitts hat also das Produkt der Abstände von zwei Punkten (A_2 und A_3) zum Quadrate des Abstandes vom Schnittpunkte (A_1), der durch diese beiden Punkte gehenden Tangenten des Kegelschnitts ein constantes Verhältniss.

§ 13. Tangente, Tangentialpunkt, Polare und Pol an Curven zweiten Grades.

1. Wir verbinden einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene, der die Coordinaten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ hat, mit einem andern Punkte Π, dessen Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind, durchschneiden mit der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ die Curve zweiten Grades

1. $$f \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

und fragen nach dem Verhältnisse, in welchem die Strecke $\mathfrak{P}\Pi$ von den beiden Schnittpunkten getheilt wird.

Der Punkt P der Strecke $\mathfrak{P}\Pi$, welcher dieselbe im Verhältniss $\lambda_2 : \lambda_1$ theilt, hat bekanntlich die Coordinaten

2. $$x_1 = \frac{\lambda_1\mathfrak{x}_1 + \lambda_2\xi_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad x_2 = \frac{\lambda_1\mathfrak{x}_2 + \lambda_2\xi_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad x_3 = \frac{\lambda_1\mathfrak{x}_3 + \lambda_2\xi_3}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Setzt man diese Werthe in 1. ein, so erhält man nach Multiplication mit $(\lambda_1 + \lambda_2)^2$:

3. $$a_{11}(\lambda_1\mathfrak{x}_1+\lambda_2\xi_1)^2 + 2a_{12}(\lambda_1\mathfrak{x}_1+\lambda_2\xi_1)(\lambda_1\mathfrak{x}_2+\lambda_2\xi_2) + 2a_{13}(\lambda_1\mathfrak{x}_1+\lambda_2\xi_1)(\lambda_1\mathfrak{x}_3+\lambda_2\xi_3)$$
$$+ 2a_{22}(\lambda_1\mathfrak{x}_2 + \lambda_2\xi_2)^2 + 2a_{23}(\lambda_1\mathfrak{x}_2 + \lambda_2\xi_2)(\lambda_1\mathfrak{x}_3 + \lambda_2\xi_3) + a_{33}(\lambda_1\mathfrak{x}_3 + \lambda_2\xi_3)^2 = 0.$$

Löst man, die Klammern auf und ordnet, so erhält man:

4. $f_\mathfrak{x}\lambda_1^2 + 2(f_{1\mathfrak{x}}\xi_1 + f_{2\mathfrak{x}}\xi_2 + f_{3\mathfrak{x}}\xi_3)\lambda_1\lambda_2 + f_\xi\lambda_2^2 = 0.$

Hierbei ist

5. $f_\mathfrak{x} \equiv a_{11}\mathfrak{x}_1^2 + 2a_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 + 2a_{13}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3 + a_{22}\mathfrak{x}_2^2 + 2a_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + a_{33}\mathfrak{x}_3^2,$

6. $f_\xi \equiv a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + 2a_{13}\xi_1\xi_3 + a_{22}\xi_2^2 + 2a_{23}\xi_2\xi_3 + a_{33}\xi_3^2,$

7. $f_{1\mathfrak{x}} \equiv a_{11}\mathfrak{x}_1 + a_{12}\mathfrak{x}_2 + a_{13}\mathfrak{x}_3,$

8. $f_{2\mathfrak{x}} \equiv a_{12}\mathfrak{x}_1 + a_{22}\mathfrak{x}_2 + a_{23}\mathfrak{x}_3,$

9. $f_{3\mathfrak{x}} \equiv a_{13}\mathfrak{x}_1 + a_{23}\mathfrak{x}_2 + a_{33}\mathfrak{x}_3.$

Multiplicirt man die Ausdrücke 7. 8. 9. der Reihe nach mit ξ_1, ξ_2, ξ_3, und addirt dann die Glieder colonnenweis, so erhält man den Coefficienten von $2\lambda_1\lambda_2$ der Gleichung 4. in anderer Ordnung, nämlich geordnet nach den Coordinaten des Punktes $\mathfrak{P}$; man erhält die Identität

10. $f_{1\mathfrak{x}}\xi_1 + f_{2\mathfrak{x}}\xi_2 + f_{3\mathfrak{x}}\xi_3 \equiv f_{1\xi}\mathfrak{x}_1 + f_{2\xi}\mathfrak{x}^2 + f_{3\xi}\mathfrak{x}_3,$ wobei

11. $f_{1\xi} \equiv a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3,$

12. $f_{2\xi} \equiv a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3,$

13. $f_{3\xi} \equiv a_{13}\xi_1 + a_{23}\xi_2 + a_{33}\xi_3.$

2. Liegt der Punkt $\mathfrak{P}$ auf der Curve, so befriedigen die Coordinaten $\mathfrak{x}_x$ die Gleichung $f = 0$, in der Gleichung 4. verschwindet also der Coefficient von λ_1^2 und es verbleibt die Gleichung

1. $2(f_{1\mathfrak{x}}\xi_1 + f_{2\mathfrak{x}}\xi_2 + f_{3\mathfrak{x}}\xi_3)\lambda_1\lambda_2 + f_\xi\lambda_2^2 = 0.$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $\lambda_2 = 0$; ein Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ mit der Curve theilt also $\mathfrak{P}\Pi$ im Verhältniss Null; dieser Punkt ist $\mathfrak{P}$. Der zweite Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ und der Curve bestimmt sich aus der Gleichung 1., nachdem der Faktor λ_2 unterdrückt worden ist

3. $2(f_{1\mathfrak{x}}\xi_1 + f_{2\mathfrak{x}}\xi_2 + f_{3\mathfrak{x}}\xi_3)\lambda_1 + f_\xi\lambda_2 = 0.$

Soll auch dieser zweite Schnittpunkt mit $\mathfrak{P}$ zusammenfallen, soll also die Gerade $\mathfrak{P}\Pi$ die Curve tangiren, so muss sich diese Gleichung auf $\lambda_2 = 0$ reduciren. Dann müssen die Coordinaten von Π der Bedingung genügen

4. $f_{1\mathfrak{x}}\xi_1 + f_{2\mathfrak{x}}\xi_2 + f_{3\mathfrak{x}}\xi_3 = 0.$

Diese Gleichung ist linear für die Coordinaten von Π, ist also die Gleichung einer Geraden. Diese Gerade geht durch $\mathfrak{P}$, denn es ist, wie man sich durch Ausrechnung leicht überzeugt,

5. $f_{1\mathfrak{x}}\mathfrak{x}_1 + f_{2\mathfrak{x}}\mathfrak{x}_2 + f_{3\mathfrak{x}}\mathfrak{x}_3 = f_\mathfrak{x},$

also gleich Null, da $\mathfrak{P}$ auf $f = 0$ liegt.

Hieraus folgt, dass durch jeden Punkt $\mathfrak{P}$ einer Curve zweiten Grades eine Tangente der Curve geht, und dass

6. $f_{1\mathfrak{x}}x_1 + f_{2\mathfrak{x}}x_2 + f_{3\mathfrak{x}}x_3 = 0$

die Gleichung der Tangente im Punkte $\mathfrak{P}$ an die Curve $f = 0$ ist.

3. Die Tangente wird nur dann unbestimmt, wenn es einen Punkt $\mathfrak{P}$ auf der Curve giebt, für welchen zugleich

1. $f_{1\mathfrak{x}} = f_{2\mathfrak{x}} = f_{3\mathfrak{x}} = 0.$

Denn dann verschwindet für diesen Punkt der Coefficient von λ_1 in der Gleichung No. 2, 3 unabhängig von ξ_1, ξ_2, ξ_3; also haben dann die Verbindungsgeraden von $\mathfrak{P}$ mit allen Punkten Π der Ebene, d. i. alle durch $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden, mit der Curve zwei in $\mathfrak{P}$ zusammenfallende Punkte gemein.

Ein Punkt, für dessen Coordinaten $f_{1\mathfrak{x}} = f_{2\mathfrak{x}} = f_{3\mathfrak{x}} = 0$ liegt nach No. 2, 5 auf der Curve $f = 0$. Nun ist

$$f_{1\mathfrak{x}} \equiv a_{11}\mathfrak{x}_1 + a_{12}\mathfrak{x}_2 + a_{13}\mathfrak{x}_3,$$
$$f_{2\mathfrak{x}} \equiv a_{12}\mathfrak{x}_1 + a_{22}\mathfrak{x}_2 + a_{23}\mathfrak{x}_3,$$
$$f_{3\mathfrak{x}} \equiv a_{13}\mathfrak{x}_1 + a_{23}\mathfrak{x}_2 + a_{33}\mathfrak{x}_3.$$

Giebt es ein Werthsystem $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$, für welches diese drei homogenen linearen Functionen zugleich verschwinden, so verschwindet die Determinante Δ dieser Functionen

2. $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Ein Punkt einer Curve, der die Eigenschaft hat, dass jede durch ihn hindurch gehende Gerade die Curve in zwei in den Punkt zusammenfallenden Punkten trifft, heisst ein Doppelpunkt der Curve.

Verschwindet also die Determinante Δ, so besitzt die Curve zweiter Ordnung einen Doppelpunkt.

Die Coordinaten des Doppelpunktes bestimmen sich aus zweien der drei Gleichungen 1. und der Gleichung $\frac{\mathfrak{x}_1}{h_1} + \frac{\mathfrak{x}_2}{h_2} + \frac{\mathfrak{x}_3}{h_3} = 1$.

Die Coordinaten des Doppelpunktes werden unbestimmt, wenn unter den drei Gleichungen $f_{1\mathfrak{x}} = f_{2\mathfrak{x}} = f_{3\mathfrak{x}} = 0$ nicht zwei unabhängige sind, d. i. wenn die linearen Functionen $f_{1\mathfrak{x}}, f_{2\mathfrak{x}}, f_{3\mathfrak{x}}$ einander proportional sind, wenn also

3. $$a_{11} : a_{12} : a_{13} = a_{12} : a_{22} : a_{23} = a_{13} : a_{23} : a_{33}.$$

Setzt man $a_{12} = \varkappa a_{11}$, so folgt $a_{22} = \varkappa a_{12} = \varkappa^2 a_{11}$, $a_{23} = \varkappa a_{13}$. Setzt man ferner $a_{13} = \lambda a_{11}$, so wird $a_{23} = \lambda a_{12} = \varkappa\lambda a_{11}$, $a_{33} = \lambda a_{13} = \lambda^2 a_{11}$.

Führt man diese Werthe in die Function f ein, so erhalten alle Glieder den Faktor a_{11}; nach Weglassung dieses Faktors bleibt:

$$f_1 = x_1^2 + 2\varkappa x_1 x_2 + 2\lambda x_1 x_3 + \varkappa^2 x_2^2 + 2\varkappa\lambda x_2 x_3 + \lambda^2 x_3^2,$$
$$= (x_1 + \varkappa x_2 + \lambda x_3)^2.$$

Die Function f ist also das Quadrat einer linearen Function, die Gleichung $f = 0$ vertritt zwei zusammenfallende Gerade.

In diesem Falle verschwinden sämmtliche Subdeterminanten von Δ. Wenn Δ verschwindet, ohne dass sämmtliche Subdeterminanten verschwinden, so ist der Doppelpunkt $\mathfrak{P}$ eindeutig bestimmt. Verbindet man ihn mit einem andern auf der Curve $f = 0$ gelegenen Punkte Π, so ist in No. 1, 4 ausser $f_{\mathfrak{x}} = 0$ und $f_{1\mathfrak{x}}\xi_1 + f_{2\mathfrak{x}}\xi_2 + f_{3\mathfrak{x}}\xi_3 = 0$ auch noch der Coefficient von λ_2^2, nämlich f_ξ, gleich Null; die Gleichung 4. ist also identisch, und wird für alle Werthe von λ_1 und λ_2 erfüllt; die Gerade $\mathfrak{P}\Pi$ gehört daher mit allen ihren Punkten der Curve an, sie bildet einen Theil der Curve.

Eine Gerade, die durch Π geht, und nicht mit $\Pi\mathfrak{P}$ zusammenfällt, hat mit der Curve noch einen Punkt Π_1 gemein, der nicht auf $\Pi\mathfrak{P}$ liegt. Verbindet man Π_1 mit $\mathfrak{P}$, so schliesst man, dass auch $\mathfrak{P}\Pi_1$ (ebenso wie $\mathfrak{P}\Pi$) einen Theil der Curve bildet.

Andere Punkte, die nicht auf $\mathfrak{P}\Pi$ oder $\mathfrak{P}\Pi_1$ gelegen sind, kann die Curve nicht besitzen. Denn durch jeden Punkt Q der Ebene kann man immer Gerade ziehen, die die zwei Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ und $\mathfrak{P}\Pi_1$ schneiden. Läge nun Q auf der Curve, so würde jede solche Gerade drei Punkte mit der Curve gemein haben, im Widerspruche damit, dass eine Curve zweiter Ordnung von einer Geraden in zwei Punkten getroffen wird.

Hat also eine Curve zweiter Ordnung einen Doppelpunkt, so zerfällt sie in zwei Gerade. Diese Geraden können in eine Gerade Γ zusammenfallen; dann ist jeder Punkt von Γ als Doppelpunkt zu betrachten. Sind die Geraden getrennt, so ist ihr Schnittpunkt der Doppelpunkt.

4. Es erübrigt nun noch, im Falle $\Delta = 0$ die beiden linearen Faktoren herzustellen, in welche die Function f zerfällt.

Sind dieselben $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$ und $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$, so hat man die Identität $f = (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)$.

Aus derselben folgen die Gleichungen

1. $$b_1c_1 = a_{11}, \quad b_2c_2 = a_{22}, \quad b_3c_3 = a_{33},$$

2. $$b_1c_2 + b_2c_1 = 2a_{12}, \quad b_1c_3 + b_3c_1 = 2a_{13}, \quad b_2c_3 + b_3c_2 = 2a_{23}.$$

Aus 1. zieht man, wenn $\varkappa$, λ, μ noch unbestimmte Faktoren bedeuten

3. $$\begin{aligned} b_1 &= \varkappa\sqrt{a_{11}}, & b_2 &= \lambda\sqrt{a_{22}}, & b_3 &= \mu\sqrt{a_{33}}, \\ c_1 &= \frac{1}{\varkappa}\sqrt{a_{11}}, & c_2 &= \frac{1}{\lambda}\sqrt{a_{22}}, & c_3 &= \frac{1}{\mu}\sqrt{a_{33}}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in 2. ein, so ergeben sich die Gleichungen:

4. $$\left(\frac{\varkappa}{\lambda} + \frac{\lambda}{\varkappa}\right)\sqrt{a_{11}a_{22}} = 2a_{12},$$

5. $$\left(\frac{\varkappa}{\mu} + \frac{\mu}{\varkappa}\right)\sqrt{a_{11}a_{33}} = 2a_{13},$$

6. $$\left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda}\right)\sqrt{a_{22}a_{33}} = 2a_{23}.$$

Die Gleichungen 4. und 5. genügen, um die Verhältnisse $\frac{\lambda}{\varkappa}$ und $\frac{\mu}{\varkappa}$ zu bestimmen. Man erhält

7. $$\frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}\left(a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right), \quad \frac{\varkappa}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}\left(a_{12} \mp \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)$$

8. $$\frac{\mu}{\varkappa} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{33}}}\left(a_{13} \pm \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}\right), \quad \frac{\varkappa}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{33}}}\left(a_{13} \mp \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}\right).$$

Setzt man dies in 3. ein, so erhält man die Zerfällung der Function f:

9. $$f = \left[\sqrt{a_{11}}\,x_1 + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\left(a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)x_2 + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\left(a_{13} + \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}\right)x_3\right]$$
$$\left[\sqrt{a_{11}}\,x_1 + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\left(a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)x_2 + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\left(a_{13} - \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}\right)x_3\right].$$

Hierbei mögen $\sqrt{a_{11}}$ und $\sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}$ positiv gerechnet werden.

Ueber das Vorzeichen von $\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{33}}$ ist dann so zu verfügen, dass das Produkt der beiden linearen Faktoren mit der Function f übereinstimmt. Führt man die Multiplication aus, so erhält man unabhängig davon, ob man für $\sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}$ in beiden Faktoren den positiven oder den negativen Werth ansetzt, folgende Glieder $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3$, übereinstimmend mit f; es handelt sich also bloss noch darum, den Coefficienten von x_2x_3 im Produkt der linearen Faktoren mit $2a_{23}$ zu vergleichen. Dieser Coefficient ergiebt sich zu:

$$\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\left(a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\left(a_{13} + \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}\right)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \cdot \left(a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\left(a_{13} - \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}\right)$$
$$= \frac{1}{a_{11}}\left(2a_{12}a_{13} - 2\sqrt{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(a_{13}^2 - a_{11}a_{33})}\right).$$

Der Radicand giebt ausgerechnet

10. $$a_{12}^2a_{13}^2 - a_{13}^2a_{11}a_{22} - a_{12}^2a_{11}a_{33} + a_{11}^2a_{22}a_{33}.$$

Entwickelt man die Determinante $\Delta = 0$, so erhält man

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 + 2a_{12}a_{23}a_{31} = 0.$$

Multiplicirt man Δ mit a_{11} und zieht das Produkt von 10. ab, so erhält man

$$\sqrt{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(a_{13}^2 - a_{11}a_{33})} = a_{12}^2a_{13}^2 + a_{11}^2a_{23}^2 - 2a_{12}a_{23}a_{31}a_{11},$$
$$= (a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})^2.$$

Also wird der Coefficient von x_2x_3:

$$\frac{1}{a_{11}}\left[2a_{12}a_{13} \mp 2(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})\right].$$

Damit nun dieser Coefficient mit $2a_{23}$ übereinstimmt, muss das obere Zeichen der Klammer gewählt werden, d. i. man muss setzen

$$\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \cdot \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}} = a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} \text{ (und nicht } -a_{12}a_{13} + a_{11}a_{23}).$$

Das Vorzeichen von $\sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}$ muss also mit dem Vorzeichen von $a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}$ übereinstimmen.

---

5. Wir führen nun die entsprechenden Untersuchungen für Liniencoordinaten durch.

Eine beliebige Gerade $\mathfrak{T}$ der Ebene durchschneiden wir mit einer andern Geraden T und bestimmen die Tangenten der Curve zweiter Klasse

$$\varphi = \alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0,$$

die durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{T}$ und T gehen.

Die Coordinaten von $\mathfrak{T}$ seien $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$; die von T seien v_1, v_2, v_3; die Coordinaten von T ergeben sich dann durch die Formeln (§ 12, No. 11)

$$u_x = \frac{\lambda_1\mathfrak{u}_x + \lambda_2v_x}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad x = 1, 2, 3.$$

Setzt man dies in φ ein und ordnet, so erhält man zur Bestimmung des Verhältnisses $\lambda_1 : \lambda_2$ die Gleichung

1. $$\varphi_{\mathfrak{u}}\lambda_1^2 + 2(\varphi_{1\mathfrak{u}}v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}v_3)\lambda_1\lambda_2 + \varphi_v\lambda_2^2 = 0.$$

Hierbei ist

2. $$\varphi_{\mathfrak{u}} = \alpha_{11}\mathfrak{u}_1^2 + 2\alpha_{12}\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2 + 2\alpha_{13}\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_3 + \alpha_{22}\mathfrak{u}_2^2 + 2\alpha_{23}\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3 + \alpha_{33}\mathfrak{u}_3^2,$$

3. $$\varphi_v = \alpha_{11}v_1^2 + 2\alpha_{12}v_1v_2 + 2\alpha_{13}v_1v_3 + \alpha_{22}v_2^2 + 2\alpha_{23}v_2v_3 + \alpha_{33}v_3^2,$$

4. $$\varphi_{1\mathfrak{u}} = \alpha_{11}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{12}\mathfrak{u}_2 + \alpha_{13}\mathfrak{u}_3,$$

5. $$\varphi_{2\mathfrak{u}} = \alpha_{12}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{22}\mathfrak{u}_2 + \alpha_{23}\mathfrak{u}_3,$$

6. $$\varphi_{3\mathfrak{u}} = \alpha_{13}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{23}\mathfrak{u}_2 + \alpha_{33}\mathfrak{u}_3.$$

Multiplicirt man 4., 5., 6. der Reihe nach mit v_1, v_2, v_3 und addirt, so erhält man die Identität

7. $$\varphi_{1\mathfrak{u}}v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}v_3 = \varphi_{1v}\mathfrak{u}_1 + \varphi_{2v}\mathfrak{u}_2 + \varphi_{3v}\mathfrak{u}_3, \text{ wobei}$$

8. $$\varphi_{1v} = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \alpha_{13}v_3,$$

9. $$\varphi_{2v} = \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \alpha_{23}v_3,$$

10. $$\varphi_{3v} = \alpha_{13}v_1 + \alpha_{23}v_2 + \alpha_{33}v_3.$$

6. Berührt die Gerade $\mathfrak{T}$ die Curve φ, so ist $\varphi_{\mathfrak{u}} = 0$; die Gleichung No. 5, 1 geht daher über in

1. $$2(\varphi_{1\mathfrak{u}}v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}v_3)\lambda_1\lambda_2 + \varphi_v\lambda_2^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat die Lösung $\lambda_2 = 0$; die dazu gehörige Gerade T fällt mit $\mathfrak{T}$ zusammen. Die zweite Lösung der quadratischen Gleichung 1. ergiebt sich aus der linearen Gleichung

2. $$2(\varphi_{1\mathfrak{u}}v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}v_3)\lambda_1 + \varphi_v\lambda_2 = 0.$$

Soll auch diese Lösung mit $\mathfrak{T}$ zusammenfallen, so muss die Gerade T so gewählt werden, dass der Coefficient von λ_1 verschwindet, also so, dass

3. $$\varphi_{1\mathfrak{u}}v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}v_3 = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Punktes P; derselbe liegt auf $\mathfrak{T}$, denn es ist $\varphi_{1u}u_1 + \varphi_{2u}u_2 + \varphi_{3u}u_3 \equiv \varphi_u$, und dies verschwindet, da $\mathfrak{T}$ die Curve $\varphi = 0$ berührt. Mithin ist $\varphi_{1u}v_1 + \varphi_{2u}v_2 + \varphi_{3u}v_3 = 0$ die Gleichung des auf der Curventangente u_1, u_2, u_3 gelegenen Tangentialpunktes.

7. Der Punkt $\varphi_{1u}v_1 + \varphi_{2u}v_2 + \varphi_{3u}v_3 = 0$ ist im Allgemeinen eindeutig bestimmt; im Allgemeinen giebt es also auf jeder Curventangente $\mathfrak{T}$ nur einen Punkt, der so gelegen ist, dass ausser $\mathfrak{T}$ sich keine Curventangente durch ihn legen lässt. Der Tangentialpunkt wird nur für eine Curventangente unbestimmt, für deren Coordinaten die Coefficienten φ_{1u}, φ_{2u}, φ_{3u} der Gleichung des Tangentialpunktes verschwinden; giebt es eine Gerade, für welche $\varphi_{1u}, \varphi_{2u}$, φ_{3u} verschwinden, so ist dieselbe auch Curventangente, da dann auch $\varphi_u \equiv \varphi_{1u}u_1 + \varphi_{2u}u_2 + \varphi_{3u}u_3$ verschwindet.

Soll es ein Werthsystem u_1, u_2, u_3 geben, für welches

$$\varphi_{1u} \equiv \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3 = 0,$$
$$\varphi_{2u} \equiv \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{23}u_3 = 0,$$
$$\varphi_{3u} \equiv \alpha_{13}u_1 + \alpha_{23}u_2 + \alpha_{33}u_3 = 0,$$

so muss die Determinante D dieser Gleichungen verschwinden, es ist

$$1. \qquad D \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

oder ausgerechnet

$$2. \qquad D \equiv \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{12}^2\alpha_{33} - \alpha_{13}^2\alpha_{22} - \alpha_{23}^2\alpha_{11} + 2\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{13} = 0.$$

Eine Gerade, die so gelegen ist, dass durch jeden ihrer Punkte zwei mit ihr zusammenfallende Tangenten einer Curve φ gehen, heisst Doppeltangente der Curve. Die Bedingung dafür, dass eine Curve zweiter Ordnung eine Doppeltangente hat, ist also $D = 0$. Die Coordinaten der Doppeltangente bestimmen sich aus zweien der Gleichungen $\varphi_{1u} = \varphi_{2u} = \varphi_{3u} = 0$

und aus
$$\frac{\rho_1 u_1}{h_1} + \frac{\rho_2 u_2}{h_2} + \frac{\rho_3 u_3}{h_3} = 1.$$

Die Coordinaten der Doppeltangente werden unbestimmt, wenn sämmtliche Subdeterminanten von D verschwinden, d. i. wenn

$$1. \qquad \alpha_{11} : \alpha_{12} : \alpha_{13} = \alpha_{12} : \alpha_{22} : \alpha_{23} = \alpha_{13} : \alpha_{23} : \alpha_{33}.$$

Wie in No. 3 wird bewiesen, dass φ alsdann das Quadrat einer linearen Function ist. Die Curve besteht daher aus zwei zusammenfallenden Punkten.

Verschwindet D, ohne dass sämmtliche Subdeterminanten gleich Null werden, so ist die Doppeltangente $\mathfrak{T}$ eindeutig bestimmt. Legt man durch den Schnittpunkt der Doppeltangente $\mathfrak{T}$ und einer andern Curventangente T eine Gerade T' mit den Coordinaten

$$u_x = \frac{\lambda_1 u_x + \lambda_2 v_x}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad x = 1, 2, 3,$$

so ist auch T' eine Tangente der Curve, denn in der Gleichung

$$\varphi_u \lambda_1^2 + 2(\varphi_{1u}v_1 + \varphi_{2u}v_2 + \varphi_{3u}v_3)\lambda_1\lambda_2 + \varphi_v\lambda_2^2 = 0$$

verschwinden φ_u, φ_v und der Coefficient von $\lambda_1\lambda_2$, weil $\mathfrak{T}$ und T die Curve φ berühren und $\mathfrak{T}$ Doppeltangente ist; also ist die Gleichung identisch.

Der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{T}$ und T bildet daher einen Theil der Curve φ. Durch irgend einen Punkt der Geraden T geht ausser T noch eine Curventangente T'; es lässt sich nun für den Schnittpunkt $\mathfrak{P}'$ von T' und $\mathfrak{T}$ ebenso, wie für den von T und $\mathfrak{T}$ beweisen, dass jede durch ihn gehende Gerade der Gleichung $\varphi = 0$ genügt, dass er also ebenfalls einen Theil der Curve $\varphi = 0$ bildet.

Andere Gerade, als die durch einen dieser beiden Punkte gehenden, können der Gleichung $\varphi = 0$ nicht genügen. Denn wäre dies mit der Geraden S der Fall, so würden durch jeden Punkt Q auf S drei Gerade gehen, die $\varphi = 0$ genügen, nämlich S und die beiden Geraden $Q\mathfrak{P}$ und $Q\mathfrak{P}'$, im Widerspruche damit, dass durch jeden Punkt der Ebene nur zwei Gerade gehen, für welche φ verschwindet. Hat daher eine Curve zweiter Ordnung eine Doppelgerade, so zerfällt sie in zwei Punkte; fallen diese beiden Punkte in einen Punkt Π zusammen, so ist jede durch Π gehende Gerade als Doppelgerade zu betrachten; sind sie getrennt, so ist die Doppelgerade die Gerade, auf der sie liegen.

8. Es erübrigt nun noch, im Falle $D = 0$ die beiden linearen Faktoren herzustellen, in welche die Function φ zerfällt.

Die beiden Faktoren seien $\varphi = (\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3)(\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3)$.

Multiplicirt man die beiden Trinome aus und vergleicht die einzelnen Glieder mit den Gliedern der Function φ, so erhält man durch ganz dieselben Schlüsse, wie in No. 4: Verschwindet die Determinante D, so zerfällt die quadratische Function φ in zwei lineare Faktoren:

$$\varphi = \left[\sqrt{\alpha_{11}}\cdot u_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{11}}}\left(\alpha_{12} + \sqrt{\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}}\right)\cdot u_2 + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{11}}}\left(\alpha_{13} + \sqrt{\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}}\right)\cdot u_3\right]$$
$$\times \left[\sqrt{\alpha_{11}}\cdot u_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{11}}}\left(\alpha_{12} - \sqrt{\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}}\right) u_2 + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{11}}}\left(\alpha_{13} - \sqrt{\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}}\right)\cdot u_3\right].$$

Hierbei hat $\sqrt{\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}}$ das Vorzeichen der Differenz $\alpha_{12}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23}$; die andern Wurzeln sind positiv.

---

9. A. Die Gleichung der Tangente im Punkte $\mathfrak{P}$ der Curve $f = 0$ ist

1. $$f_{1\mathfrak{r}}\cdot x_1 + f_{2\mathfrak{r}}\cdot x_2 + f_{3\mathfrak{r}}\cdot x_3 = 0.$$

Sind u_1, u_2, u_3 die Coordinaten der Tangente, so sind die Grössen $u_\varkappa : h_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, 3$, proportional den Grössen $f_{1\mathfrak{r}}$, $f_{2\mathfrak{r}}$, $f_{3\mathfrak{r}}$. Es giebt also einen Faktor m, der den Gleichungen genügt:

2. $$a_{11}\mathfrak{r}_1 + a_{12}\mathfrak{r}_2 + a_{13}\mathfrak{r}_3 - \frac{u_1}{h_1}\cdot m = 0,$$

3. $$a_{12}\mathfrak{r}_1 + a_{22}\mathfrak{r}_2 + a_{23}\mathfrak{r}_3 - \frac{u_2}{h_2}\cdot m = 0,$$

4. $$a_{13}\mathfrak{r}_1 + a_{23}\mathfrak{r}_2 + a_{33}\mathfrak{r}_3 - \frac{u_3}{h_3}\cdot m = 0.$$

Da der Punkt $\mathfrak{P}$ auf der Tangente liegt, so ist noch ausserdem

5. $$\frac{u_1}{h_1}\mathfrak{r}_1 + \frac{u_2}{h_2}\mathfrak{r}_2 + \frac{u_3}{h_3}\mathfrak{r}_3 = 0.$$

Die Gleichungen 2. . . 5. sind homogen und linear für $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ und m; ihr Verein wird bedingt durch das Verschwinden ihrer Determinante

6. $$\varphi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 : h_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & u_2 : h_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & u_3 : h_3 \\ u_1 : h_1 & u_2 : h_2 & u_3 : h_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn also die Coordinaten einer Geraden dieser Bedingungsgleichung genügen, so tangirt die Gerade die Curve $f = 0$. Folglich ist $\varphi = 0$ die Gleichung der Curve $f = 0$ in Liniencoordinaten.

B. Die Gleichung des Tangentialpunktes einer Tangente $\mathfrak{T}$ der Curve zweiter Ordnung $\varphi = 0$ ist (No. 6)

7. $$\varphi_{1\mathfrak{u}} \cdot u_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}} \cdot u_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}} \cdot u_3 = 0.$$

Sind x_1, x_2, x_3 die Coordinaten des Tangentialpunktes, so sind die Quotienten $x_\varkappa : h_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, 3$ den Grössen $\varphi_{1\mathfrak{u}}$, $\varphi_{2\mathfrak{u}}$, $\varphi_{3\mathfrak{u}}$ proportional; für einen gewissen Faktor m bestehen also die drei Gleichungen

8. $$\alpha_{11}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{12}\mathfrak{u}_2 + \alpha_{13}\mathfrak{u}_3 - \frac{x_1}{h_1} \cdot m = 0,$$

9. $$\alpha_{12}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{22}\mathfrak{u}_2 + \alpha_{23}\mathfrak{u}_3 - \frac{x_2}{h_2} \cdot m = 0,$$

10. $$\alpha_{13}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{23}\mathfrak{u}_2 + \alpha_{33}\mathfrak{u}_3 - \frac{x_3}{h_3} \cdot m = 0.$$

Da der Punkt $x_\varkappa$ auf der Tangente $\mathfrak{u}_\varkappa$ liegt, so ist noch ausserdem

11. $$\frac{x_1}{h_1}\mathfrak{u}_1 + \frac{x_2}{h_2}\mathfrak{u}_2 + \frac{x_3}{h_3}\mathfrak{u}_3 = 0.$$

Die Gleichungen 9. . . 10. sind homogen und linear für $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ und m; ihr Verein wird durch das Verschwinden ihrer Determinante bedingt:

12. $$f = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & x_1 : h_1 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & x_2 : h_2 \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & x_3 : h_3 \\ x_1 : h_1 & x_2 : h_2 & x_3 : h_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn also die Coordinaten eines Punktes P diese Gleichung erfüllen, so ist P der Tangentialpunkt einer Tangente der Curve $\varphi = 0$. Daher ist $f = 0$ die Gleichung der Curve $\varphi = 0$ in Punktcoordinaten.

10. A. Wir nehmen jetzt einen Punkt $\mathfrak{P}$ ausserhalb einer Curve $f = 0$ an und fragen nach den durch $\mathfrak{P}$ an die Curve gehenden Tangenten.

Liegt der Punkt Π auf einer der Tangenten, so fallen die Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ und der Curve in einen Punkt zusammen, die Gleichung No. 1, 4 hat also zwei gleiche Wurzeln für $\lambda_1 : \lambda_2$. Die Bedingung hierfür ist

$$f_\mathfrak{x} \cdot f_\xi - (f_{1\mathfrak{x}}\xi_1 + f_{2\mathfrak{x}}\xi_2 + f_{3\mathfrak{x}}\xi_3)^2 = 0.$$

Ersetzen wir hier die Coordinaten $\xi_\varkappa$ durch $x_\varkappa$, so folgt: Die Gleichung

1. $$f_\mathfrak{x} \cdot f - (f_{1\mathfrak{x}} \cdot x_1 + f_{2\mathfrak{x}} \cdot x_2 + f_{3\mathfrak{x}} \cdot x_3)^2 = 0$$

ist die Gleichung der beiden durch den Punkt $\mathfrak{P}$ gehenden Tangenten der Curve zweiter Ordnung $f = 0$.

Die linke Seite der Gleichung 1. zerfällt daher in zwei lineare Faktoren T und T_1; und $T = 0$, $T_1 = 0$ sind die Gleichungen der beiden Tangenten.

Ordnet man die Gleichung 1. und bezeichnet die Coefficienten der geordneten Gleichung mit $b_{\iota\varkappa}$, so hat man

$$b_{11} = a_{11}f_\mathfrak{x} - f_{1\mathfrak{x}}^2; \quad b_{22} = a_{22}f_\mathfrak{x} - f_{2\mathfrak{x}}^2; \quad b_{33} = a_{33}f_\mathfrak{x} - f_{3\mathfrak{x}}^2;$$
$$b_{12} = a_{12}f_\mathfrak{x} - f_{1\mathfrak{x}}f_{2\mathfrak{x}}; \quad b_{13} = a_{13}f_\mathfrak{x} - f_{1\mathfrak{x}} \cdot f_{3\mathfrak{x}}; \quad b_{23} = a_{23}f_\mathfrak{x} - f_{2\mathfrak{x}} \cdot f_{3\mathfrak{x}}.$$

Also ist die Determinante Δ' der Gleichung 1.:

2. $$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11}f_\mathfrak{x} - f_{1\mathfrak{x}}^2, & a_{12}f_\mathfrak{x} - f_{1\mathfrak{x}}f_{2\mathfrak{x}}, & a_{13}f_\mathfrak{x} - f_{1\mathfrak{x}}f_{3\mathfrak{x}} \\ a_{12}f_\mathfrak{x} - f_{1\mathfrak{x}}f_{2\mathfrak{x}}, & a_{22}f_\mathfrak{x} - f_{2\mathfrak{x}}^2, & a_{23}f_\mathfrak{x} - f_{2\mathfrak{x}}f_{3\mathfrak{x}} \\ a_{13}f_\mathfrak{x} - f_{1\mathfrak{x}}f_{3\mathfrak{x}}, & a_{23}f_\mathfrak{x} - f_{2\mathfrak{x}}f_{3\mathfrak{x}}, & a_{33}f_\mathfrak{x} - f_{3\mathfrak{x}}^2 \end{vmatrix}.$$

Dieselbe zerfällt in acht Determinanten; nach Absonderung gemeinsamer Faktoren aus Zeilen oder Colonnen erhält man zunächst

$$\Delta' = f_\mathfrak{x}^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - f_\mathfrak{x}^2 \cdot f_{1\mathfrak{x}} \begin{vmatrix} f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - f_\mathfrak{x}^2 \cdot f_{2\mathfrak{x}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$- f_\mathfrak{x} \cdot f_{3\mathfrak{x}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ f_{1\mathfrak{x}} & f_{4\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \end{vmatrix} + f_\mathfrak{x} \cdot f_{1\mathfrak{x}} f_{2\mathfrak{x}} \begin{vmatrix} f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \\ f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + f_\mathfrak{x} \cdot f_{1\mathfrak{x}} f_{3\mathfrak{x}} \begin{vmatrix} f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \end{vmatrix}$$

$$+ f_\mathfrak{x} \cdot f_{2\mathfrak{x}} f_{3\mathfrak{x}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \\ f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \end{vmatrix} - f_{1\mathfrak{x}}^2 f_{2\mathfrak{x}}^2 f_{3\mathfrak{x}}^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die letzten vier Determinanten verschwinden, da jede identische Zeilen enthält. Setzt man in der zweiten Determinante die Werthe für $f_{1\mathfrak{x}} f_{2\mathfrak{x}} f_{3\mathfrak{x}}$ ein, so zerlegt sie sich in die Summe von drei Determinanten. Man erhält:

$$\begin{vmatrix} f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \mathfrak{x}_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \mathfrak{x}_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \mathfrak{x}_3 \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Die letzten beiden Determinanten haben jede zwei identische Zeilen, verschwinden also, und es bleibt $\mathfrak{x}_1 \cdot \Delta$ als Werth der links stehenden Determinante. Auf gleiche Weise findet man für die dritte und vierte Determinante in der Entwicklung von Δ' die Werthe $\mathfrak{x}_2 \cdot \Delta$, $\mathfrak{x}_3 \cdot \Delta$. Das zweite, dritte und vierte Glied von Δ' vereinen sich daher zu

$$- \Delta \cdot f_\mathfrak{x}^2 (f_{1\mathfrak{x}}\mathfrak{x}_1 + f_{2\mathfrak{x}}\mathfrak{x}_2 + f_{3\mathfrak{x}}\mathfrak{x}_3) = - \Delta \cdot f_\mathfrak{x}^3.$$

Mithin ist $\Delta' = 0$, in Uebereinstimmung damit, dass die Gleichung 1. zwei Gerade repräsentirt.

B. Die Gleichung der Tangentialpunkte einer Curve zweiter Klasse $\varphi = 0$, welche auf einer beliebigen Geraden $\mathfrak{T}$ liegen, erhält man durch die Bemerkung, dass eine Gerade T durch einen der Tangentialpunkte geht, wenn die durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{T}$ und T gehenden Tangenten der Curve zusammenfallen. Dann muss die Gleichung No. 5, 1:

$$\varphi_u \lambda_1^2 + 2(\varphi_{1u} v_1 + \varphi_{2u} v_2 + \varphi_{3u} v_3)\lambda_1\lambda_2 + \varphi_2 \lambda_2^2 = 0$$

zwei gleiche Wurzeln für $\lambda_1 : \lambda_2$ ergeben. Die Bedingung hierfür ist

$$\varphi_u \cdot \varphi_v - (\varphi_{1u} v_1 + \varphi_{2u} v_2 + \varphi_{3u} v_3)^2 = 0.$$

Ersetzt man die Coordinaten v_x durch u_x, so erhält man: Die Gleichung

$$1. \quad \varphi_u \cdot \varphi_u - (\varphi_{1u} \cdot u_1 + \varphi_{2u} \cdot u_2 + \varphi_{3u} \cdot u_3)^2 = 0$$

ist die Gleichung der beiden Tangentialpunkte der Curve $\varphi = 0$, die auf einer gegebenen Geraden $\mathfrak{T}$ liegen.

Entwickelt und ordnet man die Gleichung 1. und bezeichnet die Coefficienten mit $\beta_{\mathsf{x}\iota}$, so dass die Gleichung ist

$$\beta_{11}u_1^2 + 2\beta_{12}u_1u_2 + 2\beta_{13}u_1u_3 + \beta_{22}u_2^2 + 2\beta_{23}u_2u_3 + \beta_{33}u_3^2 = 0,$$

so beweist man wie im ähnlichen Falle 10 A, dass die Determinante verschwindet

$$D' = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

11. A. Wir verbinden einen Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene mit einem andern Punkte Π und fragen nach der Bedingungsgleichung, die zwischen den Coordinaten von $\mathfrak{P}$ und Π besteht, wenn die Gerade $\mathfrak{P}\Pi$ die Curve zweiter Ordnung $f = 0$ in zwei Punkten schneidet, die zu dem Punktpaar $\mathfrak{P}\Pi$ harmonisch liegen.

Zwei Punkte P' und P'' auf der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$, deren Coordinaten aus den Coordinaten von $\mathfrak{P}$ und Π nach den Formeln folgen:

$$x_\mathsf{x}' = \frac{\lambda_1'\mathfrak{x}_\mathsf{x} + \lambda_2'\xi_\mathsf{x}}{\lambda_1' + \lambda_2'}, \quad x_\mathsf{x}'' = \frac{\lambda_1''\mathfrak{x}_\mathsf{x} + \lambda_2''\xi_\mathsf{x}}{\lambda_1'' + \lambda_2''}; \quad \mathsf{x} = 1, 2, 3.$$

sind bekanntlich harmonisch zu $\mathfrak{P}\Pi$, wenn die Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2'$ und $\lambda_1'' : \lambda_2''$ entgegengesetzt gleich sind. Die Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2$ für die Schnittpunkte der

Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ und der Curve $f = 0$ folgen aus der Gleichung

$$f_{\mathfrak{x}}\lambda_1^2 + 2(f_{1\mathfrak{x}}\xi_1 + f_{2\mathfrak{x}}\xi_2 + f_{3\mathfrak{x}}\xi_3)\lambda_1\lambda_2 + f_{\xi}\lambda_2^2 = 0.$$

Soll diese Gleichung entgegengesetzt gleiche Wurzeln haben, so muss sie rein quadratisch sein, es muss also der Coefficient von $\lambda_1\lambda_2$ verschwinden.

Die Bedingung dafür, dass die Schnittpunkte von $\mathfrak{P}\Pi$ und der Curve zweiter Ordnung $f = 0$ harmonisch zu $\mathfrak{P}$ und Π sind, ist daher

1. $$f_{3\mathfrak{x}}\xi_1 + f_{2\mathfrak{x}}\xi_3 + f_{3\mathfrak{x}}\xi_3 \equiv f_{1\xi}\mathfrak{x}_1 + f_{2\xi}\mathfrak{x}_2 + f_{3\xi}\mathfrak{x}_3 = 0.$$

Zwei so gelegene Punkte heissen conjugirt in Bezug auf die Curve zweiter Ordnung.

B. Unter conjugirten Geraden einer Curve zweiten Grades versteht man zwei Gerade, die zu den durch ihren Schnittpunkt gehenden beiden Tangenten harmonisch sind.

Sind $\mathfrak{T}$ und T zwei Gerade, so sind die Coordinaten der durch ihren Schnittpunkt gehenden Tangenten einer Curve zweiter Klasse

$$u_\varkappa = \frac{\lambda_1 \mathfrak{u}_\varkappa + \lambda_2 \mathfrak{v}_\varkappa}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \varkappa = 1, 2, 3,$$

wenn sich λ_1 und λ_2 aus der Gleichung bestimmen

2. $$\varphi_{\mathfrak{u}}\lambda_1^2 + 2(\varphi_{1\mathfrak{u}}v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}v_3)\lambda_1\lambda_2 + \varphi_v\lambda_2^2 = 0.$$

Sind $\mathfrak{T}$ und T conjugirt, so liefern die beiden Wurzeln der Gleichung 2. harmonisch zu $\mathfrak{T}$ und T conjugirte Gerade, sind also entgegengesetzt gleich, also ist die Gleichung 2. rein quadratisch; mithin verschwindet der Coefficient von $\lambda_1\lambda_2$. Wir erhalten daher den Satz: Die Bedingung dafür, dass zwei Gerade $\mathfrak{T}$ und T in Bezug auf eine Curve zweiten Grades $\varphi = 0$ conjugirt sind, ist

3. $$\varphi_{1\mathfrak{u}} \cdot v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}} \cdot v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}} \cdot v_3 \equiv \varphi_{1v} \cdot \mathfrak{u}_1 + \varphi_{2v} \cdot \mathfrak{u}_2 + \varphi_{3v} \cdot \mathfrak{u}_3 = 0.$$

12. A. Die Punkte Π, die einem gegebenen Punkte $\mathfrak{P}$ in Bezug auf eine Curve zweiten Grades conjugirt sind, genügen der Gleichung

1. $$f_{1\mathfrak{x}}\xi_1 + f_{2\mathfrak{x}}\xi_2 + f_{3\mathfrak{x}}\xi_3 = 0,$$

wobei nun $f_{3\mathfrak{x}}, f_{1\mathfrak{x}}, f_{3\mathfrak{x}}$ gegebene Werthe haben. Diese Gleichung ist linear, also liegen diese Punkte auf einer Geraden. Diese Gerade heisst die Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Curve $f = 0$.

Die Polare eines Punktes wird nur dann unbestimmt, wenn für die Coordinaten dieses Punktes die drei Grössen $f_{1\mathfrak{x}}, f_{2\mathfrak{x}}, f_{3\mathfrak{x}}$ zugleich verschwinden. Wir sehen daher: Bei jeder eigentlichen Curve zweiten Grades (Ellipse, Hyperbel, Parabel) ist die Polare jedes Punktes eindeutig bestimmt.

Besteht eine Curve zweiter Ordnung aus zwei getrennten Geraden, so ist die Polare des Schnittpunkts dieser Geraden unbestimmt; besteht die Curve aus zwei zusammenfallenden Geraden, so ist die Polare jedes Punktes der Geraden unbestimmt. In diesen beiden Fällen folgt aus der Identität

$$f_{1\mathfrak{x}}\xi_1 + f_{2\mathfrak{x}}\xi_2 + f_{3\mathfrak{x}}\xi_3 \equiv f_{1\xi}\mathfrak{x}_1 + f_{2\xi}\mathfrak{x}_2 + f_{3\xi}\mathfrak{x}_3,$$

dass der Gleichung der Polaren jedes Punktes $\mathfrak{P}$ durch die Coordinaten des Doppelpunktes genügt wird, da für diesen Punkt die Functionen $f_{1\xi}, f_{2\xi}, f_{3\xi}$ verschwinden. Wir sehen also: Besteht eine Curve zweiter Ordnung aus zwei sich schneidenden Geraden, so geht die Polare jedes Punktes durch den Schnittpunkt der zwei Geraden; besteht die Curve aus zwei zusammenfallenden Geraden, so fällt die Polare jedes nicht auf der Geraden gelegenen Punktes mit den beiden Geraden zusammen.

Ferner ist aus der Gleichung der Polaren sofort ersichtlich: Liegt ein Punkt auf der Curve $f = 0$, so ist seine Polare die durch ihn gehende Curventangente.

Die Gleichung der durch $\mathfrak{P}$ gehenden (realen oder conjugirt complexen) Tangenten der Curve $f = 0$ ist bekanntlich

$$f_{\mathfrak{x}} \cdot f - (f_{1\mathfrak{x}} x_1 + f_{2\mathfrak{x}} x_2 + f_{3\mathfrak{x}} x_3)^2 = 0.$$

Die Punkte, in welchen diese Tangenten die Curve berühren, befriedigen die Gleichung $f = 0$; also ist für die Coordinaten dieser Punkte auch

$$f_{1\mathfrak{x}} \cdot x_1 + f_{2\mathfrak{x}} \cdot x_2 + f_{3\mathfrak{x}} \cdot x_3 = 0.$$

Wir haben daher: Die Polare eines Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf eine Curve zweiten Grades geht durch die Berührungspunkte der von $\mathfrak{P}$ aus an die Curve gelegten Tangenten.

Aus dem Begriff der Polaren sowie aus der Identität:

$$f_{1\mathfrak{x}} \cdot \xi_1 + f_{2\mathfrak{x}} \cdot \xi_2 + f_{3\mathfrak{x}} \cdot \xi_3 \equiv f_{1\xi} \cdot \mathfrak{x}_1 + f_{2\xi} \cdot \mathfrak{x}_2 + f_{3\xi} \cdot \mathfrak{x}_3$$

folgt noch der Satz: Geht die Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ durch den Punkt Π, so geht auch die Polare von Π durch $\mathfrak{P}$.

B. Die Geraden T, die einer gegebenen Geraden $\mathfrak{T}$ in Bezug auf eine Curve zweiter Klasse conjugirt sind, genügen der Gleichung

2. $$\varphi_{1\mathfrak{u}} \cdot u_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}} \cdot u_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}} \cdot u_3 = 0,$$

gehen also durch einen Punkt. Dieser Punkt heisst der Pol der Geraden in Bezug auf die Curve $\varphi = 0$.

Der Pol einer Geraden ist eindeutig bestimmt, ausser wenn die Gerade Doppelgerade ist; der Pol einer Doppelgeraden ist unbestimmt, jeder Punkt der Ebene kann dafür gelten. Besteht die Curve nur aus einem Punkte, so ist für jede durch den Punkt gehende Gerade der Pol unbestimmt.

Die Gleichung des Poles kann auch geschrieben werden

3. $$\varphi_{1u} \cdot \mathfrak{u}_1 + \varphi_{2u} \cdot \mathfrak{u}_2 + \varphi_{3u} \cdot \mathfrak{u}_3 = 0.$$

Besteht nun die Curve $\varphi = 0$ aus zwei getrennten oder vereinten Punkten, so wird der Gleichung des Poles durch die Coordinaten einer Doppelgeraden genügt, denn für dieselben ist $\varphi_{1u} = \varphi_{2u} = \varphi_{3u} = 0$. Wir sehen daher: Besteht eine Curve zweiter Klasse aus zwei getrennten Punkten, so liegt der Pol jeder Geraden, die nicht durch einen der beiden Punkte geht, auf der Geraden der beiden Punkte; besteht die Curve aus zwei in P vereinten Punkten, so fällt der Pol jeder Geraden, die nicht durch den Punkt P geht, mit dem Punkte P zusammen.

Aus der Gleichung des Poles folgt: Der Pol einer Tangente einer Curve zweiter Klasse ist ihr Tangentialpunkt. Aus der Identität

$$\varphi_{1\mathfrak{u}} \cdot v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}} \cdot v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}} \cdot v_3 \equiv \varphi_{1v} \cdot \mathfrak{u}_1 + \varphi_{2v} \cdot \mathfrak{u}_2 + \varphi_{3v} \cdot \mathfrak{u}_3$$

folgt: Liegt der Pol der Geraden $\mathfrak{T}$ auf T, so liegt auch der Pol von T auf $\mathfrak{T}$. Die Gleichung der auf $\mathfrak{T}$ liegenden Tangentialpunkte ist

$$\varphi_{\mathfrak{u}} \cdot \varphi - (\varphi_{1\mathfrak{u}} \cdot u_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}} \cdot u_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}} \cdot u_3)^2 = 0.$$

Die Geraden T, welche durch diese beiden Punkte gehen und die Curve $\varphi = 0$ berühren, genügen daher der Gleichung

$$\varphi_{1\mathfrak{u}} \cdot u_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}} \cdot u_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}} \cdot u_3 = 0,$$

gehen also durch den Pol der Geraden. Der Pol einer Geraden $\mathfrak{T}$ für eine Curve zweiten Grades ist daher der Schnittpunkt der Geraden, welche die Curve in den Schnittpunkten mit $\mathfrak{T}$ berühren.

Der Vergleich dieses Satzes mit dem analogen Satze in A. zeigt: Die Begriffe Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt gehören zusammen; oder: ist eine Gerade A die Polare eines Punktes B, so ist auch der Punkt B der Pol der Geraden A.

Dies kann auch algebraisch wie folgt bewiesen werden: Die Gleichung der Polaren eines Punktes $\mathfrak{P}$ ist

$$f_{1\mathfrak{x}} \cdot x_1 + f_{2\mathfrak{x}} \cdot x_2 + f_{3\mathfrak{x}} \cdot x_3 = 0.$$

Sind $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ die Coordinaten der Polaren, so sind die Grössen $f_{1\mathfrak{x}}$, $f_{2\mathfrak{x}}$, $f_{3\mathfrak{x}}$ proportional zu $\mathfrak{u}_1 : h_1$, $\mathfrak{u}_2 : h_2$, $\mathfrak{u}_3 : h_3$, also hat man

$$4.\quad \begin{aligned} a_{11}\mathfrak{x}_1 + a_{12}\mathfrak{x}_2 + a_{13}\mathfrak{x}_3 &= m\frac{\mathfrak{u}_1}{h_1}, \\ a_{12}\mathfrak{x}_1 + a_{22}\mathfrak{x}_2 + a_{23}\mathfrak{x}_3 &= m\frac{\mathfrak{u}_2}{h_2}, \\ a_{13}\mathfrak{x}_1 + a_{23}\mathfrak{x}_2 + a_{33}\mathfrak{x}_3 &= m\frac{\mathfrak{u}_3}{h_3}. \end{aligned}$$

Aus diesem linearen Systeme folgten das Verhältniss der Coordinaten des Punktes $\mathfrak{P}$, ausgedrückt durch die Coefficienten a_{ik} und die Coordinaten der Polaren zu:

$$5.\quad \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \frac{\mathfrak{u}_1}{h_1} \\ a_{22} & a_{23} & \frac{\mathfrak{u}_2}{h_2} \\ a_{23} & a_{33} & \frac{\mathfrak{u}_3}{h_3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & \frac{\mathfrak{u}_1}{h_1} \\ a_{23} & a_{12} & \frac{\mathfrak{u}_2}{h_2} \\ a_{33} & a_{13} & \frac{\mathfrak{u}_3}{h_3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{\mathfrak{u}_1}{h_1} \\ a_{12} & a_{22} & \frac{\mathfrak{u}_2}{h_2} \\ a_{13} & a_{23} & \frac{\mathfrak{u}_3}{h_3} \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung des Kegelschnitts in Liniencoordinaten ist

$$\varphi \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 : h_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & u_2 : h_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & u_3 : h_3 \\ u_1 : h_1 & u_2 : h_2 & u_3 : h_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man dies nach den Elementen der letzten Zeile, so entsteht:

$$6.\quad \varphi \equiv - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{22} & a_{23} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{23} & a_{33} & \frac{u_3}{h_3} \end{vmatrix} \cdot \frac{u_1}{h_1} - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{23} & a_{12} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{33} & a_{13} & \frac{u_3}{h_3} \end{vmatrix} \cdot \frac{u_2}{h_2} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{12} & a_{22} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{13} & a_{23} & \frac{u_3}{h_3} \end{vmatrix} \cdot \frac{u_3}{h_3}.$$

Hieraus erhält man leicht

$$\varphi_{1u} = -\frac{1}{h_1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{22} & a_{23} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{23} & a_{33} & \frac{u_3}{h_3} \end{vmatrix}, \quad \varphi_{2u} = -\frac{1}{h_2} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{23} & a_{12} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{33} & a_{13} & \frac{u_3}{h_3} \end{vmatrix}, \quad \varphi_{3u} = -\frac{1}{h_3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{12} & a_{22} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{13} & a_{23} & \frac{u_3}{h_3} \end{vmatrix}.$$

Vergleicht man dies mit 5., so erhält man die Proportion:

$$7.\quad \frac{\mathfrak{x}_1}{h_1} : \frac{\mathfrak{x}_2}{h_2} : \frac{\mathfrak{x}_3}{h_3} = \varphi_{1\mathfrak{u}} : \varphi_{2\mathfrak{u}} : \varphi_{3\mathfrak{u}}.$$

Die Gleichung des Punktes $\mathfrak{P}$ ist

$$\frac{\mathfrak{x}_1}{h_1} \cdot u_1 + \frac{\mathfrak{x}_2}{h_2} \cdot u_2 + \frac{\mathfrak{x}_3}{h_3} \cdot u_3 = 0,$$

also in Rücksicht auf 7.:

$$\varphi_{1\mathfrak{u}} \cdot u_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}} \cdot u_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}} \cdot u_3 = 0.$$

Mithin ist in der That der Punkt $\mathfrak{P}$ der Pol seiner Polaren.

Wir schliessen hieran zunächst einige Constructionen.

13. A. **Die Polare eines Punktes $\mathfrak{P}$ und die durch $\mathfrak{P}$ gehenden Tangenten eines Kegelschnitts zu construiren, wenn fünf Punkte desselben gegeben sind.**

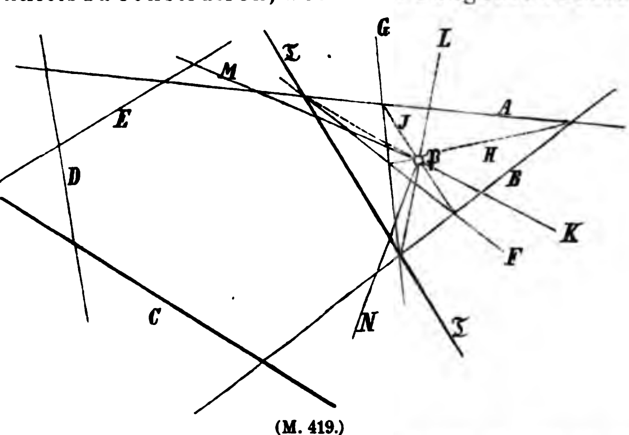
Sind $ABCDE$ die gegebenen fünf Punkte, so ziehe man $\mathfrak{P}A$ und $\mathfrak{P}B$ und bestimme nach dem PASCAL'schen Satze die Punkte F und G, in welchen diese Gerade den Kegelschnitt zum zweiten Male treffen. Hierauf bestimme man den Schnitt H der Geraden AB und FG, sowie den Schnitt J der Geraden AG und BF. Zieht man nun HJ, so sind nach dem Satze über das vollständige Viereck die Punkte L und K die vierten harmonischen Punkte zu $AF\mathfrak{P}$ und $BG\mathfrak{P}$, also ist LK die gesuchte Polare.

(M. 418.)

Construirt man nun die Punkte M und N, welche die Polare von $\mathfrak{P}$ mit dem Kegelschnitte gemein hat, so sind $\mathfrak{P}M$ und $\mathfrak{P}N$ die durch $\mathfrak{P}$ gehenden Tangenten des Kegelschnitts und M und N sind ihre Tangentialpunkte.

B. **Den Pol einer Geraden $\mathfrak{T}$ und die auf $\mathfrak{T}$ liegenden Tangentialpunkte eines Kegelschnitts zu construiren, wenn fünf Tangenten desselben gegeben sind.**

Sind $ABCDE$ die gegebenen fünf Tangenten, so construire man zunächst nach dem BRIANCHON-schen Satze die Tangenten F und G des Kegelschnitts, welche durch die Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{T}$ mit zweien der gegebenen Geraden, z. B. mit A und B,



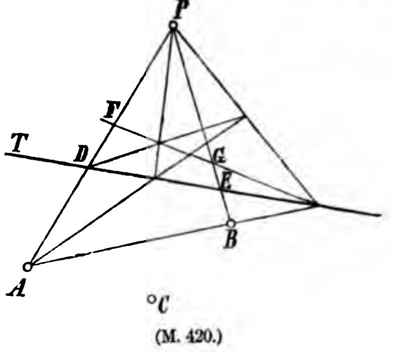
(M. 419.)

gehen. Zieht man nun die Gerade H, welche den Schnitt von A und B mit dem von F und G verbindet, sowie die Gerade J, die durch die Schnittpunkte AG und BF geht, so sind nach dem Satze über das vollständige Vierseit die Geraden K und L harmonisch zugeordnet zu denStrahlen $AF\mathfrak{T}$ und $BG\mathfrak{T}$, also ist ihr Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ der gesuchte Pol.

Construirt man die durch $\mathfrak{P}$ gehenden Tangenten des Kegelschnitts M und N, so treffen diese $\mathfrak{T}$ in den auf $\mathfrak{T}$ liegenden Punkten des Kegelschnitts.

14. A. **Einen Kegelschnitt zu construiren, von dem drei Punkte, sowie ein Paar Pol und Polare gegeben sind.**

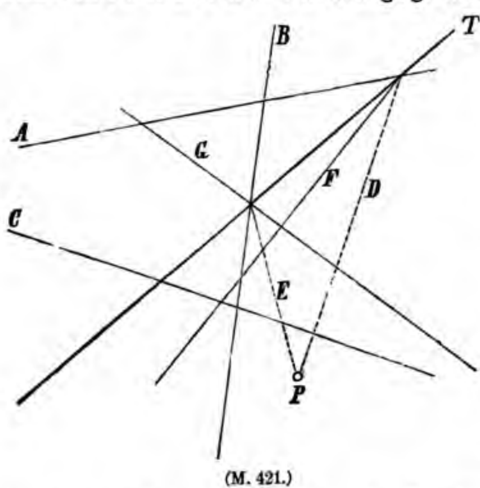
Sind A, B, C die gegebenen Punkte und ist T die Polare von P, so verbinde man P mit zweien der gegebenen drei



(M. 420.)

Punkte, z. B. mit A und B, durchschneide damit T in D und E und construire die vierten harmonischen Punkte F und G zu den Punkten PDA und PEB; dann sind F und G Punkte des gesuchten Kegelschnitts und derselbe nun durch die fünf Punkte $ABCFG$ bestimmt.

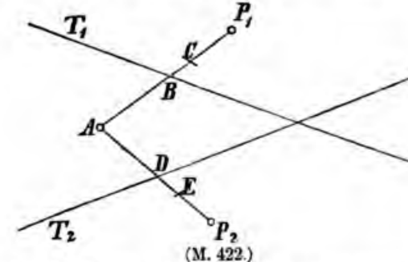
B. Einen Kegelschnitt zu construiren, von dem drei Tangenten und ein Paar Pol und Polare gegeben sind.



(M. 421.)

Sind A, B, C die gegebenen Tangenten und ist P der Pol der Geraden T, so verbinde man den Schnittpunkt von A und T mit dem Punkte P durch eine Gerade D und construire den vierten harmonischen Strahl F zu D, T und A; man verbinde ferner den Schnitt von B und T mit dem Punkte P durch eine Gerade E und construire den vierten harmonischen Strahl G zu E, T und B. Dann sind F und G Tangenten des Kegelschnitts und derselbe ist somit durch fünf Tangenten $ABCFG$ bestimmt.

15. A. Einen Kegelschnitt zu construiren, von dem ein Punkt und zwei Paare Pol und Polare gegeben sind.

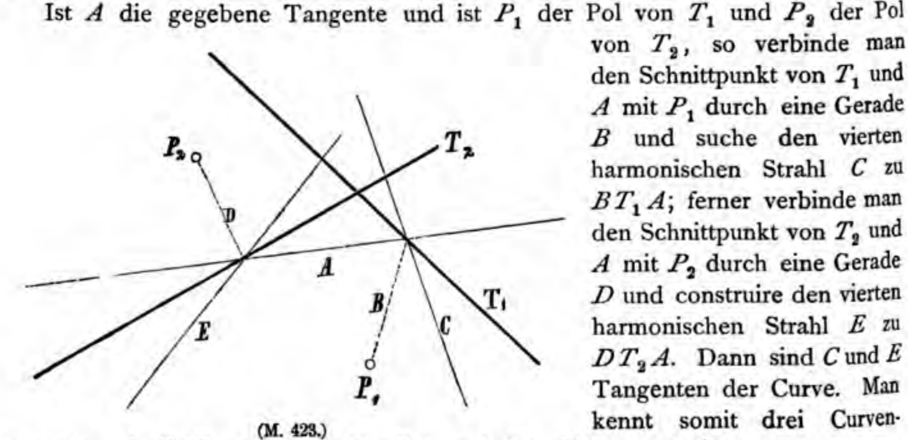


(M. 422.)

Ist A der gegebene Punkt, ferner T_1 die Polare von P_1 und T_2 die Polare von P_2, so ziehe man AP_1 und bestimme den vierten harmonischen Punkt C zu P_1BA; ferner verbinde man A mit P_2 und bestimme den vierten harmonischen Punkt E zu P_2DA; dann sind C und E Curvenpunkte. Man kennt nun drei Punkte A, C, E der Curve und kann dieselbe nach No. 14 A construiren.

B. Einen Kegelschnitt zu construiren, von dem eine Tangente und zwei Paare Pol und Polare gegeben sind.

Ist A die gegebene Tangente und ist P_1 der Pol von T_1 und P_2 der Pol von T_2, so verbinde man den Schnittpunkt von T_1 und A mit P_1 durch eine Gerade B und suche den vierten harmonischen Strahl C zu BT_1A; ferner verbinde man den Schnittpunkt von T_2 und A mit P_2 durch eine Gerade D und construire den vierten harmonischen Strahl E zu DT_2A. Dann sind C und E Tangenten der Curve. Man kennt somit drei Curventangenten A, C, E und kann dieselbe nach No. 14 B construiren. —



(M. 423.)

16. A. Ein Punkt P der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ hat die Coordinaten

1. $$x = \frac{\lambda_1 \mathfrak{x}_x + \lambda_2 \xi_x}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad x = 1, 2, 3.$$

Die zu der quadratischen Function

2. $$f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

gehörenden linearen Functionen

3. $$f_{1x} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \quad f_{2x} = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$f_{3x} = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3$$

werden daher für den Punkt P:

4. $$f_{1x} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}(\lambda_1 f_{1\mathfrak{x}} + \lambda_2 f_{1\xi}), \quad f_{2x} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}(\lambda_1 f_{2\mathfrak{x}} + \lambda_2 f_{2\xi})$$
$$f_{3x} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}(\lambda_1 f_{3\mathfrak{x}} + \lambda_2 f_{3\xi}).$$

Die Gleichung der Polaren des Punktes P ist demnach

$$T \equiv (\lambda_1 f_{1\mathfrak{x}} + \lambda_2 f_{1\xi})\, x_1 + (\lambda_1 f_{2\mathfrak{x}} + \lambda_2 f_{2\xi})\, x_2 + (\lambda_1 f_{3\mathfrak{x}} + \lambda_2 f_{3\xi})\, x_3 = 0.$$

Setzt man
$$\mathfrak{T} \equiv f_{1\mathfrak{x}} x_1 + f_{2\mathfrak{x}} x_2 + f_{3\mathfrak{x}} x_3,$$
$$T \equiv f_{1\xi} x_1 + f_{2\xi} x_2 + f_{3\xi} x_3,$$

so sind $\mathfrak{T} = 0$ und $T = 0$ die Gleichungen der Polaren der Punkte $\mathfrak{P}$ und Π, und man erhält $T \equiv \lambda_1 \mathfrak{T} + \lambda_2 T = 0$ für die Polare des Punktes von P. Hieraus folgt in Uebereinstimmung mit No. 12 A, dass die Polare von P durch den Schnittpunkt der Polaren $\mathfrak{T}$ und T geht, und dass das von den Polaren P gebildete Strahlbüschel mit der Reihe der Punkte P projectiv ist. Wir haben daher den Satz: Beschreibt ein Punkt eine geradlinige Punktreihe, so beschreibt seine Polare ein Strahlbüschel, das mit der Punktreihe projectiv ist; der Träger dieses Strahlbüschels ist der Pol der Punktreihe.

Die Polare T eines Punktes P der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ ist der Ort der zu P conjugirten Punkte; also wird $\mathfrak{P}\Pi$ von T in dem zu P conjugirten Punkte Q der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ geschnitten. Da nun die Reihe der P zu dem Büschel der T projectiv ist, so ist sie auch zur Reihe der conjugirten Punkte Q projectiv. Nun ist aber der Begriff der Conjugation zweier Punkte reciprok: Ist Q conjugirt zu P, so ist auch P conjugirt zu Q; hieraus folgt (§ 6, No. 21), dass die auf einander liegenden projectiven Punktreihen der P und der Q involutorisch liegen. Wir haben daher den Satz: Die Paare conjugirter Punkte, die auf einer Geraden liegen, bilden eine qnadratische Involution. Die Doppelpunkte dieser Involution sind die Schnittpunkte der Geraden und der Curve.

B. Eine Gerade T, die durch den Schnitt zweier Geraden $\mathfrak{T}$ und T geht, hat die Coordinaten $u_x = \dfrac{\lambda_1 \mathfrak{u}_x + \lambda_2 v_x}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $\quad x = 1, 2, 3.$

Also ist die Gleichung des Poles der Geraden T in Bezug auf den Kegelschnitt

$$\varphi \equiv \alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0$$
$$P \equiv \lambda_1 \mathfrak{P} + \lambda_2 \Pi = 0, \quad \text{wenn}$$
$$\mathfrak{P} \equiv \varphi_{1\mathfrak{u}}\, u_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}} \cdot u_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}} \cdot u_3 \quad \text{und}$$
$$\Pi \equiv \varphi_{1v}\, u_1 + \varphi_{2v} \cdot u_2 + \varphi_{3v} \cdot u_3,$$

wenn also $\mathfrak{P} = 0$ und $\Pi = 0$ die Gleichungen der Pole der Geraden $\mathfrak{T}$ und T sind. Hieraus folgt: Dreht sich eine Gerade T um einen Punkt, so beschreibt ihr Pol P eine Gerade, die Polare des Punktes; das Strahlbüschel der Geraden T ist mit der Punktreihe der Pole P projectiv.

Durch den Pol P einer Geraden T, die den Punkt $\mathfrak{T}T$ enthält, gehen bekanntlich alle zu T conjugirten Geraden. Die zu T conjugirte Gerade S, die durch den Schnittpunkt $\mathfrak{T}T$ geht, verbindet daher den Punkt $\mathfrak{T}T$ mit P. Da nun die P und die T projectiv sind, so sind auch die S und die T projectiv. Der Begriff der Conjugation zweier Geraden ist aber wie der Begriff der Conjugation zweier Punkte reciprok; im Büschel der T ist S der conjugirte Strahl zu T und T der conjugirte zu S; folglich sind die beiden auf einander liegenden Strahlbüschel der T und S involutorisch. Wir schliessen daher: Die Paare conjugirter Geraden einer Curve zweiter Ordnung, die durch einen Punkt gehen, bilden eine quadratische Involution. Die Doppelstrahlen dieser Involution sind Tangenten der Curve.

Zwei conjugirte Durchmesser α und β eines Kegelschnitts sind conjugirte Gerade, denn die Curvensehnen, die durch den unendlich fernen Punkt von β gehen, haben ihre Mitten auf α, werden also von α in dem Punkte getroffen, der harmonisch zu den auf jeder Sehne liegenden beiden Curvenpunkten und dem auf ihr liegenden unendlich fernen Punkte von β ist; also geht β durch den Pol von α, also sind α und β conjugirt. Hieraus folgt: Die Paare conjugirter Durchmesser einer Curve zweiter Ordnung bilden eine quadratische Involution. Die Doppelstrahlen dieser Involution sind die Asymptoten der Curve.

17. Die Polare eines Punktes $\mathfrak{P}$ ist unendlich fern, wenn die Coefficienten der Gleichung der Polaren $f_{1\mathfrak{x}}, f_{2\mathfrak{x}}, f_{3\mathfrak{x}}$ proportional den Coefficienten $1:h_1$, $1:h_2$, $1:h_3$ der Gleichung der unendlich fernen Geraden sind (§ 12 No. 10), also wenn für einen gewissen Werth m

$$1.\quad \begin{aligned} a_{11}\mathfrak{x}_1 + a_{12}\mathfrak{x}_2 + a_{13}\mathfrak{x}_3 &= m\cdot\frac{1}{h_1}, \\ a_{12}\mathfrak{x}_1 + a_{22}\mathfrak{x}_2 + a_{23}\mathfrak{x}_3 &= m\cdot\frac{1}{h_2}, \\ a_{13}\mathfrak{x}_1 + a_{23}\mathfrak{x}_2 + a_{33}\mathfrak{x}_3 &= m\cdot\frac{1}{h_3}. \end{aligned}$$

Für die Coordinaten des Punktes, dessen Polare unendlich fern ist, ergiebt sich hiernach die Proportion:

$$2.\quad \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \frac{1}{h_1} \\ a_{22} & a_{23} & \frac{1}{h_2} \\ a_{23} & a_{33} & \frac{1}{h_3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & \frac{1}{h_1} \\ a_{23} & a_{12} & \frac{1}{h_2} \\ a_{33} & a_{13} & \frac{1}{h_3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{1}{h_1} \\ a_{12} & a_{22} & \frac{1}{h_2} \\ a_{13} & a_{23} & \frac{1}{h_3} \end{vmatrix}.$$

Ist $\varphi = 0$ die Gleichung derselben Curve zweiten Grades in Liniencoordinaten, so ist die Gleichung des Punktes $\mathfrak{P}$, d. i. die Gleichung des Poles der Geraden $\mathfrak{T}$, deren Coordinaten $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_3 = 1$ sind

$$3.\quad \varphi_{1u} + \varphi_{2u} + \varphi_{3u} = 1.$$

Zu zwei Punkten einer Geraden und dem unendlich fernen Punkte derselben Geraden ist die Mitte der beiden Punkte der vierte harmonische Punkt; und zu zwei Tangenten einer Curve zweiter Klasse, die sich auf der unendlich fernen Geraden schneiden, d. i. parallel sind, und der unendlich fernen Geraden ist die Mittellinie des von den beiden Tangenten begrenzten Streifens der vierte harmonische Strahl.

Die durch den Pol der unendlich fernen Geraden gehenden Curvensehnen

haben also denselben zur gemeinschaftlichen Mitte; und durch ihn gehen die Mittellinien der Streifen, die von je zwei parallelen Curvensehnen begrenzt werden.

Hierdurch ist der Pol der unendlich fernen Geraden als das Centrum der Curve charakterisirt. Die Gleichung des Centrums einer Curve zweiten Grades $\varphi = 0$ ist daher

$$\varphi_{1u} + \varphi_{2u} + \varphi_{3u} \equiv (\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13})u_1 + (\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{23})u_2 + (\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33})u_3 = 0$$

und die Coordinaten des Centrums bestimmen sich durch die Coefficienten der Curvengleichung in Punktcoordinaten $f = 0$ aus

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \frac{1}{h_1} \\ a_{22} & a_{23} & \frac{1}{h_2} \\ a_{23} & a_{33} & \frac{1}{h_3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & \frac{1}{h_1} \\ a_{23} & a_{12} & \frac{1}{h_2} \\ a_{33} & a_{13} & \frac{1}{h_3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{1}{h_1} \\ a_{12} & a_{22} & \frac{1}{h_2} \\ a_{13} & a_{23} & \frac{1}{h_3} \end{vmatrix} .$$

18. Das Centrum einer Curve zweiter Ordnung $\varphi = 0$ ist unendlich fern, wenn die Summe der Coefficienten in der Gleichung des Centrums verschwindet (§ 12 No. 10), also wenn

1. $$\alpha_{11} + 2\alpha_{12} + 2\alpha_{13} + \alpha_{22} + 2\alpha_{23} + \alpha_{33} = 0.$$

Diese Summe ist zugleich die Summe der Coefficienten der Curvengleichung $\varphi = 0$; ihr Verschwinden zeigt an, dass die Curvengleichung durch die Coordinaten der unendlich fernen Geraden, deren Coordinaten $u_1 = u_2 = u_3 = 1$ sind, erfüllt wird. Hierdurch wird diese Curve als Parabel charakterisirt.

19. A. Die Gleichung der Polaren eines Punktes $\mathfrak{P}$ kann bekanntlich geschrieben werden No. 11, 1

1. $$f_{1x} \cdot \mathfrak{x}_1 + f_{2x} \cdot \mathfrak{x}_2 + f_{3x} \cdot \mathfrak{x}_3 = 0.$$

Die Coordinaten einer Ecke $A_\varkappa$ des Achsendreiecks sind $\mathfrak{x}_\varkappa = h_\varkappa$, die andern beiden $\mathfrak{x}_i = \mathfrak{x}_l = 0$. Daher sind die Gleichungen der

Polaren von A_1: $\quad f_{1x} \equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$

„ „ A_2: $\quad f_{2x} \equiv a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$

„ „ A_3: $\quad f_{3x} \equiv a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0.$

B. Die Gleichung des Poles einer Geraden $\mathfrak{T}$ kann man schreiben

2. $$\varphi_{1u} \cdot \mathfrak{u}_1 + \varphi_{2u} \cdot \mathfrak{u}_2 + \varphi_{3u} \cdot \mathfrak{u}_3 = 0.$$

Die Coordinaten einer Seite $g_\varkappa$ des Achsendreiecks sind $u_\varkappa = h_\varkappa : \rho_\varkappa$, die andern beiden $u_i = u_l = 0$. Setzt man diese Werthe in 2. ein, so erhält man für

den Pol von A_2A_3: $\quad \varphi_{1u} \equiv \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_1 + \alpha_{13}u_3 = 0,$

„ „ „ A_3A_1: $\quad \varphi_{2u} \equiv \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{23}u_3 = 0,$

„ „ „ A_1A_2: $\quad \varphi_{3u} \equiv \alpha_{13}u_1 + \alpha_{23}u_2 + \alpha_{33}u_3 = 0.$

Hieraus ist die geometrische Bedeutung der linearen Functionen f_{1x}, f_{2x}, f_{3x} und φ_{1u}, φ_{2u}, φ_{3u} ersichtlich.

20. Ist eine Seite des Achsendreiecks, z. B. A_2A_3, die Polare der gegenüberliegenden Ecke (A_1), so reducirt sich die Gleichung der Polaren von A_1 auf die Gleichung $x_1 = 0$, also ist $a_{12} = a_{13} = 0$, und die Gleichung der Curve in Punktcoordinaten ist

1. $$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Die Gleichung des Poles von A_2A_3 reducirt sich zugleich auf die Gleichung $u_1 = 0$, also ist $\alpha_{12} = \alpha_{13} = 0$ und die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten ist von der Form

2. $$\alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0.$$

21. Ist $\mathfrak{T}_1$ die Polare eines Punktes A_1, und $\mathfrak{T}_2$ die Polare eines auf $\mathfrak{T}_1$ gelegenen Punktes A_2, so geht $\mathfrak{T}_2$ durch A_1; die Polare $\mathfrak{T}_3$ des Punktes A_3, in welchem $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ sich schneiden, geht durch die Punkte A_1 und A_2. Wir erhalten somit ein Dreieck, dessen Seiten die Polaren der gegenüberliegenden Ecken sind. Ein solches Dreieck heisst ein Polarendreieck.

Eine Ecke eines Polarendreiecks (A_1) kann ganz beliebig gewählt werden; die zweite Ecke (A_2) kann auf der Polaren von A_1 beliebig gewählt werden; die dritte ist durch die beiden andern bestimmt.

Wählt man ein Polarendreieck zum Achsendreieck, so gewinnt die Gleichung des Kegelschnitts eine sehr einfache Gestalt. Die drei Functionen f_{1x}, f_{2x}, f_{3x} (No. 19 A) reduciren sich jetzt der Reihe nach auf $a_{11}x_1$, $a_{22}x_2$, $a_{33}x_3$, es ist also $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$. Die Gleichung eines Kegelschnitts in Punktcoordinaten in Bezug auf ein Polarendreieck ist daher

1. $$f \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Die Gleichung der Polaren eines nicht auf f gelegenen Punktes $\mathfrak{P}$ und die Gleichung der Tangente in einem auf f gelegenen Punkte $\mathfrak{P}$ ist

2. $$\mathfrak{T} \equiv a_{11}\mathfrak{x}_1 \cdot x_1 + a_{22}\mathfrak{x}_2 \cdot x_2 + a_{33}\mathfrak{x}_3 \cdot x_3 = 0.$$

Die Coordinaten der Tangente bestimmen sich daher aus der Proportion

$$\frac{\mathfrak{u}_1}{h_1} : \frac{\mathfrak{u}_2}{h_2} : \frac{\mathfrak{u}_3}{h_3} = a_{11}\mathfrak{x}_1 : a_{22}\mathfrak{x}_2 : a_{33}\mathfrak{x}_3 .$$

Hieraus folgt weiter

3. $$\mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \frac{\mathfrak{u}_1}{a_{11}h_1} : \frac{\mathfrak{u}_2}{a_{22}h_2} : \frac{\mathfrak{u}_3}{a_{33}h_3} .$$

Da $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{T}$ liegt, so besteht die Gleichung

$$\frac{\mathfrak{x}_1\mathfrak{u}_1}{h_1} + \frac{\mathfrak{x}_2\mathfrak{u}_2}{h_2} + \frac{\mathfrak{x}_3\mathfrak{u}_3}{h_3} = 0 .$$

Setzt man hier die Werthe aus der Proportion 3. ein, so erhält man die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten, indem man nun die Veränderlichen $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ mit u_1, u_2, u_3 bezeichnet

4. $$\varphi \equiv \frac{u_1^2}{a_{11}h_1^2} + \frac{u_2^2}{a_{22}h_2^2} + \frac{u_3^2}{a_{33}h_3^2} = 0 .$$

Schreibt man dafür

5. $$\varphi \equiv \alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 + \alpha_{33}u_3^2 = 0,$$

so gelten die Beziehungen:

6. $$a_{11}\alpha_{11} = \frac{1}{h_1^2}, \quad a_{22}\alpha_{22} = \frac{1}{h_2^2}, \quad a_{33}\alpha_{33} = \frac{1}{h_3^2} .$$

Die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten 5. findet man auch leicht ohne Benutzung der Gleichung $f = 0$ aus dem Umstande, dass die Ecken A_1, A_2, A_3 die Pole der gegenüberliegenden Seiten sind.

Die Gleichung des Poles einer die Curve φ nicht tangirenden Geraden und die Gleichung des Tangentialpunkts einer Tangente $\mathfrak{T}$ ergiebt sich aus 5. zu:

7. $$\mathfrak{T} \equiv \alpha_{11}\mathfrak{u}_1 \cdot u_1 + \alpha_{22}\mathfrak{u}_2 \cdot u_2 + \alpha_{33}\mathfrak{u}_3 \cdot u_3 = 0.$$

22. Die Gleichung des Centrums in Bezug auf ein Polarendreieck folgt hieraus für $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_3 = 1$ zu

1. $$\alpha_{11}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{33}u_3 = 0.$$

Für die Coordinaten des Centrums hat man daher

2. $$\mathfrak{x}_1 = \frac{\alpha_{11}h_1}{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}}, \quad \mathfrak{x}_2 = \frac{\alpha_{22}h_2}{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}}, \quad \mathfrak{x}_3 = \frac{\alpha_{33}h_3}{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}}.$$

23. Die drei Coefficienten $\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}$ können nicht dasselbe Zeichen haben,

denn dann könnte die Summe $\alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 + \alpha_{33}u_3^2$ nicht für reale Werthe von u_1, u_2, u_3 verschwinden; es haben folglich zwei dieser Coefficienten dasselbe Zeichen, der dritte das entgegengesetzte.

Ist $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = 0$, so ist die Curve, wie schon früher bewiesen (No. 18), eine Parabel. Die Richtung der Achse bestimmt sich aus dem Verhältniss der Coordinaten des unendlich fernen Centrums der Parabel:

$$\mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \alpha_{11}h_1 : \alpha_{22}h_2 : \alpha_{33}h_3 .$$

Wir wollen nun voraussetzen, dass die Summe $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = +1$ ist; dieser Voraussetzung kann immer genügt werden, denn liegt eine Gleichung vor, in welcher $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} \gtrless 1$, so braucht man dieselbe nur mit der reciproken Coefficientensumme zu multipliciren.

Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden: a) zwei Coefficienten sind positiv, der dritte negativ; b) zwei Coefficienten sind negativ, der dritte positiv.

a) Durch Wahl der Bezeichnung kann α_{33} der negative Coefficient sein. Setzt man, um dies deutlicher zu machen $\alpha_{11} = \alpha_1^2$, $\alpha_{22} = \alpha_2^2$, $\alpha_{33} = -\alpha_3^2$, so ist die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten $\varphi \equiv \alpha_1^2u_1^2 + \alpha_2^2u_2^2 - \alpha_3^2u_3^2 = 0$ und in Punktcoordinaten:

$$f \equiv \frac{1}{\alpha_1^2 h_1^2} x_1^2 + \frac{1}{\alpha_2^2 h_2^2} x_2^2 - \frac{1}{\alpha_3^2 h_3^2} x_3^2 = 0 .$$

Die Coordinaten des Centrums sind $\mathfrak{x}_1 = \alpha_1^2 h_1$, $\mathfrak{x}_2 = \alpha_2^2 h_2$, $\mathfrak{x}_3 = -\alpha_3^2 h_3$.

Da zwei Coordinaten positiv sind, so liegt das Centrum in dem an A_1A_2 aussen anliegenden zweieckigen Felde.

Die Function f hat für jeden Punkt der Ebene einen bestimmten Werth; ändert sich die Lage eines Punktes P stetig, so bleibt entweder die für die Coordinaten von P berechnete Function f unverändert, oder sie ändert ihren Werth stetig; bewegt sich ein Punkt von einer Lage A in eine andere B entlang der Strecke AB, und ändert dabei die Function f ihr Vorzeichen, so muss sie daher für einen Punkt der Strecke AB (und nicht für mehr als einen) den Werth Null erreicht haben, d. i. ein und nur ein Punkt der Strecke AB liegt auf der Curve $f = 0$.

Setzt man nun die Coordinaten der Ecken des Achsendreiecks in die Function f ein, so erhält f folgende Werthe:

Für den Punkt A_1: $f = \frac{1}{\alpha_1^2 h_1^2} \cdot h_1^2 = \frac{1}{\alpha_1^2}$, also positiv:

„ „ „ A_2: $f = \frac{1}{\alpha_2^2 h_2^2} \cdot h_2^2 = \frac{1}{\alpha_2^2}$, „ positiv;

„ „ „ A_3: $f = \frac{1}{\alpha_3^2 h_3^2} \cdot h_3^2 = -\frac{1}{\alpha_3^2}$, „ negativ.

Da beim Uebergange von A_3 zu A_1 oder A_2 die Function f ihr Zeichen wechselt, so folgt, dass die Strecken A_3A_1 und A_3A_2 die Curve je einmal schneiden.

Für jeden Punkt von A_1A_2 ist $x_3 = 0$, die Function f wird

$$\frac{1}{\alpha_1^2 h_1^2} \cdot x_1^2 + \frac{1}{\alpha_2^2 h_2^2} \cdot x_2^2 ,$$

also positiv für jeden Punkt auf A_1A_2; die Seite A_1A_2 schneidet daher die Curve nicht.

Durch jede Curve $f = 0$ wird die Ebene in getrennte (endliche oder unendlich grosse) Gebiete zerschnitten, z. B. in zwei Theile durchedie Ellipse, in drei Theile durch die Hyperbel. Da man von jedem Punkte eines Gebietes zu jedem andern Punkte desselben Gebietes auf einer stetigen Linie gelangen kann, ohne die Curve

zu überschreiten, so folgt, dass für alle Punkte eines Gebietes die Function f dasselbe Zeichen hat. Man kann also je nach dem Vorzeichen der Function f jedes Gebiet als ein positives oder als ein negatives bezeichnen. Von zwei Punkten in Gebieten gleichen Vorzeichens können wir nun sagen, dass sie auf derselben Seite der Curve liegen.

Zwei Ecken des Polarendreiecks $A_1 A_2$ liegen also auf der einen, die dritte Ecke A_3 auf der andern Seite der Curve. Für das Centrum erhält f den Werth

$$\frac{1}{\alpha_1^2 h_1^2} \cdot \alpha_1^4 h_1^2 + \frac{1}{\alpha_2^2 h_2^2} \cdot \alpha_2^4 h_2^4 - \frac{1}{\alpha_3^2 h_3^2} \cdot \alpha_3^4 h_3^4 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = +1,$$

folglich liegt das Centrum auf derselben Seite mit A_1 und A_2; also in dem Gebiet der Ebene, durch welches unbegrenzte Gerade (z. B. $A_1 A_2$) gezogen werden können, die die Curve nicht schneiden.

Hierdurch ist die Curve als Hyperbel charakterisirt. Wir sehen daher: Jedes Polarendreieck einer Hyperbel hat zwei Ecken auf derselben Seite, wie das Centrum, die dritte auf der andern; das Centrum liegt in dem durch die Seiten des Polarendreiecks begrenzten zweieckigen Felde, welches der mit dem Centrum nicht auf derselben Seite liegenden Ecke gegenüberliegt.

Rückt das Centrum in eine der Ecken eines Polarendreiecks, in die es überhaupt nur gelangen kann, d. i. in A_1 oder A_2, z. B. in A_1, so wird die Seite $A_2 A_3$ unendlich fern und für das endliche Gebiet wird x_1 zu einer unendlich grossen Constanten; soll die Gleichung der Hyperbel durch endliche Werthe der Coordinaten x_2, x_3 erfüllbar sein, so muss α_1 ebenfalls unendlich gross werden, so dass $(1 : \alpha_1^2) x_1^2$ eine endliche Constante γ^2 wird; die beiden andern Seiten des Polarendreiecks $A_1 A_2$ und $A_1 A_3$ sind dann conjugirte Diameter. Sind die Höhenverhältnisse $h_1 : h_2 : h_3 = 1 : m : n$, so ist die Gleichung der Hyperbel

$$\gamma^2 + \frac{1}{\alpha_2^2 m^2} x_2^2 - \frac{1}{\alpha_3^2 n^2} x_3^2 - 0.$$

Führt man statt x_3 und x_2 schiefwinkelige Parallelcoordinaten x und y ein und setzt $A_2 A_1 A_3 = \omega$, so ist $x_3 = x \sin\omega$, $x_2 = y \sin\omega$, also wird die Gleichung der Hyperbel, nach Division durch γ^2 und passende Umstellung:

$$\frac{\sin^2\omega}{\gamma^2 \alpha^2 n^2} \cdot x^2 - \frac{\sin^2\omega}{\gamma^2 \alpha_2^2 m^2} \cdot y^2 - 1 = 0$$

in Uebereinstimmung mit § 9, No. 13.

b) Sind zwei Coefficienten negativ, der dritte positiv, so kann die Curvengleichung in Liniencoordinaten geschrieben werden

$$\varphi \equiv \alpha_1^2 u_1^2 - \alpha_2^2 u_2^2 - \alpha_3^2 u_3^2 = 0;$$

woraus die Gleichung in Punktcoordinaten folgt:

$$f \equiv \frac{1}{\alpha_1^2 h_1^2} x_1^2 - \frac{1}{\alpha_2^2 h_2^2} x_2^2 - \frac{1}{\alpha_3^2 h_3^2} x_3^2 = 0.$$

Die Coordinaten des Centrums ergeben sich jetzt zu:

$$\mathfrak{x}_1 = \alpha_1^2 h_1, \quad \mathfrak{x}_2 = -\alpha_2^2 h_2, \quad \mathfrak{x}_3 = -\alpha_3^2 h_3.$$

Die Function f erhält für die Ecken des Coordinatendreiecks, für das Centrum und für irgend einen Punkt von $A_2 A_3$ die Werthe:

Für den Punkt A_1: $f = \frac{1}{\alpha_1^2}$, also positiv;

„ „ „ A_2: $f = -\frac{1}{\alpha_2^2}$, „ negativ;

„ „ „ A_3: $f = -\frac{1}{\alpha_3^2}$, „ negativ;

für das Centrum: $f = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = +1$, also positiv,

„ einen Punkt von A_2A_3: $f = -\frac{1}{\alpha_2^2 h_2^2} x_2^2 - \frac{1}{\alpha_3^2 h_3^2} x_3^2$, „ negativ.

Die Eckpunkte A_2A_3 liegen jetzt auf derselben Seite der Curve und die Gerade A_2A_3 schneidet die Curve nicht; die Ecke A_1 und das Centrum liegen auf der andern Seite der Curve. Jede durch das Centrum nach einem Punkte von A_2A_3 gezogene, d. i. jede durch das Centrum gehende Gerade, schneidet die Curve, denn auf der von dem Centrum und der Geraden A_2A_3 begrenzten Strecke findet ein Vorzeichenwechsel der Function f statt.

Hierdurch wird die Curve als Ellipse charakterisirt.

In jedem Polarendreieck einer Ellipse liegen eine Ecke und das Centrum der Curve auf der Seite derselben Curve, nämlich auf dem ringsum begrenzten, endlichen Gebiete; die andern beiden Ecken und die sie verbindende Gerade liegen auf dem andern, unendlich grossen Gebiete; da zwei Coordinaten des Centrums negativ sind, so liegt das Centrum im Scheitelwinkel desjenigen Dreieckswinkels, dessen Scheitel mit dem Centrum auf derselben Seite der Curve liegt.

Rückt das Centrum in den Punkt A_1, so wird A_2A_3 unendlich fern; wenn der Gleichung durch endliche Werthe von x_2 und x_3 genügt werden soll, so muss $(1 : \alpha_1^2) x_1^2$ eine endliche Constante γ^2 werden, und die Verhältnisse der Höhen $h_1 : h_2 : h_2$ müssen endliche Werthe $1 : n : m$ annehmen; die Geraden A_1A_2 und A_1A_3 werden conjugirte Durchmesser. Führt man dieselben Coordinaten ein, wie unter a), so erhält man die Gleichung der Ellipse

$$\frac{\sin^2 \omega}{\gamma^2 \alpha_3^2 m^2} x^2 + \frac{\sin^2 \omega}{\gamma^2 \alpha_2^2 n^2} y^2 - 1 = 0.$$

Durch die Schlussbetrachtungen von a) und b) ist angedeutet, wie man ein zweiachsiges Coordinatensystem (wobei es unwesentlich ist, ob die Coordinaten parallel oder normal zu den Achsen gemessen werden) als eine Ausartung eines dreiachsigen Systems betrachten kann, nämlich als ein dreiachsiges System, von welchem eine Achse die unendlich ferne Gerade ist.

24. A. Wenn von einer Curve zweiter Ordnung ein Polarendreieck $A_1A_2A_3$ und ein Punkt B gegeben sind, so sind noch weitere drei Punkte der Curve bekannt; dieselben liegen auf den Geraden, welche B mit A_1, A_2 und A_3 verbinden und sind die vierten harmonischen Punkte zu den beiden Schnitten einer solchen Geraden und des Perimeter des Polarendreiecks und zu B; sie bilden mit B die Ecken eines vollständigen Vierecks, für welches $A_1\ A_2\ A_3$ die Diagonalpunkte sind, und können durch Ziehen einiger Geraden in bekannter Weise leicht gefunden werden.

Durch ein Polarendreieck und durch zwei Punkte, die aber nicht mit einer Ecke des Polarendreiecks auf einer Geraden liegen dürfen, ist die Curve bestimmt; denn es sind dann im ganzen acht Punkte der Curve bekannt, also mehr als nöthig zur Construction mit Hülfe des PASCAL'schen Satzes.

B. Wenn von einer Curve zweiter Ordnung ein Polarendreieck $A_1A_2A_3$ und eine Tangente B gegeben ist, so kennt man noch weitere drei Tangenten; diese sind die vierten harmonischen Strahlen zu je einer Seite des Achsendreiecks, dem Strahl, welcher die Spur von B auf dieser Seite mit dem Pole dieser Seite verbindet, und von B, und können daher leicht construirt werden. Sie bilden die Seiten eines vollständigen Vierseits, dessen Diagonalen die Seiten des Achsendreiecks sind.

Kennt man von einer Curve zweiter Ordnung ein Polarendreieck und zwei Tangenten, deren Schnittpunkt aber nicht auf einer Seite des Achsendreiecks liegen darf, so ist die Curve bestimmt; denn man kennt dann im Ganzen acht Tangenten und kann die Curve daher nach dem BRIANCHON'schen Satze construiren.

25. Wir untersuchen nun, ob zwei Kegelschnitte ein gemeinsames Paar Pol und Polare haben.

Die Gleichungen der beiden Kegelschnitte seien in Punktcoordinaten:

$$f' \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$
$$f'' \equiv b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2 = 0,$$

in Liniencoordinaten:

$$\varphi' \equiv \alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0;$$
$$\varphi'' \equiv \beta_{11}u_1^2 + 2\beta_{12}u_1u_2 + 2\beta_{13}u_1u_3 + \beta_{22}u_2^2 + 2\beta_{23}u_2u_3 + \beta_{33}u_3^2 = 0.$$

Für die Coordinaten der Polaren eines Punktes x_1, x_2, x_3 in Bezug auf den ersten Kegelschnitt gilt die Proportion

$$\frac{u_1}{h_1} : \frac{u_2}{h_2} : \frac{u_3}{h_3} = f_{1x}' : f_{2x}' : f_{3x}',$$

und für die Coordinaten der Polaren desselben Punktes in Bezug auf f''

$$\frac{u_1}{h_1} : \frac{u_2}{h_2} : \frac{u_3}{h_3} = f_{1x}'' : f_{2x}'' : f_{3x}''.$$

Sollen beide Polaren zusammenfallen, so muss die Proportion erfüllt werden:

$$f_{1x}' : f_{2x}' : f_{3x}' = f_{1x}'' : f_{2x}'' : f_{3x}'',$$

also giebt es dann eine Zahl λ, für welche

$$f_{1x}' = \lambda f_{1x}'', \quad f_{2x}' = \lambda f_{2x}'', \quad f_{3x}' = \lambda f_{3x}''.$$

Reducirt man diese drei Gleichungen auf Null, so erhält man

1. $(a_{11} - \lambda b_{11})x_1 + (a_{12} - \lambda b_{12})x_2 + (a_{13} - \lambda b_{13})x_3 = 0,$
2. $(a_{12} - \lambda b_{12})x_1 + (a_{22} - \lambda b_{22})x_2 + (a_{23} - \lambda b_{23})x_3 = 0,$
3. $(a_{13} - \lambda b_{13})x_1 + (a_{23} - \lambda b_{23})x_2 + (a_{33} - \lambda b_{33})x_3 = 0.$

Der Verein dieser drei Gleichungen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

4. $$L \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11}, & a_{12} - \lambda b_{12}, & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{12} - \lambda b_{12}, & a_{22} - \lambda b_{22}, & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{13} - \lambda b_{13}, & a_{23} - \lambda b_{23}, & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine cubische Gleichung für λ.

Ist λ_0 eine reale Wurzel der Gleichung $L = 0$, so setze man dieselbe in zwei der drei Gleichungen 1., 2., 3., z. B. in die ersten beiden ein; aus

$$(a_{11} - \lambda_0 b_{11})x_1 + (a_{12} - \lambda_0 b_{12})x_2 + (a_{13} - \lambda_0 b_{13})x_3 = 0,$$

und $$(a_{12} - \lambda_0 b_{21})x_1 + (a_{22} - \lambda_0 b_{22})x_2 + (a_{23} - \lambda_0 b_{23})x_3 = 0,$$

erhält man dann die Verhältnisse der Coordinaten des zu λ_0 gehörigen Punktes, dessen Polaren für beide Kegelschnitte zusammenfallen.

Man kann bei dieser Untersuchung auch von den Gleichungen in Liniencoordinaten ausgehen. Ist T eine Gerade, deren Pole für beide Kegelschnitte zusammenfallen, und sind $u_1u_2u_3$ die Coordinaten von T, so gilt die Proportion

$$\frac{u_1}{h_1} : \frac{u_2}{h_2} : \frac{u_3}{h_3} = \varphi_{1u}' : \varphi_{2u}' : \varphi_{3u}' = \varphi_{1u}'' : \varphi_{2u}'' : \varphi_{3u}'',$$

also giebt es eine Zahl μ, für welche die Gleichungen bestehen

$$\varphi_{1u}' - \mu\varphi_{1u}'' = 0, \quad \varphi_{2u}' - \mu\varphi_{2u}'' = 0, \quad \varphi_{3u}' - \mu\varphi_{3u}'' = 0, \quad \text{oder}$$

5. $(\alpha_{11} - \mu\beta_{11})u_1 + (\alpha_{12} - \mu\beta_{12})u_2 + (\alpha_{13} - \mu\beta_{13})u_3 = 0,$
6. $(\alpha_{12} - \mu\beta_{12})u_1 + (\alpha_{22} - \mu\beta_{22})u_2 + (\alpha_{23} - \mu\beta_{23})u_3 = 0,$
7. $(\alpha_{13} - \mu\beta_{13})u_1 + (\alpha_{23} - \mu\beta_{23})u_2 + (\alpha_{33} - \mu\beta_{33})u_3 = 0.$

Der Verein dieser Gleichungen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$8. \quad M = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \mu\beta_{11}, & \alpha_{12} - \mu\beta_{12}, & \alpha_{13} - \mu\beta_{13} \\ \alpha_{12} - \mu\beta_{12}, & \alpha_{22} - \mu\beta_{22}, & \alpha_{23} - \mu\beta_{23} \\ \alpha_{13} - \mu\beta_{13}, & \alpha_{23} - \mu\beta_{23}, & \alpha_{33} - \mu\beta_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Jeder realen Wurzel dieser cubischen Gleichung für μ entspringt ein reales gemeinsames Paar Pol und Polare der beiden Kegelschnitte. Die Verhältnisse der Coordinaten der Polaren bestimmen sich, wenn μ_0 eine reale Wurzel von $M = 0$ ist, aus zweien der Gleichungen 5. 6. 7. z. B. aus

$$(\alpha_{11} - \mu_0\beta_{11})u_1 + (\alpha_{12} - \mu_0\beta_{12})u_2 + (\alpha_{13} - \mu_0\beta_{13})u_3 = 0,$$

und

$$(\alpha_{12} - \mu_0\beta_{12})u_1 + (\alpha_{22} - \mu_0\beta_{22})u_2 + (\alpha_{23} - \mu_3\beta_{23})u_3 = 0.$$

Die Gleichungen $L = 0$ und $M = 0$ haben also immer die gleiche Anzahl realer Wurzeln.

Haben die Gleichungen $L = 0$ und $M = 0$ drei reale Wurzeln, so giebt es drei Punkte $P_1P_2P_3$, die für beide Kegelschnitte dieselben Polaren $T_1T_2T_3$ haben. Hieraus folgt dann weiter, dass die Ecken des Dreiecks $T_1T_2T_3$ die Seiten des Dreiecks $P_1P_2P_3$ für beide Kegelschnitte zu Polaren haben. Da aber nicht mehr als die drei Punkte $P_1P_2P_3$ existiren, deren Polaren für beide Kegelschnitte zusammenfallen, so folgt, dass die Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $T_1T_2T_3$ zusammenfallen. Haben also die Gleichungen $L = 0$ und $M = 0$ drei reale Wurzeln, so besitzen die beiden Kegelschnitte ein reales gemeinsames Polarendreieck.

Durch Transformation zu diesem gemeinsamen Polarendreieck als Achsendreieck wird jede der quadratischen Formen f', f'', φ' und φ'' in eine Summe von drei Quadraten transformirt.

Haben die Gleichungen $L = 0$ und $M = 0$ zwei conjugirt complexe Wurzeln, so kann man immer noch von einem gemeinsamen Polarendreiecke der beiden Kegelschnitte sprechen; nur sind jetzt zwei Ecken und die ihnen gegenüberliegenden Seiten imaginär, während die dritte Ecke und Seite real sind.

---

26. A. Sind P_1, P_2, .. P_6 Punkte eines Kegelschnitts und $x_{1\varkappa}$, $x_{2\varkappa}$, $x_{3\varkappa}$ die Coordinaten von $P_\varkappa$, so verschwindet die Determinante (§ 11, No. 2)

$$1. \quad \begin{vmatrix} x_{11}^2 & x_{11}x_{21} & x_{11}x_{31} & x_{21}^2 & x_{21}x_{31} & x_{31}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{16}^2 & x_{16}x_{26} & x_{16}x_{36} & x_{26}^2 & x_{23}x_{36} & x_{36}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus folgt, dass es sechs Zahlen $\mu_1 \ldots \mu_6$ giebt, die nicht sämmtlich verschwinden, und für welche

$$2. \quad \begin{aligned} x_{11}^2\mu_1 &+ x_{12}^2\mu_2 + \ldots + x_{16}^2\mu_6 = 0, \\ x_{11}x_{21}\mu_1 &+ x_{12}x_{22}\mu_2 + \ldots + x_{16}x_{26}\mu_6 = 0, \\ x_{11}x_{31}\mu_1 &+ x_{12}x_{32}\mu_2 + \ldots + x_{16}x_{36}\mu_6 = 0, \\ x_{21}^2\mu_1 &+ x_{22}^2\mu_2 + \ldots + x_{26}^2\mu_6 = 0, \\ x_{21}x_{31}\mu_1 &+ x_{22}x_{32}\mu_2 + \ldots + x_{26}x_{36}\mu_6 = 0, \\ x_{31}^2\mu_1 &+ x_{32}^2\mu_2 + \ldots + x_{36}^2\mu_6 = 0. \end{aligned}$$

Es seien u_1, u_2, u_3 die Coordinaten einer willkürlichen Geraden. Multiplicirt man 2. der Reihe nach mit

$$\frac{u_1^2}{h_1^2}, \quad \frac{u_1u_2}{h_1h_2}, \quad \frac{u_1u_3}{h_1h_3}, \quad \frac{u_2^2}{h_2^2}, \quad \frac{u_2u_3}{h_2h_3}, \quad \frac{u_3^2}{h_3^2}$$

und addirt, so erhält man die Identität

$$3. \quad \mu_1P_1^2 + \mu_2P_2^2 + \mu_3P_3^2 + \mu_4P_4^2 + \mu_5P_5^2 + \mu_6P_6^2 = 0,$$

wobei $$P_\varkappa = \frac{1}{h_1}x_{1\varkappa}u_1 + \frac{1}{h_2}x_{2\varkappa}u_2 + \frac{1}{h_3}x_{3\varkappa}u_3 = 0$$
die Gleichung des Punktes $P_\varkappa$ ist. Wenn also sechs Punkte auf einem Kegelschnitte liegen, so erfüllen sie die Identität 2., wobei die Verhältnisse der Zahlen $\mu_\varkappa$ eindeutig bestimmt sind.

B.*) Wenn sechs Gerade $T_1 \ldots T_6$ einen Kegelschnitt berühren, so erfüllen ihre Gleichungen eine Identität von der Form

4. $$\mu_1 T_1^2 + \mu_2 T_2^2 + \ldots + \mu_6 T_6^2 = 0,$$
wobei die Verhältnisse der $\mu_\varkappa$ eindeutig bestimmt sind.

27. *A.* Sind $T_1, T_2, \ldots T_n$ willkürliche Gerade, so ist

1. $$\Sigma a_{ik} T_i T_k = 0,$$
wobei für ik jede Variation zweiter Klasse der Zahlen $1 \ldots n$ und $a_{ik} = a_{ki}$ vorausgesetzt werde, die Gleichung eines Kegelschnitts. Die Bedingungsgleichung dafür, dass die Punkte P und Π in Bezug auf 1. conjugirt sind, ergiebt sich aus No. 11, 1A ohne Schwierigkeit zu

2. $$\Sigma(a_{1i}T_{1x} + a_{2i}T_{2x} + a_{3i}T_{3x} + \ldots + a_{ni}T_{nx})\, T_{i\xi} = 0, \; i = 1 \ldots n.$$

B. Sind $P_1, P_2, \ldots P_n$ willkürliche Punkte, so ist

3. $$\Sigma a_{ik} P_i P_k = 0$$
die Gleichung eines Kegelschnitts in Liniencoordinaten. Die Bedingung dafür, dass T und $\mathfrak{T}$ in Bezug auf denselben conjugirt sind, ist (No. 11, 1 B)

4. $$\Sigma(a_{1i}P_{1u} + a_{2i}P_{2u} + \ldots + a_{ni}P_{nu})\, P_{i\mathfrak{u}} = 0, \; i = 1 \ldots n.$$

28. A. Für den Kegelschnitt

1. $$K \equiv a_{11}T_1^2 + a_{22}T_2^2 + a_{33}T_3^2 = 0$$
wird die Gleichung No. 27, 2

2. $$a_{11}T_{1x}T_{1\xi} + a_{22}T_{2x}T_{2\xi} + a_{33}T_{3x}T_{3\xi} = 0.$$

Dem Punkte $T_{1x} = T_{2x} = 0$ ist daher jeder Punkt von $T_{3\xi} = 0$ conjugirt u. s. w.; folglich ist $T_1 T_2 T_3$ ein Polarendreieck von K.

Für den Kegelschnitt

3. $$K \equiv a_{11}T_1^2 + a_{22}T_2^2 + a_{33}T_3^2 + a_{44}T_4^2 = 0$$
geht No. 27, 2 über in

4. $$a_{11}T_{1x}T_{1\xi} + a_{22}T_{2x}T_{2\xi} + a_{33}T_{3x}T_{3\xi} + a_{44}T_{4x}T_{4\xi} = 0.$$

Ist i, k, l, m eine Permutation von 1 2 3 4, so lehrt diese Gleichung, dass dem Punkte $T_{ix} = T_{kx} = 0$ der Punkt $T_{l\xi} = T_{m\xi} = 0$ conjugirt ist; das Vierseit $T_1T_2T_3T_4$ ist daher dem Kegelschnitte K conjugirt, d. h. je zwei Gegenecken sind conjugirt.

Umgekehrt: Wenn für einen Kegelschnitt K zwei Paare Gegenecken eines vollständigen Vierseits conjugirt sind, so ist es auch das dritte Paar. Denn sind A, B und C, D Punktpaare zweier Diagonalen des Vierseits, die den Gegenecken, die mit ihnen auf derselben Diagonale liegen, harmonisch zugeordnet sind, und beschränkt man die Coefficienten a_{ii} in $K = 0$ so, dass der Gleichung durch A und C genügt wird, so sind nach dem soeben bewiesenen Satze auch B und D auf K enthalten. Man kann nun die Verhältnisse $a_{11} : a_{22} : a_{33} : a_{44}$ immer so wählen, dass K noch einen beliebigen fünften Punkt enthält, es lässt sich also die Gleichung jedes durch A, B, C und D gehenden Kegelschnitts in der Form 4. darstellen, w. z. b. w.

B. Der Kegelschnitt $K \equiv \Sigma a_{\varkappa\varkappa}P_\varkappa^2 = 0$ hat, wenn $\varkappa = 3$, das Polarendreieck $P_1P_2P_3$; ist $\varkappa = 4$, so ist er dem Vierecke $P_1P_2P_3P_4$ conjugirt,

*) Die Beweise der unter B mitgetheilten Sätze sind denen unter A leicht nachzubilden.

d. h. jedes Paar Gegenseiten dieses Vierecks ist conjugirt. Umgekehrt; Wenn zwei Paare Gegenseiten eines vollständigen Vierecks einem Kegelschnitte conjugirt sind, so ist es auch das dritte Paar.

29. Die Identität No. 26, 3 kann geschrieben werden

1. $$\mu_1 P_1^2 + \mu_2 P_2^2 + \mu_3 P_3^2 \equiv - \mu_4 P_4^2 - \mu_5 P_5^2 - \mu_6 P_6^2.$$

Alle Geraden, für welche $\mu_1 P_1^2 + \mu_2 P_2^2 + \mu_3 P_3^2 = 0$, berühren einen Kegelschnitt, für welchen $P_1 P_2 P_3$ ein Polarendreieck ist; nach 1. ist für diesen Kegelschnitt auch $\mu_4 P_4^2 + \mu_5 P_5^2 + \mu_6 P_6^2 = 0$, es ist also auch $P_4 P_5 P_6$ ein Polarendreieck desselben. Wir erkennen daher: Wenn zwei Dreiecke einem Kegelschnitte eingeschrieben sind, so giebt es einen bestimmten Kegelschnitt, für den sie Polarendreiecke sind.

Umgekehrt: Zwei Polarendreiecke desselben Kegelschnitts sind einem andern Kegelschnitte eingeschrieben. Denn sind $P_1 P_2 P_3$ und $P_4 P_5 P_6$ Polarendreiecke eines Kegelschnitts, so kann die Gleichung desselben in den beiden Formen geschrieben werden

$$a_1 P_1^2 + a_2 P_2^2 + a_3 P_3^2 = 0, \quad a_4 P_4^2 + a_5 P_5^2 + a_6 P_6^2 = 0.$$

Daher giebt es eine Zahl n, durch welche die Identität hergestellt wird

$$a_1 P_1^2 + a_2 P_2^2 + a_3 P_3^2 - n a_4 P_4^2 - n a_5 P_5^2 - n a_6 P_6^2 = 0,$$

folglich liegen die Punkte $P_1 \ldots P_6$ auf einem Kegelschnitte.

B. Wenn zwei Dreiecke demselben Kegelschnitte umschrieben sind, so sind sie Polarendreiecke für einen bestimmten anderen Kegelschnitt; und umgekehrt: Zwei Polarendreiecke desselben Kegelschnitts sind einem andern Kegelschnitte umschrieben.

§ 14. Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar.

1. A. Die Gesammtheit aller Kegelschnitte, deren Gleichungen in Punktcoordinaten aus den Gleichungen zweier gegebener Kegelschnitte $f' = 0$ und $f'' = 0$ in der Weise abgeleitet werden

$$f \equiv \lambda_1 f' + \lambda_2 f'' = 0,$$

heisst ein Kegelschnittbüschel. Man erhält alle Kegelschnitte des Büschels, indem man dem Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2$ der Reihe nach alle möglichen Werthe giebt.

Die Kegelschnitte $f' = 0$ und $f'' = 0$ gehören zum Büschel; sie gehen aus f hervor, wenn man $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, bez. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ setzt.

Durch jeden Punkt der Ebene geht ein Kegelschnitt des Büschels. Sind nämlich $f_{\mathfrak{p}}'$ und $f_{\mathfrak{p}}''$ die Werthe, welche die Functionen f' und f'' für einen gegebenen Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene erhalten, so nehme man $\lambda_1 = f_{\mathfrak{p}}''$, $\lambda_2 = -f_{\mathfrak{p}}'$, bilde also den Kegelschnitt $f \equiv f_{\mathfrak{p}}'' \cdot f' - f_{\mathfrak{p}}' \cdot f'' = 0$.

Setzt man in f' und f'' statt der laufenden Coordinaten die Coordinaten des Punktes $\mathfrak{P}$, so verschwindet f identisch, also liegt $\mathfrak{P}$ auf $f = 0$.

Hiervon machen nur solche Punkte eine Ausnahme, für welche zugleich $f_{\mathfrak{p}}' = 0$ und $f_{\mathfrak{p}}'' = 0$, die also den Kegelschnitten f' und f'' gemein sind. Für dieselben verschwindet auch die Function $f \equiv \lambda_1 f' + \lambda_2 f''$, sie gehören also allen Kegelschnitten des Büschels an; sie heissen die Träger des Büschels.

B. Die Gesammtheit aller Kegelschnitte, deren Gleichung in Liniencoordinaten aus den Gleichungen zweier gegebenen Kegelschnitte $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = 0$ in der Weise abgeleitet werden

$$\varphi \equiv \lambda_1 \varphi' + \lambda_2 \varphi'' = 0,$$

heisst eine Kegelschnittschaar. Man erhält alle Kegelschnitte der Schaar, wenn man dem Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2$ der Reihe nach alle möglichen Werthe beilegt.

Die gegebenen Kegelschnitte gehören zur Schaar, denn ihre Gleichungen gehen aus φ hervor, wenn man $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, bez. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ setzt.

Jede Gerade der Ebene wird von einem Kegelschnitte der Schaar berührt. Denn sind φ_u' und φ_u'' die Werthe, welche die Functionen φ' und φ'' für die Coordinaten einer gegebenen Geraden $\mathfrak{T}$ annehmen, so wähle man

$$\lambda_1 = \varphi_u'', \quad \lambda_2 = -\varphi_u',$$

bilde also den Kegelschnitt der Schaar

$$\varphi \equiv \varphi_u'' \cdot \varphi' - \varphi_u' \cdot \varphi'' = 0.$$

Ersetzt man die laufenden Coordinaten u_x in φ' und φ'' durch die Coordinaten $\mathfrak{u}_x$ der gegebenen Geraden $\mathfrak{T}$, so verschwindet φ identisch, also berührt $\mathfrak{T}$ den Kegelschnitt $\varphi = 0$.

Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn die gegebene Gerade die beiden gegebenen Kegelschnitte berührt; denn dann ist $\varphi_u' = \varphi_u'' = 0$. Für die Coordinaten jeder solchen Geraden verschwindet auch die Function $\varphi \equiv \lambda_1\varphi' + \lambda_2\varphi''$, also wird diese Gerade von allen Kegelschnitten der Schaar berührt. Eine solche Gerade heisst Träger der Schaar.

2. A. Ist ein Punkt zwei Kegelschnitten des Büschels gemein, so ist er allen Kegelschnitten des Büschels gemein.

Beweis. Sind $f''' \equiv \lambda_{13}f' + \lambda_{23}f'' = 0$ und $f'''' \equiv \lambda_{14}f' + \lambda_{24}f'' = 0$ zwei verschiedene Kegelschnitte, so sind die Verhältnisse $\lambda_{13} : \lambda_{23}$ und $\lambda_{14} : \lambda_{24}$ ungleich, folglich ist die Differenz $\lambda_{13}\lambda_{24} - \lambda_{23}\lambda_{14}$ von Null verschieden. Aus

$$\lambda_{13}f' + \lambda_{23}f'' = f''', \quad \lambda_{14}f' + \lambda_{24}f'' = f''''$$

folgt

$$f' = \frac{1}{\lambda_{13}\lambda_{24} - \lambda_{23}\lambda_{14}}(\lambda_{24}f''' - \lambda_{23}f''''),$$

$$f'' = \frac{1}{\lambda_{13}\lambda_{24} - \lambda_{23}\lambda_{14}}(-\lambda_{14}f''' + \lambda_{13}f'''').$$

Diese Formeln zeigen, dass jeder Punkt, dessen Coordinaten den Gleichungen $f''' = 0$, $f'''' = 0$ genügt, auch auf $f' = 0$ und $f'' = 0$ liegt; sowie, dass man die Functionen f' und f'' und damit auch alle linear aus f' und f'' zusammengesetzten quadratischen Functionen f, die gleich Null gesetzt die Gleichungen der Büschelkegelschnitte ergeben, linear durch f''' und f'''', d. i. durch die linken Seiten der Gleichungen von irgend zwei Büschelkegelschnitten ausdrücken kann.

B. Ebenso ergiebt sich: Ist eine Tangente zwei Kegelschnitten einer Schaar gemein, so ist sie allen Kegelschnitten der Schaar gemein.

3. A. Die linearen Functionen $f_{1\mathfrak{x}}$, $f_{2\mathfrak{x}}$, $f_{3\mathfrak{x}}$ (§ 13, No. 1) für die quadratische Form $f \equiv \lambda_1 f' + \lambda_2 f''$ sind

$$f_{1\mathfrak{x}} = \lambda_1 f_{1\mathfrak{x}}' + \lambda_2 f_{1\mathfrak{x}}'', \quad f_{2\mathfrak{x}} = \lambda_1 f_{2\mathfrak{x}}' + \lambda_2 f_{2\mathfrak{x}}'', \quad f_{3\mathfrak{x}} = \lambda_1 f_{3\mathfrak{x}}' + \lambda_2 f_{3\mathfrak{x}}''.$$

Die Gleichung der Polaren eines Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den Büschelkegelschnitt $f = 0$ ist also

$$\mathfrak{T} \equiv (\lambda_1 f_{1\mathfrak{x}}' + \lambda_2 f_{1\mathfrak{x}}'')x_1 + (\lambda_1 f_{2\mathfrak{x}}' + \lambda_2 f_{2\mathfrak{x}}'')x_2 + (\lambda_1 f_{3\mathfrak{x}}' + \lambda_2 f_{3\mathfrak{x}}'')x_3 = 0.$$

Setzt man

$$\mathfrak{T}' \equiv f_{1\mathfrak{x}}'x_1 + f_{2\mathfrak{x}}'x_2 + f_{3\mathfrak{x}}'x_3, \quad \mathfrak{T}'' \equiv f_{1\mathfrak{x}}''x_1 + f_{2\mathfrak{x}}''x_2 + f_{3\mathfrak{x}}''x_3,$$

so sind $\mathfrak{T}' = 0$ und $\mathfrak{T}'' = 0$ die Gleichungen der Polaren des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Kegelschnitte f' und f'' und man hat $\mathfrak{T} \equiv \lambda_1\mathfrak{T}' + \lambda_2\mathfrak{T}''$.

Hieraus folgt, dass die Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den Kegelschnitt f durch den Schnittpunkt der Polaren von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Kegelschnitte f' und f'' geht; dies ergiebt den Satz: Die Polaren eines Punktes A in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels gehen durch einen

Punkt a; die Punkte A und a sind conjugirt in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels; es gehen daher auch die Polaren des Punktes a in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels durch A.

Fallen die Polaren von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf f' und f'' in eine Gerade $\mathfrak{T}$ zusammen, so geht die Polare von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt f des Büschels durch jeden Punkt von $\mathfrak{T}$, fällt also mit $\mathfrak{T}$ zusammen. Es giebt daher ein Polarendreieck, das allen Kegelschnitten eines Büschels gemeinsam ist; von diesem Dreieck ist entweder eine Ecke und die gegenüberliegende Seite real oder das ganze Dreieck ist real.

Ferner folgt aus der Gleichung der Polaren des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf einen Büschelkegelschnitt: Die Strahlenbüschel S_a, S_b, S_c, . . . welche von den Polaren der Punkte A, B, C . . . der Ebene in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels gebildet werden, sind projectiv; es entsprechen sich die Polaren der Punkte A, B, C . . in Bezug auf denselben Kegelschnitt.

Der Pol einer Geraden AB in Bezug auf einen Kegelschnitt des Büschels ist der Schnittpunkt der Polaren von A und B, also der Schnitt zweier entsprechenden Strahlen der collinearen Polarenbüschel S_a und S_b. Hieraus folgt der Satz: Die Pole einer Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels liegen auf einem Kegelschnitte. Dieser Kegelschnitt geht durch die Träger der Strahlenbüschel S_a und S_b, d. i. durch die Punkte a und b, welche den Punkten A und B in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirt sind. Der Kegelschnitt, welcher die Pole einer Geraden T in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels enthält, ist also auch der Ort der Punkte, die den Punkten der Geraden in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirt sind.

Dem Schnittpunkt der Geraden T mit einer Seite α des Polarendreiecks ist wie allen Punkten von α die gegenüberliegende Ecke A conjugirt, also folgt: Jeder Kegelschnitt, welcher die Pole einer Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels, sowie die Conjugirten der Punkte einer Geraden in Bezug auf das Büschel enthält, ist dem gemeinsamen Polarendreiecke des Büschels umschrieben.

Ist der Punkt A der Geraden AB eine Ecke des Polarendreiecks des Büschels, so fallen die Strahlen des Polarenbüschels von A in eine Gerade zusammen, nämlich in die dem Punkte A gegenüberliegende Seite α des Polarendreiecks. Hieraus folgt: Die Pole jeder durch einen Eckpunkt A des Polarendreiecks gehenden Geraden fallen in die A gegenüberliegende Seite des Polarendreiecks. Um zu erfahren, wo die Punkte liegen, die den Punkten der Geraden AB in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirt sind, bemerken wir, dass die Polaren der Punktreihe AB in Bezug auf die Kegelschnitte f' und f'' zwei projective Strahlbüschel bilden, deren Träger auf der dem Punkte A gegenüberliegenden Seite α des Polarendreiecks liegen. Da nun α die Polare von A in Bezug auf f' und f'' ist, so fallen in α zwei entsprechende Strahlen dieser beiden Polarenbüschel zusammen; die beiden Büschel sind daher perspectiv; die Schnittpunkte entsprechender Strahlen, d. i. die den Punkten von AB in Bezug auf f' und f'' und daher in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirten Punkte liegen folglich auf einer Geraden T. Dem auf α gelegenen Punkte der Geraden AB ist A conjugirt, folglich geht T durch A. Wir haben daher den Satz: Den Punkten einer Geraden, die durch eine

Ecke des gemeinsamen Polarendreiecks geht, sind in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels die Punkte einer andern durch dieselbe Ecke des Polarendreiecks gehenden Geraden conjugirt.

Der Kegelschnitt, auf dem im Allgemeinen die Conjugirten der Punkte einer Geraden liegen, zerfällt in diesem Falle in die Geraden T und α; die Conjugirten für alle Punkte von AB liegen auf T, ausgenommen für den Punkt A, denn diesem sind alle Punkte der Geraden α conjugirt.

B. Die linearen Functionen φ_{1u}, φ_{2u}, φ_{3u} für die quadratische Form $\varphi = \lambda_1\varphi' + \lambda_2\varphi''$ sind

$$\varphi_{1u} = \lambda_1\varphi_{1u}' + \lambda_2\varphi_{1u}'', \quad \varphi_{2u} = \lambda_1\varphi_{2u}' + \lambda_2\varphi_{2u}'', \quad \varphi_{3u} = \lambda_1\varphi_{3u}' + \lambda_2\varphi_{3u}''.$$

Die Gleichung des Poles einer Geraden $\mathfrak{T}$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\varphi = 0$ ist daher

$$\mathfrak{P} \equiv (\lambda_1\varphi_{1u}' + \lambda_2\varphi_{1u}'')\,u_1 + (\lambda_1\varphi_{2u}' + \lambda_2\varphi_{2u}'')\,u_2 + \lambda_1\varphi_{3u}' + \lambda_2\varphi_{3u}'')\,u_3 = 0.$$

Setzt man

$$\mathfrak{P}' \equiv \varphi_{1u}'u_1 + \varphi_{2u}'u_2 + \varphi_{3u}'u_3, \quad \mathfrak{P}'' \equiv \varphi_{1u}''u_1 + \varphi_{2u}''u_2 + \varphi_{3u}''u_3,$$

so sind $\mathfrak{P}' = 0$ und $\mathfrak{P}'' = 0$ die Gleichungen der Pole der Geraden $\mathfrak{T}$ in Bezug auf die Kegelschnitte $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = 0$ und man hat

$$\mathfrak{P} \equiv \lambda_1\mathfrak{P}' + \lambda_2\mathfrak{P}''.$$

Also liegt der Pol von $\mathfrak{P}$ auf der Geraden $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$. Wir schliessen daher: Die Pole einer Geraden A in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar liegen auf einer Geraden α; die Geraden A und α sind daher in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar conjugirt; es liegen daher auch umgekehrt die Pole der Geraden α in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar auf der Geraden A.

Eine Ausnahme hiervon tritt nur dann ein, wenn die Pole für die Kegelschnitte φ' und φ'' zusammenfallen; dann fallen die Pole von A in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar zusammen. Hieraus ergiebt sich: Die Kegelschnitte einer Schaar haben ein gemeinsames Polarendreieck; von demselben ist entweder eine Seite und die gegenüberliegende Ecke real, oder das ganze Dreieck ist real.

Aus der Gleichung des Poles einer Geraden $\mathfrak{T}$ für einen Kegelschnitt der Schaar $\varphi = 0$ ergiebt sich ferner: Die Pole der Geraden A, B, Γ, Δ .... für die Kegelschnitte einer Schaar bilden projective Punktreihen Σ_α, Σ_β, Σ_γ, Σ_δ, ... und zwar entsprechen sich die Pole derselben Geraden in Bezug auf die einzelnen Kegelschnitte der Schaar.

Die Polaren des Schnittpunktes zweier Geraden AB in Bezug auf die Kegelschnitte der Schaar sind die Geraden, welche die Pole der Geraden A und B verbinden, sind also die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte der den Geraden A und B zugehörenden projectiven Polreihen Σ_α und Σ_β; dies ergiebt: Die Polaren eines Punktes P in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar umhüllen einen Kegelschnitt. Derselbe wird auch von den Geraden berührt, die den durch P gehenden Geraden in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar conjugirt sind.

Eine Ausnahme von diesen beiden Sätzen tritt nur ein, wenn der Punkt auf einer Seite A des gemeinsamen Polarendreiecks der Schaar liegt. Denn die zu A gehörige Polreihe schrumpft in einen Punkt zusammen, nämlich in den A gegenüberliegenden Eckpunkt a des Polarendreiecks. Hieraus folgt: Die Polaren eines Punktes, der auf einer Seite A des Polarendreiecks der Schaar liegt, umhüllen den A gegenüberliegenden Eckpunkt a des Polarendreiecks.

Der Geraden, die P mit einer Ecke a des der Schaar gemeinsamen Polarendreiecks verbindet, ist, wie allen durch a gehenden Geraden, die gegenüberliegende Seite A für alle Kegelschnitte der Schaar conjugirt.

Jeder Kegelschnitt, den die Polaren eines Punktes, sowie die Conjugirten der durch diesen Punkt gehenden Strahlen, in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar umhüllen, ist dem gemeinsamen Polarendreieck der Schaar eingeschrieben.

Ebenso wie der entsprechende Satz für Kegelschnittbüschel ergiebt sich ferner: Den Strahlen eines Büschels, dessen Träger auf einer Seite A des gemeinsamen Polarendreiecks liegt, sind in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar die Strahlen eines andern Büschels conjugirt, dessen Träger P auf derselben Seite des Polarendreiecks liegt. Der Kegelschnitt, den im Allgemeinen die Conjugirten der Strahlen eines Büschels umhüllen, zerfällt in diesem Falle in zwei Strahlbüschel (zwei Punkte); den Strahlen des Büschels, die nicht mit der Geraden A zusammenfallen, sind die Strahlen conjugirt, die durch P gehen; dem Strahl A ist das ganze Strahlbüschel conjugirt, dessen Träger der A gegenüberliegende Eckpunkt des Polarendreiecks ist.

4. Die Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schaar sind die Pole der unendlich fernen Geraden. Daher folgt (No. 3): Die Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels liegen auf einem Kegelschnitte, der dem Polarendreiecke des Büschels umgeschrieben ist. Die Mittelpunkte der Kegelschnitte einer Schaar liegen auf einer Geraden.

Ferner folgt: Die Diameter der Kegelschnitte eines Büschels, die einer festen Diameterrichtung conjugirt sind, gehen durch einen Punkt. Die Diameter der Kegelschnitte einer Schaar, die einer festen Diameterrichtung conjugirt sind, umhüllen einen Kegelschnitt.

5. A. Wir fragen nun nach den Doppelpunkten der Kegelschnitte eines Büschels, oder nach solchen Kegelschnitten eines Büschels, die in zwei Gerade zerfallen.

Hat der Kegelschnitt $f \equiv \lambda_1 f' + \lambda_2 f'' = 0$ einen Doppelpunkt, und ist

$$f' \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2,$$
$$f'' \equiv b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_1 + 2b_{13}x_1x_3 + b_{22}x_2^2 + 2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2,$$

so verschwindet die Determinante (§ 13, No. 3)

$$1. \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11}, & \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12}, & \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 b_{13} \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12}, & \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22}, & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23} \\ \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 b_{13}, & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23}, & \lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Verhältnisse der Coordinaten des Doppelpunkts bestimmen sich aus zweien der Gleichungen

$$2. \quad \lambda_1 f_1{}_x' + \lambda_2 f_1{}_x'' \equiv (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11})x_1 + (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12})x_2 + (\lambda_1 a_{13} + \lambda_2 b_{13})x_3 = 0,$$
$$3. \quad \lambda_1 f_2{}_x' + \lambda_2 f_2{}_x'' \equiv (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12})x_1 + (\lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22})x_2 + (\lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23})x_3 = 0,$$
$$4. \quad \lambda_1 f_3{}_x' + \lambda_2 f_3{}_x'' \equiv (\lambda_1 a_{13} + \lambda_2 b_{13})x_1 + (\lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23})x_2 + (\lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33})x_3 = 0.$$

Ersetzt man hier das Verhältniss $-\lambda_2 : \lambda_1$ durch λ, so werden die Determinante und die Gleichungen 2., 3., 4. mit der Determinante L und den Gleichungen 1., 2., 3. in § 13, No. 25 identisch. Wir haben daher den Satz: Es giebt in jedem Kegelschnittbüschel drei (reale oder imaginäre) Kegelschnitte, die in Geradenpaare zerfallen; die Doppelpunkte dieser Geradenpaare sind die Ecken des gemeinsamen Polarendreiecks.

Es mag ausdrücklich hervorgehoben werden, dass aus der Realität eines Doppelpunktes nicht geschlossen werden kann, dass auch das zugehörige Geraden-

paar real ist. Wählt man einen realen Eckpunkt des gemeinsamen Polarendreiecks zur Ecke A_1 und die gegenüberliegende Seite zur Seite A_2A_3 des Coordinatendreiecks, so wird (§ 13, No. 20)

$$f' \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$
$$f'' \equiv b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + 2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2 = 0.$$

Die Gleichung 1. wird jetzt

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11}, & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22}, & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23} \\ 0 & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23}, & \lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11}) \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 a_{22} + \lambda_1 b_{22}, & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23} \\ \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23}, & \lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung, die dem Doppelpunkte A_1 entspricht, ist $\lambda_1 : \lambda_2 = b_{11} : -a_{11}$; das zugehörige Geradenpaar hat die Gleichung:

5. $$f \equiv b_{11}f' - a_{11}f'' \equiv (b_{11}a_{22} - a_{11}b_{22})\,x_2^2 + 2(b_{11}a_{23} - a_{11}b_{23})x_2x_3 + (b_{11}a_{33} - a_{11}b_{33})\,x_3^2 = 0.$$

Ist das ganze Polarendreieck real, so wird in Bezug auf dasselbe

$$f' \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2,$$
$$f'' \equiv b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2.$$

Die Determinante 1. reducirt sich jetzt auf das Produkt der Diagonalglieder

6. $$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11})\,(\lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22})\,(\lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33}) = 0$$

und liefert für das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ die drei realen Wurzeln $b_{11} : (-a_{11})$, $b_{22} : (-a_{22})$, $b_{33} : (-a_{33})$; diesen entsprechen die drei Geradenpaare

7. $$(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22})\,x_2^2 - (a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})\,x_3^2 = 0,$$

8. $$-(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22})\,x_1^2 + (a_{33}b_{22} - a_{22}b_{33})\,x_3^2 = 0,$$

9. $$(a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})\,x_1^2 - (a_{33}b_{22} - a_{22}b_{33})\,x_2^2 = 0.$$

Sind die Grössen $(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22})$, $(a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})$, $(a_{33}b_{22} - a_{22}b_{33})$ alle drei positiv, oder alle drei negativ, so sind die drei Geradenpaare 7., 8., 9. real; sind zwei der Grössen positiv (z. B. die erste und zweite) und die dritte negativ, oder sind zwei negativ (die erste und die zweite) und die dritte positiv, so ist ein Geradenpaar real (in beiden Fällen das Geradenpaar 7.), die andern beiden sind conjugirt complex. Wenn ein Kegelschnittbündel ein reales Polarendreieck hat, so ist entweder ein, oder es sind drei reale Geradenpaare im Büschel enthalten.

B. Der Kegelschnitt $\varphi \equiv \lambda_1\varphi' + \lambda_2\varphi'' = 0$ hat eine Doppeltangente, zerfällt also in zwei Punkte, wenn die Determinante verschwindet

10. $$\begin{vmatrix} \lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\beta_{22}, & \lambda_1\alpha_{12} + \lambda_2\beta_{12}, & \lambda_1\alpha_{13} + \lambda_2\beta_{12} \\ \lambda_1\alpha_{12} + \lambda_2\beta_{11}, & \lambda_1\alpha_{22} + \lambda_2\beta_{22}, & \lambda_1\alpha_{23} + \lambda_2\beta_{23} \\ \lambda_1\alpha_{13} + \lambda_2\beta_{13}, & \lambda_1\alpha_{23} + \lambda_2\beta_{23}, & \lambda_1\alpha_{33} + \lambda_2\beta_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Verhältnisse der Coordinaten der Doppeltangente bestimmen sich aus zweien der drei Gleichungen:

11. $$(\lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\beta_{11})\,u_1 + (\lambda_1\alpha_{11} + \lambda_1\beta_{12})\,u_2 + (\lambda_1\alpha_{13} + \lambda_2\beta_{13})\,u_3 = 0,$$

12. $$(\lambda_1\alpha_{12} + \lambda_2\beta_{12})\,u_1 + (\lambda_1\alpha_{22} + \lambda_2\beta_{22})\,u_2 + (\lambda_1\alpha_{23} + \lambda_2\beta_{23})\,u_3 = 0,$$

13. $$(\lambda_1\alpha_{13} + \lambda_2\beta_{13})\,n_1 + (\lambda_1\alpha_{23} + \lambda_2\beta_{23})\,u_2 + (\lambda_1\alpha_{33} + \lambda_2\beta_{33})\,u_3 = 0.$$

Ersetzt man $\lambda_2 : \lambda_1$ durch $-\mu$, so werden die Determinante 10. und die Gleichungen 11., 12., 13. mit der Determinante M und mit den Gleichungen 5., 6., 7. in § 13, No. 25 identisch. Hieraus folgt: Unter den Kegelschnitten einer Schaar giebt es drei Punktpaare; die Doppeltangenten derselben sind die Seiten des den Kegelschnitten der Schaar gemeinsamen Polarendreiecks.

Ferner folgt ähnlich wie in A: Ist das ganze Polarendreieck real, so sind entweder alle drei Punktpaare real, oder es ist eines real und die andern beiden sind conjugirt complex.

6. A. Mögen nun die drei Geradenpaare, welche einem Kegelschnittbüschel angehören, aus realen Geraden bestehen, oder mögen imaginäre unter ihnen sein, in jedem Falle schneiden sich zwei dieser drei Paare in vier realen oder imaginären Punkten; folglich gehen die Geraden des andern Paares und alle Kegelschnitte des Büschels durch dieselben vier Punkte. Heben wir insbesondere irgend zwei Kegelschnitte des Büschels hervor, so haben wir den Satz: Zwei Kegelschnitte haben vier reale oder complexe Schnittpunkte.

Sind vier reale Schnittpunkte vorhanden, so hat das zu diesen beiden Kegelschnitten gehörige Büschel drei reale Geradenpaare, nämlich die drei Paare Gegenseiten des durch die vier Schnittpunkte bestimmten vollständigen Vierecks, — und ein reales Polarendreieck, dessen Ecken die Diagonalpunkte dieses Vierecks sind.

Um über die Realität der zum Büschel der beiden Kegelschnitte gehörenden Geradenpaare und über die complexen Schnittpunkte weiter zu entscheiden, wollen wir uns die Gleichungen der Kegelschnitte f' und f'' auf ein rechtwinkeliges System bezogen denken. Die Gleichung von f' sei

$$f' \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + k = 0.$$

Wird dieser Gleichung durch den imaginären Punkt genügt, der die Coordinaten hat $x = \xi + i\mathfrak{x}$, $y = \eta + i\mathfrak{y}$, so ist

$$x^2 = \xi^2 + 2i\xi\mathfrak{x}, \quad xy = \xi\eta - \mathfrak{x}\mathfrak{y} + i(\mathfrak{x}\eta + \xi\mathfrak{y}), \quad y^2 = \eta^2 - \mathfrak{y}^2 + 2i\eta\mathfrak{y}.$$

Setzt man diese Werthe in $f' = 0$ ein, so erhält man:

$$a(\xi^2 - \mathfrak{x}^2) + 2b(\xi\eta - \mathfrak{x}\mathfrak{y}) + c(\eta^2 - \mathfrak{y}^2) + 2d\xi + 2e\eta + k$$
$$+ 2i(a\xi\mathfrak{x} + b\eta\mathfrak{x} + b\xi\mathfrak{y} + c\eta\mathfrak{y} + d\mathfrak{x} + e\mathfrak{y}) = 0.$$

Also sind die beiden Gleichungen einzeln erfüllt

1. $a(\xi^2 - \mathfrak{x}^2) = 2b(\xi\eta - \mathfrak{x}\mathfrak{y}) + c(\eta^2 - \mathfrak{y}^2) + 2d\xi + 2e\eta + k = 0,$

2. $a\xi\mathfrak{x} + b(\eta\mathfrak{x} + \xi\mathfrak{y}) + c\eta\mathfrak{y} + d\mathfrak{x} + e\mathfrak{y} = 0.$

Ersetzt man hierin $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ durch $-\mathfrak{x}$ und $-\mathfrak{y}$, so bleibt die Gleichung 1. ungeändert, und in 2. wechseln alle Glieder die Vorzeichen. Wir schliessen daher: Wenn ein complexer Punkt auf einem Kegelschnitte liegt, so liegt auch der conjugirt complexe auf dem Kegelschnitte. Hieraus folgt weiter: Die complexen Schnittpunkte zweier Kegelschnitte sind paarweise conjugirt.

Da nun zwei conjugirt complexe Punkte immer auf einer realen Geraden enthalten sind, so folgt: Sind die vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte complex, so zerfallen sie in zwei Paar conjugirte und das Büschel der beiden Kegelschnitte enthält ein reales Geradenpaar.

Bestehen die vier Schnittpunkte aus den beiden Paaren conjugirt complexer Punkte P_1P_1' und P_2P_2', welche die Coordinaten haben $\xi_1 + i\mathfrak{x}_1$, $\eta_1 + i\mathfrak{y}_1$, $\xi_1 - i\mathfrak{x}_1$, $\eta_1 - i\mathfrak{y}_1$; $\xi_2 + i\mathfrak{x}_2$, $\eta_2 + i\mathfrak{y}_2$; $\xi_2 - i\mathfrak{x}_2$, $\eta_2 - i\mathfrak{y}_2$, so sind die Geraden P_1P_1' und P_2P_2' real; die Gleichungen der Geraden P_1P_2 und $P_1'P_2'$ sind:

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \xi_1 + i\mathfrak{x}_1, & \eta_1 + i\mathfrak{y}_1, & 1 \\ \xi_2 + i\mathfrak{x}_2, & \eta_2 + i\mathfrak{y}_2, & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \xi_1 - i\mathfrak{x}_1, & \eta_1 - i\mathfrak{y}_1, & 1 \\ \xi_2 - i\mathfrak{x}_2, & \eta_2 - i\mathfrak{y}_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Geraden sind, wie man sieht, conjugirt complex, haben also einen realen Schnittpunkt. Ebenso sind die Geraden P_1P_2' und P_2P_1' conjugirt complex, denn sie haben die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \xi_1 + i\mathfrak{x}_1, & \eta_1 + i\mathfrak{y}_1, & 1 \\ \xi_2 + i\mathfrak{x}_2, & \eta_2 + i\mathfrak{y}_2, & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \xi_1 - i\mathfrak{x}_1, & \eta_1 - i\mathfrak{y}_1, & 1 \\ \xi_2 - i\mathfrak{x}_2, & \eta_2 - i\mathfrak{y}_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir schliessen hieraus: Wenn zwei Kegelschnitte keinen realen Schnittpunkt haben, so sind alle drei Ecken des gemeinsamen Polarendreiecks real. Hieraus und aus § 13, 24 A folgt weiter: Haben zwei Kegelschnitte ein reales Polarendreieck, so haben sie entweder vier reale Schnittpunkte oder zwei Paare conjugirt complexe.

Ist nur eine Ecke des Polarendreiecks real und haben die Kegelschnitte einen realen Schnittpunkt, so haben sie (§ 13, No. 14 A) noch einen realen Schnittpunkt; beide Schnittpunkte liegen auf einer durch die reale Ecke des Polarendreiecks gehenden Geraden, und diese Gerade ist ein Theil eines in zwei Gerade zerfallenden Kegelschnitts. Ein dritter realer Schnittpunkt kann nicht existiren, da sonst noch ein zu diesen gehöriger vierter, also ein reales Polarendreieck vorhanden wäre, im Widerspruche mit der Voraussetzung.

Da die Gleichung des Geradenpaares, das zu dem Büschel der beiden Kegelschnitte gehört, und den realen Eckpunkt des Polarendreiecks zum Doppelpunkte hat, reale Coefficienten hat und im Falle zweier realen Schnittpunkte eine Gerade des Paares real ist, so folgt, dass auch die andere Gerade real ist. Die andern beiden Geradenpaare können reale Gerade nicht enthalten, da dieselben weitere reale Schnittpunkte mit dem realen Geradenpaare erzeugen würden.

Wenn also nur eine Ecke des zwei Kegelschnitten gemeinsamen Polarendreiecks real ist, so haben die beiden Kegelschnitte zwei reale Schnittpunkte. In jedem Falle ist in einem Kegelschnittbüschel wenigstens **ein** reales Geradenpaar enthalten.

B. Ebenso ergeben sich die dual entsprechenden Sätze: Zwei Kegelschnitte haben vier reale oder paarweis conjugirt complexe gemeinsame Tangenten. — Wenn die vier gemeinsamen Tangenten real sind, so enthält die zu den beiden Kegelschnitten gehörige Schaar drei Paare realer Punkte, die Gegenecken des von den vier Geraden gebildeten vollständigen Vierseits, und ein reales Polarendreieck, dessen Seiten die Diagonalen dieses Vierseits sind. — Haben die beiden Kegelschnitte ein reales Polarendreieck, so haben sie entweder vier reale gemeinsame Tangenten, oder keine reale gemeinsame Tangente. Ist nur eine Seite des Polarendreiecks real, so haben die Kegelschnitte zwei reale gemeinsame Tangenten, die sich auf der realen Seite des Polarendreiecks schneiden. In jedem Falle gehört zu der von zwei Kegelschnitten bestimmten Schaar ein reales Punktpaar.

7. A. Die Kegelschnitte eines Büschels schneiden jede Gerade in Punktpaaren einer quadratischen Involution.

Beweis. Nimmt man die Gerade zur Seite A_2A_3 eines Coordinatendreiecks, so bestimmen sich die Coordinaten der Schnittpunkte des Kegelschnitts $f \equiv \lambda_1 f' + \lambda_2 f'' = 0$ und der Achse A_2A_3 aus den Gleichungen

$$x_1 = 0, \quad f = 0, \quad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1,$$

also aus den beiden Gleichungen

1. $\lambda_1(a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2) + \lambda_2(b_{22}x_2^2 + 2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2) = 0.$

2. $$\frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$

Setzt man aus der zweiten in die erste

$$\frac{x_3}{h_3} = 1 - \frac{x_2}{h_2},$$

so geben die trinomischen Faktoren von λ_1 und λ_2 quadratische Functionen von x_2 allein; bezeichnet man den Abstand eines Punktes P der Geraden A_2A_3 von A_2 mit z, und den Winkel $A_2A_3A_1$ mit α, so kann man durch die Substitution $x_2 = z\,sin\,\alpha$ die Faktoren von λ_1 und λ_2 in quadratische Functionen von z überführen. Ersetzt man nun in § 7, No. 1 und 2 die Grössen λ, r_1, r_2 durch z, λ_1, λ_2, so folgt die Richtigkeit des behaupteten Satzes.

B. Die Tangentenpaare, die von einem Punkte aus an die Kegelschnitte einer Schaar gelegt werden, bilden eine quadratische Involution.

Wählt man den Punkt als die Ecke A_1 eines Coordinatendreiecks, so erhält man die Coordinaten der von A_1 an den Kegelschnitt $\varphi \equiv \lambda_1\varphi' + \lambda_2\varphi'' = 0$ gelegten Tangenten aus den Gleichungen

3. $(\lambda_1\alpha_{22} + \lambda_2\beta_{22})u_2^2 + 2(\lambda_1\alpha_{23} + \lambda_2\beta_{23})u_2u_3 + (\lambda_1\alpha_{33} + \lambda_2\beta_{33})u_3^2 = 0,$

4. $$\frac{\rho_2 u_2}{h_2} + \frac{\rho_3 u_3}{h_3} = 1.$$

Ersetzt man in 3. u_2 und u_3 durch $r_2 : r$ und $r_3 : r$ (§ 12, No. 10, 1), so erhält man die Gleichung

5. $\lambda_1(\alpha_{22}r_2^2 + 2\alpha_{23}r_2r_3 + \alpha_{33}r_3^2) + \lambda_2(\beta_{22}r_2^2 + 2\beta_{23}r_2r_3 + \beta_{33}r_3^2) = 0.$

Bezeichnet man die Strecken A_1A_2 und A_1A_3 mit g_3 und g_2, und die Winkel g_3T und g_3g_2 mit ψ und α, so hat man

6. $r_2 = g_3\,sin\psi,\quad r_3 = g_2\,sin(\psi - \alpha) = g_2\,cos\alpha \cdot sin\psi - g_2\,sin\alpha \cdot cos\psi.$

Durch diese Substitution geht eine homogene quadratische Function von r_2 und r_3 in eine homogene quadratische Function von $sin\psi$ und $cos\psi$ über. Dividirt man die durch die Formeln 6. transformirte Gleichung 5. durch $cos^2\psi$, so werden die mit λ_1 und λ_2 multiplicirten Trinome quadratische Functionen von $tang\varphi$. Aus § 7, No. 2 ergiebt sich nun die Richtigkeit des Lehrsatzes.

8. A. Von zwei Kegelschnitten f' und f'' sind zwei Schnittpunkte und ausserdem noch von jedem drei Punkte gegeben; man soll die andern beiden Schnittpunkte construiren.

Sind A, B die beiden gegebenen Schnittpunkte und C, D, E die drei andern gegebenen Punkte von f', C_1, D_1, E_1 die des andern Kegelschnitts f'', so ziehe man die Gerade CC_1 und bestimme (nach PASCAL) die beiden andern Schnittpunkte C' und C_1' dieser Geraden und der Kegelschnitte f' und f''. Durch die beiden Paare CC' und C_1C_1' ist nun die quadratische Involution J bestimmt, welche die Schnittpunkte der Geraden CC_1 und des Curvenbüschels $f'f''$ bilden. Zu diesem Curvenbüschel gehört auch das Geradenpaar, welches aus der Geraden AB und der Verbindungslinie T der unbekannten beiden andern Schnittpunkte besteht; dieses Geradenpaar schneidet die Transversale CC_1 in einem Punktpaare der Involution J; da nun von diesem Punktpaare ein Punkt — der Schnittpunkt von CC_1 und AB — bekannt ist, so kann man nach § 7, No. 5 den andern Punkt dieses Paares, d. i. den Schnitt von CC_1 und T, construiren. Nachdem man so einen Punkt von T gefunden hat, zieht man eine andere Transversale, z. B. DD_1, und bestimmt in gleicher Weise ihren Schnittpunkt mit T. Nun hat man T, und es erübrigt nur noch, nach § 11, No. 13 die Schnittpunkte der Geraden T mit f' oder f'' zu construiren; diese sind die gesuchten Punkte.

Die Auflösung bleibt dieselbe, wenn A und B nicht real, sondern conjugirt

complex (etwa die complexen Doppelpunkte einer auf einer gegebenen Geraden liegenden quadratischen Involution) sind.

B. Die Auflösung der dual entsprechenden Aufgabe: Von zwei Kegelschnitten sind zwei gemeinsame Tangenten und ausserdem von jedem drei Tangenten gegeben, man soll die beiden andern gemeinsamen Tangenten construiren, ist an der Hand der soeben mitgetheilten Construction leicht aufzufinden.

9. A. Den Kegelschnitt eines Büschels zu construiren, der durch einen gegebenen Punkt P geht.

α) Hat das Büschel vier reale Träger A, B, C, D, so sind von dem gesuchten Kegelschnitte fünf reale Punkte bekannt, also kann derselbe (nach Pascal) construirt werden.

β) Hat das Büschel nur zwei reale Träger A, B, so bestimme man zunächst nach No. 8 A die Gerade T, auf welcher die beiden conjugirt complexen Träger liegen. Projicirt man drei weitere Punkte C, D, E eines Büschelkegelschnitts f' von A und von B aus auf T, so sind die beiden imaginären Träger die Doppelpunkte der durch die Projectionen $C'D'E'$ und $C''D''E''$ bestimmten projectiven Reihen. Der gesuchte Kegelschnitt kann nun aus den drei realen Punkten P, A, B und den beiden conjugirt complexen nach § 11, No. 14 construirt werden.

γ) Ist keiner der Träger gegeben, so verbinde man den gegebenen Punkt P mit einem gegebenen Punkte A des einen Büschelkegelschnitts f' und bestimme den zweiten Schnittpunkt A_1 der Geraden PA und der Curve f', sowie die beiden Schnittpunkte B und B_1 von PA und einer zweiten Büschelcurve f''. Hierauf construirt man den Punkt Q so, dass das Paar PQ zu der durch die Paare AA_1 und BB_1 bestimmten Involution gehört. Alsdann ist Q ein Punkt des gesuchten Kegelschnitts. Wenn man nun P mit drei weiteren Punkten C, D, E von f' verbindet, und dieselbe Construction wiederholt ausführt, so bekommt man weitere drei Punkte R, S, T des gesuchten Kegelschnitts und kann denselben nun aus den fünf realen Punkten P, Q, R, S, T construiren.

Wenn eine der Geraden, z. B. PA den Kegelschnitt f'' nicht in realen Punkten schneidet, sondern die Schnittpunkte als die conjugirt complexen Doppelpunkte zweier auf einander liegenden projectiven Punktreihen auftreten, so hat man von der Involution, in welcher PA das Kegelschnittbüschel schneidet, ein reales Punktpaar AA_1 und ein conjugirt complexes, und es kommt nun zur Ergänzung dieser Involution darauf an, durch dieses complexe Punktpaar und einen ausserhalb PA liegenden beliebig angenommenen realen Punkt F einen Kreis zu legen.

Sind $GHJ \barwedge G'H'J'$ drei Paare entsprechender Punkte der projectiven Punktreihen, durch deren Doppelpunkte der gesuchte Kreis gehen soll, so verbinde man F mit G, H und J; construire den Kreis, in welchem der auf der Sehne $G'H'$ stehende Peripheriewinkel dem Winkel GFH gleich ist, sowie den Kreis, der HJ zur Sehne und auf derselben einen Peripheriewinkel gleich HFJ hat. Diese beiden Kreise haben ausser H' noch einen realen Punkt K gemein. Da nun in den beiden Büscheln F und K die entsprechenden Winkel gleich sind, so liegen die Punkte F und K und die Schnittpunkte der drei Paar entsprechenden Strahlen auf einem Kreise, und die Strahlen, welche von F und von K aus die Punkte dieses Kreises projiciren, treffen die Gerade GG' in entsprechenden Punkten der beiden projectiven Punktreihen. Also ist dieser Kreis der gesuchte.

B. Die Construction des Kegelschnitts einer Schaar, der eine gegebene Gerade berührt, lässt sich der soeben mitgetheilten leicht nachbilden.

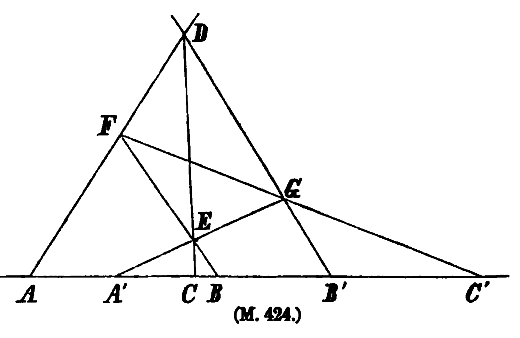
10. A. Wenn eine Gerade T ein Büschelkegelschnitt f berührt, so fallen in den Berührungspunkt die beiden Schnittpunkte von f und T, also zwei Punkte eines Paares der Involution zusammen, welche auf T von den Kegelschnitten des Büschels ausgeschnitten wird, folglich ist der Berührungspunkt ein Doppelpunkt dieser Involution. Umgekehrt: Bestimmt man auf einer Geraden T die Involution, in welcher sie die Kegelschnitte eines Büschels durchsetzt, und legt einen Kegelschnitt f des Büschels durch einen Doppelpunkt Δ dieser Involution, so fällt auch der andere Schnittpunkt von f und T in den Punkt Δ, der Kegelschnitt f berührt also die Gerade T.

Hieraus sieht man, dass es zwei Kegelschnitte (die beide real oder beide imaginär sind) eines Büschels giebt, die eine gegebene Gerade berühren; und zugleich, wie man diese Kegelschnitte construirt.

B. Construirt man in der Strahleninvolution der Tangentenpaare, welche von einem Punkte P an die Kegelschnitte einer Schaar gelegt werden, die Doppelstrahlen, und construirt den Kegelschnitt φ der Schaar, welcher einen dieser Doppelstrahlen Δ berührt, so kann durch P ausser Δ keine weitere Tangente an φ gezogen werden, also ist P der Berührungspunkt, also geht φ durch P. Hieraus folgt: Es giebt zwei Kegelschnitte einer Schaar, die durch einen gegebenen Punkt gehen, sie berühren die Doppelstrahlen der Strahleninvolution, welche die von dem Punkte an die Kegelschnitte der Schaar gelegten Tangentenpaare bilden.

11. Wenn ein Kegelschnittbüschel die Ecken D, F, E, G eines Vierecks zu Trägern hat, so sind die drei Paare Gegenseiten DE und FG, DF und EG, DG und EF besondere Kegelschnitte des Büschels. Hieraus folgt: Die drei Paare Gegenseiten eines vollständigen Vierecks werden von jeder Geraden in drei Punktpaaren einer Involution geschnitten.

Dies ergiebt eine Methode, eine quadratische Involution linear zu ergänzen: Sind A und A', B und B' zwei Paare und soll man den zu C gehörigen Punkt construiren, so verbinde man A, B' und C mit einem Punkte D ausserhalb AB', projicire einen Punkt E der Geraden CD von A' und B aus auf DB' und DA, und durchschneide AB' mit der Geraden FG; dann ist CC' ein Paar der Involution.



(M. 424.)

12. Wir knüpfen hieran die Frage nach den Parabeln, die in einem Kegelschnittbüschel enthalten sind und beschränken uns auf den Fall, dass die Kegelschnitte des Büschels vier reale Schnittpunkte $B_1 B_2 B_3 B_4$ haben. (Vergl. § 11, No. 6).

Wählt man das gemeinsame Polarendreieck zum Achsendreieck, so enthält jeder Kegelschnitt $K \equiv a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0$, der durch einen der vier Punkte B geht, auch die drei andern; werden die Coordinaten von B_i mit $x_{1i}\,x_{2i}\,x_{3i}$ bezeichnet, so folgt daher für diese Coordinaten die Proportion:

$$x_{11}^2 : x_{21}^2 : x_{31}^2 = x_{12}^2 : x_{22}^2 : x_{32}^2 = x_{13}^2 : x_{23}^2 : x_{33}^2 = x_{14}^2 : x_{24}^2 : x_{34}^2 .$$

Bezeichnet man die positiven Wurzeln aus x_{11}^2, x_{21}^2, x_{31}^2 der Reihe nach mit b_1, b_2, b_3, so haben daher die Coordinaten der Punkte B_i die Werthe

$$1.\quad x_1 = b_1, \quad x_2 = b_2, \quad x_3 = b_3,$$

$$2.\quad x_1 = \frac{b_1}{\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_2 = \frac{b_2}{\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_3 = \frac{-b_3}{\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3}},$$

$$3.\quad x_1 = \frac{b_1}{\frac{b_1}{h_2} - \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_2 = \frac{-b_2}{\frac{b_1}{h_1} - \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_3 = \frac{b_3}{\frac{b_1}{h_1} - \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}},$$

$$4.\quad x_1 = \frac{-b_1}{-\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_2 = \frac{b_2}{-\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_3 = \frac{b_3}{-\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}}.$$

Die erste Coordinatengruppe enthält lauter positive Werthe; von jedem Viereck liegt also ein Eckpunkt im Innern des Dreiecks der Diagonalpunkte. Dieser Punkt werde mit B_1 bezeichnet.

Die Gleichungen der drei Paare Gegenseiten des Vierecks $B_1 B_2 B_3 B_4$ sind

$$\begin{aligned} b_3x_2 - b_2x_3 &= 0, & b_3x_2 + b_2x_3 &= 0, \\ b_1x_3 - b_3x_1 &= 0, & b_1x_3 + b_3x_1 &= 0, \\ b_2x_1 - b_1x_2 &= 0, & b_2x_1 + b_1x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Als Gebilde zweiter Ordnung haben das erste und das zweite Paar die Gleichungen:

$$(b_3x_2 - b_2x_3)(b_3x_2 + b_2x_3) \equiv b_3^2x_2^2 - b_2^2x_3^2 = 0,$$
$$(b_1x_3 - b_3x_1)(b_1x_3 + b_3x_1) \equiv b_1^2x_3^2 - b_3^2x_1^2 = 0.$$

Die Gleichung jedes durch die Punkte B gehenden Kegelschnitts wird daher in der Form erhalten: $(b_3^2x_2^2 - b_2^2x_3^2) + \lambda(b_1^2x_3^2 - b_3^2x_1^2) = 0$, oder geordnet

$$-\lambda b_3^2x_1^2 + b_3^2x_2^2 + (\lambda b_1^2 - b_2^2)x_3^2 = 0.$$

Ist diese Curve eine Parabel, so ist (§ 13, No. 18 und 23):

$$-\frac{1}{\lambda b_3^2 h_1^2} + \frac{1}{b_3^2 h_2^2} + \frac{1}{(\lambda b_1^2 - b_2^2)h_3^2} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich für λ die quadratische Gleichung

$$1.\quad \frac{b_1^2}{h_2^2}\lambda^2 - \left(\frac{b_1^2}{h_1^2} + \frac{b_2^2}{h_2^2} - \frac{b_3^2}{h_3^2}\right)\lambda + \frac{b_2^2}{h_1^2} = 0.$$

Je nachdem diese Gleichung zwei reale, eine reale, oder zwei conjugirt complexe Wurzeln für λ liefert, hat das Büschel zwei Parabeln, eine Parabel oder keine Parabel.

Die Gleichung hat complexe Wurzeln, wenn

$$\left(\frac{b_1^2}{h_1^2} + \frac{b_2^2}{h_2^2} - \frac{b_3^2}{h_3^2}\right)^2 - 4\frac{b_1^2}{h_2^2}\cdot\frac{b_2^2}{h_1^2} < 0.$$

Diese Differenz ist bekanntlich das Produkt aus vier linearen Faktoren; man erhält somit als Bedingung für complexe Wurzeln:

$$2.\quad \left(\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}\right)\left(\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3}\right)\left(\frac{b_1}{h_1} - \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}\right)\left(-\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}\right) > 0.$$

Der erste Faktor ist der positiven Einheit gleich. Von den andern drei Faktoren haben je zwei eine positive Summe, es können also nicht zwei von ihnen negativ sein; die Bedingung 2. erfordert daher, dass jedes der Trinome

$$\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3} \equiv 1 - \frac{2b_3}{h_3},$$
$$\frac{b_1}{h_1} - \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3} \equiv 1 - \frac{2b_2}{h_2},$$
$$-\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3} \equiv 1 - \frac{2b_1}{h_1},$$

positiv ist, dass mithin b_1, b_2, b_3 kleiner sind, als $\frac{1}{2}h_1$, $\frac{1}{2}h_2$, $\frac{1}{2}h_3$

Man überzeugt sich leicht, dass in diesem Falle die drei andern Punkte B_2, B_3, B_4 in den an den Seiten des Achsendreiecks anliegenden zweieckigen Feldern sich befinden, und dass B_1 im Innern des Dreiecks $B_2 B_3 B_4$ liegt. Auch sieht man leicht, dass, wenn ein Eckpunkt B_1 eines Vierecks im Innern des Dreiecks der drei andern liegt, dieser Punkt positive Coordinaten in Bezug auf das Dreieck der Diagonalpunkte hat, und daher die Gleichung 2. erfüllt ist. Wir schliessen daher: Durch vier im Endlichen liegende Punkte lassen sich nur dann zwei Parabeln legen, wenn keiner sich im Dreiecke der drei andern befindet.

Der Fall, dass durch die vier Punkte nur eine Parabel möglich ist, tritt ein, wenn $\left(\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3}\right)\left(\frac{b_1}{h_1} - \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}\right)\left(-\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}\right) = 0$, also wenn eine von den drei Gleichungen gilt:

$$b_1 = \tfrac{1}{2}h_1, \quad b_2 = \tfrac{1}{2}h_2, \quad b_3 = \tfrac{1}{2}h_3.$$

Wie man leicht sieht, ist dann einer der Punkte $B_2\, B_3\, B_4$ unendlich fern. Durch drei im Endlichen und einen (in bestimmter Richtung) unendlich fern liegenden Punkt ist eine Parabel eindeutig bestimmt.

13. Sind $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = \gamma_1 K_1 + \gamma_2 K_2 = 0$ die Gleichungen dreier Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schaar, so kann man bei geeigneter Wahl des Verhältnisses $r_1 : r_2$ die Gleichung jedes vierten Kegelschnitts des Büschels oder der Schaar in der Form schreiben $K \equiv r_1\gamma_1 K_1 + r_2\gamma_2 K_2 = 0$.

Der Quotient $r_1 : r_2$ heisst das Doppelverhältniss der vier Kegelschnitte $K_1 K_2 K_3 K_4$ und wird durch $(K_1 K_2 K_3 K)$ bezeichnet.

Auf Grund dieser Definition können Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaaren in den Kreis projectiver Gebilde gezogen werden: Sind $R_1 R_2 R_3$ und $R_1' R_2' R_3'$ die Gleichungen für je drei Punkte einer Geraden, oder Strahlen eines Büschels, oder Punktepaare einer Punktinvolution, oder Strahlenpaare einer Strahleninvolution, oder Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schaar, und werden je zwei Elemente (Punkte, Strahlen, Punktpaare, Strahlenpaare, Kegelschnitte) der beiden Gebilde auf einander bezogen, für welche $(R_1 R_2 R_3 R) = (R_1' R_2' R_3' R')$, so heissen die beiden Gebilde projectiv.

Beachtet man die Gleichungen der Polaren eines Punktes für die Kegelschnitte eines Büschels $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$, $K = 0$, so findet man sofort: Das Polarenbüschel, welches die Polaren eines Punktes in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels bilden, ist mit dem Kegelschnittbüschel projectiv. Insbesondere: Das Büschel der Tangenten, welche die Kegelschnitte eines Büschels in einem Träger des Büschels berühren, ist mit dem Kegelschnittbüschel projectiv. Ferner folgt aus No. 7: Ein Kegelschnittbüschel und alle die Punktinvolutionen, in denen das Büschel von den Geraden einer Ebene geschnitten wird, sind projectiv, und zwar entspricht einem Kegelschnitt des Büschels das Punktepaar jeder Involution, das auf dem Kegelschnitte liegt.

Die Punktreihe, in welcher eine durch einen Träger gehende Gerade die Kegelschnitte eines Büschels schneidet, ist mit dem Büschel projectiv.

Ebenso findet man: Die geradlinige Punktreihe, welche die Pole einer Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar bilden,

ist mit der Schaar projectiv. — Die Reihe der Punkte, in welchen die Kegelschnitte einer Schaar einen Träger der Schaar berühren, ist mit der Schaar projectiv. — Die Strahleninvolutionen, welche von den Tangentenpaaren gebildet werden, die man von den Punkten der Ebene an die Kegelschnitte einer Schaar legt, sind mit der Schaar projectiv. — Das Tangentenbüschel, welches von einem Punkte eines Trägers an die Kegelschnitte einer Schaar gelegt werden kann, ist mit der Schaar projectiv.

14. Die Aufgabe: Drei Paare entsprechende Elemente einer Punktreihe und eines projectiven Kegelschnittbüschels sind gegeben; man soll zu einem Punkte der Reihe den entsprechenden Kegelschnitt des Büschels construiren — wird auf folgendem Wege gelöst.

Es seien $P_1 P_2 P_3$ die gegebenen Punkte, und $K_1 K_2 K_3$ die gegebenen entsprechenden Kegelschnitte.

α) Ist ein realer Träger des Büschels bekannt, so ziehe man durch denselben eine Gerade und bestimme die Punkte $Q_1 Q_2 Q_3$, in welchen diese Gerade die Kegelschnitte $K_1 K_2 K_3$ schneidet. Hierauf construire man den Punkt Q der Punktreihe $Q_1 Q_2 Q_3$ so, dass $(Q_1 Q_2 Q_3 Q) = (P_1 P_2 P_3 P)$. Dann ist Q ein Punkt des gesuchten Kegelschnitts. Führt man diese Construction an vier durch den Träger gezogenen Geraden aus, so hat man mit dem Träger fünf reale Punkte und kann dann nach Pascal weiter construiren.

β) Ist kein realer Träger bekannt, so construire man die Polaren $T_1 T_2 T_3$ eines beliebigen Punktes A in Bezug auf die Kegelschnitte $K_1 K_2 K_3$ und construire den Strahl T so, dass $(T_1 T_2 T_3 T) = (P_1 P_2 P_3 P)$. Ferner construire man die Schnittpunktpaare $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$ einer durch A gehenden Geraden a und der Kegelschnitte K_1 und K_2. Man hat nun das Punktepaar XY der durch $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$ bestimmten Involution aufzusuchen, das zu dem Punkte A und zu dem Schnittpunkte A' der Geraden a und T harmonisch liegt; dieses Paar ist der Durchschnitt der Geraden a und des gesuchten Kegelschnitts.

Alle Paare, welche zu AA' harmonisch sind, bilden eine Involution, welche A und A' zu Asymptotenpunkten hat. Construirt man zwei in realen Punkten D und E sich schneidende Kreise, welche a in A und A' berühren, so bestimmen dieselben das Kreisbüschel, welches die Gerade a in den Punktepaaren der zu A und A' gehörenden Involution schneidet. Construirt man ferner zwei Kreise, von denen einer durch $B_1 C_1$, der andere durch $B_2 C_2$ geht, und die beide den Punkt D enthalten, so haben diese Kreise noch einen realen Punkt F gemein. Der durch die drei Punkte D, E, F bestimmte Kreis trifft alsdann a in dem gesuchten Punktepaare XY. Wiederholt man diese Construction an noch zwei durch A gehenden Geraden, so hat man dann sechs reale Punkte des gesuchten Kegelschnitts.

Die Auflösung der dual entsprechenden Aufgabe: Von einem Strahlenbüschel und einer projectiven Kegelschnittschaar sind drei Strahlen und die entsprechenden Kegelschnitte gegeben; man soll den Kegelschnitt construiren, der einem Strahle des Büschels entspricht — lässt sich der soeben mitgetheilten Construction leicht nachbilden.

15. Wir schliessen noch einige Betrachtungen über das System von Kegelschnitten einer Ebene an, die zwei Punkte gemein haben, sowie über das dual entsprechende System von Kegelschnitten, die zwei Tangenten gemein haben. Die Gesammtheit der Kegelschnitte einer Ebene, die zwei Punkte gemein haben,

wollen wir als ein System mit zwei Trägern, oder kürzer als ein zweipunktiges System (von Kegelschnitten) bezeichnen.

Die Kreise einer Ebene haben die beiden imaginären Kreispunkte gemein, bilden also einen besonderen Fall eines zweipunktigen Systems.

Die Gerade, welche die realen oder conjugirt complexen Grundpunkte enthält, heisse die Achse des Systems. Je zwei Kegelschnitte des Systems haben ausser der Achse noch eine gemeinsame Secante; sie mag die zweite Secante der beiden Kegelschnitte heissen.

Wählt man die Träger zu Ecken A_2 und A_3 des Coordinatendreiecks, so genügen die Coordinaten $x_1 = x_2 = 0$, und $x_1 = x_3 = 0$ der Gleichung jedes Systemkegelschnitts; also ist die allgemeine Form der Gleichung

1. $$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Soll der Kegelschnitt nicht in die Achse und eine weitere Gerade degeneriren, so muss a_{23} von Null verschieden sein, und man kann der Gleichung die Form geben

2. $$K \equiv a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_1x_3 + x_2x_3 = 0.$$

Ein zweiter Kegelschnitt des Systems habe die Gleichung

3. $$K' \equiv b_1x_1^2 + b_2x_1x_2 + b_3x_1x_3 + x_2x_3 = 0.$$

Hieraus folgt

4. $$K - K_1 \equiv x_1[(a_1 - b_1)x_1 + (a_2 - b_2)x_2 + (a_3 - b_3)x_3] = 0.$$

Hieraus schliessen wir, dass

5. $$L \equiv (a_1 - b_1)x_1 + (a_2 - b_2)x_2 + (a_3 - b_3)x_3 = 0$$

die Gleichung der zweiten Secante von K und K_1 ist.

Die zweiten gemeinsamen Secanten der drei Paare Kegelschnitte des Systems K_1K_2, K_2K_3, K_3K_1 seien $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$; dann ist

$$x_1\mathfrak{L}_1 \equiv K_2 - K_3, \quad x_1\mathfrak{L}_2 \equiv K_3 - K_1, \quad x_1\mathfrak{L}_3 \equiv K_1 - K_2.$$

Hieraus folgt die Identität $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3 = 0$. Dies ergiebt den Satz: Die drei zweiten Secanten dreier Kegelschnitte eines zweipunktigen Systems schneiden sich in einem Punkte.

16. Ein Kegelschnitt K des durch zwei Kegelschnitte K_1K_2 des Systems bestimmten Büschels hat die Gleichung $K \equiv \lambda_1K_1 + \lambda_2K_2 = 0$, wobei wir ohne Beschränkung $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ voraussetzen können.

Die Gleichung irgend eines andern Systemkegelschnitts sei $K' = 0$; für die Gleichung der zweiten Secante L' von K und K' ist alsdann

$$x_1L' \equiv K - K' = 0.$$

Nun ist $K \equiv \lambda_1K_1 + \lambda_2K_2$; da $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, so kann man für K' schreiben $(\lambda_1 + \lambda_2)K'$; hierdurch erhält man

$$x_1L' \equiv \lambda_1(K_1 - K') + \lambda_2(K_2 - K').$$

Sind $L_1 = 0$ und $L_2 = 0$ die zweiten Secanten von K_1K' und K_2K', so ist daher

$$L' \equiv \lambda_1L_1 + \lambda_2L_2.$$

Hieraus folgt, dass der Schnittpunkt der Geraden L_1 und L_2 auch auf L' liegt. Da nun der Schnittpunkt von L_1 und L_2 nach No. 14 auf der zweiten Secante des durch die Kegelschnitte K_1 und K_2 bestimmten Büschels (d. i. auf der zweiten Secante von K_1 und K_2) liegt, so haben wir den Satz: Ein Büschel in einem zweipunktigen Kegelschnittsysteme wird von einem andern Systemkegelschnitte K' so geschnitten, dass die zweiten Secanten von K' und den Kegelschnitten des Büschels sich in einem Punkte der zweiten Secante des Büschels treffen.

17. Der soeben entwickelte Satz lehrt die Construction der Kegelschnitte eines Büschels, die einen Kegelschnitt K' berühren, der durch zwei Träger des Büschels geht. Es seien $ABCD$ die Träger des Büschels, und K' gehe durch A und B. Man construire die zweite Secante L eines Büschelkegelschnitts und des Kegelschnitts K'; vom Schnittpunkte der Geraden L und CD aus lege man Tangenten an K'; und construire die Büschelkegelschnitte, welche durch die Berührungspunkte dieser Tangenten gehen.

18. Die Gesammtheit der Kegelschnitte einer Ebene, die zwei gemeinsame Tangenten haben, heisse ein System mit zwei Grundlinien, oder kürzer ein zweiliniges System. In ähnlicher Weise, wie die analogen Sätze für das zweipunktige System, findet man für das zweilinige System:

Legt man ein Coordinatendreieck zu Grunde, in welchem die gemeinsamen Tangenten die durch A_1 gehenden Seiten sind, so ist die Gleichung eines Systemkegelschnitts $\mathfrak{K} \equiv \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_1 u_2 + \alpha_3 u_1 u_3 + u_2 u_3 = 0$.

Die Gleichung des Schnittpunktes des zweiten gemeinsamen Tangentenpaares M der Systemcurven $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ist

$$M \equiv \frac{1}{u_1}(\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2) = 0.$$

In einem zweilinigen System liegen die drei Schnittpunkte der drei zweiten gemeinsamen Tangentenpaare dreier Kegelschnitte auf einer Geraden; die Schnittpunkte der zweiten gemeinsamen Tangentenpaare eines Kegelschnitts mit den Kegelschnitten einer Schaar liegen auf einer Geraden, die durch den Schnittpunkt des zweiten gemeinsamen Tangentenpaares der Schaar geht.

Mit Hülfe dieser Sätze kann man die beiden Kegelschnitte einer Schaar finden, die einen Kegelschnitt tangiren, der von zwei Grundlinien der Schaar berührt wird.

§ 15. Curven dritter Ordnung. Construction derselben aus neun gegebenen Punkten.

1. Wir geben in den folgenden Abschnitten eine Reihe von Entwicklungen aus der Geometrie der Curven dritter Ordnung, die sich an das bisher Mitgetheilte zunächst anschliessen.

Unter einer Curve $n$ter Ordnung versteht man eine Curve, deren Gleichung in Punktcoordinaten vom Grade n ist.

Die allgemeine Form der Gleichung einer Curve dritter Ordnung in Bezug auf ein homogenes Coordinatensystem ist

$$f \equiv a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_2 + 3a_{113}x_1^2x_3 + 3a_{122}x_1x_2^2 + 6a_{123}x_1x_2x_3 \\ + 3a_{133}x_1x_3^2 + a_{222}x_2^3 + 3a_{223}x_2^2x_3 + 3a_{233}x_2x_3^2 + a_{333}x_3^3 = 0.$$

Bildet man die Summe $\Sigma a_{ikl}x_ix_kx_l$, indem man für jeden der Indices i, k, l der Reihe nach die Nummern 1, 2, 3 nimmt, und setzt dann die Coefficienten a_{ikl} einander gleich, die sich nur durch die Anordnung der Indices unterscheiden, so erhält man die Function f; es mag daher unter dieser Voraussetzung die Function f durch die Summe $\Sigma a_{ikl}x_ix_kx_l$ bezeichnet werden.

Soll eine Curve dritter Ordnung durch einen gegebenen Punkt P' gehen, so sind die Coefficienten a_{ikl} so zu wählen, dass der Gleichung $\Sigma a_{ikl}x_i'x_k'x_l' = 0$ genügt wird; dies ist eine homogene lineare Gleichung für die zehn Grössen a_{ikl}. Durch neun solcher Gleichungen sind die Verhältnisse

$$a_{111} : a_{112} : a_{113} : a_{122} : a_{123} : {}_{133} : a_{222} : a_{223} : a_{233} : a_{333}$$

bestimmt. Hieraus folgt: Eine Curve dritter Ordnung ist durch neun Punkte bestimmt.

Die Gleichung einer durch neun Punkte P_1, P_2, $P_3 \ldots P_9$ gehenden Curve dritter Ordnung ist die Bedingung dafür, dass der veränderliche Punkt derselben cubischen Gleichung genügt, wie die gegebenen, dass also die zehn Gleichungen vereint sind

$$\begin{aligned} \Sigma a_{ikl} x_i x_k x_l &= 0, \\ \Sigma a_{ikl} x_{i1} x_{k1} x_{l1} &= 0, \\ \Sigma a_{ikl} x_{i2} x_{k2} x_{l2} &= 0, \\ \cdots\cdots & \\ \Sigma a_{ikl} x_{i9} x_{k9} x_{l9} &= 0. \end{aligned}$$

Die Bedingung für den Verein dieser zehn Gleichungen ist

$$f = \begin{vmatrix} x_1^3, & x_1^2 x_2, & x_1^2 x_3, & x_1 x_2^2, & x_1 x_2 x_3, & x_1 x_3^2, & x_2^3, & x_2^2 x_3, & x_2 x_3^2, & x_3^3 \\ x_{11}^3, & x_{11}^2 x_{21}, & \ldots & & & & & & & x_{31}^3 \\ x_{12}^3, & x_{12}^2 x_{22}, & \ldots & & & & & & & x_{32}^3 \\ \ldots & & & & & & & & & \ldots \\ \ldots & & & & & & & & & \ldots \\ x_{19}^3, & x_{19}^2 x_{29}, & \ldots & & & & & & & x_{39}^3 \end{vmatrix} = 0,$$

also ist $f = 0$ die gesuchte Curvengleichung.

2. Die Coordinaten der Punkte, in denen sich zwei Curven dritter Ordnung schneiden, werden auf folgendem Wege ermittelt:

Die Gleichungen der beiden Curven seien

1. $\quad f' = \Sigma a_{ikl} x_i x_k x_l = 0, \qquad$ 2. $\quad f'' = \Sigma b_{ikl} x_i x_k x_l = 0.$

Die Coordinaten der Schnittpunkte von f' und f'' sind die Werthe von x_1, x_2, x_3, die den Gleichungen 1. und 2. und der Gleichung

3. $$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1$$

genügen. Aus 3. zieht man

4. $$x_3 = h_3\left(1 - \frac{x_1}{h_1} - \frac{x_2}{x_2}\right)$$

und setzt dies in 1. und 2. ein; dann erhält man zwei nicht homogene cubische Gleichungen zwischen x_1 und x_2, die nach Potenzen von x_2 geordnet in der Form erscheinen

5. $$F' = A_0 x_2^3 + A_1 x_2^2 + A_2 x_2 + A_3 = 0,$$

6. $$F'' = B_0 x_2^3 + B_1 x_2^2 + B_2 x_2 + B_3 = 0.$$

Hierin sind A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 Ausdrücke von demselben Grade in x_1, den der Index angiebt; A_0 und B_0 sind von den Coordinaten unabhängige Zahlen.

Um aus diesen beiden Gleichungen x_2 zu eliminiren, multipliciren wir die Gleichungen 5. und 6. der Reihe nach mit x_2 und x_2^2 und erhalten so im Ganzen die sechs Gleichungen:

7. $$\begin{aligned} F' &= A_3 + A_2 x_2 + A_1 x_2^2 + A_0 x_2^3 &= 0, \\ x_2 F' &= A_3 x_2 + A_2 x_2^2 + A_1 x_2^3 + A_0 x_2^4 &= 0, \\ x_2^2 F' &= A_3 x_2^2 + A_2 x_2^3 + A_1 x_2^4 + A_0 x_2^5 &= 0, \\ F'' &= B_3 + B_2 x_2 + B_1 x_2^2 + B_0 x_2^3 &= 0, \\ x_2 F'' &= B_3 x_2 + B_2 x_2^2 + B_1 x_2^3 + B_0 x_2^4 &= 0, \\ x_2^2 F'' &= B_3 x_2^2 + B_2 x_2^3 + B_1 x_2^4 + B_0 x_2^5 &= 0. \end{aligned}$$

Betrachtet man diese sechs Gleichungen als homogene lineare Gleichungen der sechs Grössen x_2^0, x_2^1, x_2^2, $\ldots$ x_2^5, so folgt

$$8. \qquad R = \begin{vmatrix} A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ B_3 & B_2 & B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Denkt man sich statt R zunächst eine andere Determinante R', welche aus R hervorgeht, indem man die Nullen jeder Zeile durch Symbole A und B ersetzt, die man derart mit Indices versieht, dass die absteigende Folge der Indices in jeder Zeile nicht gestört wird (so dass man also die Nullen der ersten Zeile der Reihe nach durch A_{-1} und A_{-2}, die der letzten durch B_5 und B_4 ersetzt), und bezeichnet dann das Element, welches der $i$ten Zeile und der $k$ten Colonne angehört, mit c_{ik}, so überzeugt man sich leicht, dass in den Elementenpaaren $c_{ik}c_{rs}$ und $c_{is}c_{rk}$, wenn man die c wieder durch die Elemente von R' ersetzt, die Summe der unteren Indices dieselbe ist; z. B. ist $c_{23}c_{46} = A_2 B_{-2}$, und $c_{26}c_{43} = A_{-1}B_1$, die Summe der Indices also in beiden Paaren gleich Null.

Hieraus folgt sofort, dass in der Determinante R' die Summe der Indices aller Glieder gleich der Indexsumme des Diagonalgliedes, also $= 9$ ist. Diese Thatsache wird nicht geändert, wenn man $A_5 = A_4 = A_{-1} = A_{-2} = B_5 = B_4 = B_{-1} = B_{-2} = 0$ setzt, und dadurch zur Determinante R zurückkehrt. Da nun der Index an A oder B den Grad dieser Funtion in Bezug auf die Coordinate x_1 angiebt, so folgt: Die Determinante R ist vom neunten Grade bezüglich der Unbekannten x_1.

Wählt man nun für x_1 eine der neun Wurzeln der Gleichung $R = 0$, und setzt diese in die beiden Gleichungen $F' = 0$ und $F'' = 0$ ein, so lässt sich zeigen, dass diese beiden Gleichungen wenigstens eine gemeinsame Wurzel x_2 haben. Denn multiplicirt man die Colonnen in R der Reihe nach mit x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3, x_2^4, x_2^5 und addirt die zweite etc. zur ersten Colonne, so erhält man

$$R = \begin{vmatrix} F', & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 \\ x_2 F', & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 \\ x_2^2 F', & 0 & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ F'', & B_2 & B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ x^2 F'', & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 & 0 \\ x_2^2 F'', & 0 & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \end{vmatrix} = PF' + QF''.$$

Hierin sind P und Q quadratische Functionen von x_2. Nimmt man nun für x_1 eine der neun Wurzeln von $R = 0$, sowie für x_2 der Reihe nach die zugehörigen Wurzeln von $F'' = 0$, so wird $R \equiv PF' + QF'' = 0$, und $F'' = 0$, also auch $PF' = 0$. Da nun P vom zweiten Grade ist, so muss für wenigstens eine der drei Wurzeln x_2 die Function F' verschwinden.

Um diese Wurzel zu bestimmen geht man auf die Gleichungen zurück

$$\begin{aligned} F' &\equiv A_3 + A_2 x_2 + A_1 x_2^2 + A_0 x_2^3 &= 0, \\ x_2 F' &\equiv \phantom{A_3 + {}} A_3 x_2 + A_2 x_2^2 + A_1 x_2 + A_0 &= 0, \\ F'' &\equiv B_3 + B_2 x_2 + B_1 x_2^2 + B_0 x_2^3 &= 0, \\ x_2 F'' &\equiv \phantom{B_3 + {}} B_3 x_2 + B_2 x_2^2 + B_1 x_2^3 + B_0 &= 0. \end{aligned}$$

Man schliesst aus ihnen das Verschwinden der Determinante

$$9. \qquad S = \begin{vmatrix} A_3 + A_2 x_2, & A_1 & A_0 & 0 \\ A_3 x_2, & A_2 & A_1 & A_0 \\ B_3 + B_3 x_2, & B_1 & B_2 & 0 \\ B_3 x_2, & B_2 & B_1 & B_0 \end{vmatrix} = S_0 + S_1 x_2 = 0,$$

und erhält die gesuchte Wurzel $x_2 = - S_0 : S_1$.

Haben die Gleichungen F' und F'' zu der Wurzel x_1 zwei gemeinsame Wurzeln für x_2, so verschwindet S identisch, und zur Berechnung der beiden Wurzeln genügen die beiden Gleichungen

$$F' \equiv A_3 + A_2 x_2 + A_1 x_2^2 + A_0 x_2^3 = 0,$$
$$F'' \equiv B_3 + B_2 x_2 + B_1 x_2^2 + B_0 x_2^3 = 0,$$

aus denen man durch Elimination von x_2^3 die quadratische Gleichung erhält

$$A_0(B_3 + B_2 x_2 + B_1 x_2^2) - B_0(A_3 + A_2 x_2^2) = 0,$$

welche die beiden gemeinsamen Wurzeln x_2 ergiebt.

Im Allgemeinen gehört zu jeder Wurzel x_1 der Gleichung $R = 0$ eine gemeinsame Wurzel $x_2 = - S_0 : S_1$ der Gleichungen $F' = 0$ und $F'' = 0$. Wir schliessen hieraus: Zwei Curven dritter Ordnung haben neun Schnittpunkte; davon ist wenigstens einer real.

3. Soll eine Curve III. O. durch acht Punkte $P_1, P_2 \ldots P_8$ gelegt werden, so stelle man die neun Gleichungen auf

$$
\begin{array}{lllllll}
1. & a_{111}x_1^3 & + 3a_{112}x_1^2 x_2 & + 3a_{113}x_1^2 x_3 & + \ldots & + a_{333}x_3^3 & = 0,\\
2. & a_{111}x_{11}^3 & + 3a_{112}x_{11}^2 x_{21} & + 3a_{113}x_{11}^3 x_{31} & + \ldots & + a_{333}x_{31}^3 & = 0,\\
3. & a_{111}x_{12}^3 & + 3a_{111}x_{12}^2 x_{22} & + 3a_{113}x_{12}^2 x_{32} & + \ldots & + a_{333}x_{32}^3 & = 0,\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
9. & a_{111}x_{18}^3 & + 3a_{112}x_{18}^2 x_{28} & + 3a_{113}x_{18}^2 x_{38} & + \ldots & + a_{333}x_{38}^3 & = 0.
\end{array}
$$

Man schliesst hieraus das Verschwinden der Determinante

$$
10.\; f \equiv \begin{vmatrix}
a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2 x_2, & x_1^2 x_3, & x_1 x_2^2, & x_1 x_2 x_3, & x_1 x_3^2, & x_2^3, & x_2^2 x_3, & x_2 x_3^2, & x_3^3\\
a_{111}x_{11}^3 + 3a_{112}x_{11}^2 x_{21}, & x_{11}^2 x_{31}, & \cdots & & & & & & x_{31}^3\\
a_{111}x_{12}^3 + 3a_{112}x_{12}^2 x_{22}, & x_{12}^2 x_{32}, & \cdots & & & & & & x_{32}^2\\
\cdots & & & & & & & & \cdots\\
a_{111}x_{18}^3 + 3a_{112}x_{18}^2 x_{28}, & x_{18}^2 x_{38}, & \cdots & & & & & & x_{38}^3
\end{vmatrix}
$$

Diese Determinante zerfällt in die Summe zweier Determinanten

$$11. \qquad f \equiv a_{111} f' + 3a_{112} f'',$$

wobei f' und f'' die Functionen dritten Grades sind

$$
12. \quad f' \equiv \begin{vmatrix}
x_1^3, & x_1^2 x_3, & x_1^2 x_2, & x_1 x_2 x_3, & x_1 x_3^2, & x_2^3, & x_2^2 x_3, & x_2 x_3^2, & x_3^3\\
x_{11}^3, & x_{11}^2 x_{31}, & \cdots & & & & & & x_{31}^3\\
x_{12}^3, & x_{12}^2 x_{32}, & \cdots & & & & & & x_{32}^3\\
\cdots & & & & & & & & \cdots\\
x_{18}^3, & x_{18}^2 x_{38}, & \cdots & & & & & & x_{38}^3
\end{vmatrix},
$$

$$
13. \quad f'' \equiv \begin{vmatrix}
x_1^2 x_2, & x_1^2 x_3, & x_1^2 x_2, & x_1 x_2 x_3, & x_1 x_3^2, & x_3^2, & x_2^2 x_3, & x_2 x_3^2, & x_3^3\\
x_{11}^2 x_{21}, & x_{11}^2 x_{31}, & \cdots & & & & & & x_{31}^3\\
x_{12}^2 x_{22}, & x_{12}^2 x_{32}, & \cdots & & & & & & \cdots\\
\cdots & & & & & & & & \cdots\\
x_{18}^2 x_{28}, & x_{18}^2 x_{38}, & \cdots & & & & & & x_{38}^2
\end{vmatrix}.
$$

Die Gesammtheit der durch die gegebenen acht Punkte gehenden Curven dritter Ordnung ergiebt sich, wenn man in 11. dem Verhältniss der beiden unbestimmt gebliebenen Coefficienten $a_{111} : 3a_{112}$ alle möglichen Werthe giebt.

Aus 11. folgt, dass alle Punkte, für welche $f' = 0$ und $f'' = 0$ ist, auch auf der Curve $f = 0$ liegen. Nun sind $f' = 0$ und $f'' = 0$ zwei völlig bestimmte Curven dritter Ordnung, haben also neun bestimmte Schnittpunkte. Unter diesen sind die acht gegebenen Punkte, da für jeden derselben die erste Zeile in f' und f'' mit einer der übrigen identisch wird, und daher f' und f'' verschwinden. Wir schliessen daher: Alle Curven dritter Ordnung, die durch acht gegebene Punkte gehen, haben noch einen durch die gegebenen Punkte bestimmten neunten realen Punkt gemein.

Oder: Wenn zwei Curven III. O. A und B durch acht Punkte einer Curve III. O. C gehen, so liegt auch ihr neunter Schnittpunkt auf C.

4. Die Coordinaten der Schnittpunkte der Curve $\Sigma a_{ikl}\, x_i x_k x_l = 0$ und der Geraden $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ sind die Lösungen des Systems

$$1.\ \Sigma\, a_{ikl}\, x_i x_k x_l = 0, \quad 2.\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \quad 3.\ \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$

Aus den Gleichungen 2. und 3. kann man x_2 und x_3 linear durch x_1 ausdrücken. Setzt man diese Werthe in 1., so erhält man eine cubische Gleichung für x_1; zu jeder der drei Wurzeln folgen dann aus 2. und 3. die zugehörigen Werthe von x_2 und x_3. Wir sehen daher: Eine Curve dritter Ordnung hat mit einer Geraden drei Schnittpunkte, von denen wenigstens einer real ist.

Legt man eine Gerade durch zwei Punkte PP_1 einer Curve III. O. C''', so hat dieselbe mit C''' noch einen Punkt Q gemein. Rückt man P_1 an P, bis der Abstand PP_1 verschwindet, so bleibt Q im Allgemeinen in endlicher Entfernung von P_1 und die Gerade PP_1 wird zur Tangente der Curve. Wir finden daher: Eine Gerade, die eine Curve dritter Ordnung in einem Punkte P berührt, schneidet die Curve noch in einem realen Punkte Q. Dieser Punkt Q wird der Begleiter des Punktes P genannt.

Um die Coordinaten der Schnittpunkte einer Curve dritter Ordnung und eines Kegelschnittes zu finden, setze man

$$4. \qquad x_3 = h_3 \left(1 - \frac{x_1}{h_1} - \frac{x_2}{h_2}\right)$$

in die Gleichung der C''' und des Kegelschnitts ein und ordne die nun entstehenden Gleichungen nach Potenzen von x_2. Man erhält aus den Gleichungen der C''' und des Kegelschnitts

$$5. \qquad F \equiv A_3 + A_2 x_2 + A_2 x_2^2 + A_0 x_2^3 = 0,$$

$$6. \qquad G \equiv B_2 + B_1 x_1 + B_0 x_2^2 = 0,$$

wobei für die A und B dasselbe gilt wie in No. 2.

Aus dem Verein der Gleichungen

$$\begin{aligned}
F &\equiv A_3 + A_2 x_2 + A_1 x_2^2 + A_0 x_2^3 &&= 0,\\
x_2 F &\equiv \qquad A_3 x_2 + A_2 x_2^2 + A_1 x_3^3 + A_0 x_2^4 &&= 0,\\
G &\equiv B_2 + B_1 x_2 + B_0 x_2^2 &&= 0,\\
x_2 G &\equiv \qquad B_2 x_2 + B_1 x_2^2 + B_0 x_2^3 &&= 0,\\
x_2^2 G &\equiv \qquad\qquad B_2 x_2^2 + B_1 x_2^3 + B_0 x_2^4 &&= 0,
\end{aligned}$$

folgt das Verschwinden der Determinante

$$7. \qquad R \equiv \begin{vmatrix} A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 \\ 0 & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ B_2 & B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & B_1 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & B_1 & B_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Man sieht leicht, dass R sechsten Grades für x_1 ist.

Multiplicirt man die Colonnen in R von der zweiten an der Reihe nach mit x_2, x_2^2, x_2^3, x_2^4 und addirt sie dann zur ersten, so entsteht

$$8. \qquad R \equiv \begin{vmatrix} F & A_2 & A_1 & A_0 & 0 \\ x_2 F & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ G & B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ x_2 G & B_2 & B_1 & B_0 & 0 \\ x_2^2 G & 0 & B_2 & B_1 & B_0 \end{vmatrix} \equiv PF + QG,$$

wobei P eine lineare Function von x_2 ist. Setzt man nun in $PF + QG$ für x_1 eine Wurzel der Gleichung 7. und alsdann für x_2 der Reihe nach die beiden zugehörigen Wurzeln der Gleichung $G = 0$ ein, so folgt, dass auch $PF = 0$ ist; da nun P linear in x_2 ist, so muss wenigstens für einen der beiden Werthe von x_2 die Function F verschwinden. Diese gemeinsame Wurzel der Gleichungen $F = 0$ und $G = 0$ findet man durch Zusammenstellung der drei Gleichungen

$$\begin{aligned} F &\equiv A_3 + A_2 x_2 + A_1 x_2^2 + A_0 x_2^3 = 0, \\ G &\equiv B_2 + B_1 x_2 + B_0 x_2^2 \qquad\quad = 0, \\ x_2 G &\equiv \qquad B_2 x_2 + B_1 x_2^2 + B_0 x_2^3 = 0, \end{aligned}$$

aus deren Verein sich ergiebt

$$S \equiv \begin{vmatrix} A_3 + A_2 x_2, & A_1 & A_0 \\ B_2 + B_1 x_1, & B_0 & 0 \\ B_2 x_2, & B_1 & B_0 \end{vmatrix} \equiv S_0 + S_1 x_2 = 0.$$

Hieraus folgt die gesuchte Wurzel $x_2 = - S_0 : S_1$. Verschwinden S_0 und S_1 identisch, so haben F und G zu der ausgewählten Wurzel x_1 der Gleichung $R = 0$ zwei zugehörige gemeinsame Wurzeln x_2, nämlich die Wurzeln der Gleichung $G = 0$. Im Allgemeinen gehört zu jeder der sechs Wurzeln x_1 (der Gleichung 7) eine gemeinsame Wurzel $x_2 = - S_0 : S_1$ der Gleichungen $F = 0$ und $G = 0$; berechnet man zu jedem dieser Werthe von x_1 und x_2 noch die Coordinate x_3 nach der Gleichung 4., so hat man die Coordinaten eines Schnittpunktes. Wir haben also gefunden: Eine Curve dritter Ordnung und ein Kegelschnitt haben sechs Schnittpunkte.

5. Schneidet man eine C''' durch eine Gerade T_1 in den Punkten 1, 2, 3 und durch eine andere Gerade T_2 in 4, 5, 6, verbindet diese Punkte paarweis durch die drei Geraden $S_1 S_2 S_3$, und verbindet die dritten Schnittpunkte 7 und 8 der Geraden S_1 und S_2 mit C''' durch eine Gerade T_3, so hat man zwei Curven III. O., nämlich die Geradentripel $T_1 T_2 T_3$ und $S_1 S_2 S_3$, die acht Schnittpunkte, nämlich die Punkte 1 ... 8, auf C''' haben; also liegt auch ihr neunter Schnittpunkt auf C''', d. i. T_3 geht durch den Punkt 9, in welchem C''' von S_3 geschnitten wird. Werden also die Schnittpunkte einer Curve dritter Ordnung und zweier Geraden paarweis durch drei Gerade verbunden, so schneiden diese die Curve in drei Punkten einer Geraden.

Rückt T_2 unendlich nahe an T_1, so werden $S_1 S_2 S_3$ zu Tangenten der Curve, und 7, 8, 9 werden die Begleiter von 1, 2, 3. Liegen drei Punkte einer Curve dritter Ordnung auf einer Geraden, so liegen auch ihre Begleiter auf einer Geraden.

Es kann sich ereignen, dass eine Gerade mit einer Curve dritter Ordnung drei zusammenfallende Punkte gemein hat. Eine solche Gerade heisst Wendetangente der Curve, der Punkt heisst Wendepunkt. Denkt man sich jeden von zwei Wendepunkten in drei unendlich nahe Punkte aufgelöst, so schneiden die drei Geraden, welche diese Punkte paarweis verbinden, die Curve wieder in drei unendlich nahen Punkten; da nun diese auf einer Geraden liegen, so folgt: Eine Gerade, die zwei Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung verbindet, trifft die Curve noch in einem dritten Wendepunkte.

6. Verbindet man die sechs Schnittpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 einer Curve dritter Ordnung C''' und eines Kegelschnitts K paarweis durch drei Gerade $T_1 T_2 T_3$, durchschneidet mit diesen C''' in den Punkten 7 8 9 und verbindet 7 und 8 durch eine Gerade S, so hat man zwei Curven dritter Ordnung, nämlich das Geradentripel $T_1 T_2 T_3$ und den Verein des Kegelschnitts K und der Geraden S,

welche acht Schnittpunkte 1 ... 8 auf C''' haben; also liegt auch der neunte Schnittpunkt auf C''', d. i. S geht durch 9. Wir schliessen daher: Die drei Geraden, welche die sechs Schnittpunkte eines Kegelschnitts und einer Curve III. O. paarweis verbinden, schneiden die Curve in drei Punkten einer Geraden. Wenn ein Kegelschnitt eine Curve III. O. in drei Punkten berührt, so liegen die Begleiter der Berührungspunkte in einer Geraden.

Legt man durch die Schnittpunkte 1, 2, 3 einer Curve III. O. und einer Geraden S drei Gerade $T_1 T_2 T_3$, welche die C''' in den sechs weiteren Punkten 4, 5, 6, 7, 8, 9 treffen, und legt durch die fünf Punkte 4, 5, 6, 7, 8 einen Kegelschnitt K, so haben das Geradentripel $T_1 T_2 T_3$ und der Verein von S und K acht Schnittpunkte 1 ... 8 auf C'''; also liegt auch der neunte auf C''', d. i. K geht durch 9. Hieraus folgen die Sätze: Liegen von den neun Punkten, in welchen eine Curve III. O. von drei Geraden geschnitten wird, drei auf einer Geraden, so liegen die andern sechs auf einem Kegelschnitte. — Zieht man durch jeden dreier auf einer Geraden liegenden Punkte einer C''' eine Tangente an dieselbe, so wird sie in diesen drei Punkten von einem Kegelschnitte berührt. — Zwei durch einen Punkt einer C''' gezogene Gerade und eine durch den Begleiter gehende treffen die C''' in sechs Punkten eines Kegelschnitts. — Drei durch einen Wendepunkt einer C''' gehende Gerade treffen die C''' in sechs Punkten eines Kegelschnitts.

7. Legt man durch vier Punkte $ABCD$ einer C''' einen Kegelschnitt K_1, und verbindet die beiden fernen Schnittpunkte 5, 6 von K_1 und C''' durch eine Gerade T_1; legt man ferner durch $ABCD$ einen andern Kegelschnitt K_2, und zieht die Gerade T_2 durch die ferneren beiden Schnittpunkte 7, 8 der Curven C''' und K_2; so hat man zwei Curven III. O. nämlich den Verein von K_1 und T_2 und den von K_2 und T_1, welche die acht Schnittpunkte $ABCD$ 5 6 7 8 auf der Curve C''' haben; mithin liegt auch ihr neunter Schnittpunkt auf C''', also schneiden sich T_1 und T_2 in einem Punkte E der Curve C'''.

Dieser Punkt E ist nur von K_1 abhängig; denn durch K_1 sind die Punkte 5 und 6, also die Gerade T_1, also ihr weiterer Schnittpunkt E mit C''' bestimmt. Setzt man nun für K_2 nach einander alle Kegelschnitte des Büschels mit den Trägern $ABCD$, so ändert T_2 seine Lage, geht aber immer durch E, beschreibt also ein Strahlbüschel, dessen Träger E auf C''' liegt. Wir haben daher: Liegen die Träger eines Kegelschnittbüschels auf einer Curve III. O. so bilden die Geraden, welche die weiteren zwei Schnittpunkte jedes Büschelkegelschnitts und der Curve verbinden, ein Strahlbüschel, dessen Träger auf der Curve liegt.

8. Die Gleichung jeder Curve III. O. C''', die durch die neun Punkte $ABCD\,5\,6\,7\,8\,E$ geht, ist unter der Form enthalten

1. $$f = a_1 K_1 T_2 + a_2 K_2 T_1 = 0;$$

denn man kann das Verhältniss $a_1 : a_2$ immer so bestimmen, dass der Gleichung $f = 0$ durch einen beliebigen Punkt P_0 der Curve C''' genügt wird, der mit keinem der Punkte $A \ldots E$ zusammenfällt. Bezeichnet man nämlich die Werthe, welche die Functionen $K_2 K_1 T_2 T_1$ für die Coordinaten von P_0 annehmen, mit $K_{20} K_{10} T_{20} T_{10}$, so nehme man $a_1 : a_2 = K_{20} T_{10} : - K_{10} T_{20}$, also

2. $$f = K_{20} T_{10} \cdot K_1 T_2 - K_{10} T_{20} \cdot K_2 T_1 = 0;$$

diese wird durch die Coordinaten von P_0 identisch. Da nun die Curve f mit

C''' zehn Punkte gemein hat, nämlich $ABCD5678EP_0$, so ist f mit C''' identisch.

Irgend ein Kegelschnitt des Büschels $ABCD$ hat die Gleichung

3. $$K = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0.$$

Um die Schnittpunkte dieses Kegelschnitts mit f zu erhalten, ersetzen wir gemäss der Gleichung 3. in der Gleichung 1. die Grösse K_2 durch $-\lambda_1 K_1 : \lambda_2$ und erhalten

5. $$(\lambda_2 a_1 T_2 - \lambda_1 a_2 T_1) K_1 = 0.$$

Die Schnittpunkte von K und f befriedigen also theils $K_1 = 0$, theils die lineare Gleichung

6. $$T = \lambda_2 a_1 T_2 - \lambda_1 a_2 T_1 = 0;$$

die ersteren sind die vier Träger des Kegelschnittbüschels; die letztere Gleichung, welche von den beiden übrigen Schnittpunkten der Curven K und f erfüllt wird, ist die Gleichung eines Strahles des Strahlbüschels $T_2 T_1$, dessen Träger E ist. Aus den Gleichungen 3. und 6. ergiebt sich sofort:

Ein Kegelschnittbüschel, dessen Träger auf einer Curve III. O. liegen, und das Büschel der Strahlen, welche die beiden übrigen Schnittpunkte jedes Büschelkegelschnitts und der Curve III. O. enthalten, sind projectiv.

Jede Curve III. O. kann also auf unendlich vielfache Weise als Ort der Schnittpunkte eines Kegelschnittbüschels und eines projectiven Strahlbüschels angesehen werden. Man kann dabei die Träger des Kegelschnittbüschels $ABCD$ beliebig auf der Curve auswählen; der Träger E des Strahlbüschels ist durch $ABCD$ eindeutig bestimmt.

Der Punkt E heisst der den vier Punkten $ABCD$ gegenüberliegende Punkt.

9. Im vorigen Abschnitte ist gezeigt worden, wie man bei einem Strahlbüschel und dazu projectiven Kegelschnittbüschel zu jedem Strahle T den zugehörigen Kegelschnitt K construirt; und früher wurde gezeigt, wie man die Schnittpunkte eines Strahles mit einem Kegelschnitte findet.

Die Aufgabe, eine Curve dritter Ordnung aus neun gegebenen Punkten zu construiren, ist daher gelöst, sobald man im Stande ist, aus neun gegebenen Punkten einer Curve dritter Ordnung zu vieren derselben den gegenüberliegenden Punkt zu construiren.

Sind $ABCD\,5\,6\,7\,8\,9$ die gegebenen Punkte, und nimmt man wieder $ABCD$ zu Trägern des Kegelschnittbüschels, so kommt es darauf an, zu den fünf Kegelschnitten $K_5 K_6 K_7 K_8 K_9$ des Büschels, die der Reihe nach durch die Punkte 5, 6, 7, 8, 9 gehen, einen Punkt E zu construiren, so dass die Strahlen $T_5 T_6 T_7 T_8 T_9$, die durch E und der Reihe nach durch 5, 6, 7, 8, 9 gehen, mit den Kegelschnitten $K_5 K_6 K_7 K_8 K_9$ projectiv sind. Dies ist erreicht, wenn die beiden Doppelverhältnissgleichheiten bestehen.

1. $$(T_5 T_6 T_7 T_8) = (K_5 K_6 K_7 K_8) \quad \text{und}$$

2. $$(T_5 T_6 T_7 T_9) = (K_5 K_6 K_7 K_9).$$

Das Doppelverhältniss von vier Kegelschnitten eines Büschels ist dem Doppelverhältniss der Tangenten gleich, welche die Kegelschnitte in einem Träger des Büschels berühren. Wir sehen uns daher durch die Forderungen 1. und 2. zunächst vor die Aufgabe gestellt: Den Ort der Punkte zu construiren, von denen aus vier gegebene Punkte α, β, γ, δ durch Strahlen projicirt werden, die das Doppelverhältniss von vier gegebenen Strahlen haben.

Diese Aufgabe haben wir bereits gelöst; wir haben in § 11, No. 15A gefunden, dass dieser Ort ein Kegelschnitt ist, der durch die vier Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ geht. Construirt man nun die Tangenten $S_5 S_6 S_7 S_8 S_9$, welche die Kegelschnitte $K_5 K_6 K_7 K_8 K_9$ z. B. in A berühren, und hierauf den Kegelschnitt H_1, auf dem die Punkte liegen, von denen aus die Punkte 5, 6, 7, 8 unter dem Doppelverhältniss $(S_5 S_6 S_7 S_8)$ projicirt werden; sowie den Kegelschnitt H_2, auf dem die Punkte liegen, von denen aus die Punkte 5, 6, 7, 9 unter dem Doppelverhältniss $(S_5 S_6 S_7 S_9)$ projicirt werden, so geht H_1 durch 5, 6, 7, 8 und H_2 durch 5, 6, 7, 9; H_1 und H_2 haben die drei gegebenen Punkte 5, 6, 7 gemein, und schneiden sich daher in einem vierten realen Punkte; die Strahlen, welche denselben mit 5, 6, 7, 8, 9 verbinden, genügen den beiden Gleichungen

$$(T_5 T_6 T_7 T_8) = (S_5 S_6 S_7 S_8), \quad (T_5 T_6 T_7 T_9) = (S_5 S_6 S_7 S_9),$$

also auch den Gleichungen 1. und 2. Der vierte Schnittpunkt, den die Kegelschnitte H_1 und H_2 ausser den Punkten 5, 6, 7 gemein haben, ist daher der gesuchte Punkt E, der den Punkten A, B, C, D gegenüberliegt.

Hiermit ist die Aufgabe, eine Curve dritter Ordnung aus neun gegebenen Punkten zu construiren, erledigt.

10. Diese Entwicklungen lassen noch einige brauchbare Folgerungen zu:

Der Ort der Punkte, welche vier Punkten $ABCD$ von acht gegebenen Punkten $ABCD\,5\,6\,7\,8$ in allen durch diese acht Punkte gehenden Curven dritter Ordnung gegenüberliegen, ist der Kegelschnitt H_1, von dem aus die Punkte 5, 6, 7, 8 durch Strahlen projicirt werden, die dasselbe Doppelverhältniss haben, wie die durch diese Punkte gehenden Kegelschnitte des Büschels $ABCD$.

Ist 9 der neunte Schnittpunkt aller durch $ABCD\,5\,6\,7\,8$ gehenden Curven dritter Ordnung, sind E und E_1 Punkte des Kegelschnitts H_1, und bezeichnet man die von E aus durch 5, 6 . . . gehenden Strahlen durch E (5, 6 . . .), sowie die durch $ABCD$ nach 5, 6 . . . gehenden Kegelschnitte durch $ABCD$ (5, 6 . . .), so ist $ABCD(5, 6, 7, 8, 9) \barwedge E(5, 6, 7, 8, 9)$, $ABCD(5, 6, 7, 8, 9) \barwedge E'(5, 6, 7, 8, 9)$, mithin hat man die projective Beziehung $E(5, 6, 7, 8, 9) \barwedge E'(5, 6, 7, 8, 9)$, also liegen die Punkte $5\,6\,7\,8\,EE'$ und 9 auf demselben Kegelschnitte. Der neunte Schnittpunkt aller durch acht gegebene Punkte gehenden Curven dritter Ordnung liegt also auf dem Kegelschnitte der Punkte, die vieren von den acht Punkten in allen diesen Curven gegenüberliegen.

Construirt man den Kegelschnitt J der Punkte, die den Punkten A, B, C, 5 in den durch A, B, C, D, 5, 6, 7, 8 gehenden Curven III. O. gegenüberliegen, so liegt der neunte Schnittpunkt 9 dieser Curven auch auf J. Die Kegelschnitte H_1 und J haben die gegebenen Punkte 6, 7, 8 gemein, mithin ist 9 der vierte Schnittpunkt von H_1 und J. Hierdurch ist die Aufgabe gelöst: Den neunten Punkt zu construiren, in dem sich alle durch acht gegebene Punkte gehenden Curven dritter Ordnung schneiden.

11. Die Aufgabe: Von den sechs Schnittpunkten eines Kegelschnitts K und einer Curve dritter Ordnung sind vier gegeben, man soll die beiden andern construiren, ist nun leicht zu lösen. Man sucht den Punkt E, der den vier gegebenen Punkten $ABCD$ in C''' gegenüberliegt, und construirt den Strahl T des Büschels E, der dem Kegelschnitt K des Büschels $ABCD$ entspricht; die Schnittpunkte von T und K sind die gesuchten Punkte.

12. Sind vier Schnittpunkte $ABCD$ zweier Curven dritter Ordnung C''' und Γ''' gegeben, und von jeder noch fünf Punkte, so kann man den Kegelschnitt construiren, auf dem die übrigen fünf Schnittpunkte 5, 6, 7, 8, 9 liegen.

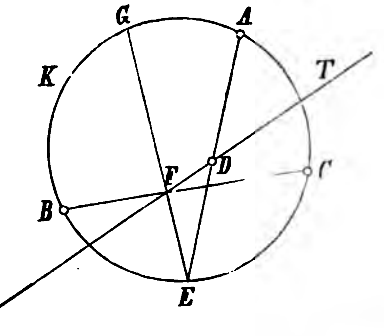
Man construire die Punkte E und E_1, die den Punkten $ABCD$ in C''' und Γ''' gegenüberliegen. Die Strahlbüschel E und E', die mit dem Kegelschnittbüschel die Curven C''' und Γ''' erzeugen, sind projectiv mit dem Kegelschnittbüschel, also auch unter einander projectiv; die Schnittpunkte entsprechender Strahlen bilden also einen Kegelschnitt K. Die Strahlen beider Büschel, die durch 5, 6, 7, 8, 9 gehen, entsprechen den durch diese Punkte gehenden Kegelschnitten, sind also entsprechende Strahlen; also liegen diese fünf Punkte auf dem Kegelschnitte K.

Die Construction der fehlenden vier Schnittpunkte 6, 7, 8, 9 zweier Curven dritter Ordnung C''' und Γ''', von denen fünf Schnittpunkte A, B, C, D, 5 gegeben sind, kann auf die Construction der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zurückgeführt werden; denn construirt man zu den gegebenen Schnittpunkten $ABCD$ den Kegelschnitt K, auf dem die Punkte 5, 6, 7, 8, 9 liegen, sowie zu den gegebenen Punkten $ABC5$ den Kegelschnitt K', der die Punkte D, 6, 7, 8, 9 enthält, so sind die unbekannten vier Punkte die gemeinsamen Punkte von K und K'.

Sind sechs von den neun Schnittpunkten zweier Curven dritter Ordnung gegeben, so construire man zu fünf von ihnen die Kegelschnitte K und K'; diese haben dann den sechsten bekannten Punkt gemein und unsere Aufgabe ist daher darauf reducirt, die drei nnbekannten Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zu construiren, die einen gegebenen Punkt gemein haben.

Sind sieben von den neun Schnittpunkten gegeben, so kennt man von den Kegelschnitten K und K' bereits zwei Schnittpunkte, und kann daher die beiden andern Schnittpunkte der Curven III. O. mit Lineal und Zirkel construiren.

13. Die Aufgabe: Zu drei gegebenen Schnittpunkten eines Kegelschnitts und einer Curve dritter Ordnung die fehlenden drei zu construiren, kann zugleich mit der Aufgabe gelöst werden: Die beiden fehlenden Schnittpunkte einer Geraden mit einer C''' zu finden, wenn der dritte Schnittpunkt gegeben ist.



(M. 425.)

Besteht eine Curve III. O. C''' aus einem Kegelschnitte K und einer Geraden T, so kann der Punkt, der drei Punkten ABC des Kegelschnitts und einem Punkte D der Geraden gegenüberliegt, in einfachster Weise dadurch gefunden werden, dass man aus dem Kegelschnittbüschel $ABCD$ einen möglichst einfachen Kegelschnitt, ein Geradenpaar, herausgreift. Wählt man z. B. das Geradenpaar AD, BC, und durchschneidet K mit AD in E, und T mit BC in F, so ist der Schnittpunkt G von K und EF der gesuchte Punkt. Führt man die gleiche Construction mit den Geraden-

paaren DB, AC und DC, AB aus, so bestimmt man dadurch zugleich die projective Beziehung des Strahlbüschels G und des Kegelschnittbüschels $ABCD$.

Ist nun eine Curve dritter Ordnung Γ''' durch die Punkte A, B, C, D und fünf weitere Punkte bestimmt, und soll man den Kegelschnitt construiren, der die fünf übrigen Schnittpunkte von C''' und Γ''' enthält, so bestimme man den Punkt H, der $ABCD$ in Γ''' gegenüberliegt, sowie die Strahlen des Büschels H, die den drei Geradenpaaren des Büschels $ABCD$ entsprechen; dadurch ist die projective Beziehung der Strahlbüschel G und H bestimmt, und mithin der von ihnen erzeugte, gesuchte Kegelschnitt gefunden.

Dieser Kegelschnitt enthält die drei fehlenden Schnittpunkte von Γ''' und K, sowie die beiden fehlenden von Γ''' und T.

Hierdurch ist die zweite der gestellten beiden Aufgaben gelöst, und die erste ist auf das Fundamentalproblem cubischer Aufgaben zurückgeführt: Ein Schnittpunkt zweier Kegelschnitte (G) ist gegeben, man soll die drei andern finden.

14. Zwei Strahlenpaare, welche einen gemeinsamen Träger haben, sind Ausartungen von Curven zweiter Ordnung, und können ebenso, wie zwei eigentliche Kegelschnitte, zur Erzeugung eines Kegelschnittbüschels dienen.

Sind T und T' die Strahlen des einen Paares, so sind die Gleichungen der Strahlen des andern Paares von der Form $aT + a'T' = 0$, $bT + b'T' = 0$, mithin sind die Gleichungen der beiden Paare

1. $$TT' = 0 \quad \text{und} \quad (aT + a'T')(bT + bT') = 0.$$

Die Gleichung irgend eines Kegelschnitts des von den beiden Paaren bestimmten Kegelschnittbüschels ist

2. $$K \equiv \lambda_1 TT' + \lambda_2 (aT + a'T')(bT + b'T') = 0.$$

Löst man die Klammern auf und ordnet, so erhält man

$$K \equiv \lambda_2 ab \cdot T^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 a'b + \lambda_2 ab')\,TT' + \lambda_2 a'b' \cdot T'^2 = 0.$$

Die Function K ist eine homogene quadratische Function der Grössen T und T', und kann daher in zwei in Bezug auf T, T' homogene lineare Faktoren zerlegt werden, die sich durch Auflösung der quadratischen Gleichung

3. $$\lambda_2 ab \left(\frac{T}{T'}\right)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 a'b + \lambda_2 ab')\frac{T}{T'} + \lambda_2 a'b' = 0$$

in Bezug auf die Unbekannte $T : T'$ ergeben; findet man aus 3. die Wurzeln α und β, so zerfällt K, abgesehen von einem constanten Faktor, in das Produkt der linearen Functionen $T - \alpha T'$ und $T - \beta T'$, also zerfällt der Kegelschnitt $K = 0$ in die beiden Geraden $T - \alpha T' = 0$ und $T - \beta T' = 0$.

Das Kegelschnittbüschel besteht daher aus lauter Geradenpaaren. Da nun diese Geradenpaare eine Transversale in einer quadratischen Punktinvolution schneiden, so folgt, dass dieselben die Strahlenpaare einer quadratischen Strahleninvolution bilden. Wir finden daher: Die Strahlenpaare einer quadratischen Involution sind als die Kegelschnitte eines ausgearteten Kegelschnittbüschels zu betrachten.

Eine Strahleninvolution und ein projectives Strahlenbüschel erzeugen eine Curve III. O. C''' von besonderer Art; jede durch den Träger D der Involution gehende Gerade T hat nämlich mit C''' ausser D nur noch einen Punkt gemein, nämlich den Schnitt von T mit dem Strahl des projectiven Büschels, welches dem Strahlenpaare der Involution entspricht, zu welchem T gehört. Bei allen durch D gehenden Geraden fallen daher zwei Schnittpunkte derselben mit der Curve C''' in D zusammen; folglich hat C''' in D einen Doppelpunkt.

Eine quadratische Strahleninvolution und ein projectives Strahlbüschel erzeugen also eine Curve dritter Ordnung, welche den Träger der Involution zum Doppelpunkte hat.

15. Sind die Involution und das Strahlbüschel derart auf einander bezogen, dass dem Strahle T, der durch den Träger der Strahleninvolution geht, das Strahlenpaar entspricht, zu welchem dieser Strahl gehört, so sagt man, das Büschel und die Involution sind in reducirter Lage. Ist T_1 die Gerade, die mit T ein Strahlenpaar der Involution bildet, so entspricht bei reducirter Lage der Strahl T dem Paare TT_1. Ist ferner $(aT + a_1 T_1)(bT + b_1 T_1) = 0$ ein anderes Paar der Involution und entspricht ihm der Strahl $\mathfrak{T}$, entspricht ferner dem Strahle $\alpha T + \alpha_1 \mathfrak{T} = 0$ das Paar

$$\beta TT_1 + \beta_1 (aT + a_1 T_1)(bT + b_1 T_1) = 0,$$

so entsprechen sich allgemein

$$\lambda_1 \alpha T + \lambda_2 \alpha_1 \mathfrak{T} = 0 \text{ und } \lambda_1 \beta TT_1 + \lambda_2 \beta_1 (aT + a_1 T_1)(bT + b_1 T_1) = 0.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen λ_1 und λ_2, so erhält man die Gleichung der Curve, welche durch das Strahlbüschel und die Involution erzeugt wird, nämlich

$$\alpha_1 \beta \cdot \mathfrak{T} TT_1 - \alpha \beta_1 T (aT + a_1 T_1)(bT + b_1 T_1) = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in ein Produkt:

$$T[\alpha_1 \beta \mathfrak{T} T_1 - \alpha \beta_1 (aT + a_1 T_1)(bT + b_1 T_1)] = 0.$$

Die Curve III. O., welche eine quadratische Strahleninvolution und ein dazu projectives Strahlbüschel in reducirter Lage erzeugen, zerfällt also in eine Gerade und einen Kegelschnitt.

Umgekehrt schliesst man: Liegt der Träger einer quadratischen Strahleninvolution auf einem Kegelschnitte K, so gehen die Geraden, welche die Schnittpunkte jedes Paares der Involution verbinden, durch einen Punkt und bilden ein mit der Involution projectives Strahlbüschel. Sind nämlich M_1 und M_2 zwei Paare der Involution und S_1 und S_2 die Geraden, welche die Schnittpunkte der Paare M_1 und M_2 und des Kegelschnitts K verbinden, ist ferner A der Träger der Involution, B der Schnitt von S_1 und S_2 und T der Strahl AB, und bezieht man das Büschel B projectiv auf die Involution, so dass $S_1, S_2 \barwedge M_1, M_2$ und T dem Paare entspricht, zu welchem T gehört, so befinden sich die Involution und das projective Büschel in reducirter Lage; sie erzeugen also einen Kegelschnitt K', der durch A und durch die vier Punkte geht, in denen K von S_1 und S_2 geschnitten wird. Da nun K' diese fünf Punkte mit K gemein hat, so ist K' mit K identisch.

Hieraus folgt eine einfache Construction der Aufgabe, eine quadratische Strahleninvolution zu ergänzen. Man construire einen Kreis K, der den Träger A der Involution enthält, und zwei Sehnen, deren jede die Schnittpunkte eines Strahlenpaares der Involution mit K enthält. Legt man durch den Schnittpunkt dieser Sehnen eine Gerade, die K in B und B_1 schneidet, so ist AB, AB_1 ein Strahlenpaar der Involution.

16. Mit Hülfe dieser Sätze kanu die Aufgabe: Die drei Schnittpunkte einer Curve dritter Ordnung C''' und einer geraden Linie T zu construiren, auf das cubische Fundamentalproblem zurückgeführt werden.

Wir construiren ein Kegelschnittbüschel und ein projectives Strahlenbüschel, welche die Curve C''' erzeugen. Dieselben schneiden T in einer quadratischen Punktinvolution und einer dazu projectiven Punktreihe. Die Schnittpunkte von T und C''' sind nun die Punkte der Reihe, welche mit einem Punkte des ent-

sprechenden Punktpaares zusammenfallen. Unsere Aufgabe ist daher auf die folgende reducirt: Auf einer Geraden T liegen eine quadratische Punktinvolution und eine dazu projective Punktreihe; man soll die Punkte X der Reihe finden, die mit einem Punkte des entsprechenden Paares zusammenfallen.

Wir projiciren von einem willkürlich gewählten Punkte A aus die Punktinvolution und die Punktreihe und erhalten so in A eine Strahleninvolution J und ein dazu projectives Strahlbüschel S; die Strahlen des Büschels, welche nach einem der gesuchten Punkte X gehen, fallen mit einem Strahle des entsprechenden Paares der Strahleninvolution zusammen. Legen wir einen Kreis K durch A, und verbinden die Punkte, in welchem der Kreis von jedem Strahlenpaare der Involution getroffen wird, so bilden diese Verbindungsgeraden ein Strahlbüschel Σ, welches mit der Involution J projectiv ist. Die projectiven Büschel S und Σ erzeugen einen Kegelschnitt C, der durch den Träger A des Büschels geht, und daher den Kreis K in drei weiteren Punkten Y_1, Y_2, Y_3 schneidet. Der Strahl des Büschels S und das Paar der Involution J, auf denen einer dieser Punkte Y liegt, entsprechen dem durch Y gehenden Strahle des projectiven Büschels Σ, sind also einander entsprechend. Die gesuchten Punkte der Geraden T sind daher die Punkte, in denen T von den Strahlen AY_1, AY_2, AY_3 geschnitten wird.

17. Hat man ein Kegelschnittbüschel und das dazu projective Strahlbüschel bestimmt, durch welches eine Curve III. O. erzeugt wird, und rückt ein Strahl T des Strahlbüschels unendlich nahe an einen Träger A des Kegelschnittbüschels heran, so hat der entsprechende Kegelschnitt K des Büschels mit C''' in A zwei unendlich nahe benachbarte Punkte gemein; mithin haben C''' und K in A eine gemeinsame Tangente. Die Tangente, die eine Curve dritter Ordnung in einem gegebenen Punkte A derselben berührt, wird daher in folgender Weise gefunden. Man construire den Punkt E der C''', der dem Punkte A und drei weiteren Punkten der C''' gegenüberliegt, ziehe EA und construire in A die Tangente des Kegelschnitts, der diesem Strahle entspricht.

§ 16. Tangente und Polaren eines Punktes in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung.

1. Wir verbinden zwei Punkte $\mathfrak{P}$ und Π und bestimmen die Verhältnisse, in welchen die Strecke $\mathfrak{P}\Pi$ von den Schnittpunkten der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ und der Curve dritter Ordnung geschnitten wird:

1. $$f \equiv \Sigma a_{ikl} x_i x_k x_l = 0; \quad i,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3.$$

Zu diesem Zwecke setzen wir in 1.

$$x_\varkappa = \frac{\lambda_1 \mathfrak{x}_\varkappa + \lambda_2 \xi_\varkappa}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \varkappa = 1,\ 2,\ 3$$

und erhalten für das gesuchte Theilverhältniss $\mu = \lambda_2 : \lambda_1$ die Gleichung:

$$f(\mathfrak{x}) + 3[f_1(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 + f_2(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 + f_3(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3] \cdot \mu$$

2. $$+3[f_{11}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1^2 + 2f_{11}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 \xi_2 + 2f_{13}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 \xi_3 + f_{22}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2^2 + 2f_{23}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 \xi_3 + f_{33}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3^2] \cdot \mu^2$$

$$+ f(\xi) \cdot \mu^3 = 0.$$

Hierin bedeuten $F(\mathfrak{x})$ und $F(\xi)$ die Werthe, welche eine Function F erhält, wenn man die $x_\varkappa$ durch die $\mathfrak{x}_\varkappa$ bez. $\xi_\varkappa$ ersetzt; ferner bedeuten

$$f_1 \equiv a_{111} x_1^2 + 2a_{112} x_1 x_2 + 2a_{113} x_1 x_3 + a_{122} x_2^2 + 2a_{123} x_2 x_3 + a_{133} x_3^2 \equiv \Sigma a_{1ik} x_i x_k$$

3. $$f_2 \equiv a_{112} x_1^2 + 2a_{122} x_1 x_2 + 2a_{123} x_1 x_3 + a_{222} x_2^2 + 2a_{223} x_2 x_3 + a_{233} x_3^2 \equiv \Sigma a_{i2k} x_i x_k$$

$$f_3 \equiv a_{113} x_1^2 + 2a_{123} x_1 x_2 + 2a_{133} x_1 x_3 + a_{223} x_2^2 + 2a_{233} x_2 x_3 + a_{333} x_3^2 \equiv \Sigma a_{ik3} x_i x_k$$

$$4.\quad \begin{array}{ll} f_{11} = a_{111}x_1 + a_{112}x_2 + a_{113}x_3, & f_{22} = a_{122}x_1 + a_{222}x_2 + a_{223}x_3, \\ f_{12} = a_{112}x_1 + a_{122}x_2 + a_{123}x_3, & f_{23} = a_{123}x_1 + a_{223}x_2 + a_{233}x_3, \\ f_{13} = a_{113}x_1 + a_{123}x_2 + a_{133}x_3, & f_{33} = a_{133}x_1 + a_{233}x_2 + a_{333}x_3. \end{array}$$

Für diese Functionen gelten die Identitäten

$$5.\quad \begin{array}{l} f_1 = f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3, \\ f_2 = f_{12}x_1 + f_{22}x_2 + f_{23}x_3, \\ f_3 = f_{13}x_1 + f_{23}x_2 + f_{33}x_3, \end{array}$$

$$6.\quad \begin{array}{l} f = f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 \\ \quad = f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + 2f_{13}x_1x_3 + f_{22}x_2^2 + 2f_{23}x_2x_3 + f_{33}x_3^2. \end{array}$$

2. Wir nehmen zunächst an, $\mathfrak{P}$ sei auf f gelegen; alsdann ist $f(\mathfrak{x}) = 0$ und die Gleichung 2. hat die selbstverständliche Wurzel $\mu = 0$, welcher der Punkt $\mathfrak{P}$ entspricht. Die beiden andern Wurzeln der Gleichung 2. erhält man aus der quadratischen Gleichung:

$$1.\quad \begin{array}{l} 3[f_1(\mathfrak{x})\cdot\xi_1 + f_2(\mathfrak{x})\cdot\xi_2 + f_3(\mathfrak{x})\cdot\xi_3] + 3[f_{11}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1^2 + 2f_{12}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1\xi_2 + 2f_{13}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1\xi_3 \\ \quad + f_{22}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2^2 + 2f_{23}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2\xi_3 + f_{33}(\mathfrak{x})\cdot\xi_3^2]\cdot\mu + f(\xi)\cdot\mu^2 = 0. \end{array}$$

Liegt Π auf der Geraden $T \equiv f_1(\mathfrak{x})\cdot\xi_1 + f_2(\mathfrak{x})\cdot\xi_2 + f_3(\mathfrak{x})\cdot\xi_3 = 0$, so hat die Gleichung 1. eine Wurzel $\mu = 0$; die Gerade $\mathfrak{P}\Pi$ hat dann in $\mathfrak{P}$ zwei zusammenfallende Punkte mit der Curve f gemein, berührt also f im Punkte $\mathfrak{P}$. Die Gerade T geht durch $\mathfrak{P}$, denn setzt man in T für die Veränderlichen ξ_x die Coordinaten $\mathfrak{x}_x$ des Punktes $\mathfrak{P}$, so erhält man

$$2.\quad f_1(\mathfrak{x})\cdot\mathfrak{x}_1 + f_2(\mathfrak{x})\cdot\mathfrak{x}_2 + f_3(\mathfrak{x})\cdot\mathfrak{x}_3,$$

und dies ist nach 6. identisch mit $f(\mathfrak{x})$, also gleich Null, da $\mathfrak{P}$ auf f liegt. Es giebt daher nur eine Gerade, welche eine Curve III. O. in einem gegebenen Punkte derselben berührt, und die Gleichung der Tangente der Curve $f = 0$ im Punkte $\mathfrak{P}$ ist

$$3.\quad T \equiv f_1(\mathfrak{x})\cdot x_1 + f_2(\mathfrak{x})\cdot x_2 + f_3(\mathfrak{x})\cdot x_3 = 0.$$

3. Die Gleichung der Tangente in einem Curvenpunkte wird nur dann unbestimmt, wenn für die Coordinaten dieses Punktes die drei Functionen f_1, f_2, f_3 zugleich verschwinden. Aus der Identität No. 1, 6 folgt, dass unter dieser Bedingung $\mathfrak{P}$ auf der Curve f liegt.

Ist für die Coordinaten von $\mathfrak{P}$ $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, so wird die Gleichung 3. identisch und jede durch $\mathfrak{P}$ gehende Gerade schneidet die Curve f im Punkte $\mathfrak{P}$ in zwei zusammenfallenden Punkten; hierdurch ist der Punkt $\mathfrak{P}$ als Doppelpunkt charakterisirt.

Die drei Gleichungen $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ sind homogen quadratisch für die unbekannten Coordinaten x_x des Doppelpunktes, haben daher im Allgemeinen kein gemeinsames System von Wurzeln; eine Curve III. O. hat also im Allgemeinen keinen Doppelpunkt. Mehr als einen Doppelpunkt kann eine eigentliche Curve dritter Ordnung nicht haben; denn eine zwei Doppelpunkte verbindende Gerade würde mit der Curve vier Schnittpunkte haben.

4. Zwischen $f, f_1, f_2, f_3, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{22}, f_{23}, f_{33}$ bestehen die Identitäten No. 1, 5; dieselben lehren sofort: Wenn es einen Punkt $\mathfrak{P}$ giebt, für welchen $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, so verschwindet für diesen Punkt auch die Determinante:

$$H \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante heisst die HESSE'sche Determinante der cubischen Function f. Sie ist homogen dritten Grades in den Coefficienten von f sowie in den Coordinaten x_x. Die Gleichung $H = 0$ ist daher die Gleichung einer zur

Curve f in einer bestimmten Beziehung stehenden Curve dritten Grades; man nennt dieselbe die HESSE'sche Curve der Curve $f = 0$. Wir haben daher: Hat eine Curve dritter Ordnung einen Doppelpunkt, so liegt derselbe auf der zugehörigen HESSE'schen Curve.

5. Ist $\mathfrak{P}$ der Doppelpunkt einer mit Doppelpunkt versehenen Curve dritter Ordnung, so wird der dritte Schnittpunkt einer durch $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden und der C''' aus der Gleichung bestimmt, die aus No. 2, 1 nach der Substitution $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ und nach Absonderung der Wurzel $\mu = 0$ übrig bleibt:

$$1.\quad \begin{aligned}&3[f_{11}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1^2 + 2f_{12}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1\xi_2 + 2f_{13}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1\xi_3 + f_{22}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2^2 + 2f_{23}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2\xi_3 + f_{33}(\mathfrak{x})\cdot\xi_3^2]\\ &+ f(\xi)\cdot\mu = 0.\end{aligned}$$

Wird nun der Punkt Π so gewählt, dass

$$2.\quad f_{11}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1^2 + 2f_{12}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1\xi_2 + 2f_{13}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1\xi_3 + f_{22}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2^2 + 2f_{23}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2\xi_3 + f_{33}(\mathfrak{x})\cdot\xi_3^2 = 0,$$

so hat die Gleichung 1. die Wurzel $\mu = 0$, alle drei Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ fallen also in den Doppelpunkt $\mathfrak{P}$.

Da die HESSE'sche Determinante für die Coordinaten des Doppelpunktes verschwindet, so folgt (§ 13, No. 3), dass der Kegelschnitt 2. in zwei Gerade zerfällt. Die Coordinaten des Schnittpunkts dieser beiden Geraden genügen den Gleichungen

$$\begin{aligned}f_{11}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1 + f_{12}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2 + f_{13}(\mathfrak{x})\cdot\xi_3 &= 0,\\ f_{12}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1 + f_{22}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2 + f_{23}(\mathfrak{x})\cdot\xi_3 &= 0,\\ f_{13}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1 + f_{23}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2 + f_{33}(\mathfrak{x})\cdot\xi_3 &= 0.\end{aligned}$$

Ersetzt man hierin $\xi_\varkappa$ durch $\mathfrak{x}_\varkappa$, so gehen die linken Seiten in $f_1(\mathfrak{x})$, $f_2(\mathfrak{x})$, $f_3(\mathfrak{x})$ über, verschwinden also; der Doppelpunkt $\mathfrak{P}$ ist also zugleich der Doppelpunkt der Curve 2. Hieraus folgt, dass die beiden durch 2. repräsentirten Geraden diejenigen Geraden sind, die durch $\mathfrak{P}$ gehen und in $\mathfrak{P}$ drei zusammenfallende Schnittpunkte mit der Curve $f = 0$ haben. Diese beiden Geraden heissen die Doppelpunktstangenten.

Verlegt man den Eckpunkt A_1 des Coordinatendreiecks in den Doppelpunkt, so ist $\mathfrak{x}_1 = h_1$, $\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_3 = 0$, mithin

$$\begin{aligned}&f_{11}(\mathfrak{x}) = a_{111}h_1, \quad f_{12}(\mathfrak{x}) = a_{112}h_1, \quad f_{13}(\mathfrak{x}) = a_{113}h_1,\\ &f_{22}(\mathfrak{x}) = a_{122}h_1, \quad f_{23}(\mathfrak{x}) = a_{123}h_1, \quad f_{33}(\mathfrak{x}) = a_{133}h_1.\end{aligned}$$

Die Gleichung der beiden Doppelpunktstangenten wird nach Weglassung des Faktors h_1

$$a_{111}x_1^2 + 2a_{112}x_1x_2 + 2a_{113}x_1x_3 + a_{122}x_2^2 + 2a_{123}x_2x_3 + a_{133}x_3^2 = 0.$$

Sind dieselben real, und nimmt man A_2 und A_3 auf ihnen an, so muss sich die linke Seite auf ein Vielfaches von x_2x_3 beschränken, daher ist

$$a_{111} = a_{112} = a_{113} = a_{122} = a_{133} = 0.$$

Bezieht man also die Gleichung einer mit Doppelpunkt versehenen Curve III. O. auf ein Coordinatendreieck, das die Ecke A_1 im Doppelpunkt und die Ecken A_2, A_3 auf den Doppelpunktstangenten hat, so ist die Gleichung von der Form:

$$3.\quad f \equiv 6a_{123}x_1x_2x_3 + a_{222}x_2^3 + 3a_{223}x_2^2x_3 + 3a_{233}x_2x_3^2 + a_{333}x_3^3 = 0.$$

Für die Function f_{11}, f_{12}, f_{13} erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned}&f_{11} \equiv 0, &&f_{22} \equiv a_{222}x_2 + a_{223}x_3,\\ &f_{12} \equiv a_{123}x_3, &&f_{23} \equiv a_{123}x_1 + a_{223}x_2 + a_{233}x_3,\\ &f_{13} \equiv a_{123}x_2, &&f_{33} \equiv a_{233}x_2 + a_{333}x_3.\end{aligned}$$

Die Gleichung der HESSE'schen Curve wird daher

$$H \equiv \begin{vmatrix} 0, & a_{123}x_3, & a_{123}x_2\\ a_{123}x_3, & f_{22}, & f_{23}\\ a_{123}x_2, & f_{23}, & f_{33}\end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man nach den Gliedern der ersten Zeile, so erhält man

$$\frac{1}{a_{123}^2}\cdot H = -x_3\begin{vmatrix} x_3, & f_{23} \\ x_2, & f_{33}\end{vmatrix} + x_2\begin{vmatrix} x_3, & f_{22} \\ x_2, & f_{23}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3, & x_2f_{22}-x_3f_{23} \\ x_2, & x_2f_{23}-x_3f_{33}\end{vmatrix}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$4.\quad \frac{1}{a_{123}^2}\cdot H = 2a_{123}x_1x_2x_3 - a_{222}x_2^3 + a_{223}x_2^2x_3 + a_{233}x_2x_3^2 - a_{333}x_3^3.$$

Die Gleichung $H = 0$ hat dieselbe Gestalt, wie 3. Wir schliessen hieraus: Hat eine Curve dritter Ordnung f einen Doppelpunkt, so hat ihre Hesse'sche Curve H in demselben Punkte einen Doppelpunkt, und beide Curven haben die Doppelpunktstangenten gemein.

Haben zwei Curven einen gemeinsamen Doppelpunkt, so gilt derselbe für vier Schnittpunkte; haben sie ausserdem noch gemeinsame Doppelpunktstangenten, so haben sie noch zwei auf den Doppelpunktstangenten gelegene, dem Doppelpunkte unendlich nahe gemeinsame Punkte, also zählen der gemeinsame Doppelpunkt und die gemeinsamen Doppelpunktstangenten für zusammen sechs Schnittpunkte. Die drei Schnittpunkte, welche die Curven f und H noch ausserdem gemein haben, befriedigen die Gleichung

$$f - \frac{3}{a_{123}^2}\cdot H = 4a_{222}x_2^3 + 4a_{333}x_3^3 = 0.$$

Diese Gleichung liefert die Verhältnisse $x_2 : x_3$ der drei andern Schnittpunkte; sind α' und α'' die beiden conjugirt complexen Wurzeln der Einheit, und ist μ die reale Cubikwurzel aus $(-a_{333}) : a_{222}$, so hat man

$$a_{222}x_2^3 + a_{333}x_3^3 = a_{222}(x_2 - \mu x_3)(x_2 - \alpha'\mu x_3)(x_2 - \alpha''\mu x_3).$$

Es sind daher $x_2 - \mu x_3 = 0$, $x_2 - \alpha'\mu x_3 = 0$, $x_2 - \alpha''\mu x_3 = 0$ die Gleichungen der Strahlen, welche von A_1 aus nach den andern Schnittpunkten gehen. Eine Curve III. O. mit Doppelpunkt und realen Doppelpunktstangenten und ihre Hesse'sche Curve haben ausser dem Doppelpunkte noch einen realen und zwei conjugirt complexe Schnittpunkte.

6. Es kann sich ereignen, dass die beiden Tangenten eines Doppelpunkts einer Curve $n$ten Grades zusammenfallen. Man bezeichnet dann den Doppelpunkt als einen Rückkehrpunkt und die Tangente in diesem Punkte als Rückkehrtangente. Legen wir, um diesen Fall bei cubischen Curven aufzusuchen, die Ecke A_1 des Coordinatendreiecks in den Rückkehrpunkt, die Ecke A_3 auf die Rückkehrtangente; dann muss sich die Gleichung der Doppelpunktstangenten auf die Gleichung der doppelt zu zählenden Achse A_1A_3, also auf $x_2^2 = 0$ reduciren.

Hieraus folgt $a_{111} = a_{112} = a_{113} = a_{123} = a_{133} = 0$; mithin ist die Gleichung der Curve

$$1.\quad f = 3a_{122}x_1x_2^2 + a_{222}x_2^3 + 3a_{223}x_2^2x_3 + 3a_{233}x_2x_3^2 + a_{333}x_3^3 = 0.$$

Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass eine Curve III. O., deren Gleichung unter der allgemeinen Form 1. enthalten ist, den Punkt A_1 zum [Rü]ckkehrpunkt und die Achse A_1A_3 zur Rückkehrtangente hat.

Die Hesse'sche Curve hat dann die Gleichung

$$H = \begin{vmatrix} 0 & a_{122}x_2, & 0 \\ a_{122}x_2, & a_{122}x_1 + a_{222}x_2 + a_{223}x_3, & a_{223}x_2 + a_{233}x_3 \\ 0, & a_{223}x_2 + a_{233}x_3, & a_{233}x_2 + a_{333}x_3 \end{vmatrix} = 0;$$

[Die]se Gleichung giebt entwickelt

$$H = -a_{122}^2x_2^2(a_{233}x_2 + a_{333}x_3) = 0.$$

Die Hesse'sche Curve einer mit Rückkehrpunkt versehenen Curve

III. O. zerfällt also in die doppelt zu zählende Rückkehrtangente und in die durch den Rückkehrpunkt gehende Gerade

$$T \equiv a_{233}x_2 + a_{333}x_3 = 0.$$

Legt man den Eckpunkt A_2 des Coordinatendreiecks auf die Gerade T, so muss $a_{233} = 0$ sein; in Bezug auf dieses Coordinatensystem lautet also die Gleichung der Curve III. O. mit Rückkehrpunkt:

2. $$f \equiv 3a_{122}x_1x_2^2 + a_{222}x_2^3 + 3a_{223}x_2^2x_3 + a_{333}x_3^3 = 0.$$

Wir bemerken, dass die Curve mit ihrer HESSE'schen Curve ausser den Rückkehrpunkt noch einen immer realen Punkt gemein hat, nämlich den Punkt, der sich aus $x_3 = 0$ und $f = 0$, also aus $x_3 = 0$ und $3a_{122}x_1 + a_{222}x_2 = 0$ bestimmt.

Ist $\mathfrak{P}$ ein Wendepunkt (Inflexionspunkt) einer Curve III. O. und Π auf der Wendetangente (d. i. auf der Tangente im Wendepunkt) gelegen, so muss die Gleichung $3\{f_{11}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1^2 + 2f_{12}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1\xi_2 + 2f_{13}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1\xi_3 + f_{22}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2^2 + 2f_{23}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2\xi_3 + f_{33}(\mathfrak{x})\cdot\xi_3^2] + f(\xi)\cdot\mu = 0$, durch welche der Begleiter der Tangente in $\mathfrak{P}$ bestimmt wird, die Wurzel $\mu = 0$ ergeben. Die Bedingung hierfür ist, dass

$$F \equiv f_{11}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1^2 + 2f_{12}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1\xi_2 + 2f_{13}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1\xi_3 + f_{22}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2^2 + 2f_{23}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2\xi_3 + f_{33}(\mathfrak{x})\cdot\xi_3^2 = 0.$$

Ausserdem erfüllt Π noch die Gleichung der Wendetangente

$$T \equiv f_1(\mathfrak{x})\,\xi_1 + f_2(\mathfrak{x})\,\xi_2 + f_3(\mathfrak{x})\,\xi_3 = 0.$$

Beide Gleichungen können nur dann für unzählige Punkte Π zusammenbestehen, wenn F zwei Gerade darstellt, deren eine T ist. Zerfällt F in zwei Gerade, so verschwindet für die Coordinaten des Punktes $\mathfrak{P}$ die Determinante

$$H \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

die Wendepunkte einer Curve III. O. liegen also auf der HESSE'schen Curve.

Umgekehrt: Jeder Schnittpunkt einer Curve III. O. mit ihrer HESSE'schen Curve, der nicht Doppelpunkt ist, ist ein Wendepunkt. Denn ist $\mathfrak{P}$ ein solcher Punkt, so ist nach der Voraussetzung $f(\mathfrak{x}) = 0$ und $H(\mathfrak{x}) = 0$. Aus der letzteren Gleichung folgt, dass der Kegelschnitt F in zwei Gerade zerfällt; aus No. 1, 6 erkennt man, dass F den Punkt $\mathfrak{P}$ enthält. Die Gerade T berührt F in $\mathfrak{P}$. Der Doppelpunkt D der Curve F genügt den Gleichungen

$$F_1 \equiv f_{11}(\mathfrak{x})\cdot x_1 + f_{12}(\mathfrak{x})\cdot x_2 + f_{13}(\mathfrak{x})\cdot x_3 = 0,$$
$$F_2 \equiv f_{12}(\mathfrak{x})\cdot x_1 + f_{22}(\mathfrak{x})\cdot x_2 + f_{23}(\mathfrak{x})\cdot x_3 = 0,$$
$$F_3 \equiv f_{13}(\mathfrak{x})\cdot x_1 + f_{23}(\mathfrak{x})\cdot x_2 + f_{33}(\mathfrak{x})\cdot x_3 = 0.$$

Nach No. 1, 5 ist $T \equiv \mathfrak{x}_1F_1 + \mathfrak{x}_2F_2 + \mathfrak{x}_3F_3$. Hieraus folgt, dass D auf T enthalten ist. Wenn nun $\mathfrak{P}$ nicht Doppelpunkt von C''' ist, so werden von $\mathfrak{P}$ die Gleichungen $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ nicht erfüllt, also sind $\mathfrak{P}$ und D verschieden; folglich ist T ein Theil von F, d. i. jeder Punkt, der $T = 0$ erfüllt, genügt auch $F = 0$; folglich hat die Gleichung No. 1, 2 für jeden Punkt Π der Geraden T drei Wurzeln $\mu = 0$, w. z. b. w.

Eine Curve III. O. ohne Doppel- oder Rückkehrpunkt hat daher neun Wendepunkte; eine Curve III. O. mit Doppelpunkt hat drei Wendepunkte; eine Curve III. O. mit Rückkehrpunkt hat einen realen Wendepunkt.

8. Sind auf einer Geraden zwei Punkte A_1A_2 gegeben, so haben wir einem Punkte $\mathfrak{P}$ der Geraden einen andern Punkt Π in Bezug auf A_1A_2 harmonisch zugeordnet, indem wir für die Verhältnisse μ_1 und μ_2, in welchem die Strecke

$\mathfrak{P}\Pi$ von den Punkten A_1 und A_2 getheilt wird, die Gleichung festsetzten

$$\mu_1 + \mu_2 = 0.$$

Hiervon ausgehend, ordnet man einem Punkte $\mathfrak{P}$ in Bezug auf n Punkte $A_1 A_2 \ldots A_n$, die mit ihm auf einer Geraden liegen, die Punkte zu, für welche die Verhältnisse $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, in denen die Strecke $\mathfrak{P}\Pi$ von $A_1 A_2 \ldots A_n$ getheilt wird, den Bedingungen genügen

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_n = 0,$$
$$\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \ldots + \mu_{n-1}\mu_n = 0,$$
$$\Sigma\mu_a\mu_b\mu_c = 0, \quad \Sigma\mu_a\mu_b\mu_c\mu_d = 0, \ldots . \quad \Sigma\mu_a\mu_b\mu_c\ldots\mu_r = 0,$$

wobei für abc, $abcd$, ..., $abc\ldots r$ alle Combinationen dritter, vierter, ... $(n-1)$ter Klasse aus den Zahlen 1, 2, 3 ... zu nehmen sind. Setzt man $PA_i = d_i$, $P\Pi = x$, so ist

$$\mu_i = \frac{PA_i}{A_i\Pi} = \frac{PA_i}{P\Pi - PA_i} = \frac{d_i}{x - d_i}.$$

Wird dies in $\Sigma\mu_a\mu_b\ldots\mu_k = 0$ eingesetzt, so entsteht

$$\Sigma\frac{d_a}{x-d_a}\cdot\frac{d_b}{x-d_b}\cdot\frac{d_c}{x-d_c}\cdots\frac{d_k}{x-d_k} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)\ldots(x-d_n)$, so verschwindet in jedem Gliede der linken Seite der Nenner, und das Produkt $d_a d_b \ldots d_k$ wird mit dem Produkte von $n-k$ Differenzen $x - d_f$ multiplicirt. Die Gleichung 1. wird daher vom Grade $(n-k)$ in Bezug auf x, und wird folglich von $n-k$ Punkten Π erfüllt.

Die Gruppe der $(n-k)$ Punkte Π, welche der Gleichung genügen

$$\Sigma\mu_a\mu_b\mu_c\ldots\mu_k = 0,$$

nennt man die harmonischen Pole $(n-k)$ten Grades der Punkte $A_1A_2\ldots A_n$ in Bezug auf den Punkt $\mathfrak{P}$.

9. Besteht die Gruppe der Punkte A aus drei Punkten A_1, A_2, A_3, so giebt es zu jedem Punkte $\mathfrak{P}$ zwei harmonische Pole zweiten Grades und einen harmonischen Pol ersten Grades, die sich der Reihe nach aus den Gleichungen ergeben

1. $$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0, \quad \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 = 0.$$

Dividirt man dieselben durch $\mu_1\mu_2\mu_3$, so entsteht

2. $$\frac{1}{\mu_2\mu_3} + \frac{1}{\mu_1\mu_3} + \frac{1}{\mu_2\mu_1} = 0, \quad \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1} = 0.$$

Nun sind $1:\mu_1$, $1:\mu_2$, $1:\mu_3$ die Theilverhältnisse $\Pi A_1 : A_1\mathfrak{P}$ ...., also werden durch die Gleichungen 2. die harmonischen Pole ersten und zweiten Grades für den Punkt Π in Bezug auf die Punkte A_1, A_2, A_3 definirt. Hieraus folgt: Ist Π ein harmonischer Pol zweiten Grades von $\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{P}$ der harmonische Pol ersten Grades von Π; und umgekehrt: ist Π der harmonische Pol ersten Grades von $\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{P}$ ein harmonischer Pol zweiten Grades von Π.

Drückt man die Bedingungen 1. durch die Grössen x und d aus, so erhält man

$$d_1(x-d_2)(x-d_3) + d_2(x-d_3)(x-d_1) + d_3(x-d_1)(x-d_2) = 0,$$
$$d_1d_2(x-d_3) + d_2d_3(x-d_1) + d_3d_1(x-d_2) = 0.$$

Fällt $\mathfrak{P}$ mit einem der drei Punkte A, z. B. mit A_3 zusammen, so ist $d_3 = 0$, d die Gleichung 3. vereinfacht sich zu $d_1(x-d_2)x + d_2\cdot x(x-d_1) = 0$.

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $x = 0$, die andere folgt aus

$$d_1(x-d_2) + d_2(x-d_1) = 0;$$

rch diese Gleichung wird der harmonische Pol von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf das Punkt-

paar A_1A_2, d. i. der vierte harmonische Punkt zu $A_1A_2\mathfrak{P}$ definirt. Die Gleichung 4. giebt für $d_3 = 0$ über in $x = 0$. Wir schliessen daher: *Fällt der Punkt $\mathfrak{P}$ mit einem Punkte A_3 der Gruppe $A_1A_2A_3$ zusammen, so fällt von den harmonischen Polen zweiten Grades des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf $A_1A_2A_3$ einer auf $\mathfrak{P}$, der andere ist der harmonische Pol von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf A_1A_2; der harmonische Pol ersten Grades von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf $A_1A_2A_3$ fällt mit $\mathfrak{P}$ zusammen.*

Wenn zwei von den Punkten $A_1A_2A_3$ zusammenfallen, z. B. $A_2 \equiv A_3$, so ist $d_3 = d_2$ und diese Gleichung 3. erhält den Faktor $x - d_2$. Daher: *Fallen zwei von den Punkten $A_1A_2A_3$ zusammen, so fällt für jeden Punkt $\mathfrak{P}$ einer der beiden harmonischen Pole zweiten Grades mit den beiden Punkten zusammen.* Ebenso folgt: *Wenn die drei Punkte $A_1A_2A_3$ in einen Punkt A zusammenfallen, so fallen für jeden Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene die beiden harmonischen Pole zweiten und der harmonische Pol ersten Grades auf A.*

Ordnet man die Gleichungen 3. und 4. nach x, so erhält man

$$5. \qquad (d_1 + d_2 + d_3)x^2 - 2(d_2d_3 + d_3d_1 + d_1d_2)x + 3\,d_1d_2d_3 = 0,$$

$$6. \qquad (d_2d_3 + d_3d_1 + d_1d_2)x - 3\,d_1d_2d_3 = 0.$$

Bezeichnet man die Wurzeln der Gleichung 5. mit x_1 und x_2, so genügen daher die harmonischen Pole zweiten Grades den Gleichungen

$$7. \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}\right), \quad \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{d_2} \cdot \frac{1}{d_3} + \frac{1}{d_3} \cdot \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1} \cdot \frac{1}{d_2}\right).$$

und für den harmonischen Pol ersten Grades erhält man

$$8. \qquad \frac{1}{x} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}\right).$$

Hieraus folgt

$$9. \qquad \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right).$$

Dies ergiebt: *Der harmonische Pol ersten Grades eines Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf drei Punkte $A_1A_2A_3$ ist zugleich der harmonische Pol von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die beiden harmonischen Pole zweiten Grades von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf $A_1A_2A_3$.*

9. Die Verhältnisse, in denen eine Strecke $\mathfrak{P}\Pi$ von den drei Schnittpunkten der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ und der Curve dritter Ordnung $f = 0$ getheilt wird, ergeben sich aus der Gleichung (No. 2)

$$f(\mathfrak{x}) + 3[f_1(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 + f_2(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 + f_3(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3] \cdot \mu + 3[f_{11}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1^2 + 2f_{12}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1\xi_2^3 \\ + 2f_{13}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1\xi_3 + f_{22}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2^2 + 2f_{23}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2\xi_3 + f_{33}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3^2] \cdot \mu^2 + f(\xi) \cdot \mu^3 = 0.$$

Ist Π ein harmonischer Pol zweiten Grades, so verschwindet die Summe der Wurzeln dieser Gleichung, so ist also

$$\varphi' \equiv f_{11}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1^2 + 2f_{12}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1\xi_2 + 2f_{13}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1\xi_3 + f_{22}(\mathfrak{x})\,\xi_2^2 + 2f_{23}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2\xi_3 \\ + f_{33}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3^2 = 0.$$

Der Ort der harmonischen Pole zweiten Grades, die zu einem Punkte $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Schnittpunkte der durch $\mathfrak{P}$ gehenden Strahlen mit der cubischen Curve $f = 0$ gehören, ist also der Kegelschnitt $\varphi' = 0$.

Dieser Kegelschnitt heisst die *erste* oder die *conische Polare* des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Curve $f = 0$.

Ist Π der harmonische Pol ersten Grades, so verschwindet die Summe der Produkte je zweier der drei Wurzeln μ der obigen cubischen Gleichung, es ist daher $\varphi'' \equiv f_1(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 + f_2(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 + f_3(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3 = 0$.

Der Ort der harmonischen Pole ersten Grades, die zu einem Punkte $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Schnittpunkte der durch $\mathfrak{P}$ gehenden Strahlen mit der cubischen Curve $f = 0$ gehören, ist somit die Gerade $\varphi'' = 0$.

Diese Gerade heisst die zweite oder die gerade Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Curve $f = 0$.

Nach dem letzten Satze der vorigen Nummer ist die gerade Polare eines Punktes in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung zugleich die Polare dieses Punktes in Bezug auf die erste Polare desselben Punktes.

10. Legt man von $\mathfrak{P}$ eine Tangente an f, und ist A der Berührungspunkt und A_1 sein Begleiter, so fällt einer der harmonischen Pole zweiten Grades von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den doppelt zu zählenden Punkt A und den Punkt A_1 mit A zusammen; die erste Polare von $\mathfrak{P}$ geht also durch A. Und umgekehrt: Verbindet man einen nicht auf f gelegenen Punkt $\mathfrak{P}$ mit einem Schnittpunkte A_3 der Curve f und der ersten Polaren φ' des Punktes $\mathfrak{P}$, so fällt in A_3 einer der Schnittpunkte von $\mathfrak{P}A_3$ und f mit einem harmonischen Pole zweiten Grades von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf diese drei Schnittpunkte zusammen; wenn nun die Gleichung

$$d_1(x - d_2)(x - d_3) + d_2(x - d_3)(x - d_1) + d_3(x - d_1)(x - d_2) = 0,$$

welche die harmonischen Pole zweiten Grades liefert, eine Wurzel $x = d_3$ enthält, so folgt $d_3(d_3 - d_1)(d_3 - d_2) = 0$. Da nun nach der Voraussetzung $\mathfrak{P}$ nicht auf f liegt, so ist $d_3 \gtrless 0$, folglich ist entweder $d_3 = d_1$, oder $d_3 = d_2$, es fallen also zwei Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{P}A_3$ und der Curve f in A_3 zusammen, die Curve f wird von $\mathfrak{P}A_3$ in A_3 berührt.

Wir haben daher den Satz: Die Tangenten, die von einem Punkte ausserhalb einer Curve III. O. an die Curve gelegt werden, berühren dieselbe in den Schnittpunkten mit den ersten Polaren des Punktes. Von jedem Punkte der Ebene aus, der nicht auf der Curve liegt, lassen sich daher im Allgemeinen sechs Tangenten an eine Curve III. O. legen.

Eine Ausnahme hiervon tritt ein, wenn die Curve f einen Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt hat. Für jeden Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene geht die erste Polare durch den Doppelpunkt; da nun in dem Doppelpunkte zwei Schnittpunkte von f und φ' zusammenfallen, so bleiben vier weitere Schnittpunkte von f und φ' übrig. Hat also eine Curve III. O. einen Doppelpunkt, so lassen sich von jedem Punkte, der nicht auf der Curve liegt, nur vier Tangenten an die Curve legen.

Hat die Curve III. O. einen Rückkehrpunkt, und wählt man dasselbe Coordinatensystem wie in No. 6, 2, so ergiebt sich für die erste Polare eines Punktes $\mathfrak{P}$ die Gleichung

$$\varphi' = 2a_{122}\mathfrak{x}_2 \cdot x_1 x_2 + (a_{122}\mathfrak{x}_1 + a_{222}\mathfrak{x}_2 + a_{223}\mathfrak{x}_3) \cdot x_2^2 + 2a_{223}\mathfrak{x}_2 x_2 x_3$$
$$+ a_{333}\mathfrak{x}_3 \cdot x_3^2 = 0.$$

Setzt man hierin $x_2 = 0$, so folgt $x_3^2 = 0$; hieraus ersieht man, dass φ' die Rückkehrtangente A_1A_3 im Rückkehrpunkte A_1 berührt.

Hat also eine Curve III. O. einen Rückkehrpunkt, so geht die erste Polare jedes Punktes der Ebene durch denselben und berührt die Rückkehrtangente.

Ferner ergiebt sich die Identität $3x_2\varphi' - 2\mathfrak{x}_2 f$

$$= (3a_{122}\mathfrak{x}_1 + a_{222}\mathfrak{x}_2 + 3a_{223}\mathfrak{x}_3)x_3'^2 + 3a_{333}\mathfrak{x}_3 x_2 x_3^2 - 2a_{333}\mathfrak{x}_2 x_3^3 = 0.$$

Für die Punkte, für welche die rechte Seite und f verschwindet, ist auch

$\varphi' = 0$. Wir schliessen hieraus: Eine Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt hat mit der ersten Polaren jedes Punktes ausser dem Rückkehrpunkte drei Punkte gemein. Hat eine Curve III. O. einen Rückkehrpunkt, so lassen sich von jedem Punkte der Ebene aus drei Tangenten an die Curve legen.

Liegt $\mathfrak{P}$ auf der Curve f, so wird die Gleichung der geraden Polaren mit der Gleichung der Curventangente in $\mathfrak{P}$ identisch; die Gleichung φ' wird alsdann von $\mathfrak{P}$ erfüllt, und da φ'' die Polaren von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf φ' ist, so ergiebt sich: Die erste Polare eines Punktes der Curve $f = 0$ berührt die Curve in diesem Punkte. Zugleich folgt: An eine Curve III. O. ohne Doppel- und Rückkehrpunkt lassen sich von einem Punkte der Curve aus vier Tangenten legen; an eine Curve III. O. mit Doppelpunkt lassen sich von einem Punkte der Curve aus zwei Tangenten legen; an eine Curve III. O. mit Rückkehrpunkt lässt sich von einem Punkte der Curve aus eine Tangente legen.

Ist $\mathfrak{P}$ ein Wendepunkt der Curve f, so zerfällt (No. 6) die erste Polare von $\mathfrak{P}$ in zwei Gerade, deren eine die Wendetangente ist; daher folgt: Von einem Wendepunkte einer Curve III. O. aus lassen sich (ausser der Wendetangente) noch drei oder eine Tangente an die Curve legen, je nachdem die Curve ohne Doppelpunkt ist oder nicht.

11. Die erste Polare φ' eines Punktes $\mathfrak{P}$ zerfällt in zwei Gerade, wenn die HESSE'sche Determinante H für die Coordinaten von $\mathfrak{P}$ verschwindet, also wenn $\mathfrak{P}$ auf der HESSE'schen Curve $H = 0$ liegt. Die Coordinaten des Doppelpunkts von φ' erfüllen die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_{11}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1 + f_{12}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2 + f_{13}(\mathfrak{x})\cdot\xi_3 &= 0, \\ f_{12}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1 + f_{22}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2 + f_{23}(\mathfrak{x})\cdot\xi_3 &= 0, \\ f_{13}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1 + f_{23}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2 + f_{33}(\mathfrak{x})\cdot\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ordnet man diese Gleichungen nach $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$, so erhält man (vergl. No. 1, 4)

$$\begin{aligned} f_{11}(\xi)\cdot\mathfrak{x}_1 + f_{12}(\xi)\cdot\mathfrak{x}_2 + f_{13}(\xi)\cdot\mathfrak{x}_3 &= 0, \\ f_{12}(\xi)\cdot\mathfrak{x}_1 + f_{22}(\xi)\cdot\mathfrak{x}_2 + f_{23}(\xi)\cdot\mathfrak{x}_3 &= 0, \\ f_{13}(\xi)\cdot\mathfrak{x}_1 + f_{23}(\xi)\cdot\mathfrak{x}_2 + f_{33}(\xi)\cdot\mathfrak{x}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass für die Coordinaten des Doppelpunkts von φ' ebenfalls die Determinante H verschwindet. Wir schliessen daher: Der Ort der Punkte, deren erste Polaren in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung f in zwei Gerade zerfallen, sowie der Ort der Doppelpunkte der zerfallenden Polaren ist die HESSE'sche Curve der Curve f.

12. Aus dem ersten Satze in No. 9 folgt: Ist φ' die erste Polare von $\mathfrak{P}$, so gehen die geraden Polaren aller auf φ' liegenden Punkte durch $\mathfrak{P}$, und die Pole der durch $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden (d. i. die Punkte, welche diese Linien zu geraden Polaren haben) liegen auf φ'.

Ist φ_1' die erste Polare von A_1, φ_2' die erste Polare von A_2, und B ein Schnittpunkt von φ_1' und φ_2', so geht die gerade Polare von B durch A_1 und durch A_2, ist also die Gerade A_1A_2. Sind $x_{\varkappa 1}$ und $x_{\varkappa 2}$ die Coordinaten von A_1 und A_2, so hat irgend ein Punkt P auf A_1A_2 die Coordinaten

$$x_\varkappa = \frac{\lambda_1 x_{\varkappa 1} + \lambda_2 x_{\varkappa 2}}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

daher ist die Gleichung der ersten Polaren von P: $\varphi' \equiv \lambda_1\varphi_1' + \lambda_2\varphi_2' = 0$.

Wir schliessen: Es giebt vier Punkte, welche eine gegebene Gerade zur Polaren haben. Die ersten Polaren der Punkte einer Geraden

bilden ein mit dieser Punktreihe projectives Kegelschnittbüschel, dessen Träger die Pole der Geraden sind.

13. Besteht eine Curve III. O. aus drei Geraden, die nicht durch denselben Punkt gehen, und nimmt man die Geraden zu Coordinatenachsen, so ist die Gleichung des Vereins dieser drei Geraden $f \equiv 6\, x_1 x_2 x_3 = 0$, wobei der Faktor 6 hinzugefügt worden ist, um Uebereinstimmung mit der allgemeinen Form der cubischen Gleichung zu haben. Für diese Function f ist

$$f = 2x_2 x_3\,, \quad f = 2x_1 x_3\,, \quad f_3 = 2x_1 x_2\,,$$
$$f_{11} = 0\,, \quad f_{12} = x_3\,, \quad f_{13} = x_2\,, \quad f_{22} = 0\,, \quad f_{23} = x_1\,, \quad f_{33} = 0.$$

Die Gleichungen der ersten Polaren und der geraden Polaren eines Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die aus den Seiten des Achsendreiecks bestehende cubische Curve sind daher

$$\varphi' \equiv \mathfrak{x}_1 \cdot x_2 x_3 + \mathfrak{x}_2 \cdot x_3 x_1 + \mathfrak{x}_3 \cdot x_1 x_2 = 0,$$
$$\frac{1}{2\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3}\,\varphi'' \equiv \frac{x_1}{\mathfrak{x}_1} + \frac{x_2}{\mathfrak{x}_2} + \frac{x_3}{\mathfrak{x}_3} = 0.$$

Beide Polaren lassen sich leicht construiren. Setzt man in φ'' die Coordinate $x_1 = 0$, so erhält man

$$T_1 \equiv \frac{x_2}{\mathfrak{x}_2} + \frac{x_3}{\mathfrak{x}_3} = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer durch A_1 gehenden Geraden; mithin die Gleichung der Geraden, die A_1 mit dem Punkte verbindet, in welchem φ'' die Dreieckseite $A_2 A_3$ schneidet.

Ebenso erhält man, dass die Strahlen, die A_2 und A_3 mit den Schnittpunkten der Polaren φ'' und der gegenüberliegenden Seite des Coordinatendreiecks verbinden, die Gleichungen haben

$$T_2 \equiv \frac{x_1}{\mathfrak{x}_1} + \frac{x_3}{\mathfrak{x}_3} = 0\,, \qquad T_3 \equiv \frac{x_1}{\mathfrak{x}_1} + \frac{x_2}{\mathfrak{x}_2} = 0.$$

Den Achsen $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und der Geraden T_1 ist die Gerade $A_1\mathfrak{P}$ harmonisch zugeordnet; denn die Gleichung von $A_1\mathfrak{P}$ ist

$$\frac{x_2}{\mathfrak{x}_2} - \frac{x_3}{\mathfrak{x}_3} = 0;$$

ebenso ist $A_2\mathfrak{P}$ der vierte harmonische Strahl zu $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ und T_2, sowie $A_3\mathfrak{P}$ harmonisch zu $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und T_3.

Um daher die gerade Polare eines Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf ein Dreieck $A_1A_2A_3$ zu construiren, verbindet man $\mathfrak{P}$ mit A_1 und A_2, construirt zu A_1A_2, A_1A_3, $A_1\mathfrak{P}$ den vierten harmonischen Strahl T_1, sowie zu A_2A_1, A_2A_3, $A_2\mathfrak{P}$ den vierten harmonischen T_2 und verbindet die Punkte, in denen A_2A_3 und A_1A_3 von T_1 und T_2 geschnitten werden; diese Gerade ist die gesuchte Polare.

Die erste Polare φ' geht durch die Ecken des Coordinatendreiecks. Die Gleichung der Tangente an φ' im Punkte Π ist

$$(\mathfrak{x}_2 \cdot \xi_3 + \mathfrak{x}_3 \cdot \xi_2)\, x_1 + (\mathfrak{x}_3 \cdot \xi_1 + \mathfrak{x}_1 \cdot \xi_3)\, x_2 + (\mathfrak{x}_1 \cdot \xi_2 + \mathfrak{x}_2 \cdot \xi_1)\, x_3 = 0.$$

Die Gleichungen der Tangenten, welche in A_1, A_2, A_3 berühren, sind daher

$$\mathfrak{x}_3 x_2 + \mathfrak{x}_2 x_3 = 0, \quad \mathfrak{x}_1 x_3 + \mathfrak{x}_3 x_1 = 0, \quad \mathfrak{x}_2 x_1 + \mathfrak{x}_1 x_2 = 0;$$

dies sind aber der Reihe nach die Geraden T_1, T_2, T_3. Die erste Polare eines Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf das Dreieck $A_1A_2A_3$ wird also erhalten, indem man T_1 und T_2 construirt, und den Kegelschnitt zeichnet, der durch $A_1A_2A_3$ geht und T_1 und T_2 berührt.

14. Diese Constructionen lehren zugleich, wie man für einen Punkt $\mathfrak{P}$ in Bezug auf drei mit $\mathfrak{P}$ auf einer Geraden T gelegene Punkt ABC die

beiden harmonischen Pole zweiten Grades und den harmonischen Pol ersten Grades findet. Man ziehe durch ABC drei Gerade S_1, S_2, S_3, die nicht durch einen Punkt gehen, und construire die Schnittpunkte der Geraden T mit der ersten Polaren des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Geraden S_1, S_2, S_3; diese Schnittpunkte sind die gesuchten harmonischen Pole zweiten Grades; ferner construire man die gerade Polare von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf S_1, S_2, S_3; diese schneidet T in dem gesuchten harmonischen Pole ersten Grades.

15. Zieht man durch einen Punkt $\mathfrak{P}$ zwei Gerade und nimmt auf jeder derselben drei Punkte an A, B, C und A', B', C', so hat $\mathfrak{P}$ für alle cubischen Curven, die durch diese sechs Punkte gehen, dieselbe gerade Polare, denn diese ist die Verbindungslinie der harmonischen Pole ersten Grades für den Punkt $\mathfrak{P}$ in Bezug auf ABC und $A'B'C'$. Die einfachsten Curven III. O., die sich durch die sechs Punkte legen lassen, sind die sechs Vereine von drei Geraden, welche die Punkte paarweis verbinden, z. B. der Verein der Geraden AA', BB', CC'. Um daher die gerade Polare von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Curve III. O. $f = 0$ zu construiren, verbinden wir $\mathfrak{P}$ mit zwei bekannten Punkten A und A' der Curve f und construiren die beiden übrigen Schnittpunkte von f mit der Geraden $\mathfrak{P}A$ und $\mathfrak{P}A'$; diese Punkte BC und $B'C'$ werden durch gerade Linien und Kreise nach § 15, No. 13 gefunden. Unter Anwendung des Lineals allein bestimmt man nun die gerade Polare von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die drei Geraden AA', BB', CC' (oder AB', BA', CC' u. s. w.); diese ist die gesuchte Linie.

16. Die erste Polare eines Punktes $\mathfrak{P}$ für eine Curve III. O. $f = 0$ wird in folgender Weise gefunden:

Man verbinde $\mathfrak{P}$ mit drei bekannten Punkten A, A', A'' der Curve f und bestimme die Punktpaare BC, $B'C'$, $B''C''$ in welchen f von den Strahlen $\mathfrak{P}A$, $\mathfrak{P}A'$, $\mathfrak{P}A''$ noch geschnitten wird. Hierauf ziehe man AA', BB', CC' (oder AB', BA', CC' u. s. w.) und construire die zwei Paar Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{P}A$ und $\mathfrak{P}A'$ mit der ersten Polaren des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den Verein von Geraden AA', BB', CC'; durch diese vier Punkte geht die gesuchte erste Polare. Zieht man nun $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, so geht die erste Polare von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf diese drei Geraden durch die schon bekannten beiden harmonischen Pole zweiten Grades von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Punkte $A'B'C'$ und durch die Schnittpunkte der Geraden $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, ist also durch diese fünf Punkte bestimmt; construirt man hiernach die Schnittpunkte dieser Polaren mit $\mathfrak{P}A''$, so hat man nun auch die beiden harmonischen Pole zweiten Grades von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf $A''B''C''$, also noch zwei Punkte der gesuchten ersten Polaren von $\mathfrak{P}$ für f, die nun durch im Ganzen sechs Punkte mehr als ausreichend bestimmt ist.

§ 17. Construction von Curven dritter Ordnung mit Doppel- und Rückkehrpunkt.

1. Eine Curve III. O. mit Doppelpunkt wollen wir durch C_δ, eine Curve III. O. mit Rückkehrpunkt durch C_ρ bezeichnen.

Ist $f \equiv \Sigma a_{ikl} x_i x_k x_l = 0$ die Gleichung einer C_δ, und sind die Coordinaten $\xi_\varkappa$ des Doppelpunktes Π gegeben, so bestehen die Gleichungen

1. $a_{111}\xi_1^2 + 2a_{112}\xi_1\xi_2 + 2a_{113}\xi_1\xi_3 + a_{122}\xi_2^2 + 2a_{123}\xi_2\xi_3 + a_{133}\xi_3^2 = 0,$
2. $a_{112}\xi_1^2 + 2a_{122}\xi_1\xi_2 + 2a_{123}\xi_1\xi_3 + a_{222}\xi_2^2 + 2a_{223}\xi_2\xi_3 + a_{233}\xi_3^2 = 0,$
3. $a_{113}\xi_1^2 + 2a_{123}\xi_1\xi_2 + 2a_{133}\xi_1\xi_3 + a_{223}\xi_2^2 + 2a_{233}\xi_2\xi_3 + a_{333}\xi_3^2 = 0.$

Durch jeden weiteren Punkt der Curve ist noch eine homogene lineare

Gleichung der Coefficienten gegeben, wir brauchen daher ausser dem Doppelpunkte noch sechs weitere Punkte, um die Coefficientenverhältnisse

$$a_{111} : a_{112} : \ldots\ldots : a_{233} : a_{333}$$

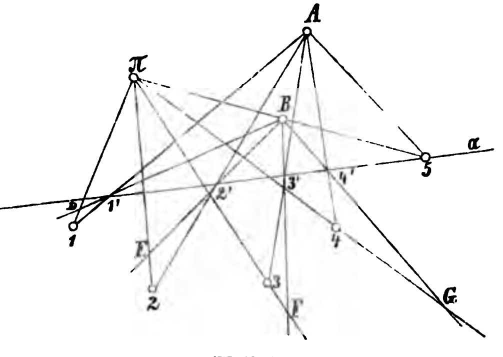
eindeutig zu bestimmen. Eine C_3 ist daher durch den Doppelpunkt und sechs weitere Punkte bestimmt.

2. Zieht man durch einen beliebigen Punkt A einer C_3 zwei Strahlen T_1, T_2, welche die Curve ausserdem in B_1C_1 und B_2C_2 schneiden, so wie einen dritten Strahl T_3, und hebt einen weiteren Schnittpunkt B_3 desselben mit der Curve hervor; zieht die Strahlenpaare S_1S_1', S_2S_2', durch welche B_1C_1 und B_2C_2 mit dem Doppelpunkte Π verbunden werden, sowie den Strahl S_3, der von Π nach B_3 geht; so ist durch die Strahlenpaare S_1S_1', S_2S_2' eine quadratische Strahleninvolution bestimmt. Setzt man nun das Strahlbüschel des Punktes A mit dieser Involution derart in projective Beziehung, dass T_1 dem Strahlenpaare S_1S_1', T_2 dem Paare S_2S_2' und T_3 dem Paare entspricht, zu welchem S_3 gehört, so ist dadurch die Projectivität des Strahlbüschels und der Involution vollständig bestimmt.

Der Ort der Schnittpunkte der Strahlen des Büschels mit den entsprechenden Strahlenpaaren der Involution ist (§ 15, No. 14) eine Curve III. O., die den Träger der Involution zum Doppelpunkte hat, und durch den Träger des Strahlbüschels geht; diese Ortscurve hat daher ausser dem Doppelpunkte noch die sechs Punkte A, B_1, C_1, B_2, C_2, B_3 mit der gegebenen Curve C_3 gemein, folglich ist sie (No. 1) mit C_3 identisch. Wir schliessen hieraus: Eine C_3 kann in unendlich vielfacher Weise durch eine Strahleninvolution, deren Träger der Doppelpunkt ist, und ein projectives Strahlbüschel erzeugt werden; jeder einfache Punkt der Curve kann zum Träger des Strahlbüschels genommen werden. Ferner: Die Punktpaare, in welchen eine C_3 durch die Strahlen eines Büschels geschnitten wird, dessen Träger auf der Curve liegt, werden vom Doppelpunkte aus durch die Strahlenpaare einer Involution projicirt, die mit dem Strahlenbüschel projectiv ist.

3. Um eine C_3 aus dem Doppelpunkte Π und sechs weiteren Punkten 1, 2, 3, 4, 5, A zu construiren, stellt man die Involution her, die mit dem projectiven Strahlbüschel, dessen Träger A ist, die Curve erzeugt.

Schneidet man das Strahlbüschel durch eine Gerade α, die durch 5 geht und die nach 1, 2, 3, 4 gehenden Strahlen in 1', 2', 3', 4' trifft, und projicirt man diese Punkte von einem auf der Geraden $\Pi 5$ gelegenen Punkte B aus, so ist das Büschel B projectiv mit dem Büschel A, also auch mit der gesuchten Involution. Der Strahl $B5$ entspricht dem Paare der Involution, zu welchem $\Pi 5$



(M. 426.)

gehört; da nun B auf $\Pi 5$ liegt, so befinden sich die Involution Π und das Büschel B in reducirter Lage (§ 15, No. 15), erzeugen also keine eigentliche Curve III. O., sondern eine, die in die Gerade ΠB und einen durch Π gehenden Kegelschnitt K zerfällt. Von diesem Kegelschnitte sind nun fünf Punkte bekannt:

Π, und die Punkte D, E, F, G, in denen die Strahlen $\Pi 1$, $\Pi 2$, $\Pi 3$, $\Pi 4$ von $B1'$, $B2'$, $B3'$, $B4'$ geschnitten werden. Hierdurch ist derselbe bestimmt.

Um nun die gesuchte C_3 zu vervollständigen, d. i. um den Punkt zu erhalten, der auf einem beliebigen durch Π gezogenen Strahle S liegt, bestimme man nach dem PASCAL'schen Satze den Punkt H, in welchem K von S zum zweiten Male getroffen wird, verbinde H mit B, und zeichne den Strahl des Büschels A, der BH entspricht; dieser trifft S in dem gesuchten Curvenpunkte.

4. Einem Strahle des Büschels A, der an dem Doppelpunkte Π unendlich nahe vorbei geht, entspricht ein Paar der Involution, dessen Strahlen die C_3 in Punkten treffen, die dem Doppelpunkte nächst benachbart sind. Die Doppelpunktstangenten sind daher das Strahlenpaar der Involution, das dem nach dem Doppelpunkte gehenden Strahle des Büschels A entspricht.

Nähert sich ein Strahl eines Strahlenpaares der Involution dem Punkte A, so nähert sich einer von den Schnittpunkten des dem Paare entsprechenden Strahles und der Curve dem Punkte A. Die Tangente an die C_3 im Punkte A entspricht daher dem Strahlenpaare der Involution, auf welchem A liegt.

Diese Bemerkungen geben die Auflösung der beiden Aufgaben: Eine Curve C_3 ist durch den Doppelpunkt und sechs weitere Punkte gegeben; man soll die Doppelpunktstangenten und die Tangenten der Curve in einem gegebenen Punkte derselben construiren.

5. Sind $S_1S_1' = 0$, $S_2S_2' = 0$, $S_3S_3' = 0$ drei Strahlenpaare einer Involution, so hat man $S_3S_3' \equiv a_1S_1S_1' + a_2S_2S_2'$. Die Gleichung jedes andern Paares kann dann geschrieben werden

$$SS' \equiv \lambda_1 a_1 S_1 S_1' + \lambda_2 a_2 S_2 S_2' = 0.$$

Es kann sich ereignen, dass für gewisse Werthe des Verhältnisses $\lambda_1 : \lambda_2$ das Paar SS' aus conjugirt complexen Geraden besteht, von denen nur der Träger Π der Involution real ist. Legt man durch Π einen Kreis K, und verbindet die Punkte, in welchen der Kreis von S_1S_1', S_2S_2', S_3S_3', SS' geschnitten wird, durch die Strahlen R_1, R_2, R_3, R, so schneiden diese sich in einem Punkte C und bilden ein der Involution projectives Büschel; hat man also $R_3 \equiv b_1R_1 + b_2R_2$, so ist die Gleichung des Strahles R

$$R \equiv \lambda_1 b_1 R_1 + \lambda_2 b_2 R_2 = 0.$$

Durchläuft das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ die reale Zahlenreihe, so beschreibt der Strahl R das ganze Strahlbüschel C. Liegt nun C im Innern des Kreises K, so schneidet jeder Strahl des Büschels den Kreis, jedem Werthe von $\lambda_1 : \lambda_2$ gehört also ein reales Strahlenpaar der Involution zu; liegt hingegen C ausserhalb des Kreises, so wird der Kreis nur von dem kleineren Theile der durch C gehenden Strahlen geschnitten, es gehören also nur zu einem bestimmten Werthgebiete des Verhältnisses $\lambda_1 : \lambda_2$ reale Strahlenpaare. Die Werthe von $\lambda_1 : \lambda_2$, welchen die Strahlen zugehören, die den Kreis K berühren, grenzen das Gebiet der Zahlen $\lambda_1 : \lambda_2$, zu welchem reale Strahlenpaare der Involution gehören, von dem Gebiete ab, welchem complexe Strahlenpaare zugehören; diesen beiden Grenzwerthen entsprechen die Asymptoten der Involution. Wir schliessen daher: Ist ein Strahlbüschel mit einer quadratischen Strahleninvolution projectiv, und hat die Involution keine realen Asymptoten, so entspricht jedem Strahle des Büschels ein reales Strahlenpaar der Involution. Hat die Involution reale Asymptoten $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$, so construire man die ihnen entsprechenden Strahlen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ des projectiven

Büschels; diese Strahlen theilen die Ebene in zwei Paar Scheitelwinkel; den Strahlen, welche durch das eine dieser beiden Paare gehen, entsprechen reale Paare, denen, die durch das andere Paar Scheitelwinkel gehen, entsprechen conjugirt complexe Strahlenpaare der Involution.

Die Strahlen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_1$ werden die Verzweigungsstrahlen des Strahlbüschels C in Bezug auf die projective Involution Π genannt.

6. Hat man (nach No. 3) ein Strahlbüschel und die dazu projective Involution, durch welche eine C_3 erzeugt wird, so kann es sich ereignen, dass die Involution reale Asymptoten hat, und dass der Doppelpunkt Π zwischen den Verzweigungsstrahlen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ des Strahlbüschels in einem der beiden Scheitelwinkel liegt, durch welche die Strahlen gehen, denen complexe Strahlenpaare entsprechen. In diesem Falle hat die C_3 keine realen Doppelpunktstangenten; und da keiner der Strahlen des Büschels, welche durch das Winkelfeld gehen, in welchem Π liegt, die C_3 schneidet — denn keinem entspricht ein reales Strahlenpaar der Involution — so hat die Curve in der Umgebung des Doppelpunktes keine realen Punkte. In diesem Falle bezeichnet man den Doppelpunkt als isolirten Punkt.

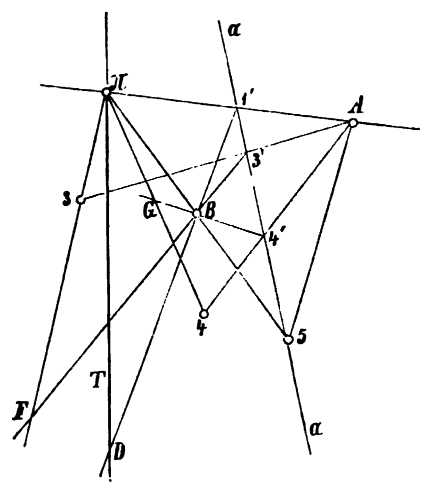
Die Verzweigungsstrahlen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ berühren die C_3 in den Schnittpunkten mit den ihnen entsprechenden Asymptoten $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ der Involution.

Hat eine C_3 einen isolirten Punkt, und wählt man der Reihe nach alle Punkte der Curve zu Trägern eines Strahlbüschels und bestimmt die zugehörige Involution, welche mit dem Büschel die C_3 erzeugt, so muss jede solche Involution reale Asymptoten haben und Π immer in dem Gebiete zwischen den Verzweigungsstrahlen liegen, dessen Strahlen keine realen Strahlenpaare der Involution entsprechen. Wir schliessen daher: Hat eine Curve III. O. einen isolirten Punkt, so gehen von jedem Punkte der Curve aus zwei reale Tangenten an die Curve (ausser der Geraden, welche die C_3 in dem Punkte selbst berührt).

7. Liegt der Träger Π einer quadratischen Strahleninvolution auf einem der beiden Verzweigungsstrahlen $\mathfrak{X}$ eines projectiven Strahlbüschels, so fallen die Doppelpunktstangenten der durch das Büschel und die Involution erzeugten C_3, die dem nach Π gehenden Strahle $\mathfrak{X}$ entsprechen, in eine Asymptote $\mathfrak{S}$ der Involution zusammen. Die Curve III. O. hat also in diesem Falle Π zum Rückkehrpunkte und $\mathfrak{S}$ zur Rückkehrtangente.

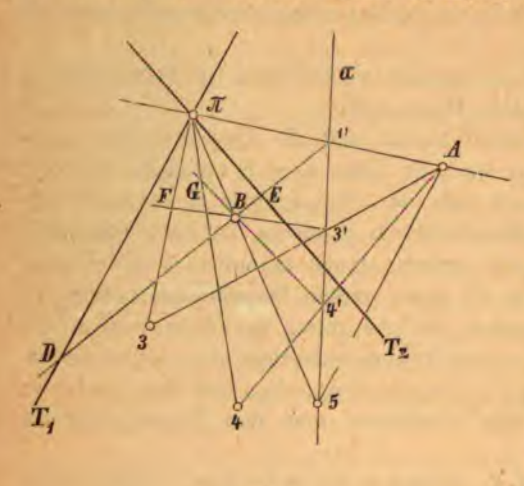
8. Sind von einer Curve C_3 der Rückkehrpunkt Π, die Rückkehrtangente T und vier weitere Punkte 3, 4, 5, A gegeben, so kann die Curve ı wesentlich derselben Weise construirt erden, wie eine durch den Doppelpunkt nd sechs Punkte bestimmte C_3.

Dem Strahle $A\Pi$ entspricht die Rückehrtangente T, mithin entspricht dieser n Büschel B der nach dem Schnitte on ΠA und α gehende Strahl $B1'$. Da iesem Strahle die Asymptote T der



(M. 427.)

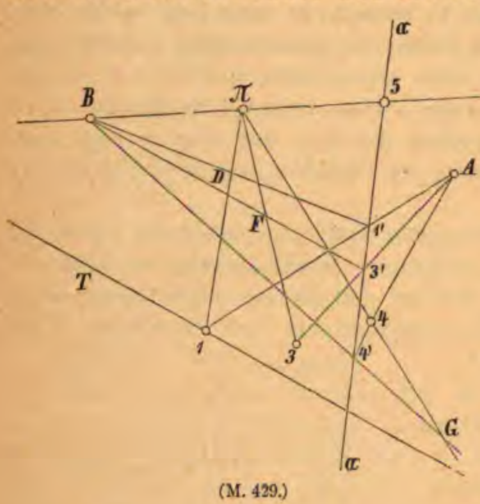
Involution Π entspricht, so wird der von der Involution und dem Büschel B erzeugte Kegelschnitt K von dem Strahle $B1'$ in D berührt. Der Kegelschnitt K ist daher durch die vier Punkte Π, D, F, G und durch die Tangente DB im Punkte D bestimmt.



(M. 428.)

9. Um eine C_3 aus dem Doppelpunkte Π, den Doppelpunktstangenten T_1, T_2 und vier weiteren Punkten 3, 4, 5, A zu construiren, verfährt man ebenfalls nach No. 3; nur treten jetzt der Strahl $A\Pi$ an die Stelle der beiden Strahlen $A1$, $A2$, und die Geraden T_1, T_2 für die Geraden $\Pi 1$, $\Pi 2$ ein.

10. Eine C_3 kann aus dem Doppelpunkte Π, einem Punkte und der Tangente in demselben und aus vier weiteren Punkten nach folgendem Verfahren construirt werden, welches auch noch anwendbar bleibt, wenn von der C_3 ausser Π vier Punkte und die Tangenten in zweien derselben, oder drei Punkte und die Tangenten in denselben gegeben sind. Stellt man dieselbe Figur her, wie in No. 3, so fallen diesmal zwei gegebene Punkte auf 1 und den nächst benachbarten Punkt der gegebenen Tangente T; diesen gehören zwei unendlich nahe an $B1'$ benachbarte Strahlen des Büschels B und zwei unendlich nahe an $\Pi 1$ gelegene Gerade durch Π zu. Diese beiden Paare zugehöriger Geraden des Büschels B und der Involution Π schneiden sich in zwei unendlich nahen bei D liegenden Punkten; es kommt nur darauf an, die Gerade S zu finden, auf der sie liegen, diese wird dann die Tangente des Kegelschnitts K im Punkte D sein.

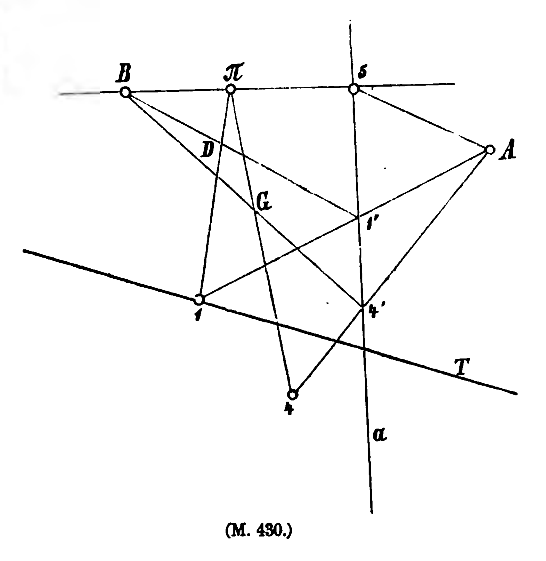


(M. 429.)

Projicirt man die Punkte der Geraden T von A aus, und construirt mit Hülfe der Geraden α die entsprechenden Strahlen von B, und projicirt sodann auch die Punktreihe T von Π aus, so erhält man zwei projective Strahlbüschel Π und B, in denen $\Pi 1$ und $B1'$, sowie die genannten diesen beiden unendlich nahen Strahlen einander entsprechen. Diese Büschel erzeugen einen Kegelschnitt Γ, der durch B, Π und D geht, und mithin durch zwei weitere Punkte bestimmt ist, die man durch Projection zweier beliebigen Punkte der Geraden T gewinnt. Die Tangente dieses Kegelschnitts im Punkte D ist die gesuchte Gerade S.

Der Kegelschnitt K (No. 3) ist nun durch die Punkte Π, D, F, G und die Tangente in D bestimmt.

11. Um eine C_3 aus dem Doppelpunkte Π, einem Wendepunkte 1, der zugehörigen Wendetangente T und zwei weiteren Punkten 4 und 5 zu construiren, hat man die Construction No. 3 dem Umstande entsprechend zu verändern, dass diesmal drei Punkte 1, 2, 3 in 1 zusammenfallen. Construirt man, wie in No. 10, den Kegelschnitt Γ, so hat dieser mit K im Punkte D drei unendlich nahe Punkte gemein, Γ und K berühren sich also in D dreipunktig. Die Kegelschnitte Γ und K haben vier Punkte gemein, nämlich Π und die drei in D zusammenfallenden Punkte. Durch diese vier Punkte geht auch das Geradenpaar M, das aus der von Π nach einem der drei Punkte bei D gehenden Geraden ΠD und aus der Verbindungslinie der beiden andern Punkte, d. i. aus der Geraden S besteht, die Γ in D berührt.



(M. 430.)

Der Kegelschnitt K kann nun als der durch G gehende Kegelschnitt des von Γ und M bestimmten Kegelschnittbüschels construirt werden.*)

§ 18. Correspondirende Punkte einer Curve dritter Ordnung.

1. Sind T_1T_1', T_2T_2', T_3T_3' drei Strahlenpaare einer quadratischen Involution, und S_1S_1', S_2S_2', S_3S_3' die entsprechenden Paare einer projectiven Involution, und ist

$$T_3T_3' \equiv a_1T_1T_1' + a_2T_2T_2', \qquad S_3S_3' \equiv b_1S_1S_1' + b_2S_2S_2',$$

so entsprechen sich die Paare

$$TT' \equiv \lambda_1 a_1 \cdot T_1T_1' + \lambda_2 a_2 \cdot T_2T_2' = 0 \text{ und } SS' \equiv \lambda_1 b_1 \cdot S_1S_1' + \lambda_2 b_2 \cdot S_2S_2' = 0.$$

Die Punkte, in denen sich entsprechende Paare schneiden, genügen der Gleichung, die aus $TT' = 0$ und $SS' = 0$ durch Elimination von λ_1 und λ_2 hervorgeht $f \equiv a_1b_2 \cdot T_1T_1' \cdot S_2S_2' - a_2b_1 \cdot T_2T_2' \cdot S_1S_1' = 0$.

Diese Gleichung ist vom vierten Grade. Wenn $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$, oder wenn $S_2 = 0$ und $S_1 = 0$, so ist auch $f = 0$, also geht die Curve f durch die Träger der beiden Involutionen. Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlenpaare zweier projectiven Involutionen ist also eine Curve vierter Ordnung, die durch die Träger der beiden Involutionen geht.

2. Die Coordinaten der Schnittpunkte einer Curve $n$ter Ordnung mit einer Geraden $T \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ sind die Wurzeln der Gleichungen

$$f = 0, \qquad T = 0, \qquad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$

Aus den letzten beiden linearen Gleichungen ergeben sich x_2 und x_3 als lineare Functionen von x_1; setzt man diese Werthe in f ein, so erhält man eine

*) Ueber Curven III. O. mit Doppelpunkt vergl. Weyr, Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde. Leipzig 1869.

Gleichung $n$ten Grades, die nur die Unbekannte x_1 enthält. Zu jeder der nWurzeln dieser Gleichung erhält man aus der zweiten und dritten Gleichung die zugehörigen Werthe von x_2 und x_3. Dies ergiebt: Eine Curve $n$ter Ordnung wird von einer Geraden in nPunkten geschnitten.

3. Jede durch den Träger A der ersten Involution (No. 1) gehende Gerade T gehört zu einem bestimmten Strahlenpaare TT' dieser Involution; die Punkte, in welchen dieses Paar die Curve $f = 0$ schneidet, liegen auf dem entsprechenden Strahlenpaare SS'. Also hat die Gerade T ausser dem Punkte A noch zwei Punkte mit der Curve gemein. Wir schliessen hieraus, dass jede durch A gehende Gerade im Punkte A zwei zusammenfallende Schnittpunkte mit der Curve $f = 0$ hat, dass also A ein Doppelpunkt der Curve ist. Durch zwei projective Strahleninvolutionen wird eine Curve vierter Ordnung erzeugt, welche die Träger der beiden Involutionen zu Doppelpunkten hat.

4. Wenn die Strahlenpaare zweier Involutionen sich entsprechen, zu welchen der die Träger verbindende Strahl gehört, so sagt man, die Involutionen befinden sich in reducirter Lage. Ist R der durch die Träger gehende Strahl, und entsprechen sich die Paare RT_1' und RS_1', so kann man in No. 1 die Paare RT_1' und RS_1' statt der Paare T_1T_1' und S_1S_1' nehmen. In der Gleichung $f = 0$ tritt dann der Faktor R auf, indem man hat

$$f \equiv R\,(a_1b_2T_1' \cdot S_2S_2' - a_2b_1T_2T_2' \cdot S_1').$$

Die Curve vierter Ordnung f zerfällt also in die Gerade $R = 0$ und in die Curve III. O.

$$\varphi \equiv a_1b_2T_1'S_2S_2' - a_2b_1T_2T_2'S_1' = 0.$$

Der Gleichung $\varphi = 0$ wird genügt, wenn $T_1' = 0$ und $T_2 = 0$, sowie wenn $S_2 = 0$ und $S_1' = 0$, also geht die Curve φ durch die Träger der beiden Involutionen. Jede durch einen der beiden Träger gehende Gerade hat ausser dem Träger noch zwei, im Ganzen also drei im Allgemeinen von einander getrennte Punkte mit der Curve φ gemein. Wir schliessen daher: Zwei projective Strahleninvolutionen in reducirter Lage erzeugen eine Curve III. O., welche die Träger der Involutionen zu einfachen Punkten hat.

5. Die Gerade R kann als die durch A gehende Gerade aufgefasst werden, die unendlich nahe am Träger B der andern Involution vorbeigeht. Sie schneidet daher den Strahl S_1', der zu dem RT_1' entsprechenden Paare gehört, in einem unendlich nahe bei B liegenden Punkte. Da dieser Punkt, als ein Durchschnittspunkt der Paare RT_1' und RS_1', auf φ liegt, so folgt, dass die Gerade S_1' die Curve φ im Punkte B berührt. Ebenso folgt, dass φ von T_1' in A berührt wird. Die beiden Strahlen T_1' und S_1' schneiden sich auf der Curve φ; dies ergiebt: Die Träger zweier projectiven Involutionen in reducirter Lage haben auf der von den Iuvolutionen erzeugten Curve III. O. denselben Begleiter.

Zwei Punkte einer Curve III. O., die denselben Begleiter haben, werden als correspondirende Punkte der Curve bezeichnet. Von einem Punkte P einer Curve III. O., die keinen Doppel- oder Rückkehrpunkt besitzt, lassen sich (ausser der Tangente in P) vier Tangenten an die Curve legen; zu jedem Curvenpunkte giebt es daher drei correspondirende Punkte.

Vier Curvenpunkte, die denselben Begleiter haben, die also zu je zweien correspondirend sind, heissen das dem Begleiter zugehörige Punktquadrupel.

6. Die Frage, ob je zwei correspondirende Punkte eine Curve III. O. als Träger zweier projectiven Involutionen in reducirter Lage auftreten, durch welche

die Curve erzeugt wird, wollen wir dadurch beantworten, dass wir angeben, wie eine Curve III. O. aus zwei correspondirenden Punkten A und B, den Tangenten in diesen Punkten und einer genügenden Anzahl weiterer Punkte durch zwei projective Involutionen construirt werden kann.

Sind A_1, A_2 zwei correspondirende Punkte einer C''', A_3 ihr Begleiter, so nehme man $A_1A_2A_3$ zum Coordinatendreieck. Die Durchschnittspunkte der Geraden A_2A_3 und der Curve ergeben sich aus der Gleichung

1. $$a_{222}x_2^3 + 3a_{223}x_2^2x_3 + 3a_{233}x_2x_3^2 + a_{333}x_3^3 = 0.$$

Da nun von den Schnittpunkten zwei mit A_2 und einer mit A_3 zusammenfallen, so muss sich die Gleichung 1. auf $x_2x_3^2 = 0$ reduciren, es ist also

$$a_{222} = a_{223} = a_{333} = 0.$$

Die Verhältnisse der Coordinaten $x_1 : x_3$ für die Schnittpunkte von A_1A_3 und der Curve erhält man aus

2. $$a_{111}x_1^3 + 3a_{113}x_1^2x_3 + 3a_{133}x_1x_3^2 + a_{333}x_3^3 = 0.$$

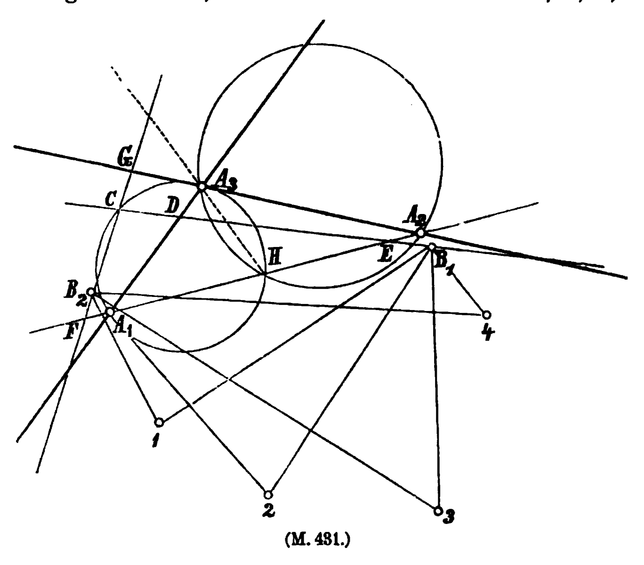
Da diese Gleichung zwei mit A_1 und einen mit A_3 zusammenfallenden Schnittpunkt ergeben muss, so muss sie sich auf $x_1x_3^2 = 0$ reduciren; folglich ist $a_{111} = a_{113} = 0$.

Die Gleichung der Curve in Bezug auf $A_1A_2A_3$ ist daher

$$f = 3a_{112}x_1^2x_2 + 3a_{122}x_1x_2^2 + 6a_{123}x_1x_2x_3 + 3a_{133}x_1x_3^2 + 3a_{233}x_1x_3^2 = 0.$$

Die Verhältnisse der fünf Coefficienten in dieser Gleichung werden durch vier weitere Punkte bestimmt. Dies ergiebt: Eine Curve III. O. ist durch zwei correspondirende Punkte, ihren Begleiter und vier weitere Punkte eindeutig bestimmt.

7. Um die C''' zu construiren, welche A_1A_2 zu correspondirenden Punkten, A_3 zu ihrem Begleiter hat, und durch die Punkte 1, 2, 3, 4 geht, legen wir einen Kegelschnitt K_1 durch A_1, 1, 2, 3, 4 und einen Kegelschnitt K_2 durch A_2, 1, 2, 3, 4.



(M. 431.)

Sind J_1 und J_2 die projectiven Involutionen mit den Trägern A_1 und A_2, durch welche die Curve erzeugt wird, so suchen wir die beiden Strahlbüschel, die mit J_1 und J_2 zusammen die Kegelschnitte K_1 und K_2 erzeugen; die Träger dieser Büschel seien B_1 und B_2. Da A_1A_3, A_1A_2 ein Paar der Involution J_1 ist, so liegt B_1 auf der Geraden, welche die Schnittpunkte D und E von K_1 und A_1A_3, A_1A_2 verbindet; ebenso liegt B_2 mit den Schnittpunkten G und F von K_2 mit A_2A_3, A_2A_1 auf einer Geraden.

Die Büschel B_1 und B_2 sind projectiv mit den beiden projectiven Involutionen J_1 und J_2, also sind sie auch unter einander projectiv, und die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen auf einem Kegelschnitte L. Da nun in den

Büscheln B_1 und B_2 die Strahlen sich entsprechen, die nach 1, 2, 3, 4, C gehen, so folgt, dass L durch 1, 2, 3, 4, C geht. Die Punkte B_1 und B_2 sind daher die Punkte, in denen der durch 1, 2, 3, 4, C bestimmte Kegelschnitt L die Geraden DE und FG zum zweiten Male schneidet.

Mit Hülfe des Kegelschnitts L findet man zu einem Strahle des Büschels B_1 den entsprechenden des Büschels B_2, und durch die Kegelschnitte K_1 und K_2 ergeben sich dann aus je zwei entsprechenden Strahlen der Büschel B_1 und B_2 zwei entsprechende Strahlenpaare der Involutionen J_1 und J_2.

Hat man auf diesem Wege zwei entsprechende Strahlenpaare der Involutionen gefunden, etwa die, zu deren Schnittpunkten 1 gehört, so hat man noch ausserdem die beiden entsprechenden Paare $A_1 A_2$, $A_1 A_3 \barwedge A_2 A_1$, $A_2 A_3$.

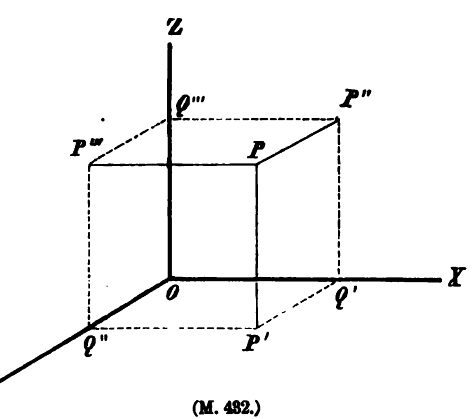
Die Projectivität der Involutionen ist durch diese entsprechenden Paare und dadurch, dass z. B. das Paar, zu welchem der Strahl $A_1 2$ gehört, dem Paare entspricht, zu welchem $A_2 2$ gehört, vollständig bestimmt, und die Ergänzung der Involutionen kann nun ohne Benutzung der Kegelschnitte K_1, K_2 und L in einfacherer Weise erfolgen. Man lege durch A_3 eine Gerade $A_3 H$ und beschreibe die beiden Kreise $A_1 A_3 H$ und $A_2 A_3 H$. Die projectiven Strahlbüschel, welche mit den Involutionen J_1 und J_2 zusammen diese Kreise erzeugen, haben ihre Träger auf $A_3 H$, und dieser Strahl entspricht sich selbst; daher sind die Büschel perspectiv. Da aus den bekannten entsprechenden Elementen der Involutionen J_1 und J_2 zwei Paare entsprechender Strahlen der beiden projectiven Büschel folgen, so ist die Gerade M bekannt, auf der die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen. Mit Hülfe dieser Geraden M findet man je zwei entsprechende Strahlen der Büschel, und indem man die Schnittpunkte dieser Strahlen und der beiden Kreise von A_1 und A_2 aus projicirt, erhält man zwei entsprechende Strahlenpaare der Involutionen J_1 und J_2.

Die Construction wird nur dann unbestimmt, wenn die Kegelschnitte K_1 und K_2 die Geraden $A_1 A_3$ und $A_2 A_3$ in A_1 bez. A_2 berühren; denn dann fallen die Geraden DE und GF mit der Geraden $A_1 A_2$ zusammen, und ihr Schnittpunkt ist unbestimmt. Alle Curven III. O., welche die conjugirten Punkte $A_1 A_2$, sowie den gemeinsamen Begleiter A_3 haben, und durch die Punkte 1, 2, 3 gehen, haben daher noch ausserdem den vierten Schnittpunkt der Kegelschnitte gemein, die durch 1, 2, 3 gehen und $A_1 A_3$ bez. $A_2 A_3$ in A_1 bez. A_2 berühren.

II. Theil. Analytische Geometrie des Raumes.

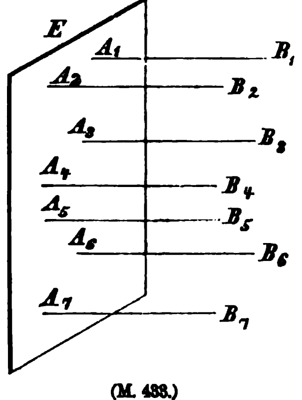
§ 1. Coordinaten des Punktes.

1. Um die Lage eines Punktes P im Raume zu bestimmen, wählen wir einen beliebigen Punkt O, den wir als den Nullpunkt bezeichnen; durch O legen wir drei Ebenen, die Coordinatenebenen, deren jede auf den beiden andern senkrecht steht. Diese Ebenen schneiden sich in drei Geraden, den Coordinatenachsen, deren jede mit den beiden andern rechte Winkel bildet. Wir bezeichnen die Coordinatenachsen mit OX, OY, OZ, die Coordinatenebenen mit XOY, XOZ, YOZ, oder kürzer als die XY-, XZ- und YZ-Ebene. Wir bestimmen nun die Normalprojectionen P', P'', P''' des Punktes P auf die drei Ebenen und messen die Strecken $P'P$, $P''P$, $P'''P$.



(M. 482.)

Ueber das Vorzeichen der Strecken wollen wir in folgender Weise entscheiden: Eine Schaar von parallelen Geraden durchschneiden wir mit einer Ebene E in den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 .... und bestimmen nun den positiven sämmtlicher Parallelen so, dass die auf ihnen liegenden positiven Strecken A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... auf derselben Seite der Ebene E liegen. Der positive Sinn aller Normalen zu den drei Coordinatenebenen ist hiernach bestimmt, wenn man über den positiven Sinn der Coordinatenachsen entschieden hat. Wir wollen festsetzen, dass OX, OY, OZ positive Strecken der Coordinatenachsen sind.



(M. 483.)

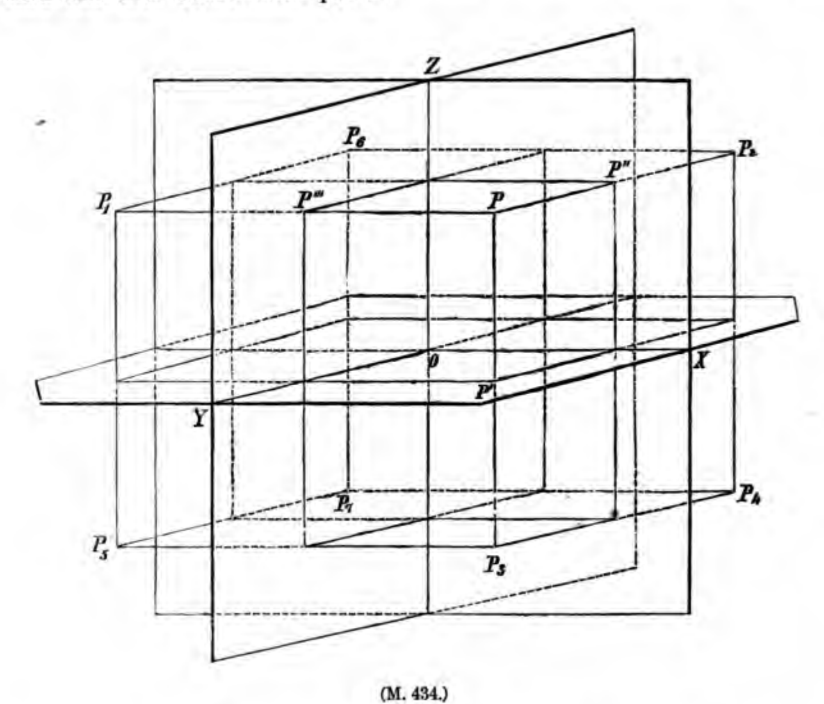
Die drei Strecken $P'P$, $P''P$, $P'''P$ bezeichnen wir der Reihe nach mit x, y, z; sie sind die Coordinaten, specieller die rechtwinkeligen oder orthogonalen Coordinaten des Punktes P.

Alle Punkte, deren Coordinate x einen gegebenen Werth a hat, liegen auf einer Ebene, die zur YZ-Ebene parallel ist und von der X-Achse eine Strecke $OQ' = a$ abschneidet;

alle Punkte, deren Coordinate y einen gegebenen Werth b hat, sind auf einer Parallelebene zu XOZ enthalten, die von der Y-Achse eine Strecke $OQ'' = b$ abschneidet; und der Ort aller Punkte, deren Coordinate z den gegebenen Werth c hat, ist eine Ebene parallel zu XOY, die von der Z-Achse die Strecke $OQ''' = c$ abschneidet.

Zu den drei Coordinaten $x = a$, $y = b$, $z = c$ gehört der Schnittpunkt der drei Ebenen, die parallel zu den Coordinatenebenen sind und von den Achsen der Reihe nach die Strecken $OQ' = a$, $OQ'' = b$, $OQ''' = c$ abschneiden. Die Lage eines Punktes gegen die Coordinatenebenen ist somit durch seine Coordinaten eindeutig bestimmt.

Durch die drei Coordinatenebenen wird der Raum in acht dreiseitige Ecken zerlegt. Für die Punkte im Innern der Ecke, welche die Kanten OX, OY, OZ hat, sind alle drei Coordinaten positiv.



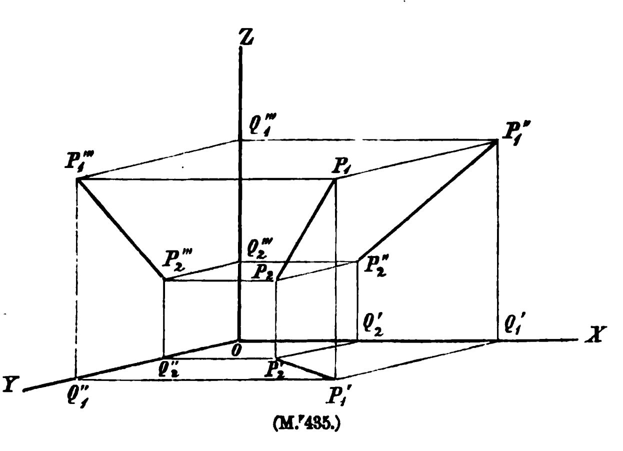
(M. 434.)

Es sei P der Punkt, dessen Coordinaten x, y, z die positiven Werthe a, b, c haben. Der Punkt P_1, dessen Coordinaten x, y, z der Reihe nach gleich $-a$, b, c sind, liegt symmetrisch zu P in Bezug auf die YZ-Ebene; der Punkt P_2, dessen Coordinaten a, $-b$, c sind, liegt symmetrisch zu P in Bezug auf die XZ-Ebene; der Punkt P_3, der die Coordinaten a, b, $-c$ hat, liegt symmetrisch zu P rücksichtlich der XY-Ebene. Der Punkt P_4, der den Coordinaten a, $-b$, $-c$ zugehört, liegt symmetrisch zu P_2 rücksichtlich der XY-Ebene und symmetrisch zu P_3 rücksichtlich der XZ-Ebene; der Punkt P_5, dessen Coordinaten $-a$, b, $-c$ sind, liegt symmetrisch zu P_1 und P_3 in Bezug auf die XY- und die XZ-Ebene; der Punkt P_6, der die Coordinaten $-a$, $-b$, c hat, liegt symmetrisch zu P_1 und P_2 bezüglich der XZ- und YZ-Ebene. Der Punkt P_7, dessen Coordinaten $-a$, $-b$, $-c$ sind, liegt symmetrisch zu P_4, P_5, P_6 in Bezug auf die Ebenen YOZ, XOZ, XOY. Es giebt also acht Punkte, deren Coordinaten gleiche

absolute Werthe haben, in jeder der acht von den drei Coordinatenebenen gebildeten dreiseitigen Ecken ist einer enthalten; sie sind die Ecken eines rechtwinkeligen Parallelepipeds, dessen Ebenen parallel den Coordinatenebenen sind, und dessen Kanten von den Coordinatenebenen normal halbirt werden.

Alle Punkte, die gleiches x und y haben, haben dieselbe Horizontalprojection P', liegen also auf einer durch die Coordinaten x und y bestimmten Parallelen zur Z-Achse; die Punkte, die gleiches x und z haben, haben dieselbe Verticalprojection P'' und liegen auf einer Parallelen zur Y-Achse; und die Punkte, die gleiches y und z haben, gehören zu derselben seitlichen Projection P''' und liegen auf einer Parallelen zur X-Achse.

Die Ebene $PP'P''$ (Fig. 432) ist parallel zur YZ-Ebene; ihr Schnittpunkt Q' mit der X-Achse ist daher die Normalprojection des Punktes P auf die X-Achse und die Geraden $P'Q'$ und $P''Q'$ sind normal zu OX. Ebenso treffen die Ebenen $PP'P'''$ und $PP''P'''$ die Y- und die Z-Achse in Punkten Q'' und Q''', die die Normalprojectionen des Punktes P auf diese Achsen sind.



(M.'435.)

2. Die Strecke zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 ergiebt sich leicht aus ihren Coordinaten. Für die Strecke $P_1'P_2'$ folgt aus den Coordinaten dieser Punkte in Bezug auf das ebene Coordinatensystem XOY:

$$P_1'P_2'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Ferner ist $P_1P_2^2 = P_1'P_2'^2 + (P_2'P_2 - P_1'P_1)^2$, daher ist

$$1. \qquad P_1P_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Bezeichnet man die Winkel, welche die Strecke P_1P_2 mit den Achsen OX, OY, OZ bildet, der Reihe nach mit φ, ψ, χ, und sind Q_1', Q_1'', Q_1''', bez. Q_2', Q_2'', Q_2''' die Projectionen von P_1 und P_2 auf die Achsen, so ist

$$Q_1'Q_2' = P_1P_2 \cos\varphi, \qquad Q_1''Q_2'' = P_1P_2 \cos\psi, \qquad Q_1'''Q_2''' = P_1P_2 \cos\chi.$$

Nun ist für jeden Punkt P

$$OQ' = x, \quad OQ'' = y, \quad OQ''' = z,$$

also ist $Q_1'Q_2' = x_2 - x_1$, $\quad Q_1''Q_2'' = y_2 - y_1$, $\quad Q_1'''Q_2''' = z_2 - z_1$.

Daher hat man, wenn man P_1P_2 mit d bezeichnet:

$$2. \qquad \cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos\psi = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos\chi = \frac{z_2 - z_1}{d},$$

Quadrirt man diese drei Werthe und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf 1. die bemerkenswerthe Gleichung

$$3. \qquad \cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1.$$

3. Theilt ein Punkt P die Strecke P_1P_2 im Verhältnisse

$$P_1P : PP_2 = \lambda_2 : \lambda_1,$$

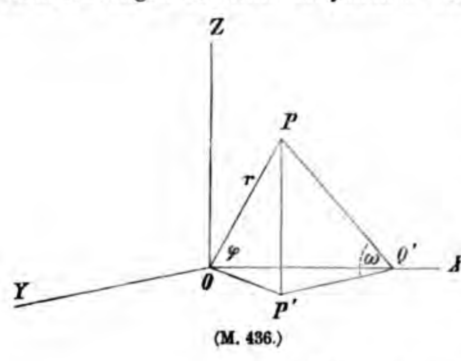
so werden die Projectionen $P_1'P_2'$, $P_1''P_2''$, $P_1'''P_2'''$ von den Projectionen P', P'', P''' im gleichen Verhältnisse getheilt; die Coordinaten von P ergeben sich daher aus den Coordinaten von P_1 und P_2 nach den Formeln

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Die Coordinaten des Mittelpunkts der Strecke $P_1 P_2$ sind insbesondere

$$x = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

4. Die Lage eines Punktes kann man auch durch Polarcoordinaten bestimmen. Man geht dabei von einem festen Punkte, einer durch diesen Punkt gehenden festen Geraden, und einer durch diese Gerade gehenden festen Ebene aus; wir nehmen dazu den Nullpunkt, die X-Achse und die XY-Ebene eines rechtwinkeligen Coordinatensystems. Als Polarcoordinaten eines Punktes P verwendet man nun die Strecke OP, den Winkel φ, den die X-Achse mit der Geraden bildet, auf welcher OP gelegen ist, und den Flächenwinkel ω, den die Ebene XOY und der Winkel XOP einschliessen; die Strecke OP heisst Radius vector des Punktes P und wird mit r bezeichnet.



(M. 436.)

Der Zusammenhang dieser Polarcoordinaten mit den rechtwinkeligen in Bezug auf das System XYZ wird durch folgende Formeln hergestellt:

$$
\begin{aligned}
x &= OQ' = r\cos\varphi, \\
y &= Q'P' = Q'P\cdot\cos\omega = r\cdot\sin\varphi\cos\omega, \\
z &= P'P = Q'P\cdot\cos\omega = r\cdot\sin\varphi\sin\omega.
\end{aligned} \tag{1.}
$$

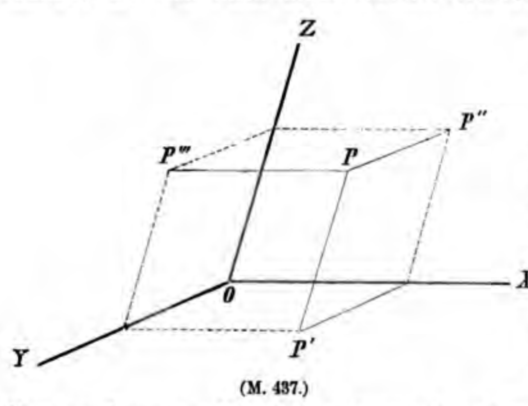
Hieraus folgt umgekehrt:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{r},$$

$$\cos\omega = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \qquad \sin\omega = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

5. In vereinzelten Fällen legt man analytisch-geometrischen Untersuchungen ein schiefwinkeliges Coordinatensystem zu Grunde, d. i. drei Coordinatenebenen, die sich nicht unter rechten Winkeln schneiden. Man projicirt dann jeden Punkt P gewöhnlich durch Strahlen, die den Coordinatenachsen OX, OY, OZ parallel sind, und bezeichnet als Coordinaten des Punktes die Strecken $P'P$, $P''P$, $P'''P$. Es giebt auch in diesem Falle acht Punkte, deren Coordinaten den absoluten Werthen nach übereinstimmen und nur nach den Vorzeichen verschieden sind; dieselben bilden die Eckpunkte eines Parallelepipeds, dessen Kanten den Coordinatenachsen parallel sind und von den Coordinatenebenen halbirt werden.



(M. 437.)

6. Sind φ, ψ, χ die Winkel, welche die Achsen eines rechtwinkeligen

Coordinatensystems mit dem Radius vector eines Punktes P einschliessen, so ist

1. $$x = r\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi, \quad z = r\cos\chi.$$

Werden die entsprechenden Bestimmungsstücke für zwei Punkte P_1, P_2 durch die Indices 1 und 2 unterschieden, so hat man für den Cosinus des Winkels der Geraden OP_1 und OP_2 die Formel

$$\cos(r_1 r_2) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - P_1P_2^2}{2r_1r_2}.$$

Nun ist $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, $\quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$,

$$P_1P_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2;$$

daher hat man $r_1^2 + r_2^2 - P_1P_2^2 = 2x_2x_1 + 2y_2y_1 + 2z_2z_1$.

Da nun ferner $x_1 = r_1\cos\varphi_1$, $\quad y_1 = r_1\cos\psi_1$, $\quad z_1 = r_1\cos\chi_1$,

$x_2 = r_2\cos\varphi_2$, $\quad y_2 = r_2\cos\psi_2$, $\quad z_2 = r_2\cos\chi_2$,

so folgt schliesslich die Formel

2. $$\cos(r_1 r_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\psi_1\cos\psi_2 + \cos\chi_1\cos\chi_2.$$

Der Winkel zweier Geraden ist dem Winkel zweier durch einen Punkt (z. B. durch O) gelegten Parallelen gleich; mithin giebt die Formel

3. $$\cos\delta = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\psi_1\cos\psi_2 + \cos\chi_1\cos\chi_2$$

allgemein den Cosinus des Winkels zweier Geraden, die mit den Coordinatenachsen die Winkel φ_1, ψ_1, χ_1, bez. φ_2, ψ_2, χ_2 bilden.

Zwei Gerade sind daher normal, wenn ihre Richtungswinkel (d. i. ihre Winkel mit den Coordinatenachsen) der Gleichung genügen:

4. $$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\psi_1\cos\psi_2 + \cos\chi_1\cos\chi_2 = 0.$$

§ 2. Transformation rechtwinkeliger Coordinatensysteme.

1. Sind die Achsen $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ eines rechtwinkeligen Coordinatensystems gleichsinnig parallel den Achsen OX, OY, OZ eines andern Systems, und sind N', N'', N''', Q', Q'', Q''', R', R'', R''' der Reihe nach die Projectionen des Punktes O' auf OX, OY, OZ und des Punktes P auf OX, OY, OZ, bez. $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$, so hat man

$$OQ' = ON' + N'Q' = ON' + O'R',$$
$$OQ'' = ON'' + N''Q'' = ON'' + O'R'',$$
$$OQ''' = ON''' + N'''Q''' = ON''' + O'R'''.$$

Nun sind OQ', OQ'', OQ''' die Coordinaten x, y, z des Punktes P in Bezug auf das System XYZ; $O'R'$, $O'R''$, $O'R'''$ die Coordinaten x', y', z' von P in Bezug auf das neue System $X'Y'Z'$; ferner ON', ON'', ON''' die Coordinaten des Nullpunkts O' in Bezug auf das System XYZ, die wir mit a, b, c bezeichnen wollen. Daher haben wir die Transformationsformeln

$$x = x' + a, \quad y = y' + b,$$
$$z = z' + c.$$

(M. 438.)

2. Transformation aus einem rechtwinkeligen Coordinatensysteme in ein anderes mit demselben Nullpunkte, aber anders gerichteten Achsen

Die Cosinus der Winkel, welche die Achsen OX, OY, OZ des ursprünglichen Systems mit den Achsen OX', OY', OZ' des neuen Systems bilden, mögen folgende tabellarisch zusammengestellte Werthe haben:

Cosinus des Winkels der Achse		OX	OY	OZ
mit der Achse	OX':	α_1	β_1	γ_1,
" " "	OY':	α_2	β_2	γ_2,
" " "	OZ':	α_3	β_3	γ_3.

Zwischen diesen neun Grössen bestehen sechs Gleichungen. Aus § 1, 2 folgt

$$1.\quad \begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1, \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Da ferner das neue System $X'Y'Z'$ ebenfalls rechtwinkelig ist, so ist (§ 1, 6)

$$2.\quad \begin{aligned} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0, \\ \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 &= 0, \\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= 0. \end{aligned}$$

Auf Grund dieser sechs Gleichungen kann man die neun Cosinus durch drei derselben, oder durch drei andere, von einander unabhängige Grössen ausdrücken.

Die beiden Systeme von Gleichungen 1. und 2. kann man durch zwei andere Systeme ersetzen. Da die Winkel der X-Achse mit den rechtwinkeligen Achsen OX', OY', OZ' die Cosinus α_1, α_2, α_3 haben u. s. w., so ist auch

$$3.\quad \begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1, \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Da ferner die Achsen des Systems XYZ rechte Winkel bilden, so ist

$$4.\quad \begin{aligned} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0, \\ \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 &= 0, \\ \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die sechs Gleichungen 3. und 4. können algebraisch als eine Folge der Gleichungen 1. und 2. nachgewiesen werden; wir sehen indess davon ab, diesen Nachweis zu liefern.

3. Sind zwei Punkte A und B durch einen aus drei Strecken AC, CD und DB bestehenden gebrochenen Linienzug verbunden, und sind A', B', C', D' die Normalprojectionen der Punkte A, B, C, D auf eine Gerade G, sind ferner λ, μ, ν die Winkel der Geraden G mit AC, CD, DB, so hat man bekanntlich

$$A'B' = A'C' + C'D' + D'B',$$

mithin

$$A'B' = \cos\lambda \cdot AC + \cos\mu \cdot CD + \cos\nu \cdot DB.$$

4. Die Projectionen der Strecke OP auf die Achsen OX', OY', OZ' sind der Reihe nach die Coordinaten x', y', z'. Projicirt man statt der Strecke OP die gebrochene Linie $OQ'P'P$ (Fig. 432), so erhält man nach der vorigen Formel

$$1.\quad \begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{aligned}$$

Diese Formeln vermitteln den Uebergang aus dem Systeme XYZ in das System $X'Y'Z'$; die Formeln für den Uebergang aus diesem in jenes erhält man, wenn man 1. der Reihe nach mit α_1, α_2, α_3; dann mit β_1, β_2, β_3; schliesslich mit γ_1, γ_2, γ_3 multiplicirt und addirt; in Rücksicht No. 2, 3 und 4 erhält man

$$2.\quad \begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'. \end{aligned}$$

5. Hat das neue System weder dieselben Achsenrichtungen, noch denselben Nullpunkt wie das ursprüngliche, so kann man ein Hülfssystem einschalten, das mit dem ursprünglichen in Bezug auf die Achsenrichtungen und mit dem neuen in Bezug auf den Nullpunkt übereinstimmt.

Sind x, y, z, x', y', z' die Coordinaten eines Punktes P im ursprünglichen bez. im neuen Systeme, sind ferner a, b, c die Coordinaten des neuen Nullpunkts in Bezug auf das alte System, und werden die Cosinus der Winkel der Achsen des neuen Systems mit den Achsen des alten wie in No. 3 bezeichnet, so hat man die Transformationsformeln

$$x = a + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z',$$
$$y = b + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z',$$
$$z = c + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'.$$

6. Wenn zwei orthogonale Coordinatensysteme XYZ und $X'Y'Z'$ einen gemeinsamen Nullpunkt haben, so kann die Ebene XOY in die neue Lage $X'OY'$ auf folgende Weise übergeführt werden.

Wir bemerken zunächst, dass in allen Coordinatenebenen der positive Drehungssinn für Winkel so gewählt sein soll, dass die Winkel XOY, XOZ, YOZ rechte Winkel (und nicht $= 270°$) sind. Wir beachten nun die Schnittgerade der Ebenen $X'OY'$ und XOY und entscheiden über ihren positiven Sinn; $O\mathfrak{X}$ sei eine positive Strecke dieser Geraden. Hierauf drehen wir das Coordinatensystem XYZ um die Achse OZ, so dass die Achse OX den Winkel $XO\mathfrak{X}$ beschreibt; dabei komme OY in die Lage $O\mathfrak{Y}$. Nun bemerke man die Schnittlinie der Ebenen $X'OY'$ und $\mathfrak{Y}OZ$; die positive Strecke $O\mathfrak{Y}'$ auf dieser Geraden wähle man so, dass $\mathfrak{X}O\mathfrak{Y}'$ ein rechter Winkel (und nicht $= 270°$) ist, und drehe das Coordinatensystem $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}Z$ um die Achse $O\mathfrak{X}$ so, dass $O\mathfrak{Y}$ den Winkel $\mathfrak{Y}O\mathfrak{Y}'$ beschreibt; hierdurch komme OZ in die Lage $O\mathfrak{Z}$.

(M. 439.)

Schliesslich drehe man das Coordinatensystem $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}$ um die Achse $O\mathfrak{Z}$ so, dass $O\mathfrak{X}$ den Winkel $\mathfrak{X}OX'$ beschreibt; dann fällt die $\mathfrak{X}$-Achse mit OX', und, da $\mathfrak{X}O\mathfrak{Y}' = X'OY' = 90°$, auch die Y-Achse mit OY' zusammen.

Hat man so durch drei aufeinander folgende Drehungen um die Achsen OZ, $O\mathfrak{X}$, und $O\mathfrak{Z}$ die XY-Ebene in die neue Lage $X'OY'$ gebracht, so fällt die Achse OZ' entweder mit $O\mathfrak{Z}$ zusammen, oder bildet mit $O\mathfrak{Z}$ einen gestreckten Winkel. Im ersten Falle kann man das Coordinatensystem XYZ durch Drehung in die neue Lage $X'Y'Z'$ bringen, im andern Falle nicht; im ersten Falle bezeichnet man die Coordinatensysteme als **gleichsinnig**, im andern als **ungleichsinnig**.

Bei jeder einzelnen der drei Drehungen bleibt eine Achse des jeweiligen Coordinatensystems unverändert, also auch die parallel zu ihr gemessene Coordinate eines Punktes; die beiden andern Coordinaten ändern sich infolge der Drehung der Coordinatenebene, mit welcher sie parallel sind, für dieselben gelten daher die für Coordinaten in der Ebene aufgestellten Transformationsformeln. Bezeichnet man die Winkel $XO\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}O\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{X}OX'$ der Reihe nach mit ψ, ϑ, φ, und die Coordinaten eines Punktes P in den Systemen XYZ, $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}Z$, $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}$, $X'Y'\mathfrak{Z}$ der Reihe nach mit x, y, z; $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, z$; $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}', \mathfrak{z}$; $x', y', \mathfrak{z}$; so hat man die successiven Transformationsformeln:

α) für den Uebergang aus dem Systeme XYZ in das System $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}Z$:

1. $$x = cos\psi \cdot \mathfrak{x} - sin\psi \cdot \mathfrak{y}, \quad y = sin\psi \cdot \mathfrak{x} + cos\psi \cdot \mathfrak{y}, \quad z = z;$$

β) für den Uebergang aus dem Systeme $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}Z$ in das System $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}$:

2. $$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y} = cos\vartheta \cdot \mathfrak{y}' - sin\vartheta \cdot \mathfrak{z}, \quad z = sin\vartheta \cdot \mathfrak{y}' + cos\vartheta \cdot \mathfrak{z};$$

γ) für den Uebergang aus dem Systeme $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}$ in das System $X'Y'\mathfrak{Z}$:

3. $$\mathfrak{x} = cos\varphi \cdot x' - sin\varphi \cdot y', \quad \mathfrak{y}' = sin\varphi \cdot x' + cos\varphi \cdot y', \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}.$$

Im Falle zweier gleichsinnigen Systeme hat man schliesslich $z' = \mathfrak{z}$, im Falle ungleichsinniger Systeme ist $z' = -\mathfrak{z}$.

Drückt man nun durch die Formeln 1., 2., 3. die ursprünglichen Coordinaten x, y, z durch die neuen Coordinaten x', y', z' aus, so ergeben sich die Transformationsformeln:

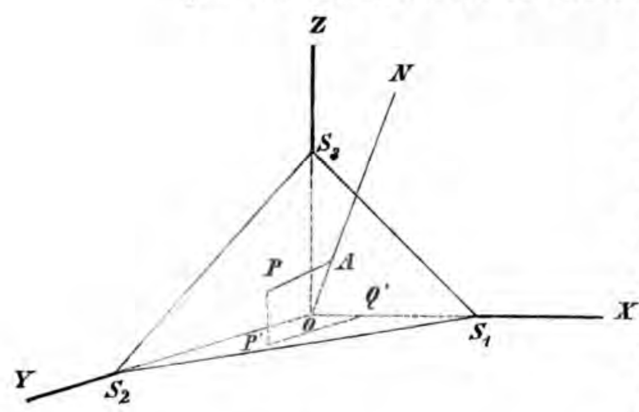
4. $$\begin{aligned} x &= (cos\varphi\, cos\psi - sin\varphi\, sin\psi\, cos\vartheta) \cdot x' - (sin\varphi\, cos\psi + cos\varphi\, sin\psi\, cos\vartheta) \cdot y' \\ &\quad \pm sin\psi\, sin\vartheta \cdot z', \\ y &= (cos\varphi\, sin\psi + sin\varphi\, cos\psi\, cos\vartheta) \cdot x' - (sin\varphi\, sin\psi - cos\varphi\, cos\psi\, cos\vartheta) \cdot y' \\ &\quad \mp cos\psi\, sin\vartheta \cdot z' \\ z &= sin\varphi\, sin\vartheta \cdot x' + cos\varphi\, sin\vartheta \cdot y' \pm cos\vartheta \cdot z'. \end{aligned}$$

Hierbei gelten die oberen Vorzeichen für gleichsinnige, die unteren für ungleichsinnige Systeme.

Vergleicht man diese Transformationsformeln mit den Formeln in No. 4, so erhält man die neun Cosinus α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 durch die drei von einander nicht abhängigen Winkel φ, ψ, ϑ ausgedrückt; man hat

$$\alpha_1 = cos\varphi cos\psi - sin\varphi sin\psi cos\vartheta; \quad \alpha_2 = -sin\varphi cos\psi - cos\varphi sin\psi cos\vartheta; \quad \alpha_3 = \pm sin\psi sin\vartheta;$$
$$\beta_1 = cos\varphi sin\psi + sin\varphi cos\psi cos\vartheta; \quad \beta_2 = -sin\varphi sin\psi + cos\varphi cos\psi cos\vartheta; \quad \beta_3 = \mp cos\psi sin\vartheta;$$
$$\gamma_1 = sin\varphi\, sin\vartheta; \quad \gamma_2 = cos\varphi\, sin\vartheta; \quad \gamma_3 = \pm cos\vartheta.$$

§ 3. Die Ebene, die Gerade und der Punkt.



(M. 440.)

1. Fällt man auf eine Ebene T vom Nullpunkte O aus eine Normale ON, so kann die Ebene als der Ort der Punkte definirt werden, die den Schnittpunkt A dieses Lothes und der Ebene zur Normalprojection auf ON haben. Ist d die positiv zu rechnende Strecke OA, sind α, β, γ die Winkel, welche

OA mit den Coordinatenachsen einschliesst, und sind x, y, z die Coordinaten eines Punktes P der Ebene, so ist die Bedingung, dass die Normalprojection von P auf die Gerade ON mit dem Punkte A zusammenfällt:

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z = d.$$

Die Coordinaten jedes Punktes der Ebene genügen dieser Gleichung; und umgekehrt, alle Punkte, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen, liegen auf der Ebene; die Gleichung ist daher die Gleichung der Ebene T.

Eine Ebene, deren Normale mit den Coordinatenachsen die Winkel α, β, γ macht und die vom Anfangspunkte um die Strecke d entfernt ist, hat daher die Gleichung

1. $$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - d = 0.$$

Diese Gleichung ist linear bezüglich der Coordinaten.

Dividirt man sie durch d, so entsteht

$$\frac{\cos\alpha}{d} \cdot x + \frac{\cos\beta}{d} \cdot y + \frac{\cos\gamma}{d} \cdot z - 1 = 0.$$

Nun ist, wie man aus der Figur sieht,

$$OS_1 = d : \cos\alpha, \quad OS_2 = d : \cos\beta, \quad OS_3 = d : \cos\gamma.$$

Wenn man die Achsenabschnitte OS_1, OS_2, OS_3 der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet, so erhält man daher die Gleichung der Ebene in der Form:

2. $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Umgekehrt schliesst man: Jede lineare Gleichung zwischen den Coordinaten eines Punktes ist die Gleichung einer eindeutig bestimmten Ebene. Denn dividirt man die allgemeine lineare Gleichung

3. $$Ax + By + Cz + D = 0$$

durch $-D$, so erhält man

$$\frac{A}{-D} \cdot x + \frac{B}{-D} \cdot y + \frac{C}{-D} \cdot z - 1 = 0,$$

und erkennt nun durch den Vergleich mit 2., dass 3. die Gleichung einer Ebene ist, deren Achsenabschnitte betragen

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}.$$

Durch Multiplication mit einem geeigneten Faktor r kann man die allgemeine lineare Gleichung 3. auch auf die Normalform 1. bringen, und dadurch den Abstand der Ebene 3. vom Nullpunkte und die Winkel bestimmen, die die Normale der Ebene mit den Achsen bildet. Aus der Identität

$$rAx + rBy + rCz + rD \equiv \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - d$$

folgen die Gleichungen

$$rA = \cos\alpha, \quad rB = \cos\beta, \quad rC = \cos\gamma, \quad rD = -d.$$

Quadrirt man die ersten drei, addirt, und beachtet, dass

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

o erhält man

$$r^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1, \quad \text{also } r = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

mithin hat man

4. $$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d = -\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

2. Setzt man in der Gleichung einer Ebene T:

$$T \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

die Coordinate $z = 0$, so erhält man die Gleichung für die Coordinaten x und y der Punkte der Ebene, welche auf der XY-Ebene liegen, also die Gleichung der Horizontalspur S_1S_2 der Ebene T; ebenso erhält man die Gleichung der Spuren S_1S_3 und S_2S_3, wenn man in der Gleichung der Ebene $y = 0$ bez. $x = 0$ setzt daher ist die Gleichung der

$$\text{Horizontalspur } S_1S_2: \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$

$$\text{Verticalspur } S_1S_3: \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 1 = 0,$$

$$\text{seitlichen Spur } S_2S_3: \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Man kann diese drei Gleichungen auch als Gleichungen von Ebenen betrachten; da z. B. in der ersten derselben die Coordinate z nicht vorkommt, so wird der Gleichung von jedem Punkte des Raumes genügt, dessen x und y diese Gleichung erfüllen, dessen Horizontalprojection P' also auf S_1S_2 liegt; als Gleichung eines räumlichen Gebilds aufgefasst, ist daher

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

die Gleichung einer Ebene, die parallel zur Z-Achse ist. Ebenso sind

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

die Gleichungen von Ebenen, die parallel zur Y-Achse, bez. parallel zur X-Achse sind.

3. Liegen vier Punkte P, P_1, P_2, P_3 auf einer Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ so bestehen die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D &= 0. \end{aligned}$$

Der Verein dieser in Bezug auf A, B, C, D homogenen linearen Gleichungen erfordert das Verschwinden der Determinante

$$T \equiv \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Bedingung dafür, dass P mit $P_1P_2P_3$ auf derselben Ebene liegt, ist also die Gleichung der Ebene $P_1P_2P_3$.

4. Der Winkel δ zweier Ebenen

$$T \equiv Ax + By + Cz + D = 0, \qquad T_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

innerhalb dessen der Nullpunkt liegt, ist dem Winkel ihrer Normalen supplementär; sind α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 die Winkel der Normalen von T und T_1 mit den Coordinatenachsen, so ist

$$-\cos\delta = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1.$$

Setzt man hier die in No. 1, 4 gefundenen Werthe ein, so ergiebt sich

$$1. \qquad \cos\delta = -\frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Zwei Ebenen sind daher normal zu einander, wenn

2. $$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

Zwei Ebenen sind parallel, wenn $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1$, also wenn

$$A : B : C = A_1 : B_1 : C_1 .$$

5. Ist Π die Normalprojection eines beliebigen Punktes P auf die durch O gehende Normale der Ebene

$$T \equiv \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - d = 0,$$

so ist $$O\Pi = \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z.$$

Der Abstand p des Punktes P von der Ebene T ist

$$p = \Pi A = OA - O\Pi = d - (\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z) = -T.$$

Ist also $T \equiv \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - d = 0$ die Gleichung einer Ebene, so ist der Werth, den das Polynom T für die Coordinaten irgend eines nicht auf $T = 0$ gelegenen Punktes annimmt, dem Abstande des Punktes von der Ebene entgegengesetzt gleich; dabei wird der Abstand positiv oder negativ, je nachdem der Punkt mit dem Nullpunkte O auf derselben Seite der Ebene liegt oder nicht.

Der Abstand eines Punktes P von der Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ ist

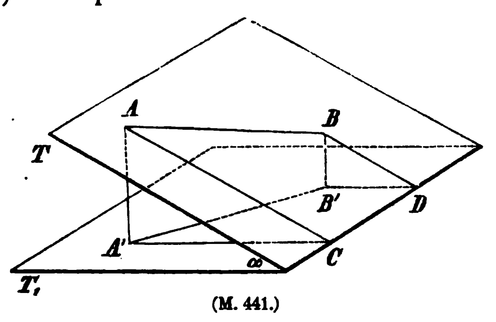
$$p = -\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

6. Sind AC und BD zwei Strecken einer Ebene T und normal zur Schnittlinie mit einer andern Ebene T_1, sind ferner A' und B' die Normalprojectionen von A und B auf T_1, so ist

$$A_1CDB_1 = \tfrac{1}{2}CD \cdot (A'C + B'D) = \tfrac{1}{2}CD \cdot (AC \cos TT_1 + BD \cos TT_1)$$
$$= \tfrac{1}{2}CD \cdot (AC + BD) \cos TT_1 .$$

Daher hat man

1. $$A'B'DC = ABDC \cdot \cos\alpha.$$



(M. 441.)

Projicirt man die Ecken eines auf T gelegenen Polygons auf die Schnittlinie von T und T_1, so erscheint die Fläche des Polygons als ein Polynom von rechtwinkeligen Trapezen, derart wie $ABDC$, und die Projection des Polygons auf die Ebene T_1 ist das gleichgebildete Polynom aus den Projectionen der Trapeze. Wendet man auf die Projection jedes Trapezes die Formel 1. an, so gelangt man zu dem Satze: Die Fläche der Normalprojection einer ebenen Figur ist gleich der Fläche der projicirten Figur multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels der projicirten Figur gegen die Projectionsebene.

Der Neigungswinkel einer Ebene gegen eine Coordinatenebene ist dem Winkel gleich, den die Normale der Ebene mit der auf der Coordinatenebene normalen Achse einschliesst.

Sind daher f', f'', f''' die Projectionen einer ebenen Fläche f auf die Coordinatenebenen und α, β, γ die Winkel der Normalen zu f mit den Achsen, so hat man $f' = f\cos\gamma$, $f'' = f\cos\alpha$, $f''' = f\cos\beta$.

Quadrirt man diese drei Werthe und addirt, so entsteht

$$f'^2 + f''^2 + f'''^2 = f^2.$$

Projicirt man eine ebene Fläche auf die Ebenen eines orthogonalen Coordinatensystems, so ist die Summe der zweiten Potenzen der drei Projectionen gleich der zweiten Potenz der projicirten Fläche.

7. Die Gleichung der durch die Punkte $P_1P_2P_3$ gehenden Ebene (No. 3) giebt nach den Gliedern der ersten Zeile entwickelt

$$1. \quad \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot z - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Coefficienten von x, y, z stimmen rücksichtlich der absoluten Werthe mit den doppelten Flächen der Dreiecke $P_1'''P_2'''P_3'''$, $P_1''P_2''P_3''$, $P_1'P_2'P_3'$ überein; um die Gleichung 1. auf die Normalform zu bringen, hat man sie daher durch

$$2\sqrt{(P_1'''P_2'''P_3''')^2 + (P_1''P_2''P_3'')^2 + (P_1'P_2'P_3')^2} = \pm 2 \cdot P_1P_2P_3$$

zu dividiren. Bezeichnet man mit h_0 die von P_0 ausgehende Höhe des Tetraëders $P_0P_1P_2P_3$ und mit f_0 die Fläche $P_1P_2P_3$, so hat man daher (No. 5)

$$\frac{1}{2f_0} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \pm h_3 .$$

Hieraus folgt, wenn man mit V das Volumen des Tetraëders $P_0P_1P_2P_3$ bezeichnet:

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \pm 6V.$$

Die Determinante stimmt also dem absoluten Werthe nach mit dem sechsfachen Tetraëdervolumen überein.

Um auch dem Vorzeichen eine geometrische Bedeutung zu geben, haben wir uns über den positiven oder negativen Sinn von Tetraëdern zu entscheiden. Wir wollen ein Tetraëder $ABCD$ als positiv oder negativ ansehen, je nachdem von dem Eckpunkte A aus betrachtet das Dreieck BCD als positiv oder negativ erscheint, vorausgesetzt, dass man für Dreiecksflächen eine bestimmte Drehrichtung (z. B. links herum) als die positive angenommen hat.

Die Tetraëder $ABCD$, $ACDB$, $ADBC$ haben dasselbe Zeichen; die Tetraëder $ACBD$, $ABDC$, $ADCB$ haben das entgegengesetzte Zeichen; denn die Dreiecke BCD, CDB, DBC erscheinen von demselben Punkte A aus in gleicher Drehrichtung, die Dreiecke CBD, BDC, DCB in der entgegengesetzten.

Lässt man also die erste Ecke unverändert und permutirt die drei andern, so haben die Tetraëder denselben Sinn, bei denen die drei letzten Buchstaben Permutationen von derselben Klasse sind.

Das Dreieck BCD erscheint von A aus in anderer Drehrichtung als das Dreieck ACD von B aus; die beiden Tetraëder $ABCD$ und $BACD$ sind daher ungleichen Sinnes; und zugleich sind $ABCD$ und $BACD$ Permutationen von verschiedener Klasse. Durch Vertauschung der ersten beiden Buchstaben und nachmalige Permutation der drei letzten Buchstaben kann man aber alle Permutationen der vier Buchstaben $ABCD$ herstellen. Wir sehen daher: Tetraëder, die sich nur durch die Anordnung der Eckbuchstaben unterscheiden, sind gleichen oder ungleichen Zeichens, je nachdem die Folge ihrer Eckbuchstaben Permutationen von gleicher Klasse sind, oder nicht.

Die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

hat für zwei verschiedene Lagen Π' und Π'' des variabeln Punktes P im Allgemeinen verschiedene Werthe Δ' und Δ''; sollen diese ungleiche Vorzeichen haben, so muss Δ für einen Punkt der Strecke $\Pi'\Pi''$ verschwinden. Hieraus folgt: Die Determinante hat für alle Punkte auf derselben Seite der Ebene $P_1P_2P_3$ dasselbe Zeichen und wechselt das Zeichen, wenn P von einer Seite von $P_1P_2P_3$ auf die andere übertritt. Unter denselben Umständen behält oder wechselt aber auch das Tetraëder $PP_1P_2P_3$ das Zeichen; denn das Dreieck $P_1P_2P_3$ erscheint von allen Punkten aus, die auf derselben Seite von $P_1P_2P_3$ liegen, in derselben Drehrichtung, von Punkten auf verschiedenen Seiten aus in entgegengesetzten Drehrichtungen. Hieraus folgt, dass für alle Lagen der Punkte $P_0P_1P_2P_3$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

dem sechsfachen Volumen des Tetraëders gleich oder entgegengesetzt gleich ist. Um nun zu entscheiden, welcher von beiden Fällen gilt, genügt es, ein Beispiel zu untersuchen. Wir wählen das Tetraëder $OS_1S_2S_3$ (Fig. 440). Die Determinante Δ wird jetzt

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = -abc .$$

Rechnet man ein Dreieck ABC positiv, wenn die Drehungsrichtung von A über B nach C linksum erfolgt, und ist, wie in unseren Figuren, der positive Sinn der Coordinatenachsen so gewählt, dass vom Anfangspunkt aus gesehen ein Dreieck ABC positiv erscheint, dessen Ecken auf den Achsen OX, OY, OZ liegen, und die Endpunkte der positiven Strecken OA, OB, OC sind, so ist das Tetraëder $OS_1S_2S_3$ positiv. Hieraus folgt, dass auch rücksichtlich des Vorzeichens die Gleichung gilt

$$6 \cdot P_0P_1P_2P_3 = - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} .$$

8. Die Coordinaten des Schnittpunktes der drei Ebenen

$$T_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 ,$$
$$T_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 ,$$
$$T_3 \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 .$$

sind die Werthe von x, y, z, welche den drei Gleichungen $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ genügen, also die Auflösungen des linearen Systems

$$\text{1.} \quad \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= -D_1 , \\ A_2x + B_2y + C_2z &= -D_2 , \\ A_3x + B_3y + C_3z &= -D_3 . \end{aligned}$$

Dieses System ergiebt

2. $(ABC)\cdot x = -(DBC)$, $(ABC)\cdot y = -(ADC)$, $(ABC)\cdot z = -(ABD)$ wenn

$$(ABC) \equiv \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad (DBC) \equiv \begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

$$(ADC) \equiv \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad (ABD) \equiv \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}.$$

Sind die drei Zeilen der Determinante (ABC) oder zwei derselben proportional, so sind die drei Ebenen parallel (No. 4), oder zwei derselben sind parallel, und die Determinante (ABC) verschwindet. Ist $(ABC) = 0$ und sind zwei Colonnen proportional, so verschwindet auch eine der andern drei Determinanten, die andern beiden unterscheiden sich durch einen von Null verschiedenen Faktor und verschwinden daher gleichzeitig; sind diese beiden Determinanten nicht Null, so ist eine Coordinate des Schnittpunkts unbestimmt, die beiden andern sind unendlich gross; die Ebenen schneiden sich daher in drei parallelen Geraden, die einer Coordinatenebene parallel sind. Ist z. B. $A_1 : A_2 : A_3 = B_1 : B_2 : B_3$, also $B_1 = nA_1$, $B_2 = nA_2$, $B_3 = nA_3$, so ist $(DBC) = n(DAC) = -n(ADC)$, und $(ABD) = 0$. Wenn (DBC) nicht verschwindet, so ist auch (ADC) von Null verschieden, und die Coordinaten des Schnittpunkts sind $x = \infty$, $y = \infty$, z unbestimmt. Die Ebenen schneiden sich daher in drei zur XY-Ebene parallelen Geraden.

Wenn (ABC) dadurch verschwindet, dass die Glieder einer Colonne Null sind, so sind auch zwei der drei andern Determinanten Null; die drei Ebenen sind in diesem Falle einer Coordinatenachse parallel; wenn die vierte Determinante nicht verschwindet, so schneiden sie sich in drei zu dieser Achse parallelen Geraden; wenn sie verschwindet, so gehen sie alle drei durch eine zu dieser Achse parallele Gerade. Ist z. B. $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, so haben die Ebenen die Gleichungen

$$T_1 \equiv B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,\quad T_2 \equiv B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,\quad T_3 \equiv B_3 y + C_3 z + D_3 = 0,$$

sind also parallel der X-Achse; betrachtet man ihre Gleichungen als Gleichungen von Geraden in der YZ-Ebene, so sind dies die seitlichen Spuren der drei Ebenen; diese drei Spuren haben einen oder keinen gemeinsamen Punkt, je nachdem die Determinante (BCD) verschwindet oder nicht verschwindet.

Wenn die Determinante (ABC) verschwindet und weder zwei Zeilen noch zwei Colonnen proportional sind, und wenn zugleich keine der drei andern Determinanten (DBC), (ADC), (ABD) verschwindet, so sind die Coordinaten des Schnittpunkts sämmtlich unendlich gross, die drei Ebenen schneiden sich also in drei parallelen Geraden, die keiner Coordinatenebene parallel sind. Verschwindet hingegen noch eine der drei andern Determinanten, z. B. (DBC), so hat man durch Entwicklung der Determinanten (ABC) und (DBC) die beiden Gleichungen.

$$3.\quad \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} \cdot A_1 + \begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} \cdot A_2 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \cdot A_3 = 0,$$

$$4.\quad \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} \cdot D_1 + \begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} \cdot D_2 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \cdot D_3 = 0.$$

Fügt man hierzu noch eine der beiden identischen Gleichungen $(BBC) = 0$ und $(CBC) = 0$, oder entwickelt:

$$5.\quad \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_2 & C_3 \end{vmatrix} \cdot B_1 + \begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} \cdot B_2 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \cdot B_3 = 0,$$

6. $$\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} \cdot C_1 + \begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} \cdot C_2 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \cdot C_3 = 0.$$

so folgt, indem man 3., 4., 5. und dann 3., 4., 6 zusammennimmt, noch das Verschwinden der beiden übrigen Determinanten:

$$(ABD) = 0, \quad (ADC) = 0.$$

In diesem Falle sind also die Coordinaten des Schnittpunkts sämmtlich unbestimmt. Da $(ACD) = 0$ und $(BCD) = 0$, so verschwindet für alle Werthe von x und y auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1 x + B_1 y, & C_1 & D_1 \\ A_2 x + B_2 y, & C_2 & D_2 \\ A_3 x + B_3 y, & C_3 & D_3 \end{vmatrix}$$

Multiplicirt man die Glieder der zweiten Reihe mit z, und addirt dann die dritte und die vierte Reihe zur ersten, so entsteht die Identität

$$\begin{vmatrix} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1, & C_1, D_1 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2, & C_2, D_2 \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3, & C_3, D_3 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Entwickelt man nach den Gliedern der ersten Reihe und bezeichnet die drei Determinanten aus je zwei Colonnen der Elemente

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix}$$

mit m_1, m_2, m_3, so erhält man

7. $$m_1 T_1 + m_2 T_2 + m_3 T_3 \equiv 0.$$

Dieser Identität zufolge wird für jeden Punkt, für dessen Coordinaten die Polynome T_1 und T_2 verschwinden, auch das Polynom T_3 gleich Null, folglich geht die Ebene T_3 durch die Schnittlinie der Ebenen T_1 und T_2.

Umgekehrt: Wenn drei Ebenen $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ dieselbe Gerade enthalten, so giebt es drei Zahlen m_1, m_2, m_3, durch welche die Identität hergestellt wird:

$$m_1 T_1 + m_2 T_2 + m_3 T_3 = 0.$$

Denn sind T_{10}, T_{20} die Werthe, welche die Polynome T_1 und T_2 für einen ausserhalb der Schnittlinie $T_1 T_2$ auf T_3 gelegenen Punkt P_0 annehmen, so bilde man die Ebenengleichung.

8. $$T_{20} \cdot T_1 - T_{10} \cdot T_2 = 0.$$

Derselben wird von jedem Punkte genügt, für welchen $T_1 = T_2 = 0$, d. i. von jedem gemeinsamen Punkte der Ebenen T_1 und T_2; sowie von dem Punkte P_0. Folglich ist die Ebene 8. identisch mit T_3, und es giebt daher eine Zahl m_1, durch welche die Identität hergestellt wird

$$m_1 T_3 \equiv T_{20} \cdot T_1 - T_{10} \cdot T_2.$$

Dies ist aber die behauptete Identität, wenn man nur m_2 und m_3 durch $-T_{20}$ und T_{10} ersetzt.

9. Vier Ebenen $T_0 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ gehen durch einen Punkt, wenn die Determinante des Systems der vier Gleichungen verschwindet, also wenn

$$\begin{vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Unter dieser Bedingung giebt es vier Zahlen m_0, m_1, m_2, m_3, für welche

$$m_0 A_0 + m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 = 0,$$
$$m_0 B_0 + m_1 B_1 + m_2 B_2 + m_3 B_3 = 0,$$
$$m_0 C_0 + m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3 = 0,$$
$$m_0 D_0 + m_1 D_1 + m_2 D_2 + m_3 D_3 = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit x, y, z, und addirt, so erhält man die Identität

$$m_0 T_0 + m_1 T_1 + m_2 T_2 + m_3 T_3 = 0.$$

Wenn also vier Ebenen durch einen Punkt gehen, so giebt es vier von Null verschiedene Zahlen, durch welche die Identität hergestellt wird

$$m_0 T_0 + m_1 T_1 + m_2 T_2 + m_3 T_3 \equiv 0.$$

Umgekehrt: Wenn es vier Zahlen m_0, m_1, m_2, m_3, giebt, durch welche diese Identität hergestellt wird, so haben die vier Ebenen T_0, T_1, T_2, T_3 einen Punkt gemein.

10. Sind $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ die Gleichungen zweier Ebenen in Normalform, so sind die Abstände eines Punktes P von diesen Ebenen $p_1 = -T_1$, $p_2 = -T_2$. Ein Punkt, der gleiche oder entgegengesetzt gleiche Abstände von den beiden Ebenen hat, erfüllt also die Gleichung $T_1 = T_2$, bez. $T_1 = -T_2$, d. i. $T_1 - T_2 = 0$, bez. $T_1 + T_2 = 0$.

Also sind $T_1 - T_2 = 0$ und $T_1 + T_2 = 0$ die Gleichungen der Ebenen, welche die Winkel der Ebenen T_1 und T_2 halbiren; und zwar halbirt $T_1 - T_2 = 0$ den Winkel, in welchem der Nullpunkt liegt, $T_1 + T_2 = 0$ die Nebenwinkel desselben.

Es seien $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ die Gleichungen dreier Ebenen in Normalform. Die Ebenen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$, welche die Winkel der Ecke halbiren, in welcher der Nullpunkt liegt, haben die Gleichungen:

$$\mathfrak{T}_1 \equiv T_2 - T_3 = 0, \quad \mathfrak{T}_2 \equiv T_3 - T_1 = 0, \quad \mathfrak{T}_3 \equiv T_1 - T_2 = 0.$$

Die Summe $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_3$ verschwindet identisch; also folgt (No. 8) der aus den Elementen bekannte Satz: Die Ebenen, welche die Winkel einer dreiseitigen Ecke halbiren, schneiden sich in einer Geraden.

Die Ebenen, welche die übrigen Flächenwinkel der drei gegebenen Ebenen halbiren, haben die Gleichungen

$$\mathfrak{T}_1' \equiv T_2 + T_3 = 0, \quad \mathfrak{T}_2' \equiv T_3 + T_1 = 0, \quad \mathfrak{T}_3' \equiv T_1 + T_2 \equiv 0.$$

Man erhält so für die drei Paar Halbirungsebenen die Zusammenstellung:

$$\mathfrak{T}_1 \equiv T_2 - T_3 = 0, \qquad \mathfrak{T}_1' \equiv T_2 + T_3 = 0;$$
$$\mathfrak{T}_2 \equiv T_3 - T_1 = 0, \qquad \mathfrak{T}_2' \equiv T_3 + T_1 = 0;$$
$$\mathfrak{T}_3 \equiv T_1 - T_2 = 0, \qquad \mathfrak{T}_3' \equiv T_1 + T_2 = 0.$$

Wie man sieht, sind folgende Identitäten erfüllt:

$$\mathfrak{T}_1' - \mathfrak{T}_2' + \mathfrak{T}_3 \equiv 0, \quad \mathfrak{T}_2' - \mathfrak{T}_3' + \mathfrak{T}_1 \equiv 0, \quad \mathfrak{T}_3' - \mathfrak{T}_1' + \mathfrak{T}_2 \equiv 0.$$

Hieraus folgt: Die drei Paar Ebenen, welche die Winkel einer dreiseitigen Ecke und deren Nebenwinkel halbiren, gehen viermal zu je dreien durch eine Gerade.

11. Eine Ebene, die durch den Schnitt von

$$T_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \quad \text{und}$$
$$T_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

geht, hat eine Gleichung von der Form

$$T \equiv m_1 T_1 + m_2 T_2 \equiv$$
$$(m_1 A_1 + m_2 A_2) x + (m_1 B_1 + m_2 B_2) y + (m_1 C_1 + m_2 C_2) z + m_1 D_1 + m_2 D_2 = 0.$$

Soll nun T normal zu einer Ebene

$$T_0 = A_0 x + B_0 y + C_0 z + D_0 = 0$$

sein, so muss die Bedingung erfüllt sein

$$(m_1 A_1 + m_2 A_2) A_0 + (m_1 B_1 + m_2 B_2) B_0 + (m_1 C_1 + m_2 C_2) C_0 = 0,$$

oder $\quad m_1(A_1 A_0 + B_1 B_0 + C_1 C_0) + m_2(A_2 A_0 + B_2 B_0 + C_2 C_0) = 0.$

Man kann daher wählen

$$m_1 = A_2 A_0 + B_2 B_0 + C_2 C_0, \qquad m_2 = -(A_1 A_0 + B_1 B_0 + C_1 C_0).$$

Setzt man nun abkürzungsweise

$$A_2 A_0 + B_2 B_0 + C_2 C_0 = \mu_1,\ A_0 A_1 + B_0 B_1 + C_0 C_1 = \mu_2,\ A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = \mu_0,$$

so sind die Gleichungen der Ebenen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_0$, die normal zu T_1, T_2, T_0 sind und durch die gegenüberliegenden Kanten der dreiseitigen Ecke $T_1 T_2 T_0$ gehen

$$\mathfrak{T}_1 = \mu_2 T_2 - \mu_0 T_0 = 0,$$
$$\mathfrak{T}_2 = \mu_0 T_0 - \mu_1 T_1 = 0,$$
$$\mathfrak{T}_0 = \mu_1 T_1 - \mu_2 T_2 = 0.$$

Die Summe $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_0$ verschwindet identisch; also haben wir den Satz: Die Ebenen, welche die Kanten einer dreiseitigen Ecke auf die gegenüberliegenden Seiten normal projiciren, gehen durch eine Gerade.

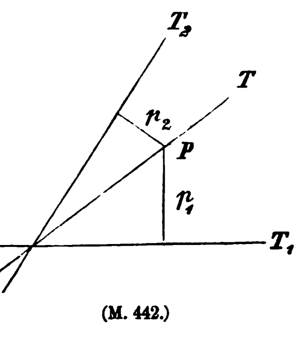
12. Die Bedingungsgleichung für die Coordinaten der Punkte, deren Abstände von zwei Ebenen ein gegebenes Verhältniss $m_2 : m_1$ haben, ergiebt sich, wenn $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ die Normalgleichungen der Ebenen sind, aus

$$p_1 : p_2 = m_2 : m_1, \quad p_1 = -T_1, \quad p_2 = -T_2, \quad \text{zu}$$
$$m_1 T_1 - m_2 T_2 = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, die durch die Kante $T_1 T_2$ geht. Aus einem Normalschnitte der drei Ebenen ist ersichtlich, dass

$$p_1 : p_2 = \sin T_1 T : \sin T T_2,$$

mithin theilt die Ebene T den Flächenwinkel $T_1 T_2$ im Sinusverhältniss $m_2 : m_1$, d. h. so, dass $\sin T_1 T : \sin T T_2 = m_2 : m_1$, und zwar geht T im Falle eines positiven Verhältnisses, $m_2 : m_1$ durch den Winkel, in welchem der Nullpunkt liegt, im Falle eines negativen durch die beiden Nebenwinkel.



(M. 442.)

13. Sind $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_0 = 0$ die Normalgleichungen der Seiten einer Ecke, und theilt man die Winkel $T_1 T_2$, $T_2 T_0$, $T_0 T_1$ der Ecke der Reihe nach in den Sinusverhältnissen $\mu_1 : \mu_2$, $\mu_2 : \mu_0$, $\mu_0 : \mu_1$, so sind die Gleichungen dieser drei Theilungsebenen:

$$\mathfrak{T}_0 = \frac{1}{\mu_1} T_1 - \frac{1}{\mu_2} T_2 = 0,$$
$$\mathfrak{T}_1 = \frac{1}{\mu_2} T_2 - \frac{1}{\mu_0} T_0 = 0,$$
$$\mathfrak{T}_2 = \frac{1}{\mu_0} T_0 - \frac{1}{\mu_1} T_1 = 0.$$

Hieraus folgt die Identität $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_0 \equiv 0$; man hat daher den allgemeinen Satz: Die Ebenen, welche die Winkel einer Ecke der Reihe nach in den Sinusverhältnissen $\mu_1 : \mu_2$, $\mu_2 : \mu_0$, $\mu_0 : \mu_1$ theilen, gehen durch eine Gerade.

Die Sätze 10 und 11 sind als besondere Fälle dieses Satzes zu betrachten.

14. Sind $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, $T_4 = 0$ die Normalgleichungen der Ebenen eines Tetraëders, in dessen Innern der Nullpunkt liegt, so haben die Halbirungsebenen der Tetraëderwinkel und ihrer Supplemente die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_{12} &\equiv T_1 - T_2 = 0, & \mathrm{T}'_{12} &\equiv T_1 + T_2 = 0, \\
\mathrm{T}_{13} &\equiv T_1 - T_3 = 0, & \mathrm{T}'_{10} &\equiv T_1 + T_3 = 0, \\
\mathrm{T}_{14} &\equiv T_1 - T_4 = 0, & \mathrm{T}'_{14} &\equiv T_1 + T_4 = 0, \\
\mathrm{T}_{23} &\equiv T_2 - T_3 = 0, & \mathrm{T}'_{23} &\equiv T_2 + T_3 = 0, \\
\mathrm{T}_{24} &\equiv T_2 - T_4 = 0, & \mathrm{T}'_{24} &\equiv T_2 + T_4 = 0, \\
\mathrm{T}_{34} &\equiv T_3 - T_4 = 0, & \mathrm{T}'_{34} &\equiv T_3 + T_4 = 0.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt die Identität:

1. $$\mathrm{T}_{12} + \mathrm{T}_{23} + \mathrm{T}_{34} - \mathrm{T}_{14} \equiv 0.$$

Diese vier Halbirungsebenen gehen also durch einen Punkt; da nun bekanntlich T_{13} mit T_{12} und T_{14}, sowie T_{24} mit T_{12} und T_{23} durch eine Gerade geht, so folgt: Die sechs Ebenen, welche die Winkel eines Tetraëders halbiren, gehen durch einen Punkt.

Ferner ergeben sich noch die Identitäten:

2. $$\mathrm{T}_{12} + \mathrm{T}_{23} + \mathrm{T}'_{34} - \mathrm{T}'_{14} \equiv 0,$$
3. $$\mathrm{T}_{23} + \mathrm{T}_{34} - \mathrm{T}'_{12} + \mathrm{T}'_{14} \equiv 0,$$
4. $$\mathrm{T}_{12} - \mathrm{T}_{14} + \mathrm{T}'_{23} - \mathrm{T}'_{34} \equiv 0,$$
5. $$\mathrm{T}_{34} - \mathrm{T}_{14} - \mathrm{T}'_{23} + \mathrm{T}'_{12} \equiv 0.$$

Durch den Punkt 2. gehen, wie man aus Satz 10 schliesst, noch die Ebenen T_{13} (weil sie mit T_{12} und T_{23} durch eine Gerade geht), sowie T'_{24} (weil sie mit T_{23} und T'_{34} durch eine Gerade geht). Ebenso findet man, dass durch den Punkt 3. noch die Ebenen T_{24} und T'_{13}; durch 4. noch die Ebenen T_{24} und T'_{13}; durch 5. noch die Ebenen T_{13} und T'_{24} gehen; man hat daher den Satz: Je sechs Ebenen, welche drei an einer Ebene liegende Aussenwinkel eines Tetraëders und die drei nicht anliegenden Tetraëderwinkel halbiren, gehen durch einen Punkt. Man hat ferner

6. $$\mathrm{T}'_{12} - \mathrm{T}'_{23} + \mathrm{T}'_{34} - \mathrm{T}'_{14} \equiv 0,$$
7. $$\mathrm{T}'_{13} - \mathrm{T}'_{34} + \mathrm{T}'_{24} - \mathrm{T}'_{14} \equiv 0,$$
8. $$\mathrm{T}'_{14} - \mathrm{T}'_{24} - \mathrm{T}'_{23} - \mathrm{T}'_{13} \equiv 0.$$

Durch den Punkt 6. gehen noch die Ebenen T_{13} und T_{24}; durch 7. noch die Ebenen T_{14} und T_{32}; durch 8. noch die Ebenen T_{12} und T_{34}. Hieraus folgt: Je sechs Halbirungsebenen zweier gegenüberliegenden Tetraëderwinkel und der vier nicht neben diesen liegenden Aussenwinkel gehen durch einen Punkt.

15. Die Coordinaten eines Punktes, der von den beiden Punkten P_1 und P_2 gleiche Abstände hat, genügen der Bedingung

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2.$$

Hieraus folgt für x, y, z die lineare Gleichung

$$T \equiv 2(x_2 - x_1) \cdot x + 2(y_2 - y_1) \cdot y + 2(z_2 - z_1) z - (x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2) = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene. Wird die Strecke $P_1 P_2$ mit d bezeichnet, so folgt für die Winkel, welche die Normale dieser Ebene mit den Coordinatenachsen bildet (No. 1)

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

Dieselben Winkel (§ 1, No. 2) bilden die Gerade $P_1 P_2$ mit den Achsen.

Ferner ist ersichtlich, dass die Gleichung $T = 0$ identisch erfüllt wird, wenn man für x, y, z die Werthe

$$x = \tfrac{1}{2}(x_2 + x_1), \quad y = \tfrac{1}{2}(y_2 + y_1), \quad z = \tfrac{1}{2}(z_2 + z_1),$$

d. i. die Coordinaten des Mittelpunkts der Strecke $P_1 P_2$ einsetzt. Daher hat man den Satz: Der Ort der Punkte, die von zwei gegebenen Punkten P_1 und P_2 gleiche Abstände haben, ist die Ebene, welche die Strecke $P_1 P_2$ normal halbirt.

Die Ebenen, welche die Seiten eines Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ normal halbiren, haben die Gleichungen:

$$\mathfrak{T}_{23} \equiv 2(x_2 - x_3)\cdot x + 2(y_2 - y_3)\cdot y + 2(z_2 - z_3)\cdot z - (x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2 + z_2^2 - z_3^2) = 0,$$
$$\mathfrak{T}_{31} \equiv 2(x_3 - x_1)\cdot x + 2(y_3 - y_1)\cdot y + 2(z_3 - z_1)\cdot z - (x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 + z_3^2 - z_1^2) = 0,$$
$$\mathfrak{T}_{12} \equiv 2(x_1 - x_2)\cdot x + 2(y_1 - y_2)\cdot y + 2(z_1 - z_2)\cdot z - (x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + z_1^2 - z_2^2) = 0.$$

Hieraus ergiebt sich die Identität $\mathfrak{T}_{23} + \mathfrak{T}_{31} + \mathfrak{T}_{12} = 0$. Dieselbe lehrt den Satz: Die drei Ebenen, welche die Seiten eines Dreiecks normal halbiren, schneiden sich in einer Geraden.

Die Ebenen, welche die Seiten eines unebenen Vierecks $P_1 P_2 P_3 P_4$ normal halbiren, haben die Gleichungen

$$\mathfrak{T}_{12} \equiv 2(x_1 - x_2)\cdot x + 2(y_1 - y_2)\cdot y + 2(z_1 - z_2)\cdot z - (x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + z_1^2 - z_2^2) = 0,$$
$$\mathfrak{T}_{23} \equiv 2(x_2 - x_3)\cdot x + 2(y_2 - y_3)\cdot y + 2(z_2 - z_3)\cdot z - (x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2 + z_2^2 - z_3^2) = 0,$$
$$\mathfrak{T}_{34} \equiv 2(x_3 - x_4)\cdot x + 2(y_3 - y_4)\cdot y + 2(z_3 - z_4)\cdot z - (x_3^2 - x_4^2 + y_3^2 - y_4^2 + z_3^2 - z_4^2) = 0,$$
$$\mathfrak{T}_{41} \equiv 2(x_4 - x_1)\cdot x + 2(y_4 - y_1)\cdot y + 2(z_4 - z_1)\cdot z - (x_4^2 - x_1^2 + y_4^2 - y_1^2 + z_4^2 - z_1^2) = 0.$$

Hieraus folgt die Identität $\mathfrak{T}_{12} + \mathfrak{T}_{23} + \mathfrak{T}_{34} + \mathfrak{T}_{42} \equiv 0$, und daher der Satz: Die vier Ebenen, welche die Seiten eines unebenen Vierecks normal halbiren, gehen durch einen Punkt; dieser Punkt ist das Centrum der dem Viereck umgeschriebenen Kugel. Durch den Punkt geht auch die Ebene $\mathfrak{T}_{13}$, welche die Strecke $P_1 P_3$ normal halbirt (da sie mit $\mathfrak{T}_{12}$ und $\mathfrak{T}_{23}$ durch eine Gerade geht) und die Ebene $\mathfrak{T}_{24}$, die die Strecke $P_2 P_4$ normal halbirt (da diese mit $\mathfrak{T}_{23}$ und $\mathfrak{T}_{34}$ durch eine Gerade geht). Man kann daher den obigen Satz auch durch den folgenden ersetzen: Die sechs Ebenen, welche die Kanten eines Tetraëders normal halbiren, treffen sich in einem Punkte.

---

16. Die Punkte, deren Coordinaten den Gleichungen zweier Ebenen

1. $$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,$$
2. $$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$$

genügen, liegen auf der Geraden, die den beiden Ebenen gemeinsam ist; eine gerade Linie im Raume wird also durch den Verein zweier linearen Gleichungen dargestellt. Eliminirt man aus den Gleichungen 1. und 2. der Reihe nach die Coordinaten z, y, x, so erhält man die Gleichungen der Normalprojectionen der Geraden auf die drei Coordinatenebenen, nämlich

3. Horizontalprojection: $(AC)\,x + (BC)\,y + (DC) = 0,$
4. Verticalprojection: $(AB)\,x + (CB)\,z + (DB) = 0,$
5. Seitliche Projection: $(BA)\,y + (CA)\,z + (DA) = 0,$

wenn man mit (MN) die Determinante bezeichnet:

$$(MN) \equiv \begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix}.$$

Von den Coordinaten der Punkte einer Ebene sind zwei willkürlich, z. B. x und y; die dritte z ist von ihnen abhängig; sie ergiebt sich aus der Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ der Ebene zu

$$z = -\frac{Ax + By + D}{C}.$$

Von den Coordinaten der Punkte einer Geraden ist dagegen nur eine willkürlich, z. B. x; die beiden andern ergeben sich aus den beiden Gleichungen einer Geraden, z. B. aus 3. und 4. zu

$$y = -\frac{(AC)x + (DC)}{(BC)}, \quad z = -\frac{(AB)x + (DB)}{(CB)}.$$

17. Ist P ein Punkt einer Geraden G, die durch den Punkt P_1 geht und mit den Coordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet, und wird die Strecke $P_1 P$ mit ρ bezeichnet, so hat man

$$x - x_1 = \rho\cos\alpha, \quad y - y_1 = \rho\cos\beta, \quad z - z_1 = \rho\cos\gamma;$$

eliminirt man ρ, so erhält man:

1. $$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma},$$

dies sind also die Gleichungen der Geraden G. Sind die Gleichungen der Horizontal- und der Verticalprojection einer Geraden in der Form gegeben:

2. $$y = Mx + Q, \quad z = Nx + R,$$

und ist P_1 ein Punkt dieser Geraden, so hat man

$$y_1 = Mx_1 + Q, \quad z_1 = Nx_1 + R,$$

also durch Subtraction:

$$y - y_1 = M(x - x_1), \quad z - z_1 = N(x - x_1).$$

Daher hat man durch Vergleich mit 1.:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 1 : M : N.$$

Mit Hülfe der Gleichung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

schliesst man hieraus

3. $$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}}, \quad \cos\beta = \frac{M}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{N}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}}.$$

Für den Winkel δ zweier Geraden, deren Gleichungen sind

$$y = Mx + Q, \quad z = Nx + R,$$
$$y = M_1 x + Q_1, \quad z = N_1 x + R_1,$$

ergiebt sich hiernach

$$\cos\delta = \frac{1 + MN_1 + NN_1}{\sqrt{1 + M^2 + N^2} \cdot \sqrt{1 + M_1^2 + N_1^2}}.$$

Die beiden Geraden sind daher normal zu einander, wenn

$$1 + MM_1 + NN_1 = 0;$$

sie sind parallel, wenn ihre Projectionen parallel sind, also wenn $M = M_1$, $N = N_1$.

18. Der Winkel ε einer Geraden

$$y = Mx + Q, \quad z = Nx + R$$

mit der Ebene

$$T \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

ist das Complement des Winkels der Geraden und einer Normalen zur Ebene T, daher hat man

1. $$\sin\varepsilon = \frac{A + MB + NC}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{1 + M^2 + N^2}}.$$

Die Gerade ist daher parallel zur Ebene T, wenn

2. $$A + MB + NC = 0;$$

sie ist normal zu T, wenn

3. $$A : B : C = 1 : M : N.$$

19. Die Coordinaten des Schnittpunktes der Geraden

$$y = Mx + Q, \quad z = Nx + R$$

mit der Ebene

$$T \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

sind die Lösungen des Systems dieser drei Gleichungen. Man erhält

$$x = -\frac{BQ + CR + D}{A + BM + CN}, \quad y = \frac{-M(CR + D) + Q(CN + A)}{A + BM + CN},$$

$$z = \frac{-N(BQ + D) + R(BM + A)}{A + BM + CN}.$$

Diese Werthe werden unendlich gross, wenn $A + BM + CN = 0$; diese Bedingung des Parallelismus einer Geraden und einer Ebene ist schon in voriger Nummer gefunden worden.

Wenn die Bedingungen $A + BM + CN = 0$ und $BQ + CR + D = 0$ erfüllt sind, so ist auch

$$-M(BQ + CR + D) + Q(A + BM + CN) \equiv -M(CR + D) + Q(CN + A) = 0,$$
$$-N(BQ + CR + D) + Q(A + CM + CN) \equiv -N(BQ + D) + R(BM + C) = 0;$$

die Coordinaten des Schnittpunktes sind also unbestimmt; folglich ist die Gerade ganz in der Ebene enthalten.

20. Jede Ebene, die normal zu der Geraden G ist:

$$y = Mx + Q, \quad z = Nx + R,$$

hat eine Gleichung von der Form (No. 18)

$$x + My + Nz + D = 0,$$

in welcher D willkürlich ist. Geht die Ebene durch einen gegebenen Punkt P_1, so ist

$$x_1 + My_1 + Nz_1 + D = 0;$$

durch Subtraction der letzten Gleichungen wird D eliminirt; man erhält so die Gleichung der durch P_1 gehenden Normalebene zu G

$$T \equiv x - x_1 + M(y - y_1) + N(z - z_1) = 0.$$

Die Normalprojection Π des Punktes P_1 auf die Gerade G ist der Schnitt der Ebene T mit der Geraden G, also ergeben sich die Coordinaten von Π nach den Formeln der vorigen Nummer, indem man in denselben A, B, C, D der Reihe nach durch 1, M, N, $-(x_1 + My_1 + Nz_1)$ ersetzt:

$$\xi = \frac{-MQ - NR + x_1 + My_1 + Nz_1}{1 + M^2 + N^2},$$

$$\eta = \frac{-MNR + Q + QN^2 + M(x_1 + My_1 + Nz_1)}{1 + M^2 + N^2},$$

$$\zeta = \frac{-MNQ + R + RM^2 + N(x_1 + My_1 + Nz_1)}{1 + M^2 + N^2}.$$

Der Abstand des Punktes P_1 von der Geraden G kann aus den Coordinaten von P_1 und Π berechnet werden.

21. Zwei Gerade haben einen gemeinsamen Punkt, wenn der Verein der Gleichungen der Geraden

$$y = Mx + Q, \quad z = Nx + R,$$
$$y = M_1x + Q_1, \quad z = N_1x + R_1$$

durch ein System von Werthen x, y, z erfüllbar ist. Durch Subtraction ergeben sich die beiden Gleichungen

$$0 = (M - M_1)x + (Q - Q_1), \quad 0 = (N - N_1)x + (R - R_1);$$

hieraus folgt als Bedingung dafür, dass sich zwei Gerade schneiden

$$\begin{vmatrix} M - M_1, & Q - Q_1 \\ N - N_1, & R - R_1 \end{vmatrix} = 0.$$

22. Durch zwei Gerade, die nicht in derselben Ebene liegen, lassen sich zwei zu einander parallele Ebenen legen. Die Gleichungen der beiden Geraden G_1 und G_2 seien

$$y = M_1 x + Q_1, \quad z = N_1 x + R_1;$$
$$y = M_2 x + Q_2, \quad z = N_2 x + R_2.$$

Die Gleichungen der beiden Parallelebenen können in der Form vorausgesetzt werden

$$x + By + Cz + D_1 = 0, \quad x + By + Cz + D_2 = 0.$$

Da G_1 in T_1 und G_2 in T_2 enthalten ist, so bestehen für B, C, D_1, D_2 die vier Gleichungen:

1. $1 + BM_1 + CN_1 = 0,$ 3. $BQ_1 + CR_1 + D_1 = 0,$
2. $1 + BM_2 + CN_2 = 0;$ 4. $BQ_2 + CR_2 + D_2 = 0.$

Aus 1. und 2. erhält man:

$$B = \frac{N_1 - N_2}{(MN)}, \quad C = -\frac{M_1 - M_2}{(MN)};$$

aus 3. und 4. folgt weiter

$$D_1 = \frac{-Q_1(N_1 - N_2) + R_1(M_1 - M_2)}{(MN)}, \quad D_2 = \frac{-Q_2(N_1 - N_2) + R_2(M_1 - M_2)}{(MN)}.$$

Die Gleichungen der beiden Parallelebenen sind daher

$$T_1 \equiv (M_1 N_2 - M_2 N_1)x + (N_1 - N_2)y - (M_1 - M_2)z + R_1(M_1 - M_2) - Q_1(N_1 - N_2) = 0,$$
$$T_2 \equiv (M_1 N_2 - M_2 N_1)x + (N_1 - N_2)y - (M_1 - M_2)z + R_2(M_1 - M_2) - Q_2(N_1 - N_2) = 0.$$

Die Winkel α, β, γ, welche die gemeinsame Normale der beiden Geraden G_1 und G_2 mit den Achsen bildet, ergeben sich daher aus

$$\cos\alpha = \frac{1}{S}, \quad \cos\beta = \frac{N_1 - N_2}{S}, \quad \cos\gamma = -\frac{M_1 - M_2}{S}$$
$$S \equiv \sqrt{(M_1 N_2 - M_2 N_1)^2 + (N_1 - N_2)^2 + (M_1 - M_2)^2}.$$

Der kürzeste Abstand d der beiden Geraden ist dem Abstande der parallelen Ebenen T_1 und T_2 gleich, also ist

$$d = d_2 - d_1 = \frac{(Q_1 - Q_2)(N_1 - N_2) - (R_1 - R_2)(M_1 - M_2)}{S}.$$

---

23. Statt, wie bisher geschehen, den Punkt, können wir auch die Ebene als Raumelement verwenden, in ähnlicher Weise, wie wir in der analytischen Planimetrie die Gerade verwendet haben. Als orthogonale Coordinaten der Ebene T definiren wir die reciproken Achsenabschnitte und setzen

$$\frac{1}{OS_1} = u, \quad \frac{1}{OS_2} = v, \quad \frac{1}{OS_3} = w.$$

Sind die Coordinaten einer Ebene durch eine Gleichung verbunden

$$f(u, v, w) = 0,$$

so sind nur zwei Coordinaten, z. B. u und v, willkürlich, die dritte folgt aus ihnen gemäss dieser Gleichung; aus den sämmtlichen Ebenen des Raumes wird also durch die Gleichung eine unendlich grosse Anzahl ausgewählt. Man gebe u einen bestimmten Werth u_1 und hierauf v eine Reihe um endliche Beträge von einander verschiedener, auf einander folgender Werthe v_1', v_1'', v_1''' u. s. w. und bestimme die zu u_1 und v_1', v_1'', v_1''' ... gemäss der Gleichung $f(u, v, w) = 0$ zugehörigen Werthe w_1' w_1'', w_1''' .... Hierauf nehme man für u einen andern Werth u_2, für v eine Reihe von Werthen v_2', v_2'', v_2''' ... und bestimme die zugehörigen w_2', w_2'', w_2''' ... Dies kann man beliebig fortsetzen. Man erhält dadurch eine Anzahl von Ebenen, deren Coordinaten die Gleichung $f(u, v, w) = 0$ erfüllen. Diese Ebenen bilden eine Polyëder-Schale. Lässt man nun die Differenz

der Werthe u_1, u_2, ..., sowie für jedes u die Differenz der Werthe v', v'', v''' ... verschwindend klein werden, so erhält das Polyëder unendlich kleine Flächen und die Winkel zweier benachbarter Polyëderflächen werden verschwindend klein (oder, was auf dasselbe hinauskommt, unendlich wenig von einem gestreckten Winkel verschieden); das Polyëder geht daher in eine krumme Oberfläche über, welche von den Ebenen T berührt (umhüllt) wird.

24. Alle Ebenen, die dasselbe u und v haben, haben dieselbe Horizontalspur; alle Ebenen, die zu demselben u und w gehören, haben dieselbe Verticalspur; alle Ebenen, die in Bezug auf die Coordinaten v und w übereinstimmen, haben dieselbe seitliche Spur. Die Ebenen, die dieselbe Coordinate u haben, gehen durch denselben Punkt der X-Achse; die Ebenen, die dieselbe Coordinate v haben, gehen durch denselben Punkt der Y-Achse; und die Ebenen, die dieselbe Coordinate w haben, gehen durch denselben Punkt der Z-Achse. Insbesondere treffen die Ebenen, für welche $u = 0$, bez. $v = 0$, oder $w = 0$ ist, die Achse OX, bez. OY oder OZ, in einem unendlich fernen Punkte.

Für die Ebenen, welche durch den Nullpunkt gehen, ist $u = \infty$, $v = \infty$, $w = \infty$; doch hat man diesen unendlich grossen Werthen für jede durch O gehende Ebene bestimmte Verhältnisse beizulegen, nämlich die Verhältnisse der Coordinaten einer Parallelebene.

25. Ersetzt man in der Gleichung der Ebene

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

die reciproken Achsenabschnitte $1:a$, $1:b$, $1:c$ der Reihe nach durch u, v, w, so erhält man

$$ux + vy + wz - 1 = 0.$$

Sieht man in dieser Gleichung alle sechs Coordinaten als veränderlich an, so erscheint sie als die Bedingung, welche die Coordinaten eines Punktes und einer Ebene erfüllen, wenn der Punkt und die Ebene vereint liegen (d. i. wenn der Punkt auf der Ebene liegt. Giebt man u, v, w bestimmte Werthe, so ist

$$ux + vy + wz - 1$$

die Bedingungsgleichung für die Coordinaten der Punkte, die auf der Ebene liegen, die die gegebenen Werthe u, v, w zu Coordinaten hat, ist also die Gleichung dieser Ebene. Ertheilt man hingegen den Coordinaten x, y, z gegebene Werthe, so ist $ux + vy + wz - 1 = 0$ die Bedingungsgleichung für die Coordinaten aller Ebenen, die durch den Punkt P gehen, der die gegebenen Coordinaten x, y, z hat; wir nennen sie daher in diesem Falle die Gleichung dieses Punktes P.

Jede lineare Gleichung zwischen den Coordinaten einer Ebene ist die Gleichung eines eindeutig bestimmten Punktes. Vergleicht man die allgemeine lineare Gleichung in Ebenencoordinaten

$$1. \quad Au + Bv + Cw + D = 0,$$

mit

$$xu + yv + zw - 1 = 0,$$

so sieht man, dass 1. die Gleichung des Punktes ist, der die Coordinaten hat

$$x = -A:D, \quad y = -B:D, \quad z = -C:D.$$

Die Gleichungen

$$Au + Bv + D = 0, \quad Au + Cw + D = 0, \quad Bv + Cw + D = 0$$

sind die Gleichungen von Punkten, deren Coordinaten der Reihe nach sind

$$x = -A:D, \quad y = -B:D, \quad z = 0;$$
$$x = -A:D, \quad y = 0, \quad z = -C:D;$$
$$x = 0, \quad y = -B:D, \quad z = -C:D;$$

also sind

$P' \equiv Au + Bv + D = 0, \quad P'' \equiv Au + Cw + D = 0, \quad P''' \equiv Bv + Cw + D = 0,$

die Gleichungen der Projectionen des Punktes

$$P \equiv Au + Bv + Cw + D = 0.$$

26. Die Gleichung des Schnittpunktes dreier Ebenen T_1, T_2, T_3 ergiebt sich durch Elimination von A, B, C, D aus den vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} Au + Bv + Cw + D &= 0, \\ Au_1 + Bv_1 + Cw_1 + D &= 0, \\ Au_2 + Bv_2 + Cw_2 + D &= 0, \\ Au_3 + Bv_3 + Cw_3 + D &= 0. \end{aligned}$$

Man erhält hieraus

$$P \equiv \begin{vmatrix} u & v & w & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Bedingung dafür, dass vier Ebenen T_0, T_1, T_2, T_3 durch einen Punkt gehen, ist daher:

$$\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

27. Die Coordinaten des Punktes P, der die Strecke P_1P_2 im Verhältnisse $\lambda_2 : \lambda_1$ theilt, hat die Coordinaten

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

und mithin die Gleichung:

$$P \equiv (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\, u + (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\, v + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)\, w - (\lambda_1 + \lambda_2) = 0,$$

oder: $\quad P \equiv \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0, \quad$ wobei

$$P_1 \equiv x_1 u + y_1 v + z_1 w - 1 = 0, \quad P_2 \equiv x_2 u + y_2 v + z_2 w - 1 = 0$$

die Gleichungen der Punkte P_1 und P_2 in Normalform (d. i. mit dem Absolutgliede -1) sind.

Umgekehrt: Bildet man aus zwei linearen Functionen

$$P_1 \equiv A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1 \quad \text{und} \quad P_2 \equiv A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2$$

der Ebenencoordinaten eine neue lineare Function $P \equiv \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$, so ist $P = 0$ die Gleichung des Punktes, der die Strecke der Punkte $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ in dem Verhältniss theilt:

$$P_1 P : P P_2 = \mu_1 D_1 : \mu_2 D_2.$$

28. Der Punkt P, dessen Coordinaten aus den Coordinaten dreier gegebenen Punkte P_1, P_2, P_3 nach den Formeln abgeleitet werden:

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \quad z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

theilt das Dreieck $P_1P_2P_3$ im Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$, d. h. es ist

$$P_2 P_3 P : P_3 P_1 P : P_1 P_2 P = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3.$$

Bezeichnet man nämlich mit i, k, l irgend eine Permutation der Ziffern 1, 2, 3, so hat der Punkt Π_l, welcher $P_i P_k$ im Verhältniss $\lambda_i : \lambda_k$ theilt, die Coordinaten:

$$\xi_l = \frac{\lambda_i x_i + \lambda_k x_k}{\lambda_i + \lambda_k}, \quad \eta_l = \frac{\lambda_i y_i + \lambda_k y_k}{\lambda_i + \lambda_k}, \quad \zeta_l = \frac{\lambda_i z_i + \lambda_k z_k}{\lambda_i + \lambda_k}.$$

Da nun die Coordinaten von P durch die Formeln gewonnen werden:

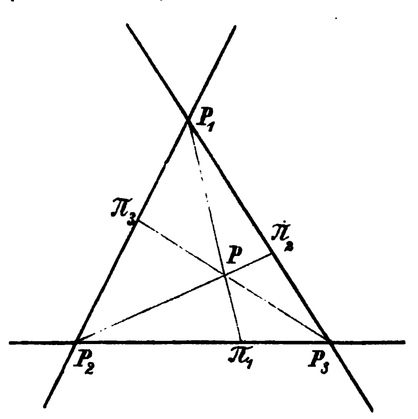
$$x = \frac{(\lambda_i + \lambda_k)\xi_l + \lambda_l x_l}{\lambda_i + \lambda_k + \lambda_l}, \quad y = \frac{(\lambda_i + \lambda_k)\eta_l + \lambda_l y_l}{\lambda_i + \lambda_k + \lambda_l}, \quad z = \frac{(\lambda_i + \lambda_k)\zeta_l + \lambda_l z_l}{\lambda_i + \lambda_k + \lambda_l}.$$

so folgt, dass der Punkt P die Strecke $P_l\Pi_l$ in dem Verhältnisse $(\lambda_i + \lambda_k) : \lambda_l$ theilt.

Daher hat man $P_l\Pi_l : P\Pi_l = (P_lP + P\Pi_l) : P\Pi_l = (\lambda_i + \lambda_k + \lambda_l) : \lambda_l$.

Nun ist aber $P_iP_kP_l : P_iP_kP = P_l\Pi_l : P\Pi_l$, also folgt

$$P_iP_kP : P_iP_kP_l = \lambda_l : (\lambda_i + \lambda_k + \lambda_l).$$



(M. 448.)

Hieraus ergeben sich die drei Formeln:

$$P_2P_3P : P_1P_2P_3 = \lambda_1 : (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3),$$
$$P_3P_1P : P_1P_2P_3 = \lambda_2 : (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3),$$
$$P_1P_2P : P_1P_2P_3 = \lambda_3 : (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3),$$

also ist wie behauptet worden war

$$P_2P_3P : P_3P_1P : P_1P_2P = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3.$$

29. Aus den Coordinaten dieses Punktes P ergiebt sich seine Gleichung sofort zu $P \equiv \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$, wobei $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ die Normalgleichungen der Punkte $P_1 P_2 P_3$ sind. Umgekehrt: Bildet man aus drei linearen Functionen der Ebenencoordinaten

$$P_1 \equiv A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1,$$
$$P_2 \equiv A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2,$$
$$P_3 \equiv A_3 u + B_3 v + C_3 w + D_3,$$

eine neue lineare Function

$$P \equiv \mu_1 P + \mu_2 P_2 + \mu_3 P_3,$$

so ist $P = 0$ die Gleichung des Punktes, der das Dreieck $P_1P_2P_3$ der Punkte $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ in dem Verhältnisse $\mu_1 D_1 : \mu_2 D_2 : \mu_3 D_3$ theilt.

Hieraus schliesst man weiter: Wenn man zu vier linearen Functionen der Ebenencoordinaten P_0, P_1, P_2, P_3 vier Zahlen m_0, m_1, m_2, m_3 finden kann, durch welche die Identität hergestellt wird

$$m_0 P_0 + m_1 P_1 + m_2 P_2 + m_3 P_3 \equiv 0,$$

so liegen die vier Punkte $P_0 = 0$, $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ auf einer Ebene.

Denn aus dieser Identität folgt

$$P_0 \equiv -\frac{m_1}{m_0} P_1 - \frac{m_2}{m_0} P_2 - \frac{m_3}{m_0} P_3,$$

also liegt P_0 auf der Ebene $P_1P_2P_3$.

30. Die Ebenen, deren Coordinaten dem Vereine zweier linearen Gleichungen genügen

$$P_1 \equiv A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1 = 0, \quad P_2 \equiv A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2 = 0,$$

gehen durch die beiden Punkte P_1 und P_2, umhüllen daher die Gerade P_1P_2.

Eine Gerade wird also durch zwei lineare Gleichungen in Ebenencoordinaten dargestellt. Bildet man die Identitäten

$$S_1 \equiv C_2 \cdot P_1 - C_1 \cdot P_2 \equiv (AC) u + (BC) v + (DC),$$
$$S_2 \equiv B_2 \cdot P_1 - B_1 \cdot P_2 \equiv (AB) u + (CB) w + (DB),$$
$$S_3 \equiv A_2 \cdot P_1 - A_1 \cdot P_2 \equiv (BA) v + (CA) w + (DA),$$

erkennt man, dass $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ die Gleichungen von Punkten d, die auf der Geraden P_1P_2 liegen; da ferner in jeder der Functionen S zwei Coordinaten vorkommen, so folgt, dass $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$

die Gleichungen der Spurpunkte der Geraden auf der XY-, XZ- und YZ-Ebene sind.

---

31. Unter dem Doppelverhältniss $(T_1 T_2 T_3 T_4)$ von vier Ebenen eines Büschels (d. i. von vier Ebenen, die durch dieselbe Gerade gehen) T_1, T_2, T_3 T_4 versteht man den Quotienten

$$(T_1 T_2 T_3 T_4) = \frac{\sin T_1 T_3}{\sin T_3 T_2} : \frac{\sin T_1 T_4}{\sin T_4 T_2}.$$

Hieraus folgt, dass das Doppelverhältniss von vier Ebenen eines Büschels gleich dem Doppelverhältniss eines Normalschnitts derselben ist.

Eine beliebige Ebene S schneide den Träger des Büschels (d. i. die Gerade, welche allen Ebenen des Büschels gemein ist) im Punkte A, und einen Normalschnitt Σ des Büschels in einer Geraden G; ferner seien B_1, B_2, B_3, B_4 die Schnittpunkte von G mit T_1, T_2, T_3, T_4. Alsdann ist $(T_1 T_2 T_3 T_4)$ gleich dem Doppelverhältniss der Strahlen des Normalschnitts Σ, mithin auch gleich dem der Punkte B_1, B_2, B_3, B_4, und daher auch gleich dem der Geraden, in welcher die Ebenen des Büschels von der Ebene S geschnitten werden. Durch irgend eine Gerade, die die Büschelebenen in den Punkten C_1, C_2, C_3, C_4 trifft, und einen Punkt A des Büschelträgers ist eine Ebene S bestimmt; da nun das Doppelverhältniss der vier Ebenen dem der vier Geraden AC_1, AC_2, AC_3, AC_4 ist, so ist es auch gleich dem der vier Punkte C_1, C_2, C_3 C_4. Wir haben daher den Satz: Das Doppelverhältniss von vier Ebenen ist gleich dem Doppelverhältniss von vier Punkten, in denen sie von irgend einer Geraden geschnitten werden.

Der Begriff projectiver Gebilde kann nun auf Ebenenbüschel ausgedehnt werden. Sind $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ die Gleichungen zweier Ebenen, so ist das Doppelverhältniss der vier Ebenen

$$T_1 = 0,\ T_2 = 0,\ T_3 \equiv a_1 T_1 + a_2 T_2 = 0,\ T \equiv \lambda_1 a_1 T_1 + \lambda_2 a_2 T_2 = 0$$
$$(T_1 T_2 T_3 T) = \lambda_1 : \lambda_2 .$$

Sind $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, $R_3 \equiv b_1 R_1 + b_2 R_2 = 0$, die Gleichungen der den gleichbezifferten Ebenen entsprechenden Punkte einer Geraden, oder Ebenen eines Büschels, oder Strahlen eines Büschels (in irgend einer Ebene, bezogen auf ein in derselben liegendes Coordinatensystem), oder Kegelschnitte eines Büschels, oder Punkt- oder Strahlenpaare einer quadratischen Involution, so ist die Gleichung des der Ebene T entsprechenden Elements des projectiven Gebildes:

$$R \equiv \lambda_1 b_1 R_1 + \lambda_2 b_2 R_2 = 0 .$$

§ 4. Die Kugel.

1. Sind a, b, c die Coordinaten des Kugelcentrums und ist ρ der Kugelradius, so ist ein Punkt P auf der Kugel gelegen, wenn seine Coordinaten der Gleichung genügen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \rho^2 ,$$

oder entwickelt:

$$1. \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2 = 0 .$$

Dies ist daher die Gleichung der Kugel in Punktcoordinaten.

Sie ist vom zweiten Grade in den Coordinaten x, y, z. Eine allgemeine Gleichung zweiten Grades hat die Form:

$$2.\ Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0.$$

Von derselben unterscheidet sich die Kugelgleichung dadurch, dass die Glieder x^2, y^2, z^2 denselben Coefficienten haben, und dass keine Glieder vorhanden sind, die die Produkte zweier Coordinaten enthalten. Umgekehrt sieht man leicht, dass jede Gleichung zweiten Grades in Punktcoordinaten, in welcher $A = D = F$, und $B = C = E = 0$ ist, die Gleichung einer eindeutig bestimmten Kugel ist. Denn nach Division durch A erhält die Gleichung die Form:

3. $$x^2 + y^2 + z^2 + 2Lx + 2My + 2Nz + Q = 0.$$

Durch Vergleich mit 1. sieht man, dass 3. die Gleichung einer Kugel ist mit den Centrumscoordinaten und dem Radius.

$$a = -L, \quad b = -M, \quad c = -N, \quad \rho = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2 - Q}.$$

Ist $L^2 + M^2 + N^2 - Q < 0$, so schreibe man die Gleichung 3.

$$(x + L)^2 + (y + M)^2 + (z + N)^2 + (Q - L^2 - M^2 - N^2) = 0.$$

Unter der Voraussetzung $L^2 + M^2 + N^2 - Q < 0$ sind alle vier Glieder dieses Polynoms bei realen Werthen von x, y, z positiv; also wird die Gleichung durch reale Werthe der Coordinaten nicht befriedigt. Man kann in diesem Falle die Gleichung als die einer Kugel mit realem Centrum und mit imaginärem Radius

$$\rho = i\sqrt{Q - L^2 - M^2 - N^2}$$

auffassen.

2. Legt man durch einen Punkt Π eine Gerade, die mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet, und ist P ein Punkt dieser Geraden, so hat man für die Coordinaten von P (nach No. 17) die Formeln

$$x = \xi + r\cos\alpha, \quad y = \eta + r\cos\beta, \quad z = \zeta + r\cos\gamma.$$

Liegt der Punkt P auf der Kugel

$$K \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2 = 0,$$

so hat man:

$$(\xi + r\cos\alpha)^2 + (\eta + r\cos\beta)^2 + (\zeta + r\cos\gamma)^2 - 2a(\xi + r\cos\alpha) - 2b(\eta + r\cos\beta)$$
$$- 2c(\zeta + r\cos\gamma) + a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2 = 0.$$

Ordnet man diese Gleichung nach Potenzen von r, so erhält man in Rücksicht auf die Formel $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ die Gleichung:

$$r^2 + 2[(\xi - a)\cos\alpha + (\eta - b)\cos\beta + (\zeta - c)\cos\gamma]\cdot r + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$
$$- 2a\xi - 2b\eta - 2c\zeta + a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2 = 0.$$

Diese Gleichung liefert zwei Werthe r' und r'' für r; das Produkt derselben ist

1. $$r'r'' = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2a\xi - 2b\eta - 2c\zeta + a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2;$$

dasselbe ist unabhängig von der Richtung der durch Π gezogenen Geraden und hängt nur von den Constanten der Kugelgleichung und den Coordinaten von Π ab. Wir haben daher den Satz: Wird ein Strahlenbündel (d. i. die Gesammtheit aller durch einen Punkt gehenden Geraden) von einer Kugel geschnitten, so sind die Produkte der Strecken, die auf jedem Strahle vom Träger des Bündels (Π) bis an die Kugel reichen, einander gleich.

Dieses constante Produkt heisst die Potenz des Punktes Π in Bezug auf die Kugel. Wie man aus 1. sieht, ist die Potenz eines Punktes in Bezug auf eine Kugel dem Werthe gleich, den die Gleichung der Kugel (in der Form No. 1, 1) für die Coordinaten des Punktes annimmt. Die Potenz des Punktes Π in Bezug auf die Kugel ist positiv oder negativ, je nachdem Π von der Kugel ausgeschlossen wird, oder nicht; im ersteren Falle ist die Potenz gleich dem Quadrate der von Π an die Kugel gelegten Tangenten, im zweiten gleich dem Quadrate des Halbmessers des auf der Kugel gelegenen Kreises, dessen Centrum Π ist.

3. Für die Coordinaten der Punkte, die zwei Kugeln gemeinsam sind, besteht der Verein der Kugelgleichungen

1. $K_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2a_1x - 2b_1y - 2c_1z + d_1 = 0,$

2. $K_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2a_2x - 2b_2y - 2c_2z + d_2 = 0,$

wobei d_1 und d_2 abkürzungsweise für $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - \rho_1^2$ und $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - \rho_2^2$ gesetzt worden sind.

Durch Subtraction erhält man aus 1. und 2.

$$L \equiv K_1 - K_2 \equiv 2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + 2(c_2 - c_1)z - (d_2 - d_1) = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, die normal zu der Geraden steht, welche die Centren der beiden Kugeln verbindet; man nennt diese Ebene die Chordalebene der beiden Kugeln. Wenn die Kugeln sich schneiden oder berühren, so ist $L = 0$ die Gleichung ihrer Schnittebene bez. ihrer gemeinsamen Tangentenebene; und wenn die Chordalebene von den beiden Kugeln nicht getroffen wird, so haben dieselben keinen realen Punkt gemein.

Für jeden Punkt der Chordalebene ist $K_1 - K_2 = 0$, also $K_1 = K_2$; dies ergiebt den Satz: Jeder Punkt der Chordalebene zweier Kugeln hat für beide Kugeln gleiche Potenz. Umgekehrt sieht man leicht, dass jeder Punkt, der für beide Kugeln gleiche Potenz hat, auf der Chordalebene liegt.

4. Die Chordalebenen der drei Kugeln $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ haben die Gleichungen:

$$L_{12} \equiv K_1 - K_2 = 0, \quad L_{23} \equiv K_2 - K_3 = 0, \quad L_{31} \equiv K_3 - K_1 = 0.$$

Hieraus folgt die Identität $L_{12} + L_{23} + L_{31} \equiv 0$, und daher der Satz: Die drei Chordalebenen dreier Kugeln schneiden sich in einer Geraden; diese Gerade ist normal zur Ebene der Kugelcentren und geht durch den Chordalpunkt der drei Kreise, welche diese Ebene mit den Kugeln gemein hat; sie ist der Ort der Punkte, die gleiche Potenz für die drei Kugeln haben. Diese Gerade wird als die Chordalachse der drei Kugeln bezeichnet.

Vier Kugeln K_1, K_2, K_3, K_4, deren Centren die Ecken eines Tetraëders bilden, lassen sich zu sechs Paaren ordnen und ergeben daher sechs Chordalebenen; die Gleichungen derselben sind

$$L_{12} \equiv K_1 - K_2 = 0, \quad L_{23} \equiv K_2 - K_3 = 0,$$
$$L_{13} \equiv K_1 - K_3 = 0, \quad L_{24} \equiv K_2 - K_4 = 0,$$
$$L_{14} \equiv K_1 - K_4 = 0, \quad L_{34} \equiv K_3 - K_4 = 0.$$

Aus ihnen folgt die Identität $L_{12} + L_{23} + L_{34} - L_{14} \equiv 0$. Da nun L_{21} mit L_{12} und L_{23}, sowie L_{31} mit L_{23} und L_{34} eine Gerade gemeinsam hat, so folgt der Satz: Die sechs Chordalebenen je zweier von vier Kugeln gehen durch einen Punkt; dieser Punkt hat gleiche Potenz für die vier Kugeln; er heisst der Chordalpunkt der vier Kugeln.

Legt man von einem Punkte A aus eine Tangente an eine Kugel K und beschreibt eine Kugel K_1, welche A zum Centrum hat und durch den Berührungspunkt der Tangente geht, so schneiden sich die Kugeln K und K_1 unter rechten Winkeln. Damit ein Punkt A das Centrum einer Kugel sei, welche gegebene Kugeln K_1, K_2, K_3 .... normal schneidet, müssen die Längen der von A aus an die Kugeln gelegten Tangenten, von A bis zum Berührungspunkte gerechnet, gleich sein. Wir schliessen daher aus den obigen Sätzen: Der Ort der Centren der Kugeln, welche zwei gegebene Kugeln normal schneiden, ist die Chordalebene der beiden Kugeln; der Ort der Centren der

Kugeln, welche drei gegebene Kugeln normal schneiden, ist die Chordalachse der drei Kugeln; es giebt eine Kugel, die vier gegebene Kugeln normal schneidet, ihr Centrum ist der Chordalpunkt der vier Kugeln.

5. Ist $K_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2a_1 x - 2b_1 y - 2c_1 z + d_1$ und
$K_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2a_2 x - 2b_2 y - 2c_2 z + d_2$, so ist

$$K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0$$

die Gleichung einer Kugel; das Centrum hat die Coordinaten

$$a = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad b = \frac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad c = \frac{\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2}{\lambda_1 + \lambda_2};$$

dasselbe liegt daher auf der Geraden der Centren C_1 und C_2 der Kugeln $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ und theilt die Strecke $K_1 K_2$ im Verhältniss $\lambda_2 : \lambda_1$.

Durchläuft das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ alle Werthe, so erhält man eine unendliche Folge von (realen und imaginären) Kugeln; die Gesammtheit dieser Kugeln heisst ein Kugelbüschel.

Durch jeden Punkt P_0 des Raumes geht eine Kugel eines Kugelbüschels. Denn bezeichnet man mit K_{10}, K_{20} die Werthe, welche die Polynome K_1 und K_2 annehmen, wenn man in ihnen x, y, z durch die Coordinaten x_0, y_0, z_0 ersetzt, so geht K durch P_0, wenn die Bedingung erfüllt ist

$$\lambda_1 K_{10} + \lambda_2 K_{20} = 0.$$

Man kann daher $\lambda_1 = K_{20}$, $\lambda_2 = - K_{10}$ wählen und hat somit als Gleichung der gesuchten Kugel

$$K_{20} K_1 - K_{10} K_2 = 0.$$

Diese Gleichung wird nur dann unbestimmt, wenn $K_{10} = K_{20} = 0$, d. i. wenn P_0 auf den Kugeln K_1 und K_2 zugleich liegt. Punkte, die K_1 und K_2 gemeinsam sind, gehören allen Kugeln des Büschels an.

Da es in der Gleichung einer Büschelkugel $K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0$ nur auf das Verhältniss der Zahlen $\lambda_1 : \lambda_2$ ankommt, so kann vorausgesetzt werden, dass $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ sei, so dass dann $K = 0$ in der Normalform erscheint (d. i. so, dass x^2, y^2 und z^2 den Coefficienten 1 haben).

6. Die Chordalebene zweier Kugeln K, K' der Büschels K_1, K_2

$$K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0, \qquad K' \equiv \mu_1 K_1 + \mu_2 K_2 = 0$$

hat die Gleichung

$$L \equiv K - K' \equiv (\lambda_1 - \mu_1) K_1 + (\lambda_2 - \mu_2) K_2 = 0.$$

Da vorausgesetzt wird, dass $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$, so folgt, dass $\lambda_1 - \mu_1 = - (\lambda_2 - \mu_2)$, also ergiebt sich

$$L \equiv (\lambda_1 - \mu_1)(K_1 - K_2) = 0.$$

Mithin ist L mit der Chordalebene der Kugeln K_1 und K_2 identisch. Die Kugeln eines Büschels haben also eine gemeinsame Chordalebene. Aus jedem Punkte der Chordalebene eines Kugelbüschels als Centrum lässt sich daher eine Kugel construiren, die alle Kugeln des Büschels normal schneidet.

Sind $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_4$ . . . die Chordalebenen, welche eine nicht zum Büschel gehörige Kugel $\mathfrak{K} = 0$ mit den einzelnen Kugeln des Büschels K_1, K_2, K_3, K_4 . . . bestimmt, und ist

$$K_3 \equiv \lambda_{13} K_1 + \lambda_{23} K_2 = 0, \qquad \lambda_{13} + \lambda_{23} = 1,$$
$$K_4 \equiv \lambda_{14} K_1 + \lambda_{24} K_2 = 0, \qquad \lambda_{14} + \lambda_{24} = 1,$$

so haben $\mathfrak{L}_3$ und $\mathfrak{L}_4$ die Gleichungen

$$\mathfrak{L}_3 \equiv \lambda_{13} K_1 + \lambda_{23} K_2 - \mathfrak{K} = 0, \qquad \mathfrak{L}_4 \equiv \lambda_{14} K_1 + \lambda_{24} K_2 - \mathfrak{K} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{L}_3 - \mathfrak{L}_4 \equiv (\lambda_{13} - \lambda_{14}) K_1 + (\lambda_{23} - \lambda_{24}) K_2 .$$

Da nun $\lambda_{13} - \lambda_{14} = -(\lambda_{23} - \lambda_{24})$, so folgt die Identität

$$\mathfrak{L}_3 - \mathfrak{L}_4 \equiv (\lambda_{13} - \lambda_{14})(K_1 - K_2) \equiv (\lambda_{13} - \lambda_{14}) L ,$$

wobei $L \equiv K_1 - K_2 = 0$ die Gleichung der Chordalebene des Büschels ist. Dies ergiebt den Satz: Die Chordalebenen, die die Kugel eines Büschels mit einer nicht zum Büschel gehörigen Kugel bestimmen, treffen die Chordalebene des Büschels in derselben Geraden.

7. Um den Schnitt einer Ebene E mit einem Kugelbüschel zu untersuchen, nehmen wir die Ebene E zur XY-Ebene eines Coordinatensystems. Setzen wir nun in den Gleichungen der Büschelkugeln $z = 0$, so erhalten wir die Gleichungen der Schnittlinien der Ebene E mit den Kugeln des Büschels. Die Schnitte mit den Kugeln K_1, K_2, K sind daher die (realen oder imaginären) Kreise:

$$k_1 \equiv x^2 + y^2 - 2a_1 x - 2b_1 y + d_1 = 0 ,$$

$$k_2 \equiv x^2 + y^2 - 2a_2 x - 2b_2 y + d_2 = 0 ,$$

$$k \equiv \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 = 0 .$$

Eine Ebene E schneidet die Kugeln eines Büschels in Kreisen, die ein Kreisbüschel bilden; die Chordale dieses Kreisbüschels ist der Schnitt der Ebene E mit der Chordalebene L des Kugelbüschels.

Wenn das Kreisbüschel, in welchem das Kugelbüschel von der Ebene E geschnitten wird, keine realen Schnittpunkte hat, so giebt es bekanntlich auf der Büschelcentralen zwei Punkte, die als Büschelkreise mit verschwindend kleinem Radius zu betrachten sind. In diesen beiden Punkten wird die Ebene E durch je eine Kugel des Büschels berührt.

8. Eine Gerade G wird von den Kugeln eines Büschels in Punktepaaren einer quadratischen Involution getroffen; denn eine durch G gelegte Ebene durchschneidet das Kugelbüschel in einem Kreisbüschel. Die Asymptotenpunkte dieser Involution sind die Berührungspunkte der Geraden mit Kugeln des Büschels. Es giebt also zwei Kugeln eines Büschels, die eine gegebene Gerade berühren; sie sind beide real oder beide imaginär; geht die Gerade durch einen gemeinsamen Punkt aller Büschelkugeln, so fallen die beiden berührenden Kugeln in eine zusammen.

9. Die gemeinsamen Punkte dreier Kugeln $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$, die nicht demselben Büschel angehören, liegen auf den drei Chordalebenen der drei Kugeln, mithin auf ihrer Schnittlinie, der Chordalachse. Drei Kugeln haben also höchstens zwei reale Punkte gemein, dieselben liegen symmetrisch zur Ebene der drei Centren; wenn die Schnittpunkte nicht real sind, so ist doch die Gerade real, auf der sie liegen.

10. Die Gesammtheit aller Kugeln

$$\text{1.} \qquad K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3 = 0 ,$$

die man aus drei Kugeln $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$, die nicht demselben Büschel angehören, erhält, indem man die Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ in jeder möglichen Weise abändert, nennt man ein Kugelbündel. Da es in der Gleichung $K = 0$ nur auf die Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ ankommt, so kann man voraussetzen, dass $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ist, so dass die Gleichung $K = 0$ in der Normalform erscheint.

Die Punkte, für welche $K_1 = K_2 = K_3 = 0$, genügen auch der Gleichung $K = 0$; die Kugeln eines Büschels haben also zwei gemeinsame (reale oder imaginäre) Schnittpunkte.

Die Chordalebene zweier Kugeln des Bündels

$$K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3 = 0 \quad \text{und} \quad K' \equiv \mu_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \mu_3 K_3 = 0$$

hat die Gleichung

$$\mathfrak{C} \equiv K - K' \equiv (\lambda_1 - \mu_1) K_1 + (\lambda_2 - \mu_2) K_2 + (\lambda_3 - \mu_3) K_3 = 0.$$

Da nun vorausgesetzt wird, dass $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, so folgt $(\lambda_1 - \mu_1) + (\lambda_2 - \mu_2) + (\lambda_3 - \mu_3) = 0$. Hiernach erhält man

$$\mathfrak{C} \equiv (\lambda_1 - \mu_1)(K_1 - K_3) + (\lambda_2 - \mu_2)(K_2 - K_3).$$

Bezeichnet man die Chordalebenen von K_1, K_3 und K_2, K_3 mit $\mathfrak{C}_{13}$ und $\mathfrak{C}_{23}$, so hat man $\mathfrak{C}_{13} \equiv K_1 - K_3 = 0$, $\mathfrak{C}_{23} \equiv K_2 - K_3 = 0$, und daher

$$\mathfrak{C} \equiv (\lambda_1 - \mu_1)\mathfrak{C}_{13} + (\lambda_2 - \mu_2)\mathfrak{C}_{23}.$$

Hieraus folgt: Die Chordalebenen je zweier Kugeln eines Kugelbündels gehen durch eine Gerade; oder: Die Kugeln eines Bündels haben eine gemeinsame Chordalachse.

11. Soll die Kugel K durch einen gegebenen Punkt P_0 gehen, der nicht mit den beiden Trägern des Bündels zusammenfällt, so hat man die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Punktes P_0 in das Polynom $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3$ einzusetzen und λ_1, λ_2, λ_3 so zu bestimmen, dass das Substitutionsresultat verschwindet. Bezeichnet man mit K_{10}, K_{20}, K_{30} die Werthe, welche die Functionen K_1, K_2, K_3 für die Coordinaten des Punktes P_0 annehmen, so sind die λ daher der Gleichung unterworfen $\lambda_1 K_{10} + \lambda_2 K_{20} + \lambda_3 K_{30} = 0$.

Man erhält hieraus

$$\lambda_3 = - \lambda_1 \cdot \frac{K_{10}}{K_{30}} - \lambda_2 \frac{K_{20}}{K_{30}},$$

und nachdem man dies in K eingesetzt hat

$$K_{30} \cdot K \equiv \lambda_1 (K_{30} \cdot K_1 - K_{10} \cdot K_3) + \lambda_2 (K_{30} \cdot K_2 - K_{20} \cdot K_3).$$

In dieser Gleichung ist noch das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ willkürlich. Nun sind

$$K_{30} \cdot K_1 - K_{10} \cdot K_3 = 0 \quad \text{und} \quad K_{30} \cdot K_2 - K_{20} \cdot K_3 = 0$$

die Gleichungen zweier bestimmter Kugeln des Bündels, nämlich die Gleichungen der durch P_0 gehenden Kugeln der beiden Büschel K_1, K_3 und K_2, K_3; daher folgt: Durch einen gegebenen Punkt gehen einfach unendlich viele Kugeln eines Bündels; diese Kugeln bilden ein Kugelbüschel, ihre Chordalebene ist die durch diesen Punkt und die Chordalachse des Bündels bestimmte Ebene.

Durch jeden Punkt des Raumes geht eine Kugel eines Kugelbüschels; wir schliessen daher: Durch zwei Punkte des Raumes ist eine Kugel eines Kugelbündels im Allgemeinen eindeutig bestimmt.

Nur dann, wenn das Bündel zwei reale Träger hat, und wenn dieselben mit den beiden gegebenen Punkten auf einem Kreise liegen, gehen durch die beiden Punkte unzählig viele Kugeln des Bündels, nämlich alle Kugeln, die diesen Kreis gemein haben, also alle Kugeln eines Büschels.

12. Der Mittelpunkt der Kugel $K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3 = 0$ hat die Coordinaten

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3, \quad b = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3, \quad c = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3;$$

wir schliessen daher (§ 3, 28): Die Mittelpunkte der Kugeln eines Bündels liegen auf einer Ebene; der Mittelpunkt von K theilt das Dreieck der Centren der Kugeln K_1, K_2, K_3 im Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$.

Ferner folgt hieraus: Jeder Punkt der Centralebene eines Bündels (d. i. der Ebene, welche die Centren der Kugeln des Bündels enthält) ist der Mittelpunkt einer (realen oder imaginären) Kugel des Bündels.

13. Jeder Punkt der Chordalen eines Kugelbündels hat gleiche Potenz für alle Bündelkugeln; aus jedem Punkte der Chordalachse als Centrum lässt sich also eine Kugel construiren, die alle Kugeln des Bündels unter rechten Winkeln schneidet. Um die Kugel des Bündels zu erhalten, die einen gegebenen Punkt C der Centralebene zum Centrum hat, construire man daher von einem Punkte A der Chordalachse aus eine Tangente an eine Kugel des Bündels, und mit dieser Tangente als Radius beschreibe man um A eine Kugel $\mathfrak{K}$; diese Kugel trifft die gesuchte Kugel unter rechten Winkeln, der Halbmesser der letzteren ist daher die von C an $\mathfrak{K}$ gelegte Tangente.

Die Kugeln $\mathfrak{K}$ heissen die Orthogonalkugeln des Bündels. Da von jedem Centrum C aus nur eine Kugel des Bündels construirt werden kann, so folgt, dass von jedem Punkte der Centralebene aus gleich lange Tangenten an alle Orthogonalkugeln gelegt werden können. Die Punkte der Centralebene des Bündels haben also für alle Orthogonalkugeln desselben gleiche Potenz. Wenn die Kugeln des Bündels keine gemeinsamen Punkte haben, so lassen sich vom Schnittpunkte Q der Chordalachse und der Centralebene aus Tangenten an die Kugeln des Bündels legen. Construirt man von Q mit dieser Tangentenlänge als Radius eine Kugel, so trifft diese die Centralebene in einem Kreise; die Bündelkugeln, deren Centren auf der Peripherie dieses Kreises liegen, haben einen verschwindend kleinen Radius. Durch diesen Kreis, den wir den Nullkreis des Bündels nennen, gehen folglich auch alle andern Orthogonalkugeln, und wir schliessen daher: Die Orthogonalkugeln eines Bündels bilden ein Kugelbüschel, dessen Kugeln den Nullkreis gemein haben.

Der analytische Beweis dieses Satzes, der zugleich den Fall umfasst, wenn die Kugeln des Bündels reale gemeinsame Punkte haben, gestaltet sich folgendermaassen.

Wenn sich zwei Kugeln rechtwinkelig schneiden, und man einen Schnittpunkt mit den beiden Centren verbindet, so erhält man ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten die Radien der Kugeln und dessen Hypotenuse die Strecke zwischen den Centren ist. Sind ρ und ρ' die Radien und a, b, c bez. a', b', c' die Coordinaten der Centren, so ist daher die Bedingung dafür, dass die Kugeln sich normal schneiden

$$\rho^2 + \rho'^2 = (a-a')^2 + (b-b')^2 + (c-c')^2 ;$$

wenn man dies entwickelt und die Abkürzungen benutzt

$$d = a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2 , \quad d' = a'^2 + b'^2 + c'^2 - \rho'^2 ,$$

so erhält man die Bedingung in der Form $d + d' = 2(aa' + bb' + cc')$.

Wenn nun die Kugel

$$\mathfrak{K} \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\mathfrak{a}x - 2\mathfrak{b}y - 2\mathfrak{c}z + \mathfrak{d} = 0$$

die Kugeln $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ unter rechten Winkeln schneidet, so gelten die Gleichungen

$$1. \quad \mathfrak{d} + d_1 = 2\mathfrak{a}a_1 + 2\mathfrak{b}b_1 + 2\mathfrak{c}c_1 ,$$

$$2. \quad \mathfrak{d} + d_2 = 2\mathfrak{a}a_2 + 2\mathfrak{b}b_2 + 2\mathfrak{c}c_2 ,$$

$$3. \quad \mathfrak{d} + d_3 = 2\mathfrak{a}a_3 + 2\mathfrak{b}b_3 + 2\mathfrak{c}c_3 .$$

Durch Subtraction folgt

$$4. \quad d_1 - d_2 = 2\mathfrak{a}(a_1 - a_2) + 2\mathfrak{b}(b_1 - b_2) + 2\mathfrak{c}(c_1 - c_2) ,$$

$$5. \quad d_1 - d_3 = 2\mathfrak{a}(a_1 - a_3) + 2\mathfrak{b}(b_1 - c_2) + 2\mathfrak{c}(c_1 - c_2) .$$

Durch diese Gleichungen sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ nicht vollständig bestimmt. S d $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{a}'', \mathfrak{b}'', \mathfrak{c}''$ zwei Werthsysteme, die diesen Gleichungen genügen, ı d

erfüllen die Zahlen μ' und μ'' die Bedingung $\mu' + \mu'' = 1$, so kann jedes Werthsystem, das den Gleichungen genügt, durch geeignete Wahl von μ' und μ'' in der Weise hergestellt werden

6. $$a = \mu'\mathfrak{a}' + \mu''\mathfrak{a}'', \qquad b = \mu'\mathfrak{b}' + \mu''\mathfrak{b}'', \qquad c = \mu'\mathfrak{c}' + \mu''\mathfrak{c}'';$$

denn diese Grössen genügen den Gleichungen 4. und 5. und enthalten eine unbestimmte Grösse (μ' oder μ''). Ferner folgt aus 1.

$$\mathfrak{d}' = 2\mathfrak{a}' a_1 + 2\mathfrak{b}' b_1 + 2\mathfrak{c}' c_1 - d_1,$$
$$\mathfrak{d}'' = 2\mathfrak{a}'' a_1 + 2\mathfrak{b}'' b_1 + 2\mathfrak{c}'' c_1 - d_1,$$
$$\mu'\mathfrak{d}' + \mu''\mathfrak{d}'' = 2(\mu'\mathfrak{a}' + \mu''\mathfrak{a}'')a_1 + 2(\mu'\mathfrak{b}' + \mu''\mathfrak{b}'')b_1 + 2(\mu'\mathfrak{c}' + \mu''\mathfrak{c}'')c_1 - d_1.$$

Somit hat man nach den Formeln 6.

$$\mu'\mathfrak{d}' + \mu''\mathfrak{d}'' = 2\mathfrak{a}a_1 + 2\mathfrak{b}b_1 + 2\mathfrak{c}c_1 - d_1, \quad \text{d. i.} \quad \mu'\mathfrak{d}' + \mu''\mathfrak{d}'' = \mathfrak{d}.$$

Die Gleichung der Kugel $\mathfrak{K}$ ergiebt sich daher zu

$$\mathfrak{K} = x^2 + y^2 + z^2 - 2(\mu'\mathfrak{a}' + \mu''\mathfrak{a}'')x - 2(\mu'\mathfrak{b}' + \mu''\mathfrak{b}'')y - 2(\mu'\mathfrak{c}' + \mu''\mathfrak{c}'')z + \mu'\mathfrak{d}' + \mu''\mathfrak{d}'' = 0.$$

Fügt man zu den drei ersten Gliedern den Faktor $\mu' + \mu'' = 1$, so erhält man

7. $$\mathfrak{K} \equiv \mu'\mathfrak{K}' + \mu''\mathfrak{K}'' = 0,$$

wobei $\mathfrak{K}' \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\mathfrak{a}'x - 2\mathfrak{b}'y - 2\mathfrak{c}'z + \mathfrak{d}' = 0$

und $\mathfrak{K}'' \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\mathfrak{a}''x - 2\mathfrak{b}''y - 2\mathfrak{c}''z + \mathfrak{d}'' = 0$

die Gleichungen zweier Orthogonalkugeln des Bündels sind; also bilden alle Orthogonalkugeln des Bündels ein Büschel.

Umgekehrt weist man leicht nach: Alle Orthogonalkugeln der Kugeln eines Büschels bilden ein Kugelbündel, dessen Kugeln durch die beiden Nullpunkte des Büschels, d. i. durch die Punkte hindurchgehen, die als verschwindend kleine Kugeln anzusehen sind.

14. Um über die Kugeln eines Bündels urtheilen zu können, die eine gegebene Ebene E berühren, wählen wir ein Coordinatensystem, dessen XY-Ebene in diese Ebene fällt. Die Gleichungen des Schnittkreises k der Ebene E mit einer Kugel $K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3 = 0$ des Bündels erhalten wir, indem wir in der Function K die Coordinate z durch Null ersetzen. Hierdurch entsteht

1. $$k \equiv \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3 = 0,$$

wobei $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ die Gleichungen der Kreise sind, in denen die Ebene E von den Kugeln K_1, K_2, K_3 geschnitten wird.

Die Gesammtheit aller Kreise k, deren Gleichung aus den Gleichungen dreier gegebener Kreise k_1, k_2, k_3 linear nach der Formel 1. abgeleitet werden, nennt man ein Kreisbündel.

Eine Kugel, deren Centrum auf der XY-Ebene liegt, hat die Gleichung

$$K \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 = 0,$$

wenn α, β die Coordinaten des Centrums und ρ der Kugelradius sind; der Schnittkreis dieser Kugel mit der XY-Ebene hat die Gleichung

$$k \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 = 0,$$

man hat also die Beziehung $K = k + z^2$.

Die Kugeln $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}$, welche k_1, k_2, k_3, k zu grössten Kreisen haben, haben also die Gleichungen

$$\mathfrak{K}_1 \equiv k_1 + z^2, \quad \mathfrak{K}_2 \equiv k_2 + z^2, \quad \mathfrak{K}_3 \equiv k_3 + z^2, \quad \mathfrak{K} \equiv k + z^2,$$

oder wenn man für k den Werth aus 1. setzt und an z^2 den Faktor $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ anbringt

$$\mathfrak{K} \equiv \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) z.$$

Hieraus folgt

2. $$\mathfrak{K} \equiv \lambda_1 \mathfrak{K}_1 + \lambda_2 \mathfrak{K}_2 + \lambda_3 \mathfrak{K}_3.$$

Die Kugeln, welche die Schnittkreise einer Ebene E mit den Kugeln eines Bündels zu grössten Kreisen haben, bilden also wieder ein Bündel. Dieser Satz ist ein besonderer Fall eines allgemeineren, auf dessen Beweis wir hier nicht eingehen wollen. Die Kugeln, die durch die Kreise eines Kreisbündels gehen und deren Centra in einer Ebene liegen, bilden ein Kugelbündel.

Die Chordalachse des Bündels 2. geht durch den Punkt, in welchem die Ebene E von der Chordalachse des gegebenen Bündels der Kugeln K getroffen wird, denn dieser Punkt hat für die Kreise k, mithin auch für die Kugeln $\mathfrak{K}$ gleiche Potenz.

Construirt man nun den Nullkreis des Bündels $\mathfrak{K}$, so sind die Punkte desselben Kreise des Bündels k mit verschwindendem Radius, und die Kugeln K, welche durch diese Punkte gehen, berühren die Ebene E. Wir haben daher: Die Punkte, in denen eine Ebene E von den Kugeln eines Bündels berührt wird, liegen auf einem Kreise; das Centrum desselben ist der Schnitt der Ebene E mit der Chordalachse des Bündels, der Halbmesser ist die Länge einer von diesem Punkte an eine Kugel des Bündels gelegten Tangente.

15. Um die Kugel K eines Bündels zu construiren, die durch zwei gegebene Punkte A und B geht, lege man durch A eine Hülfskugel H, welche eine Kugel K' des Bündels schneidet, und suche den Punkt C auf, in welchem die Ebene dieses Schnittkreises die Chordalachse des Bündels trifft.

Verbindet man nun C mit A, so ist der Punkt D, in welchem CA die Hülfskugel zum zweiten Male schneidet, ein Punkt der gesuchten Kugel. Denn C hat gleiche Potenz für K' und H und gleiche für K' und K, folglich auch gleiche für K und H; folglich treffen K und H den Strahl CA, mit dem sie den Punkt A gemein haben, noch in einem zweiten gemeinsamen Punkte D.

Die Gerade, die durch das Centrum des durch A, B und D gehenden Kreises normal zur Ebene ABD gelegt wird, trifft die Centralebene des Bündels im Mittelpunkte der gesuchten Kugel.*)

16. Um die Kugel K eines Bündels zu erhalten, die durch einen gegebenen Punkt A geht und eine gegebene Ebene E berührt, bestimme man zu A nach der vorigen Methode noch einen Punkt B der Kugel K, und schneide die Centralebene Γ des Bündels durch die Ebene, welche AB normal halbirt; die Schnittlinie α ist dann der Ort der Centra aller Bündelkugeln, die durch A (und B) gehen.

Die Kugeln, deren Centra auf α liegen und welche die Ebene E berühren, haben ihre Berührungspunkte auf der Normalprojection α' der Geraden α auf die Ebene E.

Construirt man nun in E den Kreis k der Punkte, in denen E von Kugeln des Bündels berührt wird, so sind die Punkte C' und D', in welchen α' und k sich schneiden, die Berührungspunkte der gesuchten Kugeln, und die Centren sind die Punkte C und D, in welchen die Centralebene Γ von den durch C' und D' gelegten Normalen zu E getroffen wird.

*) Die Ausführung dieser und der folgenden Constructionen über Kugelbündel nach den Methoden der descriptiven Geometrie kann dem Leser als nützliche Uebung empfohlen werden; man wird dabei mit einer Projectionsebene arbeiten und hierzu am besten die Centralebene des Bündels wählen.

17. Die Kugeln, welche zwei sich schneidende Ebenen E und F berühren, haben ihre Mittelpunkte auf den Ebenen, welche die vier von E und F eingeschlossenen Flächenwinkel halbiren. Die Mittelpunkte der Kugeln eines Bündels, welche die zwei Ebenen E und F berühren, liegen also auf den Geraden β und γ, in denen die Centralebene des Bündels von den beiden Halbirungsebenen geschnitten wird. Die Construction der Centren der gesuchten Kugeln erfolgt wie bei der vorigen Aufgabe, wenn man α der Reihe nach durch β und γ ersetzt. Es giebt also vier Kugeln eines Bündels, die zwei gegebene Ebenen berühren.

18. Um über die Mittelpunkte der Kugeln eines Bündels Auskunft zu erhalten, die eine gegebene Gerade G berühren, wählen wir die Centralebene zur XY-Ebene des Coordinatensystems, legen den Anfangspunkt in die Spur der Geraden G und die X-Achse in die Projection von G auf die XY-Ebene.

Ein Punkt P der XY-Ebene ist dann Centrum einer die Gerade G berührenden Kugel des Bündels, wenn der Abstand d des Punktes P von der Geraden G gleich dem Radius der Bündelkugel ist, die P zum Centrum hat, das ist also gleich der von P an eine Orthogonalkugel gelegten Tangente; also wenn das Quadrat des Abstandes d gleich der Potenz des Punktes P in Bezug auf eine Orthogonalkugel gleich ist.

Ist die Gleichung einer Orthogonalkugel

$$\mathfrak{K} \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0,$$

so ist die Potenz von P der Werth, welchen $\mathfrak{K}$ annimmt, wenn man die Coordinaten von P (d. i. x, y, 0) einsetzt, also gleich

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \delta = 0.$$

Die Projection von P auf die X-Achse sei Q. Der Abstand d ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, von dem die eine Kathete PQ, die andere der Abstand des Punktes Q von der Geraden G ist. Ist nun φ der Winkel, den G mit der XY-Ebene bildet, so ist die Entfernung des Punktes Q von G gleich $OQ \cdot sin\varphi$; daher hat man

$$d^2 = PQ^2 + OQ^2 \cdot sin^2\varphi = y^2 + x^2 sin^2\varphi.$$

Dies soll der Potenz von P für die Orthogonalkugel gleich sein; daher hat man für die Coordinaten von P die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \delta = x^2 sin^2\varphi + y^2.$$

Hieraus folgt

$$x^2 cos^2\varphi - 2\alpha x - 2\beta y + \delta = 0.$$

Hierfür kann man schreiben

$$cos^2\varphi\left(x - \frac{\alpha}{cos^2\varphi}\right)^2 - 2\beta\left(y - \frac{\delta cos^2\varphi - \alpha^2}{2\beta\, cos^2\varphi}\right) = 0.$$

Dies ergiebt: Der Ort der Mittelpunkte aller Kugeln eines Bündels, die eine gegebene Gerade berühren, ist eine Parabel; die Achse derselben ist normal zu der Geraden, die Coordinaten des Scheitels und der Parameter sind der Reihe nach

$$\frac{\alpha}{cos\varphi}, \quad \frac{\delta cos^2\varphi - \alpha^2}{2\beta\, cos^2\varphi}, \quad \frac{\beta}{cos^2\varphi}.$$

Es giebt daher vier Kugeln eines Bündels, die zwei gegebene Gerade berühren; ihre Centra erhält man als die Schnittpunkte zweier Parabeln.

Es mag noch bemerkt werden, dass die Centra aller Kugeln eines Bündels, die eine gegebene Ebene E berühren, auf einer Ellipse liegen, nämlich auf der

Ellipse, deren Normalprojection auf E der Kreis ist, der die Berührungspunkte aller die Ebene E berührenden Kugeln des Bündels enthält. Es giebt mithin vier Kugeln eines Bündels, die eine gegebene Gerade und eine gegegebene Ebene berühren; ihre Centra erhält man als die Schnittpunkte einer Parabel und einer Ellipse.

19. Die Chordalebene L einer beliebigen Kugel $\mathfrak{K}$ und der Kugel des Bündels

$$K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3 = 0$$

hat die Gleichung $L \equiv \mathfrak{K} - K = 0$.

Setzt man $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\,\mathfrak{K}$ statt $\mathfrak{K}$, und für K den obigen Werth, so erhält man

$$L \equiv \lambda_1 (\mathfrak{K} - K_1) + \lambda_2 (\mathfrak{K} - K_2) + \lambda_3 (\mathfrak{K} - K_3).$$

Nun sind $L_1 \equiv \mathfrak{K} - K_1 = 0$, $L_2 \equiv \mathfrak{K} - K_2 = 0$, $L_3 \equiv \mathfrak{K} - K_3 = 0$ die Gleichungen der Chordalebenen der Kugel $\mathfrak{K}$ und der Kugeln K_1, K_2, K_3. Diese drei Chordalebenen gehen mit den drei Chordalebenen der Kugelpaare K_1K_2, K_1K_3, K_2K_3 durch einen Punkt (No. 4), schneiden sich daher auf der Chordalachse des Bündels. Wir erhalten hieraus: Die Chordalebenen, die eine Kugel $\mathfrak{K}$ mit den Kugeln eines Bündels bestimmt, gehen durch einen Punkt A, der auf der Chordalachse des Bündels liegt; dieser Punkt hat gleiche Potenz für alle Kugeln des Bündels und für die Kugel $\mathfrak{K}$.

Legen wir durch A Tangenten an $\mathfrak{K}$, so berühren diese $\mathfrak{K}$ entlang eines Kreises, dessen Ebene normal auf der Geraden steht, die A mit dem Centrum von $\mathfrak{K}$ verbindet. Sind B und C zwei Punkte dieses Kreises, also $AB = AC$, und construirt man die durch B und C gehende Kugel K des Bündels, so berührt dieselbe AB in B und AC in C; denn die Potenz des Punktes A in Bezug auf die Kugel K ist gleich dem Quadrat von AB oder AC. Die Kugeln K und $\mathfrak{K}$ haben folglich den Kreis gemein, der AB in B und AC in C berührt. Rückt nun C immer näher an B, so wird dieser Kreis immer kleiner und zieht sich zu einem Punkte zusammen, wenn C mit B zusammenfällt. Wir schliessen hieraus: Die Kugeln eines Bündels, die eine gegebene Kugel $\mathfrak{K}$ berühren, haben ihre Berührungspunkte auf einem Kreise k; entlang dieses Kreises wird die Kugel $\mathfrak{K}$ von den Tangenten berührt, die durch den Punkt der Chordalachse des Bündels gehen, der gleiche Potenz für $\mathfrak{K}$ und die Kugeln des Bündels hat.

Die Geraden, welche das Centrum Q der Kugel $\mathfrak{K}$ mit den Punkten des Kreises k verbinden, sind die Mantellinien eines Rotationskegels. Wie wir in der descriptiven Geometrie bereits erfahren haben, ist der Schnitt einer Ebene mit einem Rotationskegel eine Curve zweiten Grades. Die Mittelpunkte der Kugeln eines Bündels, die eine gegebene Kugel berühren, liegen also auf einer Curve zweiten Grades.

Hiermit sind die Aufgaben im Prinzip gelöst: Die Kugeln eines Bündels zu finden, die zwei Kugeln, oder eine Kugel und eine Gerade berühren; es giebt vier Lösungen zu jeder dieser drei Aufgaben, und die Mittelpunkte der vier Kugeln werden als die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte erhalten.

§ 5. Tangentenebene und Tangentialpunkt an Flächen zweiten Grades. Cylinder, Kegel und Grenzfläche zweiten Grades.

1. Die allgemeine Form einer Gleichung zweiten Grades in Punktcoordinaten ist

$$1. \quad f \equiv Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0.$$

Die Schnittpunkte der Fläche $f = 0$ und der Ebene

2. $$T \equiv ux + vy + wz - 1 = 0$$
genügen den beiden Gleichungen 1. und 2. Berechnet man aus 2. die Coordinate $z = (1 - ux - vy) : w$ und setzt diesen Werth in 1. ein, so erhält man eine Gleichung, durch welche die Coordinaten x und y der Schnittcurve mit einander verbunden sind, also die Gleichung der Horizontalprojection der Schnittcurve; dieselbe ist vom zweiten Grade. Eliminirt man in gleicher Weise aus 1. und 2. der Reihe nach y und x, so erhält man die Gleichungen der Verticalprojection und der seitlichen Projection der Schnittcurve; diese sind ebenfalls vom zweiten Grade.

Um nun über die Natur der Schnittcurve selbst urtheilen zu können, wählen wir auf der Horizontalspur der Ebene T einen Punkt O' zum Anfangspunkte eines auf T liegenden ebenen Coordinatensystems; die Abscissenachse $O'\Xi$ legen wir auf die Horizontalspur; $O\Upsilon$ sei die Ordinatenachse, $O'\Upsilon'$ ihre Horizontalprojection. Die Geraden $O'\Xi$ und $O'\Upsilon'$ bilden ein in der Ebene XOY liegendes rechtwinkeliges Coordinatensystem; transformiren wir die Gleichung der Horizontalprojection der Schnittcurve auf dieses System, so erhalten wir eine Gleichung zweiten Grades zwischen den auf dieses System bezüglichen Coordinaten

3. $$a\xi^2 + 2b\xi\eta' + c\eta'^2 + 2d\xi + 2e\eta' + f = 0.$$

Ein Punkt P der Schnittcurve und sein Grundriss P' haben dieselbe Abscisse ξ, und zwischen der Ordinate η des Punktes P und der Ordinate η' seiner Projection besteht die Gleichung $\eta' = \eta \cos\alpha$. Wir erhalten also die Gleichung der Schnittcurve in Bezug auf das Coordinatensystem $\Xi\Upsilon$, wenn wir in 3. η' durch $\eta\cos\alpha$ ersetzen; die resultirende Gleichung ist vom zweiten Grade. Dies zeigt: Eine Fläche zweiter Ordnung wird von einer Ebene in einer Curve zweiter Ordnung geschnitten.

2. Um über die Schnittpunkte einer Fläche zweiter Ordnung $f = 0$ und einer Geraden Auskunft zu erhalten, können wir folgenden Weg einschlagen:

Ziehen wir durch einen Punkt P_0 eine Gerade, die mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet, so hat ein Punkt P dieser Geraden, der von P_0 um die Strecke $P_0P = r$ entfernt ist, die Coordinaten

2. $$x = x_0 + r\cos\alpha, \quad y = y_0 + r\cos\beta, \quad z = z_0 + r\cos\gamma.$$

Soll P auf f liegen, so müssen diese Coordinaten der Gleichung $f = 0$ genügen; hieraus folgt für r die quadratische Gleichung

$$A(x_0 + r\cos\alpha)^2 + 2B(x_0 + r\cos\alpha)(y_0 + r\cos\beta) + 2C(x_0 + r\cos\alpha)(z_0 + r\cos\gamma)$$
$$+ D(y_0 + r\cos\beta)^2 + 2E(y_0 + r\cos\beta)(z_0 + r\cos\gamma) + F(z_0 + r\cos\gamma)^2$$
$$+ 2G(x_0 + r\cos\alpha) + 2H(y_0 + r\cos\beta) + 2J(z_0 + r\cos\gamma) + K = 0,$$

oder, nach Potenzen von r geordnet:

3. $$f_0 + 2(f_{x0}'\cos\alpha + f_{y0}'\cos\beta + f_{z0}'\cos\gamma)r + (A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\cos\beta$$
$$+ 2C\cos\alpha\cos\gamma + D\cos^2\beta + 2E\cos\beta\cos\gamma + F\cos^2\gamma)r^2 = 0.$$

Wenn man abkürzungsweise setzt

4. $$f_x' \equiv Ax + By + Cz + G,$$
$$f_y' \equiv Bx + Dy + Ez + H,$$
$$f_z' \equiv Cx + Ey + Fz + J,$$

und durch angehängte Nullen, f_0, f_{x0}', f_{y0}', f_{z0}', bezeichnet, dass in der betreffenden Function statt x, y, z die speziellen Werthe x_0, y_0, z_0 gesetzt werden sollen.

Aus 3. folgt zunächst: Eine Fläche zweiter Ordnung wird von einer Geraden in zwei (realen oder imaginären) Punkten getroffen.

3. Nehmen wir an, dass P_0 auf der Fläche liegt, so ist $f_0 = 0$; die qua-

dratische Gleichung für r hat jetzt die Wurzel $r = 0$, welche dem Punkte P_0 entspricht; der zweite Schnittpunkt der durch P_0 gehenden Geraden G und der Fläche bestimmt sich aus der linearen Gleichung

$$1. \quad \begin{aligned}&(f_{x_0}' \cdot \cos\alpha + f_{y_0}' \cdot \cos\beta + f_{z_0}' \cdot \cos\gamma) + (A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\cos\beta \\ &+ 2C\cos\alpha\cos\gamma + D\cos^2\beta + 2E\cos\beta\cos\gamma + F\cos^2\gamma)\, r = 0\,.\end{aligned}$$

Wir fragen nun nach den durch P_0 gehenden Geraden, die die Fläche berühren, d. i. deren beide Schnittpunkte mit der Fläche in den Punkt P_0 fallen. Ist G Tangente der Fläche, so muss auch der aus 1. sich ergebende Werth von r gleich Null sein; die nothwendige Bedingung hierfür ist, dass das von r freie Glied der Gleichung 1. verschwindet, also dass

$$2. \quad f_{x_0}'\cos\alpha + f_{y_0}'\cos\beta + f_{z_0}'\cos\gamma = 0\,.$$

Ausser dieser Gleichung besteht noch zwischen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Gleichung:

$$3. \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,.$$

Durch die Gleichungen 2. und 3. sind $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ noch nicht bestimmt; man kann einen Werth, z. B. $\cos\gamma$ beliebig annehmen und dann die zugehörigen Werthe von $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ aus 2. und 3. ableiten. Durch einen Punkt einer Fläche zweiter Ordnung lassen sich also unendlich viele Tangenten an die Fläche legen.

Denkt man sich γ stetig geändert, so ändern sich auch α und β und damit die Lage der zugehörigen Tangente stetig; die Tangente beschreibt daher eine bestimmte Fläche. Um die Gleichung dieser Fläche zu erhalten, haben wir die Winkel α, β, γ aus der Gleichung 1. zu entfernen und dafür die Coordinaten eines Punktes P einer Tangente einzuführen. Nun ist, wenn ρ den Abstand P_0P bezeichnet:

$$\cos\alpha = \frac{x - x_0}{\rho}\,, \quad \cos\beta = \frac{y - y_0}{\rho}\,, \quad \cos\gamma = \frac{z - z_0}{\rho}\,.$$

Setzt man diese Werthe in 2. ein und unterdrückt dann den gemeinsamen Divisor ρ^2, so erhält man die Gleichung

$$4. \quad f_{x_0}'(x - x_0) + f_{y_0}'(y - y_0) + f_{z_0}'(z - z_0) = 0\,.$$

Diese Gleichung ist linear für x, y, z; wir schliessen daher: Die Tangenten, welche eine Fläche zweiter Ordnung in einem gegebenen Punkte derselben berühren, liegen auf einer Ebene.

Diese Ebene heisst die Tangentenebene der Fläche im Punkte P_0. Löst man die Klammern in 4. auf, so ergiebt sich

$$5. \quad f_{x_0}' \cdot x + f_{y_0}' \cdot y + f_{z_0}' \cdot z - (f_{x_0}' \cdot x_0 + f_{y_0}' \cdot y_0 + f_{z_0}' \cdot z_0) = 0.$$

Aus den Formeln No. 2, 4 schliesst man sofort

$$6. \quad f_{x_0}' \cdot x_0 + f_{y_0}' \cdot y_0 + f_{z_0}' \cdot z_0 \equiv f_0 - (Gx_0 + Hy_0 + Jz_0 + K)\,.$$

Da nun $f_0 = 0$, so erhält man

$$f_{x_0}' \cdot x + f_{y_0}' \cdot y + f_{z_0}' \cdot z = -(Gx_0 + Hy_0 + Jz_0 + K);$$

man hat daher die Gleichung der Tangentenebene

$$7. \quad T \equiv f_{x_0}' \cdot x + f_{y_0}' \cdot y + f_{z_0}' \cdot z + Gx_0 + Hy_0 + Jz_0 + K = 0\,.$$

4. Die Gleichung der Tangentenebene ist nur dann unbestimmt, wenn sämmtliche Coefficienten verschwinden, wenn also

$$1. \quad \begin{aligned} f_{x_0}' &\equiv Ax_0 + By_0 + Cz_0 + G = 0\,, \\ f_{y_0}' &\equiv Bx_0 + Dy_0 + Ez_0 + H = 0\,, \\ f_{z_0}' &\equiv Cx_0 + Ey_0 + Fz_0 + J = 0\,, \\ & \ Gx_0 + Hy_0 + Jz_0 + K = 0\,. \end{aligned}$$

Der Verein dieser vier linearen Gleichungen wird durch das Verschwinden ihrer Determinante bedingt

2. $$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A & B & C & G \\ B & D & E & H \\ C & E & F & J \\ G & H & J & K \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante ist symmetrisch, d. h. sie ändert sich nicht, wenn man die Colonnen mit den Zeilen vertauscht.

Wir werden nun zeigen, dass unter der Voraussetzung $\Delta = 0$ die vier Ebenen

$$f_x' = 0, \quad f_y' = 0, \quad f_z' = 0, \quad Gx + Hy + Jz + K = 0$$

nur dann einen einzigen im Endlichen liegenden Schnittpunkt haben, wenn die drei Ebenen $f_x' = 0$, $f_y' = 0$, $f_z' = 0$ nicht mehr als einen Punkt gemein haben.

Denn sind zwei der Ebenen identisch, so sind zwei von den ersten drei Zeilen und die entsprechenden Colonnen in Δ proportional. Der gemeinsame Punkt P_0 der vier Ebenen bestimmt sich aus einer der beiden zusammenfallenden Ebenen und den beiden andern; die Determinante dieser drei linearen Gleichungen, welche der gemeinsame Nenner der Lösungen ist, hat alsdann zwei proportionale Colonnen, verschwindet also identisch, P_0 ist also unendlich fern oder unbestimmt.

Ist z. B. $f_x' \equiv f_y'$, so ist $B = mA$, $D = mB$, $E = mC$, $H = mG$, und x_0, y_0, z_0 ergeben sich aus

$$\begin{aligned} Ax_0 + mAy_0 + Cz_0 &= -G, \\ Cx_0 + mCy_0 + Fz_0 &= -J, \\ Gx_0 + mGy_0 + Jz_0 &= -K. \end{aligned}$$

Enthalten ferner die Ebenen $f_x' = 0$, $f_y' = 0$, $f_z' = 0$ eine Gerade, ohne dass zwei derselben identisch sind, so besteht für zwei Zahlen m und n die Identität

$$f_z' \equiv mf_x' + nf_y'.$$

Hieraus folgt $C = mA + nB$, $E = mB + nD$, $F = mC + nE$, $J = mG + nH$. Der Punkt P_0 bestimmt sich aus $f_x' = 0$, $f_y' = 0$ und $Gx + Hy + Jz + K = 0$, d. i. aus

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + (mA + nB)z_0 &= -G, \\ Bx_0 + Dy_0 + (mB + nD)z_0 &= -H, \\ Gx_0 + Hy_0 + (mG + nH)z_0 &= -K. \end{aligned}$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} A & B & (mA + nB) \\ B & D & (mB + nD) \\ G & H & (mG + nH) \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch; folglich sind die Lösungen des Systems unendlich gross oder unbestimmt.

Umgekehrt ist einleuchtend, dass wenn die drei Ebenen $f_x' = 0$, $f_y' = 0$, $f_z' = 0$ nicht mehr als einen Punkt gemein haben, dies der einzige dem Systeme 1. genügende Punkt ist.

Wenn daher ein einziger im Endlichen liegender Punkt das System 1. erfüllt, so kann derselbe aus den drei Gleichungen gefunden werden

3. $$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + Cz_0 &= -G, \\ Bx_0 + Dy_0 + Ez_0 &= -H, \\ Cx_0 + Ey_0 + Fz_0 &= -J, \end{aligned}$$

und es ist

$$\Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

5. Wenn Δ_1 von Null verschieden ist, so ist P_0 weder unbestimmt noch unendlich fern. Bezogen auf ein Coordinatensystem, dessen Nullpunkt mit dem Doppelpunkte zusammenfällt, müssen die Coefficienten der Flächengleichung solche Werthe haben, dass die Gleichungen No. 4, 1 durch $x = y = z = 0$ erfüllt werden; hieraus folgt

$$G = H = J = K = 0 .$$

Die Flächengleichung lautet daher jetzt

$$1. \quad Ax^2 + 2Bxy + 2Cxy + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 = 0 .$$

Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines Punktes der Fläche, und r_1 sein Abstand vom Anfangspunkte, so sind die Cosinus der Winkel, die r_1 mit den Coordinatenachsen bildet

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{r_1}, \quad \cos\beta = \frac{y_1}{r_1}, \quad \cos\gamma = \frac{z_1}{r_1} .$$

Daher gelten für die Coordinaten jedes Punktes P der Geraden OP_1 die Formeln

$$x = \frac{x_1}{r_1} \cdot r, \quad y = \frac{y_1}{r_1} \cdot r, \quad z = \frac{z_1}{r_1} \cdot r,$$

wenn r die Strecke OP bezeichnet. Setzt man diese Werthe in die Flächengleichung 1. ein, so erhält man als Bedingung dafür, dass P auf der Fläche liegt

$$2. \quad \frac{r^2}{r_1^2} (Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + 2Cx_1z_1 + Dy_1^2 + 2Ey_1z_1 + Fz_1^2) = 0 .$$

Da nun P_1 der Fläche angehört so verschwindet der Klammerinhalt; also wird der Gleichung von jedem Werthe von r genügt. Wir sehen daher: Jede Gerade, die ausser dem Doppelpunkte noch einen Punkt mit der Fläche gemein hat, liegt ganz auf der Fläche.

Jede durch den Doppelpunkt gehende Ebene E schneidet die Fläche in zwei im Doppelpunkte sich treffenden Geraden, die real und von einander verschieden, oder real und vereint, oder imaginär sein können. Jede Ebene, die den Doppelpunkt nicht enthält, schneidet die Fläche in einer eigentlichen Curve zweiter Ordnung; die Fläche erscheint somit als die Bahn einer Geraden, die durch den Doppelpunkt geht und entlang einer Curve zweiter Ordnung gleitet. Die Fläche ist daher eine Kegelfläche.

6. Wenn die vier Ebenen

$$f_x' = 0, \quad f_y' = 0, \quad f_z' = 0, \quad Gx + Hy + Jz + K = 0$$

einen unendlich fernen Punkt gemein haben, also derselben Geraden parallel sind, so kann man das Coordinatensystem so wählen, dass die Achse OZ dieser Richtung parallel ist. Die Gleichungen No. 4, 1, bezogen auf dieses System, entsprechen dann verticalen Ebenen, haben also die Form

$$mx + ny + p = 0 .$$

Hieraus folgt

$$C = E = F = J = 0 .$$

Die Gleichung der Fläche ist daher

$$1. \quad Ax^2 + 2Bxy + Dy^2 + 2Gx + 2Hy + K = 0 .$$

Diese Gleichung enthält z nicht mehr; sie wird von jedem Punkte erfüllt, dessen Horizontalprojection ihr genügt. Betrachtet man 1. als die Gleichung einer auf der XY-Ebene gelegenen Curve zweiter Ordnung k, so ist die Fläche die Bahn einer Parallelen zur Z-Achse, die entlang der Curve k sich bewegt.

Hierdurch wird die Fläche als Cylinderfläche charakterisirt. Je nachdem

die Curve k eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, bezeichnen wir die Fläche als elliptischen, hyperbolischen oder parabolischen Cylinder. Zerfällt die Curve k in zwei ungleiche lineare Faktoren, oder ist sie die zweite Potenz eines linearen Faktors, so artet der Cylinder in zwei getrennte oder zusammenfallende Ebenen aus. Die Bedingungen dafür, dass die quadratische Gleichung $f = 0$ einen eigentlichen oder ausartenden Cylinder darstellt, sind also (No. 4 und 5)

$$\Delta = 0 \quad \text{und} \quad \Delta_1 = 0 .$$

7. Sind $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 \equiv a_1 T_1 + a_2 T_2 = 0$, und $T_1' = 0$, $T_2' = 0$, $T_3' \equiv b_1 T_1' + b_2 T_2' = 0$ die Gleichungen von drei Paar entsprechenden Ebenen zweier projectiven Büschel, so werden die Gleichungen je zweier entsprechenden Ebenen in der Form erhalten (§ 3, 30)

$$T \equiv \lambda_1 a_1 T_1 + \lambda_2 a_2 T_2 = 0 , \qquad T' \equiv \lambda_1 b_1 T_1' + \lambda_2 b_2 T_2' = 0 .$$

Die Punkte, in welchen sich entsprechende Ebenen schneiden, erfüllen die Gleichung, welche durch Elimination von λ_1 und λ_2 aus $T = 0$ und $T' = 0$ entsteht,

$$1. \qquad \begin{vmatrix} a_1 T_1 & a_2 T_2 \\ b_1 T_1' & b_2 T_2' \end{vmatrix} = 0 .$$

Diese Gleichung ist vom zweiten Grade.

Wenn die Träger der beiden Büschel auf einer Ebene T_0 liegen, und diese Ebene in beiden Büscheln sich selbst entspricht, so bezeichnen wir die Büschel als perspectiv. Man kann dann T_0 an die Stelle von T_1 und T_1' in 1. treten lassen und erhält

$$\begin{vmatrix} a_1 T_0 & a_2 T_2 \\ b_1 T_0 & b_2 T_2' \end{vmatrix} \equiv T_0 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 T_2 \\ b_1 & b_2 T_2' \end{vmatrix} = 0 ;$$

die Fläche zweiter Ordnung zerfällt in die beiden Ebenen $T_0 = 0$ und $a_1 b_2 T_2' - a_2 b_1 T_2 = 0$. Zwei perspective Ebenenbüschel erzeugen zwei Ebenen, deren eine die selbstentsprechende Ebene ist.

Wenn die Träger der beiden Büschel auf einer Ebene liegen, ohne perspectiv zu sein, so lässt sich aus 1. ein linearer Faktor nicht absondern, die Gleichung gehört also zu einer eigentlichen Fläche zweiter Ordnung. Schneiden sich die Träger in einem Punkte Σ, so gehen die Schnittlinien je zweier entsprechenden Ebenen durch Σ und jeder auf der Fläche liegende Punkt bestimmt mit Σ eine Gerade, die ganz auf der Fläche liegt; die Fläche ist daher eine Kegelfläche. Zwei projective Ebenenbüschel, deren Träger sich schneiden, erzeugen einen Kegel zweiter Ordnung, der den Schnittpunkt der Träger zur Spitze hat. Sind die Träger zweier projectiven Büschel parallel, so sind auch die Schnittlinien je zweier entsprechenden Ebenen parallel, und die von ihnen beschriebene Fläche ist mithin ein Cylinder.

8. Eine Kegelfläche, sowie eine Cylinderfläche II. O. sind durch ‹nf Mantellinien (d. i. auf der Fläche enthaltene Gerade) bestimmt. Um e Flächen zu construiren, durchschneide man die Mantellinien durch eine ‹bene, welche keine von ihnen enthält. Diese Ebene trifft die Mantellinien in ‹nf Punkten und die gesuchte Fläche in einer Curve II. O., die durch die fünf ‹unkte geht, und mithin construirt werden kann. Legt man nun durch die ‹unkte dieses Kegelschnitts Gerade, die durch den gemeinsamen endlich oder ‹endlich fernen Punkt der Mantellinien gehen, so liegen diese ganz in der Fläche.

Es ist ersichtlich, wie man eine Reihe von auf Kegelschnitte bezüglichen

Sätzen und Constructionen zu entsprechenden Sätzen und Constructionen für Kegel und Cylinder II. O. umarbeiten kann.

9. Für die Gleichung einer Cylinderfläche II. O.

$$f = Ax^2 + 2Bxy + Dy^2 + 2Gx + 2Hy + K = 0$$

sind die abgeleiteten Functionen

$$f_x' = Ax + By + G, \quad f_y' = Bx + Dy + H, \quad f_z' = 0.$$

Daher ist die Gleichung der Tangentenebene eines Punktes x_0, y_0, z_0 dieser Fläche (No. 3):

$$(Ax_0 + By_0 + G)x + (Bx_0 + Dy_0 + H)y + Gx_0 + Hy_0 + K = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, welche parallel zu den Mantellinien des Cylinders ist und die Gerade enthält, die die Horizontalspur (den Normalschnitt) des Cylinders in der Horizontalprojection des Punktes P berührt.

Die Gleichung der Horizontalspur des Cylinders in Liniencoordinaten ist bekanntlich

$$\varphi = \begin{vmatrix} A & B & G & u \\ B & D & H & v \\ G & H & K & -1 \\ u & v & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Ebenen, deren Coordinaten u, v dieser Gleichung genügen, und die parallel der Z-Achse sind, deren Coordinate w also gleich Null ist, sind Tangentenebenen des Cylinders. In Liniencoordinaten wird daher der Cylinder durch zwei Gleichungen

$$\varphi = \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v + \varkappa = 0, \quad \text{und} \quad w = 0$$

dargestellt. Wir werden noch wiederholt der Thatsache begegnen, dass einem Gebilde im Raume eine Gleichung in Punktcoordinaten und zwei Gleichungen in Ebenencoordinaten, oder umgekehrt eine Gleichung in Ebenencoordinaten und zwei Gleichungen in Punktcoordinaten zugehören.

10. Für die Gleichung der Kegelfläche

$$f = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 = 0$$

hat man

$$f_x' = Ax + By + Cz, \quad f_y' = Bx + Dy + Ez, \quad f_z' = Cx + Ey + Fz,$$

und erhält hieraus die Identität

$$f_x' \cdot x + f_y' \cdot y + f_z' \cdot z = f.$$

Ist daher P_0 ein Punkt der Kegelfläche, so ist die Gleichung der Tangentenebene in diesem Punkte

$$f_{x0}' \cdot x + f_{y0}' \cdot y + f_{z0}' \cdot z = 0.$$

Jede Tangentenebene eines Kegels II. O. geht durch die Spitze, und berührt den Kegel entlang einer Mantellinie. Die Tangentenebenen eines Kegels sind daher diejenigen durch die Kegelspitze gehenden Ebenen, deren Horizontalspuren die Horizontalspur des Kegels berühren. Ist

$$\varphi = \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta v + 2\varepsilon w + \varkappa = 0$$

die Gleichung der Horizontalspur eines Kegels in Liniencoordinaten, und

$$\Sigma = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w + \delta_1 = 0$$

die Gleichung der Kegelspitze, so wird der Kegel in Ebenencoordinaten durch den Verein von Gleichungen dargestellt

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma = 0.$$

11. Für die Coordinaten u, v, w der Tangentenebene der Fläche II. O. $f = 0$ im Punkte P_0 derselben ergeben sich aus der Gleichung der Tangentenebene (No. 3, 7) die Gleichungen

1. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + G = k \cdot u$,
2. $Bx_0 + Dy_0 + Ez_0 + H = k \cdot v$,
3. $Cx_0 + Ey_0 + Fz_0 + J = k \cdot w$,
4. $Gx_0 + Hy_0 + Jz_0 + K = -k$.

Reducirt man diese Gleichungen auf Null, und fügt noch die Gleichung des Tangentialpunktes P_0 hinzu

5. $ux_0 + vy_0 + wz_0 - 1 = 0$,

so kann man aus diesen fünf Gleichungen die Grössen x_0, y_0, z_0, k eliminiren, und erhält als nothwendige Bedingung dafür, dass die Ebene u, v, w die Fläche $f = 0$ berührt,

6.
$$\varphi = \begin{vmatrix} A & B & C & G & u \\ B & D & E & H & v \\ C & E & F & J & w \\ G & H & J & K & -1 \\ u & v & w & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Umgekehrt erkennt man leicht, dass jede Ebene T, deren Coordinaten der Gleichung $\varphi = 0$ genügen, eine Tangentenebene der Fläche $f = 0$ ist. Denn ist $\varphi = 0$, so giebt es vier Zahlen, x_0, y_0, z_0, k, die den Gleichungen 1. bis 5. genügen. Setzt man nun die Werthe für ku, kv, kw und für $(-k)$ aus 1 . . 4 in die mit k erweiterte Gleichung 5. ein, so erhält man

$$f_{x_0}' \cdot x_0 + f_{y_0}' \cdot y_0 + f_{z_0}' \cdot z_0 + Gx_0 + Hy_0 + Jz_0 + K = 0 .$$

Nun ist, wie man durch direkte Multiplication sieht (vergl. auch No. 3, 6) die linke Seite identisch mit f_0, und da dieselbe verschwindet, so sieht man, dass x_0, y_0, z_0 die Coordinaten eines Punktes P_0 der Fläche $f = 0$ sind. Vergleicht man nun die Gleichung der Tangentenebene der Fläche f im Punkte P_0 mit der Gleichung der Ebene T, so sieht man aus den Gleichungen 1. bis 4., dass diese Tangentenebene mit T identisch ist.

Die Gleichungen

$$f = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0,$$

und

$$\varphi = \begin{vmatrix} A & B & C & D & u \\ B & D & E & H & v \\ C & E & F & J & w \\ G & H & J & K & -1 \\ u & v & w & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

gehören daher zu derselben Fläche; $f = 0$ ist die Bedingungsgleichung, welche die Coordinaten der auf der Fläche gelegenen Punkte erfüllen und $\varphi = 0$ die Gleichung, der die die Fläche tangirenden Ebenen genügen. Es ist hervorzuheben, dass die Gleichung $\varphi = 0$ vom zweiten Grade in den Ebenencoordinaten ist.

---

12. Wir wenden uns nun zu den Untersuchungen über die Gleichung zweiten Grades in Ebenencoordinaten, die den bisher für die Gleichung in Punktcoordinaten durchgeführten analog sind. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades in Ebenencoordinaten ist

1. $\varphi = au^2 + 2buv + 2cuw + dv^2 + 2evw + fw^2 + 2gu + 2hv + 2iw + k = 0$.

Die Ebenen, welche φ berühren, und zugleich durch einen Punkt P gehen, genügen ausser der Gleichung $\varphi = 0$ noch der Gleichung des Punktes P; dieselbe sei

2. $P = \alpha u + \beta v + \gamma w + \delta = 0$.

Aus diesen beiden Gleichungen kann man eine der Coordinaten, z. B. w eliminiren; man erhält aus 2.

$$w = -(\alpha u + \beta v + \delta) : \gamma .$$

Setzt man dies in 1. ein, so erhält man eine Gleichung in u und v, also die Gleichung, welche von den Horizontalspuren der durch P gehenden Tangentenebenen der Fläche $\varphi = 0$ erfüllt wird.

Diese Gleichung ist vom zweiten Grade. Da nun die Ebenen, welche durch einen Punkt P gehen, und deren Horizontalspuren eine Curve zweiten Grades berühren, die Tangentenebenen eines Kegels zweiter Ordnung sind (No. 10), so folgt: Die Tangentenebenen einer Fläche zweiter Klasse (d. i. einer Fläche, deren Gleichung in Ebenencoordinaten vom zweiten Grade ist), die durch einen gegebenen Punkt gehen, umhüllen einen Kegel zweiter Ordnung. Diesen Kegel bezeichnen wir als den Tangentenkegel des Punktes P für die Fläche φ.

13. Bei den weiteren Untersuchungen werden wir von folgendem Satze Gebrauch machen: Bildet man aus den Coordinaten u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 zweier Ebenen T_1 und T_2 mit Hülfe zweier Zahlen λ_1 und λ_2 die Coordinaten einer Ebene T nach den Formeln

$$1. \quad u = \frac{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad v = \frac{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad w = \frac{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

so geht T durch die Schnittlinie $T_1 T_2$; und umgekehrt: die Coordinaten jeder Ebene des Büschels $T_1 T_2$ können bei geeigneter Wahl des Verhältnisses $\lambda_1 : \lambda_2$ durch diese Formeln gewonnen werden. Denn die Gleichung der Ebene T ist

$$ux + vy + wz - 1 = 0;$$

wenn man mit $\lambda_1 + \lambda_2$ multiplicirt, und u, v, w aus 1. substituirt, so erhält man

$$T \equiv (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) x + (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) y + (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) z - (\lambda_1 + \lambda_2) = 0.$$

Hieraus folgt

$$T \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 ,$$

wenn $T_1 \equiv u_1 x + v_1 y + w_1 z - 1, \quad T_2 \equiv u_2 x + v_2 y + w_2 z - 1.$

Da nun $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ die Gleichungen der Ebenen T_1 und T_2 sind, so folgt, dass T die Schnittlinie von T_1 und T_2 enthält.

Um den zweiten Theil des Satzes zu beweisen, hat man nur zu beachten dass die Gleichung jeder Ebene des Büschels $T_1 T_2$ in der Form erhalten wird

$$T \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 = 0.$$

14. Wir fragen nun nach den Ebenen $\mathfrak{T}$ eines Büschels $T_0 T$, die eine Fläche zweiter Klasse $\varphi = 0$ berühren.

Die Coordinaten von $\mathfrak{T}$ seien

$$\mathfrak{u} = \frac{\lambda_1 u_0 + \lambda_2 u}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \mathfrak{v} = \frac{\lambda_1 v_0 + \lambda_2 v}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \mathfrak{w} = \frac{\lambda_1 w_0 + \lambda_2 w}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner in den drei Formeln durch λ_1 dividirt und $\lambda_2 : \lambda_1$ mit μ bezeichnet:

$$\mathfrak{u} = \frac{u_0 + \mu u}{1 + \mu}, \quad \mathfrak{v} = \frac{v_0 + \mu v}{1 + \mu}, \quad \mathfrak{w} = \frac{w_0 + \mu w}{1 + \mu}.$$

Multiplicirt man nun die Gleichung

$$\varphi \equiv a u^2 + 2buv + 2cuw + dv^2 + 2evw + fw^2 + 2gu + 2hv + 2iw + k =$$

mit $(1 + \mu)^2$ und substituirt dann

$$(1 + \mu)\mathfrak{u} = u_0 + \mu u, \quad (1 + \mu)\mathfrak{v} = v_0 + \mu v, \quad (1 + \mu)\mathfrak{w} = w_0 + \mu w,$$

so erhält man

$$1. \quad \varphi_0 + 2(\varphi_{u_0}' \cdot u + \varphi_{v_0}' \cdot v + \varphi_{w_0}' \cdot w + g u_0 + h v_0 + i w_0 + k) \cdot \mu + \varphi \cdot \mu^2 = 0$$

Hierin ist gesetzt

2. $\varphi_u' \equiv au + bv + cw + g,$

3. $\varphi_v' \equiv bu + dv + ew + h,$

4. $\varphi_w' \equiv cu + ev + fw + i,$

und φ_0, φ_{u0}', φ_{v0}', φ_{w0}' bedeuten die Werthe, welche die Functionen φ, φ_u', φ_v', φ_w' für die Coordinaten der Ebene T_0 annehmen.

Die Functionen φ_u', φ_v' φ_w' genügen der Identität

5. $\varphi_u' \cdot u + \varphi_v' \cdot v + \varphi_w' \cdot w + gu + hv + iw + k \equiv \varphi.$

Die Gleichung 1. ist zweiten Grades für μ. Wir erfahren daher: Durch eine Gerade gehen zwei (reale oder imaginäre) Tangentenebenen einer Fläche zweiter Klasse.

15. Es sei nun T_0 eine Tangentenebene von φ. Dann ist $\varphi_0 = 0$ und die Gleichung No. 14, 1 hat eine Wurzel $\mu = 0$, welcher die Ebene T_0 zugehört; die andere Wurzel ergiebt sich aus der linearen Gleichung

1. $2(\varphi_{u0}' \cdot u + \varphi_{v0}' \cdot v + \varphi_{w0}' \cdot w + gu_0 + hv_0 + iw_0 + k) + \varphi \cdot \mu = 0.$

Soll T so gelegen sein, dass beide durch die Schnittlinie T_0T gehende Tangentenebenen der Fläche φ mit T_0 zusammenfallen, so muss die Gleichung 1. die Wurzel $\mu = 0$ haben, es müssen die Coordinaten der Ebene T also die Gleichung erfüllen

2. $\varphi_{u0}' \cdot u + \varphi_{v0}' \cdot v + \varphi_{w0}' \cdot w + gu_0 + hv_0 + iw_0 + k = 0.$

Dies ist die Gleichung eines Punktes. Wir schliessen daher: Alle Geraden auf einer Tangentenebene T_0 einer Fläche zweiter Klasse, durch welche ausser T_0 noch eine mit T_0 zusammenfallende Tangentenebene der Fläche geht, gehen durch einen Punkt.

Dies ist der Punkt, in welchem eine Tangentenebene der Fläche φ von den unendlich nahe benachbarten getroffen wird, mithin der Punkt, in welchem φ von T_0 berührt wird. Die Gleichung des Punktes, in welchem eine Tangentenebene T_0 die Fläche zweiter Klasse $\varphi = 0$ berührt, ist daher

$$P \equiv \varphi_{u0}' \cdot u + \varphi_{v0}' \cdot v + \varphi_{w0}' \cdot w + gu_0 + hv_0 + iw_0 + k = 0.$$

Nach der Identität No. 14, 5 hat man, da $\varphi_0 = 0$

$$-(\varphi_{u0}' \cdot u_0 + \varphi_{v0}' \cdot v_0 + \varphi_{w0}' \cdot w_0) = gu_0 + hv_0 + iw_0 + k,$$

und kann daher die Gleichung des Punktes P auch in der Form schreiben

$$P \equiv \varphi_{u0}'(u - u_0) + \varphi_{v0}'(v - v_0) + \varphi_{w0}'(w - w_0) = 0.$$

16. Der auf einer Tangentenebene T_0 gelegene Berührungspunkt wird nur dann unbestimmt, wenn in der Gleichung $P = 0$ alle vier Constanten zugleich verschwinden, also wenn die Coordinaten von T_0 den vier Gleichungen genügen

$$1.\quad \begin{aligned} \varphi_{u0}' &\equiv au_0 + bv_0 + cw_0 + g = 0, \\ \varphi_{v0}' &\equiv bu_0 + dv_0 + ew_0 + h = 0, \\ \varphi_{w0}' &\equiv cu_0 + ev_0 + fw_0 + i = 0, \\ & gu_0 + hv_0 + iw_0 + k = 0. \end{aligned}$$

Die Bedingung für den Verein dieser vier für u_0, v_0, w_0 linearen Gleichungen ist

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} a & b & c & g \\ b & d & e & h \\ c & e & f & i \\ g & h & i & k \end{vmatrix} = 0.$$

Ebenso, wie in No. 4, erkennt man: Soll das System 1. eine eindeutig bestimmte Lösung haben, so müssen die Gleichungen

$$2.\quad \begin{aligned} au_0 + bv_0 + cw_0 &= -g, \\ bu_0 + dv_0 + ew_0 &= -h, \\ cu_0 + ev_0 + fw_0 &= -i, \end{aligned}$$

von einander unabhängig und die Determinante

$$\Delta_1' = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sein. Die Coordinaten von T_0 werden daher aus 2. berechnet. Für jede auf T_0 gelegene Gerade G fallen alsdann die durch G gehenden beiden Tangentenebenen der Fläche φ mit T_0 zusammen; aus diesem Grunde wird T_0 als Doppelebene der Fläche $\varphi = 0$ bezeichnet.

17. Die Coordinaten der Doppelebene erhalten die bestimmten Werthe $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, die Doppelebene ist also unendlich fern, wenn, wie die Gleichungen No. 16, 1. . . 4. lehren

$$g = h = i = k = 0.$$

Die Gleichung der Fläche φ vereinfacht sich in diesem Falle zu

1. $$\varphi \equiv au^2 + 2buv + 2cuw + dv^2 + 2evu + fw^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist homogen, d. h. sie enthält nur Glieder zweiten Grades. Wird der Gleichung durch die besonderen Werthe $u = u_1$, $v = v_1$, $w = w_1$ genügt, so wird sie auch von den Werthen $u = n \cdot u_1$, $v = n \cdot v_1$, $w = n \cdot w_1$ erfüllt, wobei n unbestimmt bleibt, mithin von allen Ebenen, deren Coordinaten die Verhältnisse haben $u : v : w = u_1 : v_1 : w_1$. Diese Ebenen sind der Ebene T_1 parallel. Die Gleichung 1. wird also von Schaaren paralleler Ebenen erfüllt. Um über die Anordnung derselben eine deutliche Vorstellung zu erhalten, greifen wir aus jeder Schaar eine Ebene heraus, z. B. die, für welche die Coordinate w einen bestimmten Werth w_1 hat; diese Ebenen gehen durch den Punkt S der Z-Achse, für welchen $OS = 1 : w_1$ ist. Die Coordinaten u, v dieser Ebenen genügen der Gleichung

$$au^2 + 2buv + dv^2 + 2cw_1 \cdot u + 2ew_1 \cdot v + fw_1^2 = 0,$$

ihre Horizontalspuren umhüllen also die durch diese Gleichung bestimmte Curve zweiten Grades. Die Ebenen umhüllen daher einen Kegel II. O., der die Spitze S hat. Die Gleichung

$$\varphi \equiv au^2 + 2buv + 2cuw + dv^2 + 2evw + fw^2 = 0$$

wird also von den Schaaren von Ebenen umhüllt, die den Tangentenebenen des Kegels parallel sind, der die Gleichungen hat

$$w = w_1, \quad au^2 + 2buv + dv^2 + 2cw_1 \cdot u + 2ew_1 \cdot v + fw_1^2 = 0,$$

wobei w_1 willkürlich angenommen werden kann.

18. Ist die Doppelebene nicht unendlich fern, so nehmen wir sie zur XY-Ebene eines Coordinatensystems. Alsdann werden die Gleichungen No. 16, 1. . . 4. von unbestimmten Werthen von u_0 und v_0 und von $w_0 = \infty$ erfüllt; die nothwendige und ausreichende Bedingung hierfür ist

$$c = e = f = i = 0.$$

Die Gleichung der Fläche φ wird daher

1. $$\varphi \equiv au^2 + 2buv + dv^2 + 2gu + 2hv + k = 0.$$

Diese Gleichung enthält nur die Coordinaten u, v; ihr genügen also alle Ebenen, deren Horizontalspuren die Gleichung erfüllen

$$au^2 + 2buv + dv^2 + 2gu + 2hv + k = 0.$$

Hat eine Fläche zweiter Klasse eine im Endlichen liegende Doppelebene, so wird sie von unendlich vielen Büscheln von Ebenen berührt; die Träger aller dieser Büschel von Berührungsebenen liegen auf einer Ebene und sind die Tangenten einer Curve zweiter Klasse. Eine solche Fläche wird als Grenzfläche II. Kl. bezeichnet.

19. Ist $\varphi = 0$ die Gleichung einer Grenzfläche II. Kl., so ist

$$\varphi_u' = au + bv + g\,, \quad \varphi_v' = bu + dv + h\,, \quad \varphi_w = 0\,.$$

Die Gleichung des auf der Tangentenebene T_0 dieser Fläche gelegenen Tangentialpunktes ergiebt sich daher zu (No. 15)

$$P = (au_0 + bv_0 + g)u + (bu_0 + dv_0 + h)v + gu_0 + hv_0 + k = 0.$$

In dieser Gleichung fehlt das Glied mit w; wir schliessen daher: Die Punkte einer Grenzfläche II. Kl. liegen alle auf der Doppelebene und sind die Punkte eines Kegelschnitts.

Die Grenzfläche spielt bei den Flächen zweiter Klasse dieselbe Rolle, welche der Kegel bei Flächen zweiter Ordnung hat. Dem Cylinder als dem Kegel mit unendlich ferner Spitze entspricht die in No. 17 behandelte Grenzfläche mit unendlich ferner Doppelebene.

20. Sind x, y, z die Coordinaten des Punktes, in welchem die Ebene T_0 die Fläche $\varphi = 0$ berührt, so muss die Gleichung dieses Punktes

$$P = \varphi_{u0}' \cdot u + \varphi_{v0}' \cdot v + \varphi_{w0}' \cdot w + gu_0 + hv_0 + iw_0 + k = 0$$

bis auf einen constanten Faktor m mit der Gleichung

$$xu + yv + zw - 1 = 0$$

übereinstimmen. Wir erhalten hieraus die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\varphi_{u0}' &= au_0 + bv_0 + cw_0 + g = m \cdot x\,,\\
\varphi_{v0}' &= bu_0 + dv_0 + ew_0 + h = m \cdot y\,,\\
\varphi_{w0}' &= cu_0 + ev_0 + fw_0 + i = m \cdot z\,,\\
&\ gu_0 + hv_0 + iw_0 + k = -m\,.
\end{aligned}$$

Fügt man hierzu noch die selbstverständliche Gleichung

$$xu_0 + yv_0 + zw_0 - 1 = 0\,,$$

so kann man aus diesen fünf Gleichungen die Grössen u_0, v_0, w_0, m eliminiren; als nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass P ein Punkt der Fläche $\varphi = 0$ ist, erhält man die Gleichung

$$f = \begin{vmatrix} a & b & c & g & x \\ b & d & e & h & y \\ c & e & f & i & z \\ g & h & i & k & -1 \\ x & y & z & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Diese Gleichung ist vom zweiten Grade. Jede Fläche zweiter Klasse ist daher von der zweiten Ordnung; früher (No. 11) haben wir gefunden, dass jede Fläche zweiter Ordnung von der zweiten Klasse ist. Es ist daher nicht nöthig, die Bezeichnung zweiter Klasse und zweiter Ordnung getrennt weiter zu führen; man fasst beide unter der gemeinsamen Bezeichnung: Flächen zweiten Grades, zusammen.

Eine Grenzfläche zweiter Klasse kann nicht durch eine einzige Gleichung in Punktcoordinaten dargestellt werden. Da die Punkte der Grenzfläche einen Kegelschnitt bilden, so ist die Horizontalprojection ebenfalls ein Kegelschnitt, und die Punkte der Grenzfläche sind daher die Punkte des Raumes, welche der Gleichung dieser Horizontalprojection und ausserdem der Gleichung der Doppelebene genügen. Die Grenzfläche wird also in Punktcoordinaten durch eine quadratische Gleichung z. B. zwischen x und y

$$a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0$$

und durch eine lineare Gleichung, die Gleichung der Doppelebene,

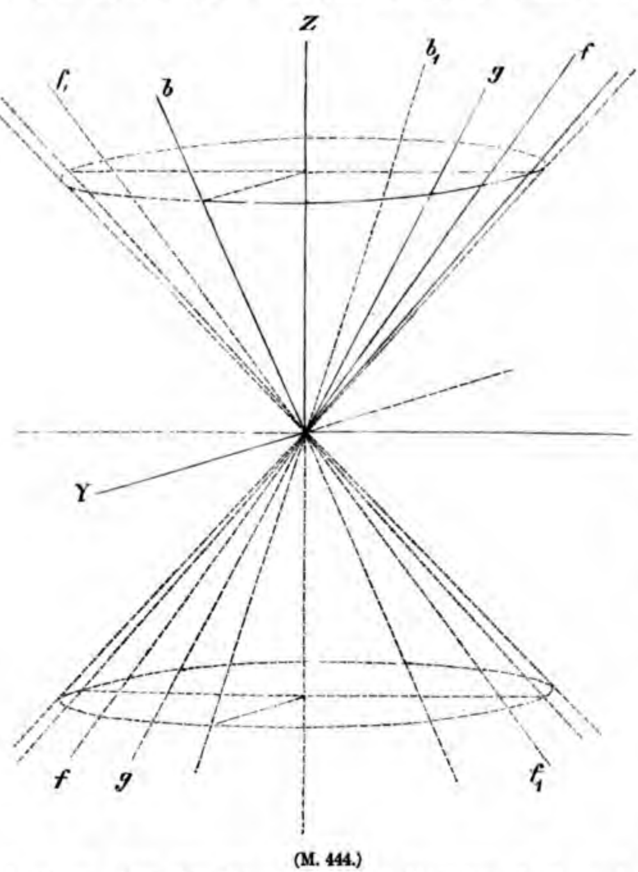
$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

charakterisirt.

Wir erinnern daran, dass in gleicher Weise der Kegel in Ebenencoordinaten durch den Verein einer Gleichung zweiten Grades und einer linearen Gleichung, der Gleichung der Kegelspitze, dargestellt wird.

---

21. Wir untersuchen nun den **Ort der Geraden, die durch den Schnittpunkt zweier gegebenen Geraden gehen und für welche die Summe der Winkel, die sie mit diesen beiden Geraden bilden, eine gegebene Grösse** 2α hat.



(M. 444.)

Die beiden gegebenen Geraden seien f und f_1, und $ff_1 = 2\gamma$. Wir wählen die Ebene der beiden Geraden zur XZ-Ebene eines Coordinatensystems, ihren Schnittpunkt zum Nullpunkte, und die Halbirungslinie des Winkels 2γ zur Z-Achse, so dass $fz = zf_1 = \gamma$.

Es sei g eine durch O gehende Gerade, für welche

1. $gf + gf_1 = 2\alpha$.

Die Gerade g mache mit den Achsen die Winkel φ, ψ, χ, so dass für die Winkel der Geraden f, f_1 und g mit den Richtungen OX, OY, OZ die Zusammenstellung gilt:

	OX,	OY,	OZ,
f:	$90° - \gamma$,	$90°$,	γ,
f_1:	$90° + \gamma$,	$90°$,	$-\gamma$,
g:	φ,	ψ,	χ.

Aus § 1, No. 6 erhält man

2. $\cos gf = \sin\gamma\cos\varphi + \cos\gamma\cos\chi, \qquad \cos gf_1 = -\sin\gamma\cos\varphi + \cos\gamma\cos\chi.$

Aus 1. folgt

$$\cos gf\cdot\cos gf_1 - \sin gf\cdot\sin gf_1 = \cos 2\alpha\text{, daher}$$

$$\sqrt{(1-\cos^2 gf)(1-\cos^2 gf_1)} = \cos gf\cdot\cos gf_1 - \cos 2\alpha\text{, woraus folgt}$$

$$1 - \cos^2 gf - \cos^2 gf_1 = \cos^2 2\alpha - 2\cos gf\cdot\cos gf_1\cdot\cos 2\alpha,$$

3. $$\cos^2 gf + \cos^2 gf_1 - 2\cos 2\alpha\cdot\cos gf\cdot\cos gf_1 - \sin^2 2\alpha = 0.$$

In diese Gleichung führen wir nun die Werthe 2. ein; wir erhalten

4. $$\cos^2 gf + \cos^2 gf_1 = 2\,(\sin^2\gamma\cos^2\varphi + \cos^2\gamma\cos^2\chi),$$

5. $$\cos gf \cdot \cos gf_1 = \cos^2\gamma\cos^2\chi - \sin^2\gamma\cdot\cos^2\varphi.$$

Durch diese Werthe erhält man aus 3.

$$2\sin^2\gamma\cos^2\varphi + 2\cos^2\gamma\cos^2\chi - 2\cos 2\alpha\,(\cos^2\gamma\cos^2\chi - \sin^2\gamma\cos^2\varphi) - \sin^2 2\alpha = 0.$$

Hieraus folgt weiter

$$2\sin^2\gamma\,(1 + \cos 2\alpha)\cos^2\varphi + 2\cos^2\gamma\,(1 - \cos 2\alpha)\cos^2\chi - \sin^2 2\alpha = 0,$$

oder einfacher

6. $$\sin^2\gamma\cos^2\alpha\cos^2\varphi + \cos^2\gamma\sin^2\alpha\cos^2\chi - \sin^2\alpha\cos^2\alpha = 0.$$

Statt der Winkel φ und χ führen wir nun die Coordinaten der Punkte der gesuchten Fläche ein. Ist P ein Punkt auf g, so ist bekanntlich

$$\cos\varphi = x : r, \quad \cos\chi = z : r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

daher erhält man aus 6.

$$\sin^2\gamma\cdot\cos^2\alpha\cdot x^2 + \cos^2\gamma\sin^2\alpha\cdot z^2 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha\,(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

oder, geordnet:

7. $$\cos^2\alpha\,(\sin^2\gamma - \sin^2\alpha)\,x^2 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha\cdot y^2 + \sin^2\alpha\,(\cos^2\gamma - \cos^2\alpha)\,z^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist homogen quadratisch für die Coordinaten, sie ist daher die **Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung, der den Nullpunkt zur Spitze hat.**

Da die Gleichung rein quadratisch für alle drei Coordinaten ist, so folgen für gegebene Werthe zweier Coordinaten zwei entgegengesetzte gleiche Werthe der dritten; zu jedem Punkte einer Coordinatenebene, als Projection eines Kegelpunktes auf eine der Coordinatenebenen betrachtet, gehören also zwei symmetrisch zu dieser Ebene liegende Punkte des Kegels. Wir schliessen hieraus, **dass der Kegel 7. alle drei Coordinatenebenen zu Symmetrieebenen hat.**

Man kann die Gleichung des Kegels noch etwas vereinfachen, wenn man statt γ den Winkel β einführt, den die in der YOZ-Ebene liegenden Mantellinien b und b_1 des Kegels mit der Z-Achse bilden. Nach den Formeln für das rechtwinkelige sphärische Dreieck hat man nämlich

$$\cos bf = \cos bz \cdot \cos fz.$$

Nun ist $bf = \alpha$, $fz = \gamma$, $bz = \beta$, daher hat man $\cos\alpha = \cos\beta\cdot\cos\gamma$.

Hieraus folgt sofort

$$\cos^2\gamma - \cos^2\alpha = -(\sin^2\gamma - \sin^2\alpha) = \sin^2\beta\cos^2\gamma.$$

Setzt man dies in 6. ein und ersetzt im Faktor von y^2 die Grösse $\cos^2\alpha$ durch $\cos^2\beta\cos^2\gamma$, so haben alle Glieder der Gleichung den gemeinsamen Faktor $\cos^2\gamma$; dividirt man durch $-\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\gamma$, so folgt

8. $$\cot^2\alpha\cdot x^2 + \cot^2\beta\cdot y^2 - z^2 = 0.$$

22. Man überzeugt sich leicht, dass es in jedem Kegel zweiter Ordnung, der drei auf einander senkrechte Symmetrieebenen hat, zwei durch die Spitze gehende **Focalstrahlen** f und f_1 giebt, derart, dass die Summe der Winkel die sie mit jeder Mantellinie des Kegels bilden, constant ist.

Wählen wir die Symmetrieebenen zu Coordinatenebenen, so muss die Gleichung des Kegels für alle drei Coordinaten rein quadratisch sein, und da der Schnittpunkt der Symmetrieebenen mit der Kegelspitze zusammenfallen muss, also die Kegelgleichung von den Coordinaten $x = y = z = 0$ des Nullpunktes befriedigt wird, so kann die Kegelgleichung kein von den Coordinaten freies Glied haben. Die allgemeine Form der Kegelgleichung ist daher unter diesen Voraussetzungen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0.$$

Die drei Zahlen A, B, C können nicht alle dasselbe Zeichen haben, da

sonst die Gleichung nur von den realen Werthen $x = y = z = 0$ befriedigt wird, der Kegel also ausser der Spitze keine realen Punkte enthält. Man kann die Bezeichnung der Coordinatenachsen so wählen, dass A und B positiv sind und C negativ ist; und so, dass A nicht grösser ist als B; dann kann man durch $(-C)$ dividiren und erhält so eine Gleichung von der Form

1. $$m^2x^2 + n^2y^2 - z^2 = 0.$$

Vergleicht man dies mit der Gleichung
$$cot^2\alpha \cdot x^2 + cot^2\beta \cdot y^2 - z^2 = 0,$$
so folgt $cot\,\alpha = m$, $cot\,\beta = n$, und daher
$$cos\,\alpha = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}, \quad cos\,\beta = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}, \quad cos\,\gamma = \frac{m\sqrt{1+n^2}}{n\sqrt{1+m^2}}.$$

Da $m < n$, so ist auch $m\sqrt{1+n^2} : n\sqrt{1+m^2} < 1$, also γ ein realer Winkel. Ist $m = n$, so ist $\gamma = 0$, und die Kegelgleichung ist
$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{m^2} = 0.$$

Setzt man für z einen gegebenen Werth z_0, so erhält man für die Horizontalprojection der Kegelpunkte, die in der Höhe z_0 über der XY-Ebene liegen, die Gleichung
$$x^2 + y^2 - \frac{z_0^2}{m^2} = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises, der um den Nullpunkt mit dem Halbmesser $z_0 : m$ beschrieben ist; hierdurch erweist sich der Kegel als Rotationskegel.

23. Um über den Ort der Geraden g Auskunft zu haben, die durch den Schnittpunkt zweier Geraden f und f' gehen und für welche die Differenz der Winkel $fg - f'g$ oder $f'g - fg$ einem gegebenen Winkel 2δ gleich ist, verlängern wir die eine der gegebenen Geraden, z. B. f'; die Verlängerung sei f_1; dann ist
$$f'g = 180° - f_1g.$$

Setzt man dies in $fg - f'g = 2\delta$ ein, so entsteht
$$fg - (180° - f_1g) = 2\delta, \quad \text{mithin}$$
$$fg + f_1g = 180° + 2\delta.$$

Wir erhalten den Kegel, wie in der vorigen Untersuchung, wenn wir nur 2α durch $180° + 2\delta$ ersetzen.

Es ist bemerkenswerth, dass der Kegel daher in gleicher Weise als das räumliche Analogon der Ellipse und Hyperbel auftritt.

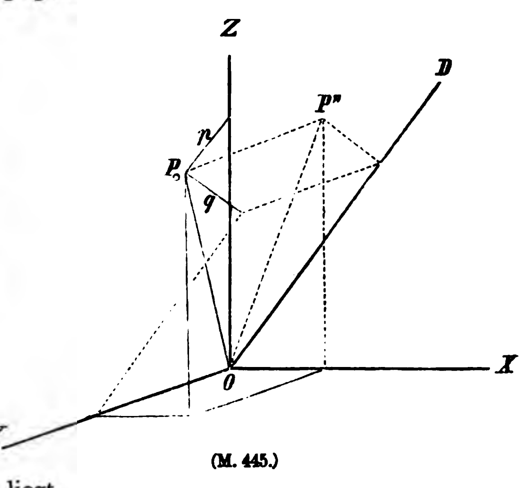
Diese Analogie wird noch anschaulicher, wenn man einen Kugelschnitt des Kegels bildet, d. i. wenn man den Kegel mit einer Kugel durchschneidet, deren Centrum die Kegelspitze ist.

Diese Kugel durchschneide die Schenkel f und f_1 in den Punkten F und F_1; die Gegenpunkte dieser Punkte seien F' und F_1'. Ist nun P ein Punkt des Kugelschnitts und bezeichnet man für zwei Kugelpunkte A und B mit AB den sphärischen Abstand, d. i. den von A nach B sich erstreckenden Bogen eines grössten Kreises, so gelten für P die Beziehungen
$$PF + PF_1 = 2\alpha, \quad PF' + PF_1' = 360° - 2\alpha$$
$$PF - PF_1' = \pm(180 - 2\alpha), \quad PF' - PF_1 = \pm(180 - 2\alpha).$$

Die Paare von Kugelpunkten F und F_1 sowie F' und F_1' haben also den Charakter von elliptischen Brennpunkten, während die Paare F' und F_1, sowie F und F'_1 den Charakter hyperbolischer Brennpunkte haben.

Aus zahlreichen Sätzen über ebene Kegelschnitte erhält man mit leichter Mühe Sätze über diese sphärischen Kegelschnitte und damit auch Sätze über den Kegel zweiter Ordnung.

24. Um über den Ort der Punkte zu entscheiden, deren Abstand von einer gegebenen Geraden f zum Abstande von einer die Gerade f schneidenden Ebene D ein gegebenes Verhältniss ε hat, nehmen wir den Schnitt der Geraden und der Ebene zum Nullpunkte unseres Coordinatensystems, legen die Z-Achse in die Gerade und die Ebene ZOX normal zur Ebene D; OD sei die Verticalspur von D, und $DOZ = \delta$. Ist P_0 ein Punkt der Fläche, so liegt auch jeder Punkt der Geraden OP_0 auf derselben, da für alle diese Punkte die Abstände von der Geraden OZ und von der Ebene D gleiches Verhältniss haben. Wir sehen daraus, dass die Fläche eine Kegelfläche ist, deren Spitze in O liegt.



(M. 445.)

Der Abstand p eines Punktes P von der Z-Achse ist

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Der Abstand q von der Ebene D ist gleich dem Abstande der Verticalprojection P'' des Punktes von der Geraden OD. Man hat

$$\begin{aligned} q &= OP'' \sin(XOP'' - XOD) = OP'' \sin(XOP'' - 90^\circ + \delta) \\ &= -OP'' \cos(XOP'' + \delta) = OP'' \sin XOP'' \sin\delta - OP'' \cos XOP'' \cos\delta \\ &= \sin\delta \cdot z - \cos\delta \cdot x. \end{aligned}$$

Ist nun verlangt, dass $p : q = \varepsilon$, so folgt

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2 (\sin\delta \cdot z - \cos\delta \cdot x)^2.$$

Löst man die Klammern auf und ordnet, so erhält man

$$1. \quad C \equiv (1 - \varepsilon^2 \cos^2\delta) x^2 + 2\varepsilon^2 \sin\delta \cos\delta \cdot xz + y^2 - \varepsilon^2 \sin^2\delta \cdot z^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist zweiten Grades und homogen; die Fläche ist daher ein Kegel zweiter Ordnung. Da die Gleichung rein quadratisch für y ist, so folgt, dass die Ebene XOZ eine Symmetrieebene des Kegels ist.

Die Analogie mit den Kegelschnitten legt die Vermuthung nahe, dass dieser Kegel C mit dem in No. 21 gefundenen identisch, und dass die Z-Achse eine Focallinie von C ist. Um darüber zu entscheiden, transformiren wir die Gleichung des Kegels

$$2. \quad \cot^2\alpha \cdot x^2 + \cot^2\beta \cdot y^2 - z^2 = 0$$

auf ein neues Coordinatensystem, welches dieselbe Y-Achse, und die Gerade f zur Z-Achse hat; dann erscheint nur die Ebene XOZ um den Winkel $(-\gamma)$ gedreht, und man hat daher (nach den Transformationsformeln ebener Systeme) die Coordinaten x und z in 2. durch die Werthe $\cos\gamma \cdot x + \sin\gamma \cdot z$, $-\sin\gamma \cdot x + \cos\gamma \cdot z$ zu ersetzen.

Hierdurch erhält man aus 2.

$$\cot^2\alpha (\cos\gamma \cdot x + \sin\gamma \cdot z)^2 + \cot^2\beta \cdot y^2 - (-\sin\gamma \cdot x + \cos\gamma \cdot z)^2 = 0$$

oder, besser geordnet,

$$(cot^2\alpha\cdot cos^2\gamma - sin^2\gamma)\,x^2 + 2\,cos\gamma\,sin\gamma\,(cot^2\alpha+1)\,xz + cot^2\beta\cdot y^2$$
$$+ (cot^2\alpha\, sin^2\gamma - cos^2\gamma)\,z^2 = 0\,.$$

Da $cot^2\alpha\, cos^2\gamma - sin^2\gamma = cot^2\alpha\, cos^2\gamma - 1 + cos^2\gamma = (cot^2\alpha+1)\,cos^2\gamma - 1$
$$= \frac{cos^2\gamma - sin^2\alpha}{sin^2\alpha}\,,$$

sowie
$$cot^2\alpha\, sin^2\gamma - cos^2\gamma = \frac{sin^2\gamma - sin^2\alpha}{sin^2\alpha}\,,$$

und
$$cot^2\beta = \frac{cos^2\beta}{1-cos^2\beta} = \frac{cos^2\alpha}{cos^2\gamma - cos^2\alpha} = \frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha - sin^2\gamma}\,,$$

so geht die transformirte Kegelgleichung über in

$$(cos^2\gamma - sin^2\alpha)\,x^2 + 2\,cos\gamma\,sin\gamma\cdot xz + \frac{sin^2\alpha\, cos^2\alpha}{sin^2\alpha - sin^2\gamma}\cdot y^2 - (sin^2\alpha - sin^2\gamma)\,z^2 = 0.$$

Bemerkt man noch, dass

$$(cos^2\gamma - sin^2\alpha)\,(sin^2\alpha - sin^2\gamma) = (1 - sin^2\gamma - sin^2\alpha)\,(sin^2\alpha - sin^2\gamma)$$
$$= sin^2\alpha\cdot cos^2\alpha - sin^2\gamma\, cos^2\gamma\,,$$

so erhält man schliesslich

3. $$(sin^2\alpha\, cos^2\alpha - sin^2\gamma\, cos^2\gamma)\,x^2 + 2\,cos\gamma\,sin\gamma\,(sin^2\alpha - sin^2\gamma)\,xz + sin^2\alpha\, cos^2\alpha y^2$$
$$- (sin^2\alpha - sin^2\gamma)^2\, z^2 = 0\,.$$

Soll nun diese Gleichung den Kegel C darstellen, so muss die Gleichung $C = 0$ durch Multiplication mit einem Faktor k mit 3. identisch werden; es ist also

4. $$k(1 - \varepsilon^2 cos^2\delta) = sin^2\alpha\, cos^2\alpha - sin^2\gamma\, cos^2\gamma\,,$$
5. $$k\cdot\varepsilon^2 sin\delta\, cos\delta = cos\gamma\, sin\gamma\,(sin^2\alpha - sin^2\gamma)\,,$$
6. $$k = sin^2\alpha\, cos^2\alpha\,,$$
7. $$k\,\varepsilon^2 sin^2\delta = (sin^2\alpha - sin^2\gamma)^2\,.$$

Aus 6. folgt der Werth für k; hierauf aus 7. und 5. durch Division $tang\,\delta$, durch Substitution z. B. in 7. schliesslich ε.

Zwischen den Grössen $k\,(1 - \varepsilon^2 cos^2\delta)$, $k\varepsilon^2 sin\delta\, cos\delta$, $k\varepsilon^2 sin^2\delta$ besteht die Identität

$$[k\,(1 - \varepsilon^2 cos^2\delta) - k]\cdot k\cdot\varepsilon^2 sin^2\delta \equiv -(k\varepsilon^2 sin\delta\, cos\delta)^2\,.$$

Die nothwendige und ausreichende Bedingung für den Verein der Gleichungen 4., 5., 6., 7. ist, dass dieselbe Identität von den rechten Seiten der Gleichungen erfüllt wird.

Nun hat man aus 4. und 6.

$$k(1 - \varepsilon^2 cos^2\delta) - k = sin^2\alpha cos^2\alpha - sin^2\gamma cos^2\gamma - sin^2\alpha cos^2\alpha = -sin^2\gamma cos^2\gamma\,.$$

Mithin aus 7.

$$[k(1 - \varepsilon^2 cos\delta) - k]\cdot k\varepsilon^2 sin^2\delta = - sin^2\gamma\cdot cos^2\gamma\cdot(sin^2\alpha - sin^2\gamma)^2\,.$$

Dies ist aber in der That entgegengesetzt gleich der zweiten Potenz der rechten Seite von 5.

Die Ebene D heisst Directrixebene des Kegels; aus den Symmetrieverhältnissen des Kegels folgt, dass zwei Directrixebenen existiren, die normal zu der Symmetrieebene sind, welche die Focalstrahlen enthält und symmetrisch zu jeder der beiden Symmetrieebenen.

An einer späteren Stelle werden wir nachweisen, dass jeder Kegel zweiter Ordnung drei auf einander senkrechte Symmetrieebenen hat; daher kommen jedem Kegel zweiter Ordnung die auf die beiden Focallinien und Directrixebenen bezüglichen Eigenschaften zu.

§ 6. Das Ellipsoid, die beiden Hyperboloide und die beiden Paraboloide.

1. Um uns über die Formen der Flächen zweiter Ordnung zu unterrichten, wollen wir folgenden Weg einschlagen: Wir betrachten zunächst die Flächen, welche drei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen haben; hierauf die, welchen nur zwei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen zukommen; und dann werden wir untersuchen, ob es Flächen zweiter Ordnung giebt, die nur eine, oder die keine Symmetrieebene haben.

Soll die Ebene XOY eine Symmetrieebene einer Fläche II. O. $f = 0$ sein, so müssen zu jedem Punkte P' der Ebene XOY zwei Punkte P der Fläche gehören, die entgegengesetzt gleiche Werthe der Ordinate z haben. Denkt man sich also in $f = 0$ die Coordinaten x und y gegeben, so muss diese Gleichung zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln für z ergeben, mithin für z rein quadratisch sein. In gleicher Weise schliessen wir, dass die Gleichung $f = 0$ rein quadratisch für x und y ist, wenn die Ebenen YOZ und XOZ Symmetrieebenen sind. Die Gleichung einer Fläche II. O., die drei auf einander senkrechte Symmetrieebenen hat, ist daher in Bezug auf dieselben

$$Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + K = 0 .$$

2. Wir betrachten zunächst die Fälle, dass ein oder mehr als ein Coefficient gleich Null ist.

α) Sind drei Coefficienten gleich Null, z. B. $D = F = K = 0$, so reducirt sich die Gleichung auf $Ax^2 = 0$, die Fläche degenerirt daher zur (doppelt zu denkenden) Ebene YOZ. Ist $A = F = K = 0$, so giebt die Gleichung die Ebene XOZ; ist $A = D = K = 0$, so giebt sie die Ebene XOY.

β) Sind zwei Coefficienten gleich Null, so ist zu unterscheiden, ob K verschwindet oder nicht.

Ist $K = 0$ und noch ausserdem z. B. $F = 0$, so geht die Gleichung $f = 0$ über in

$$f \equiv Ax^2 + Dy^2 = 0 ;$$

durch Zerlegung findet man

$$f \equiv (\sqrt{A} \cdot x + \sqrt{-D} \cdot y)(\sqrt{A} \cdot x - \sqrt{-D} \cdot y) .$$

Die Gleichung $f = 0$ stellt daher zwei durch die Z-Achse gehende Ebenen dar, deren Winkel von den beiden verticalen Coordinatenebenen halbirt werden; haben A und D dasselbe Vorzeichen, so sind die Ebenen conjugirt complex, und enthalten nichts Reales ausser ihrer Schnittlinie, der Z-Achse.

Ist K von Null verschieden, und z. B. $D = F = 0$, so hat man

$$f \equiv Ax^2 + K = 0 ,$$

mithin

$$x = \sqrt{-K : A} .$$

Die Gleichung ergiebt zwei reale oder imaginäre Ebenen, die in entgegengesetzt gleichen Abständen parallel zur Ebene YOZ sind.

γ) Ist ein Coefficient gleich Null, so ist wieder zu unterscheiden, ob K verschwindet, oder einer der drei andern Coefficienten.

Verschwindet z. B. F, so ist

$$f \equiv Ax^2 + Dy^2 + K = 0 .$$

Sind A, D und K von gleichem Zeichen, so wird der Gleichung durch keine realen Werthe von x und y genügt. Sind nicht alle Zeichen gleich, so sind zwei gleiche vorhanden; man kann dann die Coordinatenbezeichnung immer so wählen, dass A und K ungleiche Zeichen haben; durch Division der Gleichung durch

$(-K)$ erhält dann x einen positiven Coefficienten α^2. Je nachdem nun D mit A gleiches Zeichen hat, oder nicht, können wir $D:(-K)$ durch β^2 oder $-\beta^2$ ersetzen, unter β eine reale Zahl gedacht. Die Gleichung erhält somit eine der beiden Formen

$$\alpha^2 x^2 \pm \beta^2 y^2 - 1 = 0 .$$

Wir sehen, dass sie in beiden Fällen einen Cylinder darstellt, dessen Mantellinien parallel der Z-Achse sind. Wir bezeichnen die Z-Achse als die Achse, die Ebenen XOZ und YOZ als die Hauptebenen des Cylinders. Der Cylinder

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 - 1 = 0$$

hat zum Normalschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen $1:\alpha$ und $1:\beta$; der Cylinder

$$\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2 - 1 = 0$$

hat zum Normalschnitt eine Hyperbel, deren Hauptachse $1:\alpha$ und deren Nebenachse $1:\beta$ ist.

Ist $K = 0$, so haben wir

$$f = Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 = 0 .$$

Haben A, D und F dasselbe Zeichen, so wird der Gleichung ausser durch $x = y = z = 0$ durch keinen realen Werth genügt. Haben die Coefficienten nicht dasselbe Zeichen, so stellt $f = 0$ einen Kegel zweiter Ordnung dar (§ 5, 5). Die Coordinatenachsen werden als die Hauptachsen, die Coordinatenebenen als die Hauptebenen des Kegels bezeichnet.

3. Ist keine der Zahlen A, D, F, K gleich Null, und haben alle dasselbe Zeichen, so giebt es keinen realen Punkt, der der Gleichung $f = 0$ genügt.

Haben nicht alle dasselbe Zeichen, so dividire man f durch $-K$ und ersetze nachher die Coefficienten durch α, β, γ; die Gleichung wird dann

$$f = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - 1 = 0 .$$

Es sind nun entweder α, β und γ positiv, oder es sind zwei der Coefficienten positiv, der dritte negativ, oder es sind zwei negativ, der dritte positiv. Wir können in den beiden letzteren Fällen die Bezeichnung so wählen, dass α und β positiv, oder bez., dass α positiv ist. Bezeichnen wir daher mit a, b, c drei reale positive Strecken, so haben wir folgende Formen der Gleichung zu unterscheiden:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 ,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 ,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 .$$

Die Gleichung $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

4. Wir fragen zunächst nach den Punkten, in denen die Fläche f die Achsen OX, OY, OZ schneidet. Die Coordinaten ξ, η, ζ dieser Punkte erhalten wir aus der Gleichung $f = 0$, wenn wir in derselben der Reihe nach $y = z = 0$, $x = z = 0$, $x = y = 0$ setzen; dies ergiebt

$$\xi = \pm a , \quad \eta = \pm b , \quad \zeta = \pm c .$$

Die hierdurch bestimmten drei Paar Schnittpunkte AA_1, BB_1, CC_1 der Fläche mit den Achsen OX, OY, OZ werden als die Scheitel, die Geraden

AA_1, BB_1, CC_1 als die Achsen der Fläche bezeichnet; a, b, c sind daher die Halbachsen.

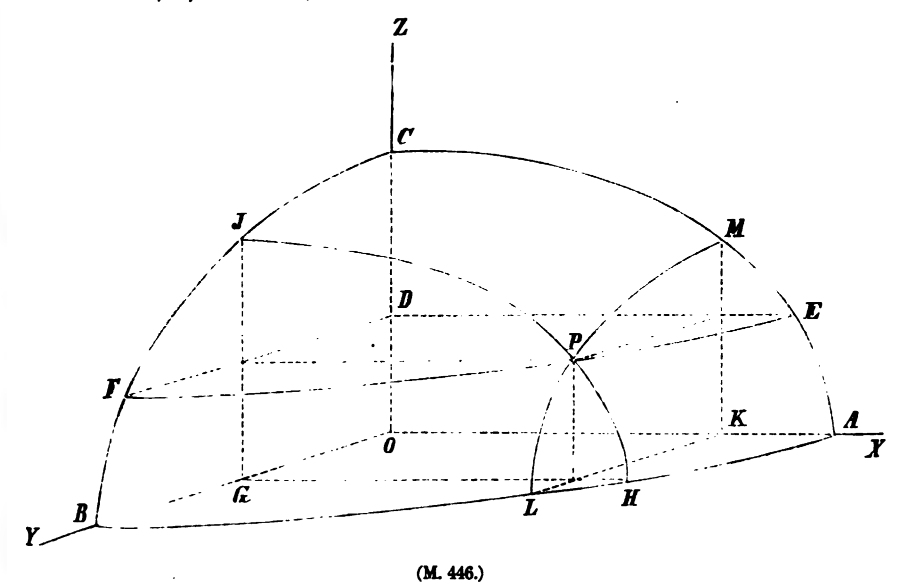
Als Hauptschnitte der Fläche werden die Curven bezeichnet, in denen sie die Hauptebenen (d. i. die Symmetrieebenen) schneidet. Die Gleichungen dieser Curven erhalten wir, indem wir in $f = 0$ der Reihe nach $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ setzen; daher ist die Gleichung

des horizontalen Hauptschnitts: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$

„ verticalen „ „ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$

„ seitlichen „ „ $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$

Die Hauptschnitte der Fläche sind also Ellipsen, welche je zwei der Strecken a, b, c zu Halbachsen haben.



(M. 446.)

Eine Ebene T, die parallel der XY-Ebene ist und von ihr den Abstand k hat, hat die Gleichung $z = k$. Die Gleichung der Horizontalprojection des Schnittes der Ebene T mit der Fläche f erhält man daher, wenn man $z = k$ in f einsetzt. Da T parallel der Ebene XOY ist, so ist diese Horizontalprojection mit der auf T liegenden Schnittcurve congruent. Die Substitution $z = k$ ergiebt die Gleichung

1. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2} - 1 = 0,$$

und diese zeigt, dass die Schnittcurve nur so lange real ist, als $k^2 : c^2 < 1$, also so lange k zwischen $-c$ und $+c$ liegt. Die Fläche liegt daher zwischen den beiden durch C und C_1 gehenden Horizontalebenen. Ist $k = \pm c$, so wird die Gleichung 1.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

und dieser wird nur durch die realen Werthe $x = y = 0$ genügt; diese Schnittebene hat also mit der Fläche nur den Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = \pm c$, d. i. C oder C_1 gemein.

Ist $k^2 < c^2$, so gebe man der Gleichung 1. die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right) = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine Ellipse dar, welche die Halbachsen hat

$$a_1 = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - k^2}, \quad b_1 = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - k^2}.$$

Hieraus folgt $a_1 : b_1 = a : b$. Die Schnittellipsen sind daher dem horizontalen Hauptschnitte ähnlich*). Die Halbachsen a_1 und c_1 sind die Abscissen DE und DF, welche in den beiden verticalen Hauptschnitten zu der Ordinate $OD = k$ gehören. Unsere Fläche wird somit beschrieben, wenn sich eine (veränderliche) horizontale Ellipse so bewegt, dass ihr Mittelpunkt (D) auf der Z-Achse und ihre Scheitel (E und F) auf den beiden Ellipsen AC und BC fortrücken.

Diese Fläche führt den Namen Ellipsoid.

Eine Ebene, die zu XOZ parallel ist, und für welche $y = k_1$ ist, schneidet das Ellipsoid in einer Curve, deren mit ihr congruente Verticalprojection die Gleichung hat

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k_1^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Die Schnittcurve ist daher imaginär, sobald $k_1^2 > b^2$; ist $k_1 = \pm b$, so geht ihre Gleichung über in

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

sie hat also nur einen realen Punkt, dessen Coordinaten sind $x = 0$, $y = \pm b$, $z = 0$; hierzu gehören die Punkte B und B_1.

Ist $k^2 < b^2$, so ist die Schnittcurve eine Ellipse, deren Halbachsen die Werthe haben

$$a_2 = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - k_1^2}, \quad c_2 = \frac{c}{b}\sqrt{b^2 - k_1^2}.$$

Diese Ellipse ist dem verticalen Hauptschnitte ähnlich. Die Halbachsen a_2 und b_2 sind, wie die dafür gefundenen Formeln zeigen, die Coordinaten GH und GJ, welche in dem horizontalen und im seitlichen Hauptschnitte zu der Coordinate $OG = k_1$ gehören.

Durchschneidet man das Ellipsoid mit einer zu YOZ parallelen Ebene, für welche $x = k_2$ ist, so hat man für die Schnittcurve

---

*) Zwei Curven $f = 0$ und $\varphi = 0$ heissen ähnlich, wenn sich ihre Punkte P auf Π so aufeinander beziehen lassen, dass bei einem für jede Curve geeignet gewähltem Coordinatensysteme die Proportion gilt $x : \xi = y : \eta$. Zwei Ellipsen oder Hyperbeln sind ähnlich, wenn ihre Halbachsen gleiche Verhältnisse haben. Denn bezogen auf die Hauptachsen ist z. B. für zwei Ellipsen

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \eta = \frac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1^2 - \xi^2}.$$

Wählt man nun zu P den entsprechenden Π so, dass $\xi = a_1 x : a$, so ergiebt sich

$$\eta = \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ist nun $a : b = a_1 : b_1$, so folgt $y : \eta = b : b_1 = a : a_1 = x : \xi$.

Je zwei Parabeln sind ähnlich. Denn wird jede auf ihre Symmetrieachse und Scheiteltangente bezogen, so ist $y = \sqrt{2px}$, $\eta = \sqrt{2q\xi}$. Paart man nun je zwei Punkte, für welche $x : \xi = p : q$, so folgt $\eta = (q : p)\sqrt{2px}$, also $x : \xi = y : \eta$.

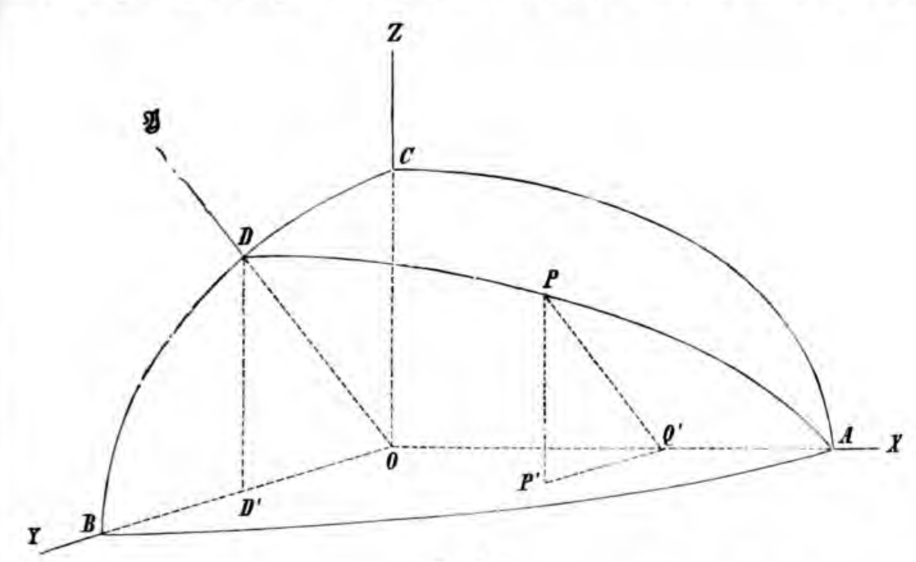
Zwei Geradenpaare sind ähnlich, wenn sie gleiche Winkel einschliessen. Je zwei Paar parallele Gerade sind ähnlich.

$$\frac{k_2^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 .$$

Diese Curve ist imaginär, wenn $k_2^2 > a^2$; hat den einzigen realen Punkt A oder A_1, wenn $k_2 = \pm a$; und ist, wenn $k_2^2 < a^2$, eine Ellipse mit den Halbachsen

$$b_3 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - k_2^2}, \quad c_3 = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - k_2^2} .$$

Diese Ellipse ist dem seitlichen Hauptschnitte ähnlich. Ist $OK = k_2$, so sind die zugehörigen Hauptschnittsordinaten KL und KM die Halbachsen b_3 und c_3.



(M. 447.)

5. Wir legen nun eine Schnittebene T durch eine Achse, z. B. durch die X-Achse und fragen nach dem Schnitte derselben mit dem Ellipsoide. Die Achse OX und die seitliche Spur $O\mathfrak{Y}$ der Schnittebene wählen wir zu Achsen eines in T gelegenen Coordinatensystems. Der Winkel $XO\mathfrak{Y}$ sei α.

Die Strecke OD finden wir, wenn wir in der Gleichung des seitlichen Hauptschnitts

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

die Werthe einsetzen

$$y = OD' = OD\cos\alpha , \quad z = D'D = OD\sin\alpha ;$$

es ergiebt sich

$$OD^2 = 1 : \left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\sin^2\alpha}{c^2}\right) .$$

Zwischen den Coordinaten y und z eines Punktes P der Schnittebene und der auf das System $XO\mathfrak{Y}$ bezüglichen Coordinate $\mathfrak{y}$ dieses Punkts bestehen die Beziehungen

$$y = \mathfrak{y}\cos\alpha , \quad z = \mathfrak{y}\sin\alpha .$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung des Ellipsoids, so ergiebt sich die gesuchte Gleichung der Schnittcurve, bezogen auf das Coordinatensystem $XO\mathfrak{Y}$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\sin^2\alpha}{c^2}\right)\mathfrak{y}^2 - 1 = 0 .$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, die OA und OD zu Halbachsen

hat. Man kann daher auch das Ellipsoid durch eine veränderliche Ellipse erzeugen, deren Ebene sich um OA dreht, und von welcher ein Scheitel unverändert der Punkt A ist, während der andere auf der aus den Halbachsen b und c in der Ebene YOZ beschriebenen Ellipse BC gleitet.

Ist $b = c$, so ist auch $OD = b$, und die Schnittellipse APD ist den Hauptschnitten AB und AC congruent. Das Ellipsoid entsteht jetzt durch Drehung einer unveränderlichen Ellipse um die Achse OA, es ist ein Rotationsellipsoid. Je nachdem $a \lessgtr b$, bezeichnet man die Fläche als ein gedrücktes oder als ein gestrecktes Rotationsellipsoid.

6. Da kein Punkt eines Ellipsoides unendlich fern liegt, und jede Ebene dasselbe in einer Curve zweiten Grades schneidet, so folgt, dass ein Ellipsoid von jeder Ebene in einer Ellipse geschnitten wird.

7. Die abgeleiteten Functionen (§ 5, No. 2 und 3) der Function

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

sind

1. $$f_x' = \frac{x}{a^2}, \quad f_y' = \frac{y}{b^2}, \quad f_z' = \frac{z}{c^2}, \quad Gx + Hy + Jz + K = -1.$$

Daher ist die Gleichung der Ebene T, die das Ellipsoid im Punkte P_0 berührt,

2. $$T = \frac{x_0}{a^2} \cdot x + \frac{y_0}{b^2} \cdot y + \frac{z_0}{c^2} \cdot z - 1 = 0.$$

Die Coordinaten der Tangentenebene ergeben sich hieraus zu

3. $$u = \frac{x_0}{a^2}, \quad v = \frac{y_0}{b^2}, \quad w = \frac{z_0}{c^2}.$$

Die Coordinaten des Berührungspunktes folgen daher aus den Coordinaten der Tangentenebene zu

4. $$x_0 = a^2 u, \quad y_0 = b^2 v, \quad z_0 = c^2 w.$$

Setzt man dies in die von x_0, y_0, z_0 und u, v, w erfüllte Gleichung ein

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 - 1 = 0,$$

so erhält man die Gleichung des Ellipsoids in Ebenencoordinaten

5. $$\varphi = a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - 1 = 0.$$

Die abgeleiteten Functionen der Function φ (§ 5, No. 14 und 15) sind

$$\varphi_u' = a^2 u, \quad \varphi_v' = b^2 v, \quad \varphi_w' = c^2 w, \quad gu + hv + iw + k = -1,$$

daher ist die Gleichung des Punktes P, in welchem die Ebene T_0 das Ellipsoid berührt

6. $$P = a^2 u_0 u + b^2 v_0 v + c^2 w_0 w - 1 = 0.$$

Die Gleichung: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

8. Setzt man der Reihe nach $y = z = 0$, $x = z = 0$, $x = y = 0$, um die Strecken ξ, η, ζ zu erhalten, welche die Fläche von den Coordinatenachsen abschneidet, so ergiebt sich

$$\xi = \pm a, \quad \eta = \pm b, \quad z = \pm c\sqrt{-1}.$$

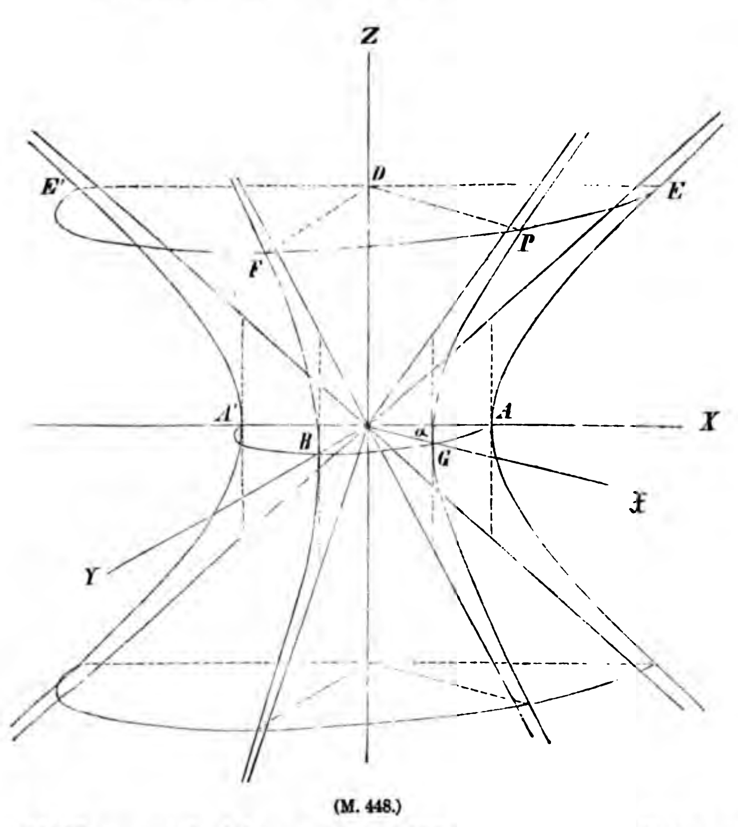
Die Fläche schneidet daher die Z-Achse nicht. Die Schnittpunkte auf der X- und Y-Achse (A, A_1 und B, B_1) werden die Scheitel der Fläche genannt.

Die Gleichungen der Hauptschnitte sind

Horizontaler Hauptschnitt: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

Verticaler Hauptschnitt: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$

Seitlicher „ „ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$



(M. 448.)

Die XY-Ebene wird daher von der Fläche in einer Ellipse mit den Halbachsen a und b; die XZ-Ebene in einer Hyperbel mit den Halbachsen a und c; und die YZ-Ebene in einer Hyperbel mit den Halbachsen b und c geschnitten.

Eine Ebene parallel zur XY-Ebene, für welche $z = k$, schneidet die Fläche in der Curve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{k^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Dies ist eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a_1 = \frac{a}{c}\sqrt{k^2 + c^2}, \quad b_1 = \frac{b}{c}\sqrt{k^2 + c^2}.$$

Dieselben haben das Verhältniss $a : b$, also ist jeder horizontale Schnitt der Fläche dem horizontalen Hauptschnitte ähnlich. Ist $OD = k$, so sind a_1 und b_1 die Coordinaten $x = DE$, bez. $y = DF$, welche im verticalen und im seitlichen Hauptschnitte zu der Coordinate $z = OD$ gehören. Wächst k, so wachsen auch a_1 und b_1, und erhalten unendlich grosse Werthe, wenn k unendlich gross ist. Die Fläche wird daher beschrieben, wenn sich eine horizontale Ellipse so bewegt, dass ihr Centrum auf der Z-Achse und ihre Scheitel auf zwei in der XZ- und in der YZ-Ebene liegenden Hyperbeln gleiten, die das Centrum O haben, deren

Achsen mit den Coordinatenachsen zusammenfallen, und welche dieselbe der Z-Achse parallele Nebenachse $(2c)$ haben.

Man bezeichnet diese Fläche als einschaliges Hyperboloid.

9. Wir legen eine Ebene E durch die Z-Achse und benutzen die Horizontalspur $O\mathfrak{X}$ der Ebene E und OZ als Coordinatensystem für die Schnittcurve dieser Ebene mit dem Hyperboloide. Bezeichnet α den Winkel $\mathfrak{X}OX$, so ist für jeden Punkt dieser Ebene

$$x = \mathfrak{x} \cdot \cos\alpha, \quad y = \mathfrak{x} \cdot \sin\alpha;$$

die Gleichung der Schnittcurve in Bezug auf das Coordinatensystem $\mathfrak{X}OZ$ wird daher erhalten, wenn wir diese Werthe in die Gleichung des Hyperboloids einsetzen; es entsteht

$$1. \qquad \left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)\mathfrak{x}^2 - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Die Schnittfigur ist eine Hyperbel, deren Achsen auf $O\mathfrak{X}$ und OZ liegen, deren halbe Hauptachse die Strecke

$$OG = 1 : \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}}$$

ist, und die mit den beiden verticalen Hauptschnitten in Bezug auf die Nebenachse übereinstimmt.

Wir können hiernach das einschalige Hyperboloid auch durch eine veränderliche Hyperbel erzeugen, die sich um ihre Nebenachse OZ dreht, indem ihre Scheitel auf der Ellipse AB gleiten und ihre Nebenachse unverändert bleibt. Ist $a = b$, so ist OG von derselben Länge und die Hyperbel ändert bei der Drehung ihre Gestalt nicht. Die Fläche

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

wird daher von einer unveränderlichen Hyperbel beschrieben, die sich um ihre Nebenachse (OZ) dreht; diese Fläche bezeichnet man demgemäss als einschaliges Rotationshyperboloid.

Die Gleichung des Vereins der beiden Asymptoten der Schnitthyperbel 1. ist im Coordinatensysteme $\mathfrak{X}OZ$, wenn man die halbe Hauptachse des Schnittes mit a_1 bezeichnet

$$\left(\frac{\mathfrak{x}}{a_1} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{\mathfrak{x}}{a_1} + \frac{z}{c}\right) = 0.$$

Multiplicirt man aus und setzt den Werth für a_1 ein, so entsteht

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)\mathfrak{x}^2 - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Ersetzt man hier $\mathfrak{x}\cos\alpha$ durch x und $\mathfrak{x}\sin\alpha$ durch y, so erhält man die Bedingungsgleichung dafür, dass ein Punkt im Raume auf einer Asymptote irgend eines dieser Schnitte gelegen ist; mithin ist die Gleichung der von diesen Asymptoten gebildeten Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Kegels II. O. Man bezeichnet ihn als den Asymptotenkegel des Hyperboloids.

10. Die abgeleiteten Functionen der Function

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$$

sind

1. $f_x' = \frac{x}{a^2}, \quad f_y' = \frac{y}{b^2}, \quad f_z' = -\frac{z}{c^2}, \quad Gx + Hy + Jz + K = -1.$

Die Gleichung der Ebene T, welche das Hyperboloid im Punkte P_0 berührt, ist daher

2. $$T = \frac{x_0}{a^2} \cdot x + \frac{y_0}{b^2} \cdot y - \frac{z_0}{c^2} \cdot z - 1 = 0.$$

Die Coordinaten dieser Ebene sind

$$u = \frac{x_0}{a^2}, \quad v = \frac{y_0}{b^2}, \quad w = -\frac{z_0}{c^2}.$$

Setzt man die hieraus folgenden Werthe

$$x_0 = a^2 u, \quad y_0 = b^2 v, \quad z_0 = -c^2 w$$

in die Gleichung $x_0 u + y_0 v + z_0 w - 1 = 0$, so erhält man die Gleichung des Hyperboloids in Ebenencoordinaten

3. $$\varphi = a^2 u^2 + b^2 v^2 - c^2 w^2 - 1 = 0.$$

Aus den abgeleiteten Functionen von φ

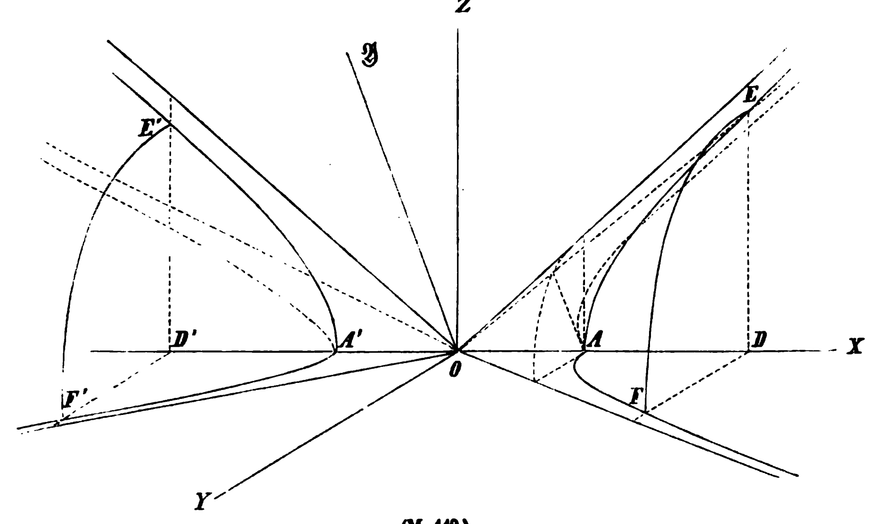
4. $\varphi_u' = a^2 u, \quad \varphi_v' = b^2 v, \quad \varphi_w' = -c^2 w, \quad gu + hv + iw + k = -1$

erhält man die Gleichung des Berührungspunktes der Ebene T_0

5. $$P = a^2 u_0 u + b^2 v_0 v - c^2 w_0 w - 1 = 0.$$

Die Gleichung: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$

11. Setzt man in die Gleichung der Reihe nach $y = z = 0$, $x = z = 0$ und $x = y = 0$, so erhält man $\xi = \pm a$, $\eta = \pm b\sqrt{-1}$, $\zeta = \pm c\sqrt{-1}$.



(M. 449.)

Die Fläche wird daher von der Y-Achse und der Z-Achse nicht in realen Punkten geschnitten; nur die Schnittpunkte mit der X-Achse sind real; sie werden als Scheitel der Fläche (A und A_1) bezeichnet.

Die Hauptschnitte haben die Gleichungen

Horizontaler Hauptschnitt: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$

Verticaler " " : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$

Seitlicher " " : $-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$

Die Fläche wird daher von der Ebene YOZ in einer imaginären Curve geschnitten; die andern beiden Hauptschnitte sind reale Hyperbeln mit gemeinsamer Hauptachse ($2a$) und verschiedenen Nebenachsen.

Eine Ebene, die parallel der YZ-Ebene ist, und für welche $x = k$, schneidet die Fläche in der Curve

1. $$\frac{k^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Dieser Schnitt ist imaginär, wenn $k^2 < a^2$ ist; zwischen den Ebenen, die YOZ im Abstande $\pm a$ parallel gehen, liegt also kein realer Punkt der Fläche. Ist $k = \pm a$, so geht die Gleichung 1. über in

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

und dieser Gleichung wird nur durch $y = z = 0$ genügt, d. i. durch die Scheitel A und A_1. Ist $k^2 > a^2$, so ist die Schnittcurve eine Ellipse, deren Halbachsen auf den Spuren der Schnittebene liegen und die Längen haben

2. $$a_1 = \frac{b}{a}\sqrt{k^2 - a^2}, \quad c_1 = \frac{c}{a}\sqrt{k^2 - a^2}.$$

Ist $OD = k$, so sind a_1 und c_1 die Ordinaten DF und DE, die in den Hauptschnitten zu der Abscisse OD gehören. Die Fläche wird daher durch eine veränderliche Ellipse beschrieben, die normal zur X-Achse sich so bewegt, dass ihr Centrum auf der X-Achse und ihre Scheitel auf den beiden Hauptschnitten der Fläche sich bewegen. Wie die Formeln 2. zeigen, bleibt das Verhältniss der Halbachsen der bewegten Ellipse unveränderlich $b : c$.

Diese Fläche heisst zweischaliges Hyperboloid. Sie besteht aus zwei von einander getrennten Schalen, die auf beiden Seiten der YZ-Ebene liegen.

12. Durchschneiden wir das Hyperboloid mit einer Ebene $XO\mathfrak{Y}$, die mit der XY-Ebene den Winkel α bildet, so erhalten wir die Gleichung der Schnittlinie in Bezug auf das Coordinatensystem $XO\mathfrak{Y}$, indem wir in der Gleichung der Fläche setzen

$$y = \mathfrak{y} \cdot \cos\alpha, \quad z = \mathfrak{y} \cdot \sin\alpha.$$

Hierdurch entsteht die Gleichung

1. $$\frac{x^2}{a^2} - \left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\sin^2\alpha}{c^2}\right)\mathfrak{y}^2 - 1 = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel mit den Halbachsen

$$a_1 = a, \quad b_1 = 1 : \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\sin^2\alpha}{c^2}}.$$

Der Verein der beiden Asymptoten dieser Hyperbel hat im Coordinatensystem $XO\mathfrak{Y}$ die Gleichung

2. $$\left(\frac{x}{a} - \frac{\mathfrak{y}}{b_1}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{\mathfrak{y}}{b_1}\right) = 0.$$

Führt man die Multiplication aus und setzt den Werth für b_1 ein, so erhält man

$$\frac{x^2}{a^2} - \left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\sin^2\alpha}{c^2}\right) \cdot \mathfrak{y}^2 = 0.$$

Setzt man hierin y für $\mathfrak{y}\cos\alpha$ und z für $\mathfrak{y}\sin\alpha$, so erhält man die Gleichung der von den Asymptoten aller dieser Schnitthyperbeln gebildeten Fläche

3. $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Diese Fläche ist ein Kegel II. O., der Asymptotenkegel des zweischaligen Hyperboloids.

Ist $b = c$, so sind die beiden Hauptschnittshyperbeln congruent; da alsdann in 1. auch $b_1 = b$ ist, so wird in diesem besonderen Falle das Hyperboloid durch eine unveränderliche Hyperbel erzeugt, die sich um ihre Hauptachse dreht. Diese Fläche ist daher als zweischaliges Rotationshyperboloid zu bezeichnen. Die Gleichung desselben ist

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} - 1 = 0.$$

13. Die abgeleiteten Functionen der Function

$$f = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$$

sind

$$f_x' = \frac{x}{a^2}, \quad f_y' = -\frac{y^2}{b^2}, \quad f_z' = -\frac{z^2}{c^2}, \quad Gx + Hy + Jz + K = -1.$$

Daher ist die Gleichung der Ebene, die das einschalige Hyperboloid im Punkte P_0 berührt.

1. $$T = \frac{x_0}{a^2} \cdot x - \frac{y_0}{b^2} \cdot y - \frac{z_0}{c^2} \cdot z - 1 = 0.$$

Die Coordinaten von T sind

2. $$u = \frac{x_0}{a^2}, \quad v = -\frac{y_0}{b^2}, \quad w = -\frac{z_0}{c^2}.$$

Durch Einsetzung der hieraus folgenden Werthe $x_0 = a^2 u$, $y_0 = -b^2 v$, $z_0 = -c^2 w$ in die Gleichung

$$x_0 u + y_0 v + z_0 w - 1 = 0$$

erhält man die Gleichung des Hyperboloids in Ebenencoordinaten

4. $$\varphi = a^2 u^2 - b^2 v^2 - c^2 w^2 - 1 = 0.$$

Die abgeleiteten Functionen von φ sind

5. $$\varphi_u' = a^2 u, \quad \varphi_v' = -b^2 v, \quad \varphi_w' = -c^2 w, \quad gu + hv + iw + k = -1;$$

hieraus folgt die Gleichung des Punktes P, in welchem das Hyperboloid von der Ebene T_0 berührt wird.

6. $$P = a^2 u_0 u - b^2 v_0 v - c^2 w_0 w - 1 = 0.$$

---

14. Nachdem wir nun einen Ueberblick über die Flächen zweiter Ordnung gewonnen haben, die drei zu einander senkrechte Symmetrieebenen besitzen, deren Gleichungen in Bezug auf die Symmetrieebenen daher von der Form sind

1. $$Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + K = 0,$$

wenden wir uns zur Charakteristik der Flächen zweiter Ordnung, die nur zwei auf einander senkrechte Symmetrieebenen haben.

Wählt man diese beiden Symmetrieebenen zu den Ebenen XOZ und YOZ eines Coordinatensystems, so ist die Gleichung einer solchen Fläche rein quadratisch für x und y, dagegen gemischt quadratisch für z, also von der Form

2. $$Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + 2Jz + K = 0,$$

wobei J von Null verschieden ist. Verschieben wir den Nullpunkt entlang der Z-Achse um die Strecke γ, so erhalten wir die Gleichung der Fläche im neuen Systeme, indem wir in der Gleichung 2. die Coordinate z durch $z + \gamma$ ersetzen; hierdurch entsteht

3. $$Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + 2(F\gamma + J)z + (F\gamma^2 + 2J\gamma + K) = 0.$$

Kann man nun für γ einen endlichen Werth bestimmen, der die Gleichung erfüllt

4. $$F\gamma + J = 0,$$

so geht die Gleichung 3. durch diese Wahl von γ in eine Gleichung von der

Form 1. über; wenn also die Fläche 2. nur zwei Symmetrieebenen haben soll, so muss $F\gamma + J$ für einen endlichen Werth γ unerfüllbar sein, es ist folglich in diesem Falle $F = 0$. Unter dieser Voraussetzung wird die Gleichung der Fläche in Bezug auf das neue System

5. $$Ax^2 + Dy^2 + 2Jz + 2J\gamma + K = 0.$$

Nehmen wir $\gamma = - K : 2J$, so vereinfacht sich die Gleichung zu

6. $$Ax^2 + Dy^2 + 2Jz = 0.$$

Betreffs der Vorzeichen kann vorausgesetzt werden, dass A positiv ist; dann ergeben sich für die Vorzeichen der zwei Grössen D und J folgende Combinationen

Vorzeichen von D: $+, +, -, -,$

" " " J: $+, -, +, -.$

Da es freisteht, welche Seite der Z-Achse man als die positive annehmen will, der Wechsel des positiven Sinnes der Z-Achse aber als ein Vorzeichenwechsel des letzten Gliedes der Gleichung 6. sich äussert, so folgt, dass wir den Coefficienten J ohne Beschränkung der Allgemeinheit negativ voraussetzen können. Dividiren wir durch den absoluten Werth von J, und ersetzen die neuen Coefficienten von x^2 und y^2 durch passend gewählte andere Zeichen, so sind also nur noch die zwei wesentlich verschiedenen Fälle zu unterscheiden

7. $$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0,$$

8. $$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0,$$

wo nun a und b als positive Strecken vorausgesetzt werden können.

Die Gleichung $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0$.

15. Für die Strecken ξ und η, welche diese Fläche von den beiden Coordinatenachsen OX und OY abschneidet, ergeben sich aus der Gleichung der Fläche durch Einsetzung von $y = z = 0$, bez. $x = z = 0$ die Gleichungen

1. $$\frac{\xi^2}{a} = 0, \quad \frac{\eta^2}{b} = 0.$$

Jede der beiden Achsen OX und OY schneidet also die Fläche in zwei mit dem Nullpunkte zusammenfallenden Punkten; beide Achsen sind daher Tangenten der Fläche, und mithin wird die Fläche von der Ebene XOY im Punkte O berührt. Setzt man in die Gleichung der Fläche $x = y = 0$, so folgt

2. $$2z = 0.$$

Hieraus ergiebt sich zunächst $z = 0$. Da aber bewiesen worden ist, dass im Allgemeinen eine jede Gerade mit einer Fläche zweiter Ordnung zwei Schnittpunkte hat, so ist die Gleichung 2. als eine quadratische Gleichung aufzufassen, in welcher der Coefficient von z^2 verschwindend klein ist; die Gleichung hat daher, als quadratische Gleichung betrachtet, ausser der Wurzel $z = 0$ noch die zweite Wurzel $z = \infty$. Die Fläche hat mit der Z-Achse ausser dem Nullpunkte noch einen unendlich fernen Punkt gemein.

Die Gleichungen der Hauptschnitte sind

Horizontaler Hauptschnitt: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 0,$

Verticaler " " $\frac{x^2}{a} - 2z = 0,$

Seitlicher " " $\frac{y^2}{b} - 2z = 0.$

Die erste Gleichung wird nur von einem realen Punkte, dem Nullpunkte, erfüllt, und bestätigt, dass die Fläche von der Ebene XOY im Punkte O berührt wird.

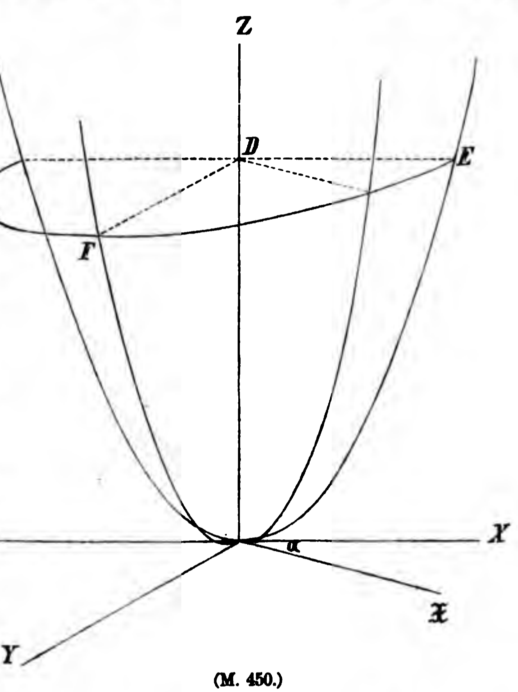
Die beiden andern Hauptschnitte sind Parabeln, deren gemeinsamer Scheitel der Nullpunkt, deren gemeinsame Achse die Z-Achse ist, und deren Parameter die Strecken a und b sind.

Eine Ebene, die im Abstande $z = k$ parallel zur XY-Ebene ist, schneidet die Fläche in der Curve,

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2k = 0.$$

Dies ist eine Ellipse mit den Halbachsen $a_1 = \sqrt{2ka}$,
$b_1 = \sqrt{2kb}$.

Ist $OD = k$, so sind a_1 und b_1 die Coordinaten DE und DF der Hauptschnittsparabeln, die zu der Coordinate $z = OD$ gehören. Die Fläche wird also durch eine veränderliche Ellipse erzeugt, die sich normal zur Z-Achse so bewegt, dass ihr Centrum auf der Z-Achse und ihre Scheitel auf den beiden Hauptschnittsparabeln gleiten. Wird $k = \infty$, so werden auch beide Halbachsen dieser Ellipse unendlich gross.



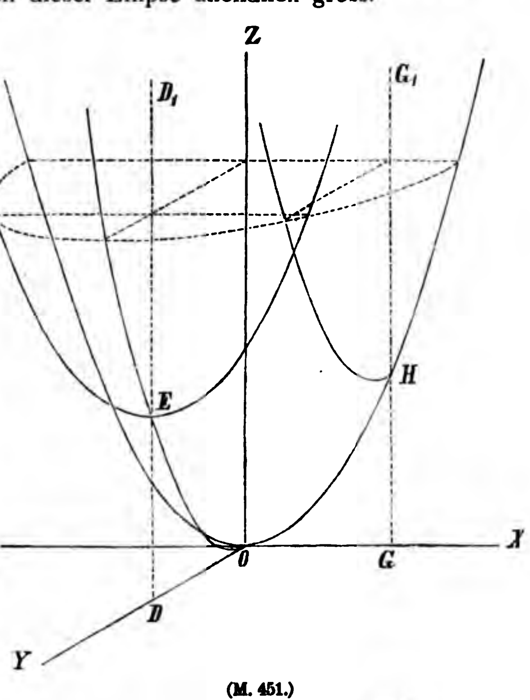
(M. 450.)

Die Fläche führt den Namen **elliptisches Paraboloid**.

Die Ebene $y = k_1$ schneidet das elliptische Paraboloid in der Curve

$$\frac{x^2}{a} + \frac{k_1^2}{b} - 2z = 0.$$

Diese Curve ist eine mit dem verticalen Hauptschnitte congruente Parabel, welche die seitliche Spur DD_1 der Schnittebene zur Achse und den Schnittpunkt E derselben mit dem seitlichen Hauptschnitte der Parabel zum Scheitel hat. Das elliptische Paraboloid wird also auch von einer unveränderlichen Parabel beschrieben, die sich so bewegt, dass ihre Ebene parallel der XZ-Ebene, ihre Achse



(M. 451.)

parallel OZ und ihr Scheitel auf dem seitlichen parabolischen Hauptschnitte bleibt.

Der Durchschnitt der Fläche mit der Ebene $x = k_2$ hat die Gleichung

$$\frac{k_2^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0,$$

Dieser Schnitt ist eine mit dem seitlichen Hauptschnitte congruente und gleichgerichtete Parabel, deren Achse die verticale Spur GG_1 der Schnittebene, und deren Scheitel H ist*). Das elliptische Paraboloid kann also auch von einer unveränderlichen Parabel beschrieben werden, die parallel zur Ebene YOZ sich so bewegt, dass ihre Achse parallel OZ und ihr Scheitel auf dem verticalen parabolischen Hauptschnitte bleibt.

16. Durchschneidet man die Fläche (Fig. 450) mit einer Ebene $\mathfrak{X}OZ$, die mit der Ebene XOZ den Winkel α bildet, und bezieht die Schnittcurve auf das Cordinatensystem $\mathfrak{X}OZ$, so hat man $x = \mathfrak{x}\cos\alpha$, $y = \mathfrak{x}\sin\alpha$, und die Gleichung der Schnittcurve ist daher

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a} + \frac{\sin^2\alpha}{b}\right)\mathfrak{x}^2 - 2z = 0.$$

Dies ist eine Parabel, die mit den Hauptschnitten den Scheitel und die Achse gemein hat und deren Parameter die Länge hat

$$p = 1 : \left(\frac{\cos^2\alpha}{a} + \frac{\sin^2\alpha}{b}\right).$$

Ist $a = b$, sind also die beiden Hauptschnitte congruent, so ist auch $p = a$; diese Fläche ist daher ein Rotationsparaboloid, d. h. sie wird von einer unveränderlichen Parabel beschrieben, die sich um ihre Achse dreht. Die Gleichung eines Rotationsparaboloids ist

$$x^2 + y^2 - 2az = 0.$$

17. Die abgeleiten Functionen der Function

$$f = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z$$

sind

$$f_x' = \frac{x}{a}, \quad f_y' = \frac{y}{b}, \quad f_z' = -1, \quad Gx + Hy + Jz + K = -z.$$

Die Gleichung der Ebene T, welche das elliptische Paraboloid im Punkte P_0 berührt, ist hiernach

1. $$T = \frac{x_0}{a}x + \frac{y_0}{b}y - z - z_0 = 0.$$

Die Coordinaten der Tangentenebene T sind

2. $$u = \frac{x_0}{az_0}, \quad v = \frac{y_0}{bz_0}, \quad w = -\frac{1}{z_0}.$$

Die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Berührungspunktes ergeben sich hiernach zu

3. $$z_0 = -\frac{1}{w}, \quad x_0 = -a\frac{u}{w}, \quad y_0 = -b\frac{v}{w}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung ein

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 - 1 = 0,$$

so erhält man die Gleichung des elliptischen Paraboloids in Ebenencoordinaten

4. $$\varphi = au^2 + bv^2 - 2w = 0.$$

*) In der Figur ist von dieser Parabel nur die vordere Hälfte aufgezeichnet worden.

Die abgeleiteten Functionen von φ sind

$$\varphi_u' = au, \quad \varphi_v' = by, \quad \varphi_w' = -1, \quad gu + hv + iw + k = -w.$$

Die Gleichung des Punktes P, in welchem das Paraboloid von der Ebene T_0 berührt wird, ist demnach

7. $$P = au_0u + bv_0v - w - w_0 = 0.$$

Die Gleichung $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0.$

18. Die Strecken ξ, η, ζ, welche die Fläche von den Achsen abschneidet, ergeben sich aus

$$\frac{\xi^2}{a} = 0, \quad \frac{\eta^2}{b} = 0, \quad -2\zeta = 0.$$

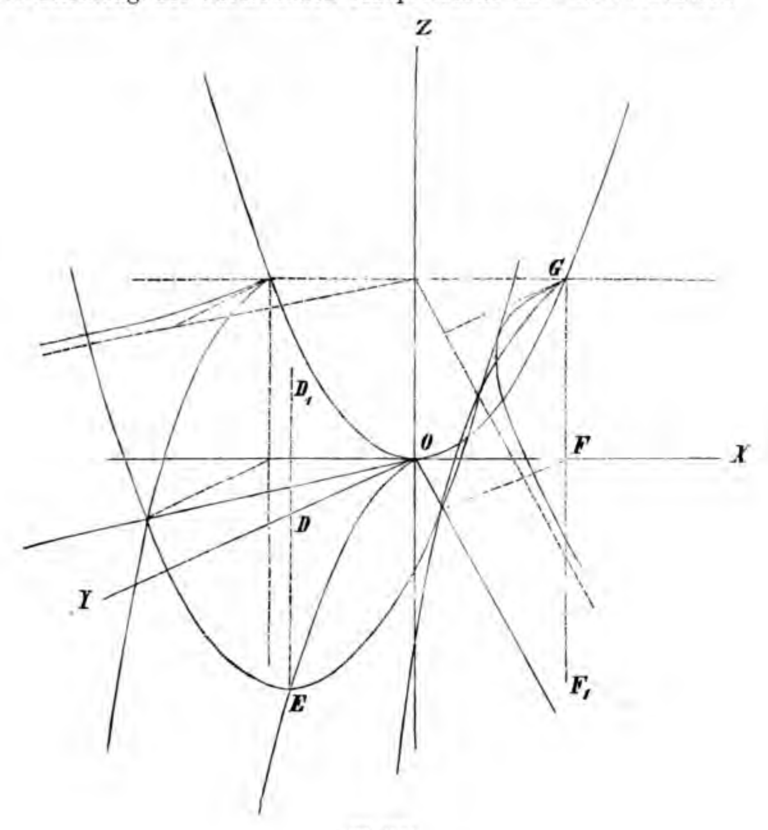
Hieraus folgt, dass die X-Achse und die Y-Achse die Fläche im Punkte O berühren, und dass die Z-Achse ausser dem Punkte O noch einen unendlich fernen Punkt mit der Fläche gemein hat. Die Gleichungen der Hauptschnitte sind

Horizontaler Hauptschnitt: $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 0;$

Verticaler " " $\frac{x^2}{a} - 2z = 0;$

Seitlicher " " $\frac{y^2}{b} - 2z = 0.$

Die Gleichung des horizontalen Hauptschnitts lässt sich schreiben



(M. 452.)

$$\left(\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}}\right) = 0;$$

dieser Hauptschnitt besteht daher aus den beiden durch den Anfangspunkt gehenden Geraden

$$\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}} = 0, \qquad \frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}} = 0.$$

Wir bemerken, dass dies Auftreten von Geraden, die auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, nicht vereinzelt ist; wir werden im folgenden Abschnitte hierüber weitere Untersuchungen mittheilen.

Der verticale Hauptschnitt ist eine Parabel, deren Achse in der Z-Achse, deren Scheitel im Nullpunkte liegt, und die sich in der Richtung der Z-Achse erstreckt; der Parameter ist a. Der seitliche Hauptschnitt ist eine Parabel vom Parameter b, deren Scheitel im Nullpunkte, deren Achse in der Z-Achse liegt, und die sich in der Richtung der negativen Z-Achse erstreckt.

Die Ebene $x = k$ schneidet die Fläche in der Curve

$$\frac{k^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0,$$

also in einer Parabel, die dem seitlichen Hauptschnitte congruent ist; sie hat zur Achse die Verticalspur FF_1 der Schnittebene und zum Scheitel den Schnittpunkt G der Geraden FF_1 und des verticalen Hauptschnitts. Die Fläche wird daher von einer unveränderlichen Parabel beschrieben, die sich parallel zur Ebene YOZ so bewegt, dass ihre Achse parallel OZ und ihr Scheitel auf dem verticalen parabolischen Hauptschnitte bleibt.

Setzt man in der Gleichung der Fläche $y = k_1$, so erhält man

$$\frac{x^2}{a} - 2\left(z + \frac{k_1^2}{2b}\right) = 0.$$

Dieser Schnitt ist eine mit dem verticalen Hauptschnitte congruente Parabel, welche die seitliche Spur DD_1 der Schnittebene zur Achse, den Punkt E zum Scheitel hat und sich in der Richtung der positiven Z-Achse erstreckt. Hiernach wird die Fläche auch durch eine unveränderliche Parabel erzeugt, die parallel zur XZ-Ebene sich so bewegt, dass ihre Achse parallel OZ und ihr Scheitel auf dem seitlichen Hauptschnitte bleibt.

Der wesentliche Unterschied dieser Erzeugung mit der analogen Erzeugung eines elliptischen Paraboloids besteht darin, dass bei letzterem die bewegliche erzeugende Parabel und die Hauptschnittsparabel, auf welcher ihr Scheitel gleitet, die Achsen nach derselben, nicht nach entgegengesetzten Seiten wenden, während bei der gegenwärtigen Fläche das Gegentheil statt hat.

Um die Gleichung des Schnittes der Fläche mit einer Ebene zu erhalten, die parallel XOY ist, setzen wir in der Flächengleichung $z = k_2$; wir erhalten dadurch

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2k_2 = 0.$$

Ist k_2 positiv, so ist dies eine Hyperbel mit den Halbachsen $a_1 = \sqrt{2ak_2}$, $b_1 = \sqrt{2bk_2}$, wobei die Hauptachse auf der X-Achse liegt. Ist hingegen k_2 negativ, etwa $k_2 = -l$, wo nun $l > 0$, so haben wir die Gleichung

$$-\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2l = 0,$$

mithin eine Hyperbel, deren Hauptachse auf der Y-Achse liegt, und welche die Halbachsen hat $a_1 = \sqrt{2al}$, $b_1 = \sqrt{2bl}$.

Da für die Grundrisse aller dieser Schnitthyperbeln das Achsenverhältniss constant ist, nämlich $a_1 : b_1 = \sqrt{a} : \sqrt{b}$, so haben sie alle die Asymptoten

$$\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}} = 0,$$

haben also alle den horizontalen Hauptschnitt zu Asymptoten.

Die Asymptoten der Schnitthyperbeln selbst liegen daher auf den beiden Ebenen, die durch die Z-Achse und die beiden Geraden bestimmt sind, die den horizontalen Hauptschnitt bilden. Diese Ebenen bezeichnet man als die Asymptotenebenen der Fläche.

Wir können uns hiernach die Fläche durch eine veränderliche Hyperbel erzeugt denken, die parallel zur XY-Ebene sich so bewegt, dass ihre Achsen auf den Ebenen XOZ und YOZ, ihre beiden Scheitel auf einem der beiden verticalen Hauptschnitte der Fläche und ihre Asymptoten auf den beiden Ebenen bleiben, die durch die Z-Achse und die Geraden des horizontalen Hauptschnitts gehen.

Im Zusammenhange mit dieser Entstehungsweise der Fläche führt dieselbe den Namen hyperbolisches Paraboloid.

19. Die abgeleiteten Functionen der Function

$$f = \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z$$

sind

$$f_x' = \frac{x}{a}, \quad f_y' = -\frac{y}{b}, \quad f_z' = -1, \quad Gx + Hy + Jz + K = -z.$$

Die Gleichung der Ebene T, welche die Fläche im Punkte P_0 berührt, ist daher

$$1. \qquad T = \frac{x_0}{a} x - \frac{y_0}{b} \cdot y - z - z_0 = 0.$$

Die Coordinaten der Ebene T ergeben sich hieraus zu

$$2. \qquad u = \frac{x_0}{a z_0}, \quad v = -\frac{y_0}{b z_0}, \quad w = -\frac{1}{z_0}.$$

Hieraus folgen die Coordinaten des Berührungspunktes, ausgedrükt durch die Coordinaten der Tangentenebene

$$3. \qquad x_0 = -a \cdot \frac{u}{w}, \quad y_0 = b \cdot \frac{v}{w}, \quad z_0 = -\frac{1}{w}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung ein

$$u x_0 + v y_0 + w z_0 - 1 = 0,$$

so erhält man die Gleichung des hyperbolischen Paraboloids in Ebenencoordinaten

$$4. \qquad \varphi = a u^2 - b v^2 + 2w = 0.$$

Die abgeleiteten Functionen von φ sind

$$\varphi_u' = a u, \quad \varphi_v' = -b v, \quad \varphi_w' = 1, \quad yu + hv + iw + k = w;$$

daher ist die Gleichung des Punktes P, in welchem das hyperbolische Paraboloid von der Ebene T_0 berührt wird:

$$5. \qquad P = a u_0 u - b v_0 v + w + w_0 = 0.$$

---

20. Wir untersuchen nun, ob es Flächen zweiter Ordnung giebt, die nur eine Symmetrieebene haben.

Nehmen wir die Symmetrieebene zur YZ-Ebene des Coordinatensystems, so ist die Gleichung der Fläche rein quadratisch für x, dagegen gemischt für y und z,

also von der Form

1. $f = Ax^2 + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Hy + 2Jz + K = 0$.

Wir suchen nun diese Gleichung dadurch zu vereinfachen, dass wir den Nullpunkt in der YZ-Ebene verlegen und der Z-Achse und der Y-Achse neue geeignete Richtungen geben. Dabei bleibt die Coordinate x ungeändert und die Coordinaten y und z ändern sich gemäss der Formeln für die allgemeine Coordinatentransformation rechtwinkeliger Systeme in der Ebene. Hierbei ändert sich also nur der Ausdruck

2. $$Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Hy + 2Jz + K,$$

und geht in eine quadratische Function der auf das neue System bezüglichen Coordinaten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ über.

Wenn die Gleichung $f = 0$ ausser Ax^2 noch quadratische Glieder hat, wenn also nicht zugleich $D = E = F = 0$, so kann, wie in der analytischen Geometrie der Ebene bewiesen worden ist, durch Verschiebung und Drehung des Coordinatensystems immer ein Coordinatensystem erreicht werden, durch welches aus der Function 2. die transformirte Function hervorgeht: entweder

3. $M\mathfrak{y}^2 + N\mathfrak{z}^2 + R$, oder 4. $M\mathfrak{y}^2 + P\mathfrak{z}$.

Die Gleichung

$$Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Hy + 2Jz + K = 0$$

geht aus 1. hervor, wenn man $x = 0$ setzt, ist also die Gleichung der Curve, in der die Fläche von der Symmetrieebene geschnitten wird; die Fälle 3. oder 4. treten daher ein, je nachdem diese Schnittcurve einen Mittelpunkt hat (Ellipse oder Hyperbel ist) oder keinen (Parabel). Bezogen auf das neue Coordinatensystem lautet die Gleichung der Fläche entweder

5. $Ax^2 + M\mathfrak{y}^2 + N\mathfrak{z}^2 + R = 0$, oder 6. $Ax^2 + M\mathfrak{y}^2 + P\mathfrak{z} = 0$.

Wenn also nicht zugleich $D = E = F = 0$, so hat die Fläche entweder noch zwei, oder noch eine Symmetrieebene, die auf der vorausgesetzten senkrecht stehen.

Wenn $D = E = F = 0$ ist, so vereinfacht sich die Gleichung der Fläche zu

7. $$f = Ax^2 + 2Hy + 2Jz + K = 0.$$

Der Schnitt dieser Fläche mit der YZ-Ebene hat die Gleichung

8. $$2Hy + 2Jz + K = 0$$

ist also eine Gerade. Wählt man diese Gerade zur Z-Achse des Coordinatensystems, so vereinfacht sich die Gleichung 8. zu

$$2Hy = 0,$$

es ist also dann $J = K = 0$, und die Gleichung der Fläche ergiebt sich zu

9. $$Ax^2 + 2Hy = 0.$$

Als Gleichung im Coordinatensystem XOY betrachtet, stellt sie eine Parabel dar, deren Scheitel im Nullpunkte und deren Achse auf der Y-Achse liegt. Da jeder Punkt der Gleichung 9. genügt, dessen Horizontalprojection auf dieser Parabel liegt, so folgt, dass die Gleichung 9. einen Cylinder darstellt, dessen horizontaler Querschnitt eine Parabel ist, und dessen Mantellinien der Z Achse parallel sind. Wir bezeichnen diesen Cylinder als parabolischen Cylinder.

Jede zu den Mantellinien normale Ebene kann als Symmetrieebene dieses Cylinders gelten.

21. Nun bleibt uns noch übrig, zu untersuchen, ob es unsymmetrische Flächen II. O. giebt.

Hierzu haben wir die Bedingungen aufzusuchen, an welche die Existenz einer Symmetrieebene gebunden ist, und nachzusehen, ob diese bei jeder Fläche zweiter Ordnung erfüllt werden.

§ 7. Symmetrieebenen der Flächen zweiter Ordnung.

1. Zieht man durch einen Punkt Π eine Gerade G, die mit den Coordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet, so sind die Strecken r, welche von P bis an den Schnittpunkt der Geraden G mit der Fläche II. O.

$$f \equiv Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0$$

reichen, die Wurzeln der Gleichung (§ 5, No. 2, 3)

$$1. \quad f(\xi, \eta, \zeta) + (f_\xi' \cos\alpha + f_\eta' \cos\beta + f_\zeta' \cos\gamma) r \\ + (A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\cos\beta + 2C\cos\alpha\cos\gamma + D\cos\beta + 2E\cos\beta\cos\gamma + F\cos\gamma) r^2 = 0.$$

Wenn der Coefficient von r verschwindet, so ist diese Gleichung rein quadratisch; die Gleichung hat dann zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln, und der Punkt Π ist die Mitte zwischen den Schnittpunkten der Geraden G und der Fläche f.

Die Gleichung

$$2. \quad f_\xi' \cos\alpha + f_\eta' \cos\beta + f_\zeta' \cos\gamma = 0$$

ist also die Bedingung dafür, dass P die Mitte der unter den Richtungswinkeln α, β, γ durch Π gehenden Sehne der Fläche $f = 0$ ist.

Es giebt unzählig viele Sehnen einer Fläche f, die in einem gegebenen Punkte Π halbirt werden. Um die Gleichung der Fläche zu erhalten, auf der alle diese Geraden liegen, haben wir $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in 2. durch die Coordinaten eines Punkts von G auszudrücken.

Ist P auf G gelegen und von Π um ρ entfernt, so ist

$$x - \xi = \rho\cos\alpha, \quad y - \eta = \rho\cos\beta, \quad z - \zeta = \rho\cos\gamma;$$

man gewinnt daher aus 2. die Gleichung der gesuchten Fläche

$$3. \quad T \equiv f_\xi'(x - \xi) + f_\eta'(y - \eta) + f_\zeta'(z - \zeta) = 0.$$

Wir haben daher: Die Sehnen einer Fläche II. O., die einen gegebenen Punkt Π zum Mittelpunkte haben, liegen auf der Ebene

$$T \equiv f_\xi'(x - \xi) + f_\eta'(y - \eta) + f_\zeta'(z - \zeta) = 0;$$

liegt der Punkt Π auf der Fläche f, so geht diese Ebene in die Tangentenebene im Punkte Π über. Dieser Satz kann auch folgende Fassung erhalten: Jeder Punkt im Raume ist das Centrum eines durch ihn gehenden (realen oder nicht realen) ebenen Schnittes einer Fläche II. O.; die Gleichung der Ebene dieser Schnittcurve ist $T = 0$.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die Ebene T für alle Punkte Π des Raumes real ist, also auch dann, wenn keine durch Π gehende reale Sehne der Fläche f in Π halbirt wird.

2. Die Gleichung der Ebene T wird nur dann unbestimmt, wenn die Coordinaten des Punktes Π solche Werthe haben, dass die Functionen f_ξ', f_η', f_ζ' zugleich verschwinden, wenn also

$$1. \quad \begin{aligned} A\xi + B\eta + C\zeta &= -G, \\ B\xi + D\eta + E\zeta &= -H, \\ C\xi + E\eta + F\zeta &= -J. \end{aligned}$$

Wenn die Determinante

$$2. \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, so wird diese Gleichung von einem Systeme endlicher Werthe ξ, η, ζ genügt. Für den hierdurch eindeutig bestimmten, nicht unendlich fern liegenden Punkt verschwindet der Coefficient von r in der Gleichung No. 1, 1 unabhängig von den Winkeln α, β, γ; dieser Punkt halbirt daher alle durch ihn gehenden Sehnen der Fläche; aus diesem Grunde heisst er das Centrum der Fläche. Das Centrum einer Fläche zweiter Ordnung ist zugleich das Centrum für jeden durch dasselbe gehenden ebenen Schnitt.

Die Bedingung dafür, dass eine Fläche zweiter Ordnung ein eindeutig bestimmtes, nicht unendlich fernes Centrum hat, ist

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

und die Coordinaten ξ, η, ζ des Centrums sind die Lösungen des Systems $f_\xi' = 0$, $f_\eta' = 0$, $f_\zeta' = 0$, mithin in die Werthe

$$3. \qquad \xi = -\frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \eta = -\frac{\Delta_3}{\Delta_1}, \quad \zeta = -\frac{\Delta_4}{\Delta_1},$$

wenn mit Δ_2, Δ_3, Δ_4 die Determinanten bezeichnet werden

$$4. \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} G & B & C \\ H & D & E \\ J & E & F \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A & G & C \\ B & H & E \\ C & J & F \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} A & B & G \\ B & D & H \\ C & E & J \end{vmatrix}.$$

3. Ist $G = H = J = 0$, und Δ_1 von Null verschieden, so verschwinden ξ, η und ζ. Das Centrum der Fläche

$$f \equiv Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz + K = 0$$

fällt also mit dem Nullpunkte zusammen.

Die Gleichungen des Kegels zweiter Ordnung, des Ellipsoids und der beiden Hyperboloide haben die Form

$$Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + K = 0,$$

wobei A, D, F von Null verschieden sind; in der Determinante Δ_1 verschwinden in diesem Falle alle ausserhalb der Diagonale stehenden Glieder, sie reducirt sich daher auf das Produkt $\Delta_1 = ADF$, und ist mithin von Null verschieden. Der Kegel, das Ellipsoid und die beiden Hyperboloide haben daher ein Centrum, und zwar ist dasselbe der Schnittpunkt der drei Symmetrieebenen.

4. Die Gleichungen der beiden Paraboloide haben die Form

$$f \equiv Ax^2 + Dy^2 + 2Jz = 0.$$

Für das Centrum gelten jetzt die Gleichungen $A\xi = 0$, $D\eta = 0$; bemerken wir noch, dass $\Delta_1 = 0$ und $\Delta_4 = ADJ$ ist, so folgt: Das Centrum eines Paraboloids liegt auf der Durchschnittsachse der Symmetrieebenen, von dem Schnittpunkte derselben mit der Fläche unendlich weit entfernt.

Die Gleichungen des elliptischen und des hyperbolischen Cylinders fallen unter die Form

$$Ax^2 + Dy^2 + K = 0.$$

Für das Centrum hat man $A\xi = 0$, $D\eta = 0$, $\Delta_1 = \Delta_4 = 0$; mithin ist $\xi = \eta = 0$ und ζ unbestimmt. Jeder Punkt in der Durchschnittsachse der Symmetrieebenen eines elliptischen oder hyperbolischen Cylinders kann also als Centrum der Fläche angesehen werden.

Die Gleichung des parabolischen Cylinders ist

$$Ax^2 + 2Hy = 0.$$

Hier hat man $A\xi = 0$, $\Delta_1 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$, mithin $\xi = 0$, η unendlich gross, ζ unbestimmt.

Die Gleichung, aus welcher η zu bestimmen wäre, reducirt sich auf $0 = -H$; betrachtet man diese Gleichung als lineare Gleichung für η mit einem unendlich kleinen Coefficienten von η, so folgt, dass ihr nur durch einen unendlich grossen Werth von η genügt werden kann.

Jeder unendlich ferne Punkt auf der Symmetrieebene eines parabolischen Cylinder kann als Centrum desselben betrachtet werden.

Da bei den Paraboloiden und den Cylindern von einem Centrum im eigentlichen Sinne des Wortes nicht zu reden ist, so werden diese Flächen als nichtcentrale Flächen den centralen Flächen, nämlich dem Ellipsoid, den Hyperboloiden und dem Kegel gegenübergestellt.

5. Haben in der Gleichung No. 1, 2

$$f_x' \cos\alpha + f_y' \cos\beta + f_z' \cos\gamma = 0$$

die Winkel α, β, γ gegebene Werthe, so ist diese Gleichung die Bedingung für die Coordinaten der Mitten der Sehnen der Fläche $f = 0$, welche die durch die Winkel α, β, γ vorgeschriebene Richtung haben, sie ist also die Gleichung der Fläche, auf welcher die Mittelpunkte paralleler Sehnen liegen.

Die Function $T \equiv f_x' \cos\alpha + f_y' \cos\beta + f_z' \cos\gamma$ ist linear bezüglich der Coordinaten x, y, z; wir schliessen daher: Die Mitten paralleler Sehnen einer Fläche zweiter Ordnung liegen auf einer Ebene; haben die Sehnen die Richtungswinkel α, β, γ, so ist die Gleichung dieser Ebene

1. $$T \equiv \cos\alpha \cdot f_x' + \cos\beta \cdot f_y' + \cos\gamma \cdot f_z' = 0.$$

Für die Sehnen, die der Reihe nach der X-Achse, der Y-Achse, der Z-Achse des Coordinatensystems parallel sind, haben α, β, γ die Werthe $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 90°$; bez. $\beta = 0$, $\alpha = \gamma = 90°$; bez. $\alpha = \beta = 90°$, $\gamma = 0$; die Ebenen, welche die Mitten der den Achsen parallelen Sehnen enthalten, haben daher die Gleichungen

2. $$f_x' = 0, \quad f_y' = 0, \quad f_z' = 0.$$

Die Gleichung 1. lehrt, dass jeder Punkt, der diesen drei Ebenen $f_x' = 0$, $f_y' = 0$, $f_z' = 0$ gemein ist, auch auf der Ebene T liegt.

6. Beim Ellipsoid, den beiden Hyperboloiden und dem Kegel haben diese drei Ebenen nur einen Punkt gemein, das Centrum; die Ebenen, welche die Mitten paralleler Sehnen eines Ellipsoids, Hyperboloids oder Kegels enthalten, gehen also durch das Centrum der Fläche, und werden daher als Diametralebenen bezeichnet.

Jede Diametralebene halbirt eine bestimmte Schaar paralleler Sehnen; denn die Gleichung jeder Diametralebene kann in der Form geschrieben werden

1. $$T \equiv a_1 f_x' + a_2 f_y' + a_3 f_z' = 0.$$

Sind α, β, γ die Richtungswinkel der von T halbirten Sehnen, so muss diese Gleichung mit No. 5, 1 gleichbedeutend sein; es muss also eine Zahl n geben, für welche

$$\cos\alpha = na_1, \quad \cos\beta = na_2, \quad \cos\gamma = na_3.$$

Quadrirt man und addirt, so erhält man

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = n^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2).$$

Da nun $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, so folgt $n = 1 : \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, und daher

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Wenn der Diameter d der Fläche den Sehnen parallel ist, die von einer Diametralebene T halbirt werden, so heissen die Ebene T und der Diameter d einander conjugirt.

7. Wählt man das Centrum der Fläche zum Nullpunkte, so ist die Gleichung (No. 3)

1. $$f = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + K = 0.$$

Die abgeleiteten Functionen f_x', f_y', f_z' sind

2. $$\begin{aligned} f_x' &= Ax + By + Cz, \\ f_y' &= Bx + Dy + Ez, \\ f_z' &= Cx + Ey + Fz. \end{aligned}$$

Sind α_1, β_1, γ_1 die Richtungswinkel eines Diameters d_1, der auf der Diametralebene T liegt, die dem Diameter d mit den Richtungswinkeln α, β, γ conjugirt ist, und ist P ein Punkt des Diameters d_1, r sein Abstand vom Centrum, so hat man

$$x = r\cos\alpha_1, \quad y = r\cos\beta_1, \quad z = r\cos\gamma_1.$$

Da P auf T liegt, so ist $T = 0$ erfüllt; setzt man nun diese Werthe in T ein, so haben alle Glieder den Faktor r; unterdrückt man denselben, so bleibt

3. $$\begin{aligned} &(A\cos\alpha_1 + B\cos\beta_1 + C\cos\gamma_1)\cos\alpha \\ &+ (B\cos\alpha_1 + D\cos\beta_1 + E\cos\gamma_1)\cos\beta \\ &+ (C\cos\alpha_1 + E\cos\beta_1 + F\cos\gamma_1)\cos\gamma = 0. \end{aligned}$$

Wenn also die Cosinus von sechs Winkeln α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 dieser Gleichung genügen, so liegt der Diameter, dessen Richtungswinkel α_1, β_1, γ_1 sind, auf der Ebene, welche dem Diameter mit den Richtungswinkeln α, β, γ conjugirt ist.

Nimmt man die Glieder der Gleichung 3. zusammen, die in derselben Verticalreihe stehen, so erhält man

$$\begin{aligned} &(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)\cos\alpha_1 \\ &+ (B\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma)\cos\beta_1 \\ &+ (C\cos\alpha + E\cos\beta + F\cos\gamma)\cos\gamma_1 = 0. \end{aligned}$$

Dies ist dieselbe Gleichung wie 3., nur sind die Winkel α, β, γ gegen α_1, β_1, γ_1 vertauscht; mithin ergiebt sich: Ist der Diameter d_1 in der Ebene enthalten, die dem Diameter d conjugirt ist, so ist auch d in der Ebene enthalten, die d_1 conjugirt ist. — Die Ebenen, die allen in einer Diametralebene T liegenden Diametern conjugirt sind, bilden ein Büschel, dessen Träger der zu T conjugirte Diameter d ist.

8. Die Gleichung der Ebene T, deren Schnitt mit der Fläche

$$f = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + K = 0$$

sein Centrum in einem gegebenen Punkte Π hat, ist (No. 1, 3)

1. $$f_\xi' \cdot x + f_\eta' \cdot y + f_\zeta' \cdot z - (f_\xi' \cdot \xi + f_\eta' \cdot \eta + f_\zeta' \cdot \zeta) = 0.$$

Die jetzt geltenden Werthe von f_x' f_y', f_z' (No. 7, 2) erfüllen die Identität

2. $$f_x' \cdot x + f_y' \cdot y + f_z' \cdot z \equiv f - K;$$

daher kann man in 1. das letzte Glied einfacher schreiben und erhält

3. $$f_\xi' \cdot x + f_\eta' \cdot y + f_\zeta' \cdot z - f(\xi, \eta, \zeta) + K = 0.$$

Multiplicirt man die Functionen

$$\begin{aligned} f_\xi' &= A\xi + B\eta + C\zeta, \\ f_\eta' &= B\xi + D\eta + E\zeta, \\ f_\zeta' &= C\xi + E\eta + F\zeta, \end{aligned}$$

der Reihe nach mit x, y, z und addirt, indem man die Glieder jeder Verticalreihe zusammennimmt, so erhält man die Identität

4. $$f_\xi' \cdot x + f_\eta' \cdot y + f_\zeta' \cdot z \equiv f_x' \cdot \xi + f_y' \cdot \eta + f_z' \cdot \zeta.$$

Hiernach erhält die Gleichung der Ebene T die Form

5. $$f_x' \cdot \xi + f_y' \cdot \eta + f_z' \cdot \zeta - f(\xi, \eta, \zeta) + K = 0 .$$

Sind α, β, γ die Richtungswinkel des Diameters, der durch Π geht, und ist ρ der Abstand des Punktes Π vom Centrum, so kann man ξ, η, ζ durch $\rho \cos\alpha$, $\rho \cos\beta$, $\rho \cos\gamma$ ersetzen; nachdem man durch ρ dividirt hat, erhält man

$$\mathrm{T} = f_x' \cdot \cos\alpha + f_y' \cdot \cos\beta + f_z' \cdot \cos\gamma - \frac{1}{\rho}[f(\xi, \eta, \zeta) - K] = 0.$$

Diese Gleichung stimmt in den variabeln Gliedern mit der Gleichung der dem Diameter α, β, γ conjugirten Diametralebene

$$T = f_x' \cdot \cos\alpha + f_y' \cdot \cos\beta + f_z' \cdot \cos\gamma = 0$$

überein, und weicht nur durch das Vorhandensein eines constanten Gliedes ab, die Ebenen T und T sind daher parallel. Wir schliessen hieraus: Die Centra aller parallelen ebenen Schnitte einer centralen Fläche zweiter Ordnung liegen auf einem Diameter; dieser Diameter ist der zu dieser Schaar paralleler Ebenen gehörigen Diametralebene conjugirt.

9. Wir wenden uns nun zu entsprechenden Sätzen über die Flächen II. O., die kein im Endlichen liegendes, eindeutig bestimmtes Centrum haben, und zwar zunächst zu den Paraboloiden.

Die abgeleiteten Functionen f_x', f_y', f_z' der Function

$$f = Ax^2 + Dy^2 + 2Jz$$

sind $f_x' = Ax$, $f_y' = Dy$, $f_z' = J$. Die Ebene T, welche die Sehnen von der Richtung α, β, γ halbirt, hat daher die Gleichung

$$T = A\cos\alpha \cdot x + D\cos\beta \cdot y + J\cos\gamma = 0.$$

Alle Ebenen, welche die Mitten paralleler Sehnen eines Paraboloids enthalten, sind daher der Achse des Paraboloids parallel.

Der elliptische und der hyperbolische Cylinder haben in Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Verticalebenen mit den Symmetrieebenen zusammenfallen, Gleichungen von der Form

$$f = Ax^2 + Dy^2 + K = 0.$$

Jetzt ist $f_x' = Ax$, $f_y' = Dy$, $f_z' = 0$, daher ist

$$T = A\cos\alpha \cdot x + B\cos\beta \cdot y = 0 .$$

Die Ebenen, welche die Mitten paralleler Sehnen eines elliptischen oder hyperbolischen Cylinders enthalten, gehen durch die Achse des Cylinders

Aus der Gleichung des parabolischen Cylinders

$$f = Ax^2 + 2Hy = 0$$

folgt $f_x' = Ax$, $f_y' = H$, $f_z' = 0$, Daher erhält man

$$T = A\cos\alpha \cdot x + H\cos\beta = 0 .$$

Die Ebenen, welche die Mitten paralleler Sehnen eines parabolischen Cylinders enthalten, sind der Symmetrieebene des Cylinders parallel.

10. Für die Gleichung der Ebene, deren Schnitt mit der Fläche einen gegebenen Punkt Π zum Centrum hat, (No. 1, 3.) ergiebt sich

1. bei den Paraboloiden: $A\xi \cdot x + D\eta \cdot y + Jz - (A\xi^2 + D\eta^2 + J\zeta) = 0$,
2. beim ellipt. und hyperb. Cyl.: $A\xi \cdot x + D\eta \cdot y - (A\xi^2 + D\eta^2) = 0$,
3. beim parabol. Cylinder: $A\xi \cdot x + Hy - (A\xi^2 + H\eta) = 0$.

Sind α, β, γ die Stellungswinkel der Ebene 1., so hat man

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = A\xi : D\eta : J,$$

woraus sich ergiebt

$$\xi = J\cos\alpha : A\cos y, \quad \eta = J\cos\beta : D\cos\gamma.$$

Die Coordinaten der Horizontprojection des Centrums eines ebenen Schnittes in einem Paraboloide sind also nur von der Stellung der Schnittebene abhängig. Hieraus folgt: Die Centra paralleler Schnitte eines Paraboloids liegen auf einer Geraden, die zur Achse des Paraboloids parallel ist.

Die Ebene 2. ist parallel der Cylinderachse und schneidet daher den Cylinder in zwei Mantellinien, die gleichweit von Π entfernt sind. Für einen Punkt, der auf der Achse des Cylinders liegt, ist $\xi = \eta = 0$, und hierfür wird die Gleichung 2. identisch erfüllt. Wir haben daher: Für alle ebenen Schnitte eines elliptischen oder parabolischen Cylinders, welche die Achse treffen, ist der Schnittpunkt mit der Achse das Centrum.

---

11. Die Ebene

1. $$T \equiv f_x' \cos\alpha + f_y' \cdot \cos\beta + f_z' \cdot \cos\gamma = 0,$$

welche die der Richtung α, β, γ parallelen Sehnen der Fläche II. O. $f = 0$ halbirt, ist Symmetrieebene der Fläche, wenn sie rechtwinkelig zur Richtung der von ihr halbirten Sehnen ist. Jede Ebene, die zur Richtung α, β, γ rechtwinkelig ist, hat eine Gleichung von der Form

2. $$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - d = 0,$$

wobei d den Abstand der Ebene vom Nullpunkte bezeichnet; also muss die Gleichung 2. durch Multiplication mit einer Zahl μ mit 1. identisch werden, wenn T Symmetrieebene sein soll. Ordnet man T nach den Coordinaten, so entsteht:

$$T \equiv (A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)x + (B\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos)y$$
$$+ (C\cos\gamma + E\cos\beta + F\cos\gamma)z + G\cos\alpha + H\cos\beta + J\cos\gamma = 0.$$

Der Vergleich mit

$$\mu\cos\alpha \cdot x + \mu\cos\beta \cdot y + \mu\cos\gamma \cdot z - \mu d = 0$$

ergiebt die Gleichungen

3. $$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = \mu\cos\alpha,$$
4. $$B\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma = \mu\cos\beta,$$
5. $$C\cos\alpha + E\cos\beta + F\cos\gamma = \mu\cos\gamma,$$
6. $$G\cos\alpha + H\cos\beta + J\cos\gamma = -\mu d.$$

Fügt man hierzu noch

7. $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

so hat man fünf Gleichungen für die fünf Unbekannten α, β, γ, μ, d. Um dieselben zu ermitteln, bemerken wir, dass die Gleichungen 3., 4., 5. und 7. nur α, β, γ, μ enthalten; sind diese gefunden, so erhält man aus 6. die letzte Unbekannte d. Den Gleichungen 3., 4., 5. kann man die Form geben:

8. $$\begin{aligned}(A - \mu)\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\beta &= 0,\\ B\cos\alpha + (D-\mu)\cos\beta + E\cos\gamma &= 0,\\ C\cos\alpha + E\cos\beta + (F-\mu)\cos\gamma &= 0;\end{aligned}$$

Ihr Verein erfordert das Verschwinden der Determinante

9. $$R \equiv \begin{vmatrix} A-\mu & B & C \\ B & D-\mu & E \\ C & E & F-\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine Gleichung dritten Grades für μ; hat man dieselbe aufgelöst, so setzt man eine Wurzel μ in die Gleichungen 8. ein. Berechnet man d s

Verhältniss $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$ aus je zweien der Gleichungen, so erhält man die in Folge der Gleichung 9. gleichbedeutenden Proportionen

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma &= [(D-\mu)(F-\mu)-E^2]:[CE - B(F-\mu)]:[BE - C(D-\mu)], \\
10.\qquad &= [CE - B(F-\mu)]:[(A-\mu)(F-\mu)-C^2]:[CB - E(A-\mu)], \\
&= [BE - C(D-\mu)]:[CB - E(A-\mu)]:[(A-\mu)(D-\mu)-B^2].
\end{aligned}
$$

Haben die Zahlen L, M, N dasselbe Verhältniss, wie je drei zu derselben Zeile gehörige Subdeterminanten der Determinante R, so ist

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = L : M : N;$$

unter Rücksicht auf die Gleichungen 6. und 7. hat man alsdann die Lösungen des Problems

$$11.\qquad \cos\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},$$

$$12.\qquad \cos\gamma = \frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \qquad d = -\frac{1}{\mu}\frac{GL+HM+JN}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}.$$

12. Die Gleichung $R = 0$ liefert entwickelt

$$1.\ R \equiv (A-\mu)(D-\mu)(F-\mu) - E^2(A-\mu) - C^2(D-\mu) - B^2(F-\mu) + 2BCE = 0;$$

oder nach Potenzen von μ geordnet

$$2.\ R \equiv -\mu^3 + (A+D+F)\mu^2 - (DF+AF+AD-C^2-B^2-E^2)\mu + \Delta_1 = 0,$$

wenn man wieder mit Δ^1 die Determinante bezeichnet

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{vmatrix}.$$

Die cubische Gleichung $R = 0$ hat mindestens eine reale Wurzel; diese ist von Null verschieden, wenn $\Delta_1 \gtrless 0$.

Unter der Voraussetzung $\Delta_1 \gtrless 0$ bezeichne μ_0 eine reale Wurzel von $R = 0$. Alsdann sind die Werthe No. 11, 11 und 12 real und d nicht unendlich gross; sie sind eindeutig bestimmt, ausser wenn für μ_0 alle neun auf der rechten Seite von No. 11, 10 stehende Subdeterminanten der Determinante R verschwinden. Wenn letzteres nicht der Fall ist, so entspricht der Wurzel μ_0 eine reale, nicht unendlich ferne Symmetrieebene. Nach den Entwicklungen des letzten Abschnitts gehört die Fläche $f = 0$ alsdann zu den dort aufgezählten Flächen; da $\Delta_1 \gtrless 0$, hat sie ein eindeutig bestimmtes Centrum, das nicht unendlich fern ist, sie ist daher ein Kegel oder ein Ellipsoid, oder ein Hyperboloid. Diese Flächen haben drei (oder, wenn sie Rotationsflächen sind unzählig viele) Symmetrieebenen; folglich sind in diesem Falle auch die andern Wurzeln der Gleichung $R = 0$ real.

13. Wenn $\Delta_1 \gtrless 0$ und für eine reale Wurzel μ_0 der Gleichung $R = 0$ alle Subdeterminanten von R verschwinden, so sind die Gleichungen No. 11, 8 gleichbedeutend, und mithin ihre Coefficienten der Reihe nach einander proportional,

$$1.\qquad (A-\mu_0) : B : C = B : (D-\mu_0) : E = C : E : (F-\mu_0).$$

Sind B, C, E von Null verschieden, so schliesst man hieraus

$$\mu_0 = A - \frac{BC}{E} = D - \frac{BE}{C} = F - \frac{CE}{B}.$$

Umgekehrt, wenn B, C, E von Null verschieden sind, und wenn

$$A - \frac{BC}{E} = D - \frac{BE}{C} = F - \frac{CE}{B},$$

und man nimmt den gemeinschaftlichen Werth dieser Differenzen für μ_0, so sind, wie man sofort erkennt, die Proportionen 1. erfüllt und μ_0 ist eine Wurzel von $R = 0$. Multiplicirt man in diesem Falle die Gleichungen No. 11, 8. der Reihe nach mit E, C, B und ersetzt $E(A - \mu_0)$, $C(D - \mu_0)$, $B(F - \mu_0)$ durch die aus 1. sich ergebenden Werthe BC, BE, CE, so gehen die drei Gleichungen über in

$$2. \quad BC\cos\alpha + BE\cos\beta + CE\cos\gamma = 0.$$

Durch die Formeln

$$\cos\alpha_1 = \frac{BC}{\sqrt{B^2C^2 + B^2E^2 + C^2E^2}}, \quad \cos\beta_1 = \frac{BE}{\sqrt{B^2C^2 + B^2E^2 + C^2E^2}},$$
$$\cos\gamma_1 = \frac{CE}{\sqrt{B^2C^2 + B^2E^2 + C^2E^2}}$$

ist eine Richtung eindeutig bestimmt. Ersetzt man die Grössen BC, BE, CE in 2. durch die proportionalen Werthe $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$, so entsteht

$$3. \quad \cos\alpha_1\cos\alpha + \cos\beta_1\cos\beta + \cos\gamma_1\cos\gamma = 0.$$

Hieraus folgt, dass alle der Wurzel μ_0 zugehörigen Symmetrieebenen der Richtung α_1, β_1, γ_1 parallel sind. Vergleicht man die Gleichung einer Symmetrieebene

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - d = 0$$

mit No. 11, 6.

$$\cos\alpha \cdot G + \cos\beta \cdot H + \cos\gamma \cdot J + \mu_0 d = 0,$$

so ist ersichtlich, dass alle diese Symmetrieebenen durch den Punkt P_0 gehen, für welchen

$$x_0 = -G:\mu_0, \quad y_0 = -H:\mu_0, \quad z_0 = -J:\mu_0.$$

Folglich sind alle Ebenen Symmetrieebenen, die den Punkt P_0 und die durch P_0 gehende Gerade q enthalten, die mit den Achsen die Winkel α_1, β_1, γ_1 bildet.

Durch dieses Verhalten ist die Fläche als Rotationsfläche, und q als Rotationsachse gekennzeichnet; da $\Delta_1 \gtrless 0$, so entsprechen den Voraussetzungen der Rotationskegel, das Rotationsellipsoid und die Rotationshyperboloide, wenn deren Rotationsachse mit keiner Coordinatenebene parallel ist, also $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ nicht verschwinden.

Wenn B verschwindet, so folgt aus No. 13, 1., dass entweder noch C oder E verschwindet. Ist $B = C = 0$, so folgt, dass auch $A - \mu_0 = 0$; daher ist

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta : \cos\gamma = (D - \mu_0) : E = E : (F - \mu_0).$$

Ersetzt man hier μ_0 durch A, so ergiebt sich die Bedingung

$$3. \quad (D - A) : E = E : (F - A).$$

Wenn E nicht verschwindet, so kann A weder gleich D noch gleich F sein.

Umgekehrt: Wenn 3. erfüllt und $B = C = 0$ ist, während $E \gtrless 0$, so ist $\mu_0 = A$ eine Wurzel von $R = 0$; das System No. 11, 8. geht über in

$$4. \quad (D - A)\cos\beta + E\cos\gamma = 0, \quad E\cos\beta + (F - A)\cos\gamma = 0,$$

und diese beiden Gleichungen fallen infolge 3. zusammen. Aus 4. folgt, dass alle Ebenen Symmetrieebenen sind, die der durch

$$\cos\alpha_1 = 0, \quad \cos\beta_1 = \frac{D - A}{\sqrt{(D - A)^2 + E^2}}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{E}{\sqrt{(D - A)^2 + E^2}}$$

bestimmten Richtung parallel sind und P_0 enthalten.

Wir kommen daher wieder auf den vorigen Fall, nur dass die Rotationsachse normal zur X-Achse ist.

Die Fälle $B = E = 0$, $C \gtrless 0$ oder $C = E = 0$, $B \gtrless 0$ sind von dem soeben erledigten nicht wesentlich verschieden.

Ist $B = C = 0$ und $A = D$, so folgt aus 3., dass auch $E = 0$; wir kommen damit auf den Fall $B = C = E = 0$. Ist $B = C = E = 0$, so folgt aus 1., dass auch

$$A - \mu_0 = D - \mu_0 = F - \mu_0 = 0.$$

Hieraus folgt die Bedingung $A = D = F$. Nimmt man den gemeinsamen Werth dieser Grössen für μ_0, so ist $R = 0$ und die Gleichungen No. 11., 8. werden identisch; folglich ist jede Ebene, die durch P_0 geht, Symmetrieebene. Die Gleichung der Fläche ist

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0.$$

die Fläche ist daher eine Kugel.

13. Der Untersuchung des Falles $\Delta_1 = 0$ schicken wir einige Bemerkungen über die Geraden voraus, die eine Fläche II. O. in einem unendlich fernen Punkte treffen.

Eine Gerade, die durch einen Punkt Π geht und mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet, hat mit der Fläche II. O. $f = 0$ einen unendlich fernen Punkt gemein, wenn in der Gleichung No. 1, 1 der Coefficient von r^2 verschwindet, wenn also α, β, γ der Bedingung genügen

1. $A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\cos\beta + 2C\cos\alpha\cos\gamma + D\cos^2\beta + 2E\cos\beta\cos\gamma + F\cos^2\gamma = 0.$

Zieht man durch den Nullpunkt eine Parallele zu einer solchen Geraden, und ist P ein Punkt dieser Parallelen, so ist

$$x : y : z = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma,$$

mithin erfüllen die Coordinaten x, y, z die Gleichung

2. $k \equiv Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 = 0.$

Diese Gleichung enthält nur die quadratischen Glieder der Function f, sie stellt daher einen Kegel zweiter Ordnung dar, dessen Spitze im Nullpunkte liegt; der Kegel ist unabhängig von den Coordinaten des Punktes P_0.

Bezogen auf die Symmetrieebenen ist die Gleichung einer centralen Fläche II. O.

$$f \equiv Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + K = 0,$$

die Gleichung des Kegels k wird daher

$$k \equiv Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 = 0.$$

Beim Ellipsoid haben die Coefficienten A, D, F dasselbe Vorzeichen. Der Kegel k enthält daher ausser der Spitze keinen realen Punkt; es giebt mithin keine realen Geraden, die ein Ellipsoid in einem unendlich fernen Punkte treffen.

Bei den Hyperboloiden haben wir den Kegel $k = 0$ (in § 6, No. 9 und 12) bereits als Asymptotenkegel kennen gelernt. Alle Geraden, die ein Hyperboloid in einem unendlich fernen Punkte treffen, sind daher den Mantellinien des Asymptotenkegels parallel.

Giebt man den Gleichungen der beiden Paraboloide die Form

$$f \equiv Ax^2 + Dy^2 + 2Jz = 0,$$

so erhält man

$$k \equiv Ax^2 + Dy^2 = 0.$$

Beim elliptischen Paraboloide haben A und D gleiches Vorzeichen; daher besteht die dieser Gleichung zugehörige Fläche aus zwei imaginären Ebenen

$$\sqrt{A} \cdot x + \sqrt{-D} \cdot y = 0, \quad \sqrt{A} \cdot x - \sqrt{-D} \cdot y = 0,$$

die sich in der Z-Achse schneiden, und ausser derselben reale Punkte nicht enthalten. Alle Geraden, die ein elliptisches Paraboloid in einem unendlich fernen Punkte treffen, sind der Achse des Paraboloids parallel.

Beim hyperbolischen Paraboloide haben A und D verschiedene Vorzeichen; die Ebenen

$$\sqrt{A} \cdot x + \sqrt{-D} \cdot y = 0, \quad \sqrt{A} \cdot x + \sqrt{-D} \cdot y = 0$$

sind daher real. Die Geraden, die ein hyperbolisches Paraboloid in einem unendlich fernen Punkte treffen, sind den Asymptotenebenen parallel (vergl. § 6, 18).

14. Wenn Δ_1 verschwindet, so zerfällt die quadratische Function

$$A\left(\frac{x}{z}\right)^2 + 2B\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z} + 2C\frac{x}{z} + D\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 2E\frac{y}{z} + F$$

in zwei lineare Faktoren (Anal. Geom. d. Ebene § 13, No. 3.)

$$\left(a\frac{x}{z} + b\frac{y}{z} + c\right)\left(a'\frac{x}{z} + b'\frac{y}{z} + c'\right).$$

Daher zerfällt der Kegel k in die beiden Ebenen

1. $$(ax + by + cz)(a'x + b'y + c'z) = 0.$$

Dieselben sind real und verschieden, real und vereint, oder conjugirt complex. Im letzteren Falle werden sie von jeder Ebene $z = d$ in den conjugirt complexen Geraden getroffen

$$(ax + by + cd)(a'x + b'y + c'd) = 0.$$

Da diese einen realen Punkt gemein haben, so folgt, dass die Schnittlinie der Ebenen 1. auch dann real ist, wenn die Ebenen conjugirt complex sind.

Wählt man diese Schnittgerade zur Z-Achse eines neuen Coordinatensystems, so muss die Gleichung $k = 0$ für dieses System zwei Ebenen darstellen, die die Z-Achse enthalten; hieraus folgt $C = E = F = 0$. Unter dieser Voraussetzung wird die Gleichung für μ

$$-\mu\,[\mu^2 - (A + D)\mu + AD - B^2] = 0;$$

dieselbe ergiebt die Wurzeln

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 \text{ und } \mu_2 = \frac{1}{2}(A + D) \pm \frac{1}{2}\sqrt{4B^2 + (A - D)^2}.$$

Die Wurzeln μ_1 und μ_2 sind real.

Ist $A = B = D = 0$, so verschwinden alle drei Wurzeln dieser Gleichung. Die Fläche reducirt sich dann auf

$$2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0,$$

artet also in den Verein dieser Ebene und der unendlich fernen Ebene aus.

Ist $AD = B^2$, so verschwindet μ_2; die Fläche enthält daher unter dieser Voraussetzung nur eine Symmetrieebene; hierdurch ist sie als parabolischer Cylinder charakterisirt.

In jedem andern Falle ergeben die Proportionen No. 11, 10.

2. $$\cos\gamma = 0, \quad \cos\alpha : \cos\beta = (\mu - D) : B = B : (\mu - A).$$

Ist $B = 0$ und $A = D$, so bleibt das Verhältniss $\cos\alpha : \cos\beta$ unbestimmt; alsdann sind alle durch P_0 gehenden Verticalebenen zugleich Symmetrieebenen der Fläche, und ausserdem hat dieselbe keine Symmetrieebenen; die Fläche ist daher ein Rotationsparaboloid.

Wenn B nicht verschwindet, so folgen aus 2. zwei bestimmte Werthpaare für $\cos\alpha$ und $\cos\beta$, für welche

$$\cos\alpha_1 : \cos\beta_1 = (\mu_1 - D) : B,$$
$$\cos\alpha_2 : \cos\beta_2 = (\mu_2 - D) : B.$$

Hieraus folgt

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 = n\,[(\mu_1 - D)(\mu_2 - D) + B^2],$$

wobei n eine leicht angebbare Grösse bezeichnet. Da nun

$$\mu_1\mu_2 = AD - B^2, \quad \mu_1 + \mu_2 = A + D,$$

so folgt $\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 = 0$. Die beiden Symmetrieebenen der Fläche sind daher normal zu einander; folglich ist die Fläche ein elliptisches oder ein hyberbolisches Paraboloid.

15. Aus diesen Untersuchungen ziehen wir den Schluss, dass es nur folgende Arten eigentlicher (nicht in Ebenen zerfallender) Flächen II. O. giebt:

Parabolische, elliptische und hyperbolische Cylinder; Kegel; elliptische und hyperbolische Paraboloide; einschalige und zweischalige Hyperboloide; Ellipsoide.

---

16. Wir kehren zu dem Ausgangspunkte unserer Untersuchung über Symmetrieebenen an Flächen zweiter Ordnung zurück und knüpfen noch einige Bemerkungen an die Proportionen No. 11, 10, unter der Voraussetzung, dass für keine Wurzel μ der Gleichung $R = 0$ alle Subdeterminanten von R verschwinden.

Setzen wir abkürzend

$$1.\quad \begin{matrix} (D-\mu)(F-\mu) - E^2 = \mathfrak{A}, & CE - B(F-\mu) = \mathfrak{B}, & BE - C(D-\mu) = \mathfrak{C}, \\ (A-\mu)(F-\mu) - C^2 = \mathfrak{D}, & CB - E(A-\mu) = \mathfrak{E}, & (A-\mu)(D-\mu) - B^2 = \mathfrak{F}, \end{matrix}$$

so haben wir

$$2.\quad \begin{aligned} \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma &= \mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C}, \\ &= \mathfrak{B} : \mathfrak{D} : \mathfrak{E}, \\ &= \mathfrak{C} : \mathfrak{E} : \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Erweitert man die drei Verhältnisse rechts der Reihe nach mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ und ersetzt dann die in der Diagonalreihe stehenden Produkte $\mathfrak{A}\mathfrak{E}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{F}$ der Reihe nach durch die auf Grund der Proportionen 2. gleichen Produkte $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{E}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{E}$, so erhält man die Proportion

$$3.\quad \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \mathfrak{B}\mathfrak{C} : \mathfrak{B}\mathfrak{E} : \mathfrak{C}\mathfrak{E},$$

woraus durch Division mit $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{E}$ hervorgeht

$$4.\quad \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{1}{\mathfrak{E}} : \frac{1}{\mathfrak{C}} : \frac{1}{\mathfrak{B}}.$$

Da $1 : \mathfrak{E}$, $1 : \mathfrak{C}$, $1 : \mathfrak{B}$ proportional den Subdeterminanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ der Glieder, z. B. der ersten Zeile der Determinante R sind, und da diese Determinante verschwindet, so ist

$$5.\quad \frac{A-\mu}{\mathfrak{E}} + \frac{B}{\mathfrak{C}} + \frac{C}{\mathfrak{B}} = 0.$$

Bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung $R = 0$ (oder der gleichbedeutenden Gleichung 5.) mit μ_1, μ_2, μ_3, und setzen für $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ in 5. die Werthe ein, so erhalten wir daher die Gleichungen

$$6.\quad \frac{A-\mu_1}{CB - EA + E\mu_1} + \frac{B}{BE - CD + C\mu_1} + \frac{C}{CE - BF + B\mu_1} = 0,$$

$$7.\quad \frac{A-\mu_2}{CB - EA + E\mu_2} + \frac{B}{BE - CD + C\mu_2} + \frac{C}{CE - BF + B\mu_2} = 0,$$

$$8.\quad \frac{A-\mu_3}{CB - EA + E\mu_3} + \frac{B}{BE - CD + C\mu_3} + \frac{C}{CE - BF + B\mu_3} = 0.$$

Subtrahiren wir die zweite dieser drei Gleichungen von der ersten und beachten, dass

$$(A-\mu_1)(CB - EA + E\mu_2) - (A-\mu_2)(CB - EA + E\mu_1) = (\mu_2 - \mu_1) BC,$$

so erhalten wir nach Division durch $(\mu_2 - \mu_1) BC$, und wenn wir die Werthe, welche die Grössen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$ annehmen, wenn darin μ durch μ_i ($i = 1, 2, 3$) ersetzt wird, durch $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{E}_i$, bezeichnen

9. $$\frac{1}{\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2}+\frac{1}{\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2}+\frac{1}{\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2}=0\,.$$

Ebenso entstehen durch Subtraction der Gleichungen 7. und 8. und nachherige Division durch $(\mu_3-\mu_2)\,BC$, sowie auf gleiche Weise aus den Gleichungen 6. und 8. die beiden Gleichungen

10. $$\frac{1}{\mathfrak{C}_2\,\mathfrak{C}_3}+\frac{1}{\mathfrak{C}_2\,\mathfrak{C}_3}+\frac{1}{\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3}=0\,,$$

11. $$\frac{1}{\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_3}+\frac{1}{\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_3}+\frac{1}{\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_3}=0\,.$$

Sind α_i, β_i, γ_i die Stellungswinkel, welche zur Wurzel μ_i gehören, so hat man nach 4.

$$cos\,\alpha_1 : cos\,\beta_1 : cos\,\gamma_1 = \frac{1}{\mathfrak{C}_1}:\frac{1}{\mathfrak{C}_1}:\frac{1}{\mathfrak{B}_1}\,,$$
$$cos\,\alpha_2 : cos\,\beta_2 : cos\,\gamma_2 = \frac{1}{\mathfrak{C}_2}:\frac{1}{\mathfrak{C}_2}:\frac{1}{\mathfrak{B}_2}\,,$$
$$cos\,\alpha_3 : cos\,\beta_3 : cos\,\gamma_3 = \frac{1}{\mathfrak{C}_3}:\frac{1}{\mathfrak{C}_3}:\frac{1}{\mathfrak{B}_3}\,.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 9., 10., 11. folgt hieraus

$$cos\,\alpha_1\,cos\,\alpha_2+cos\,\beta_1\,cos\,\beta_2+cos\,\gamma_1\,cos\,\gamma_2=0\,,$$
$$cos\,\alpha_2\,cos\,\alpha_3+cos\,\beta_2\,cos\,\beta_3+cos\,\gamma_2\,cos\,\gamma_3=0\,,$$
$$cos\,\alpha_1\,cos\,\alpha_3+cos\,\beta_1\,cos\,\beta_3+cos\,\gamma_1\,cos\,\gamma_3=0\,.$$

Diese Formeln zeigen, dass die drei Symmetrieebenen einer Fläche zweiter Ordnung mit einander rechte Winkel bilden.

§ 8. Gerade Linien auf Flächen zweiter Ordnung.

1. Wird der Punkt Π auf der Fläche II. O. $f=0$ angenommen, so ist in der Gleichung § 7, No. 1, 1 $f(\xi,\,\eta,\,\zeta)=0$. Soll nun die in der Richtung α, β, γ durch Π gezogene Gerade ganz auf der Fläche $f=0$ liegen, so muss die Gleichung

$$(f_\xi'\cdot cos\,\alpha+f_\eta'\cdot cos\,\beta+f_\zeta'\cdot cos\,\gamma)\,r+(A\,cos^2\alpha+\ldots+F\,cos^2\gamma)\,r^2=0$$

identisch sein; die Winkel α, β, γ müssen also den Gleichungen genügen

1. $$f_\xi'\cdot cos\,\alpha+f_\eta'\cdot cos\,\beta+f_\zeta'\cdot cos\,\gamma=0\,,$$

2. $$A\,cos^2\alpha+2B\,cos\,\alpha\,cos\,\beta+2C\,cos\,\alpha\,cos\,\gamma+D\,cos^2\beta+2E\,cos\,\beta\,cos\,\gamma+F\,cos^2\gamma=0.$$

Die Gleichung 1. zeigt, dass die durch Π gehenden Geraden der Fläche auf der Tangentenebene des Punktes liegen (§ 5, No. 3); aus der Gleichung 2. folgt, dass sie den Mantellinien des Asymptotenkegels parallel sind (wobei man beim hyperbolischen Paraboloide die beiden Asymptotenebenen als einen ausgearteten Kegel betrachten kann).

2. Für das hyperbolische Paraboloid ergiebt sich hieraus der Satz: Durch jeden Punkt eines hyperbolischen Paraboloids gehen zwei Gerade, die ganz auf der Fläche liegen; die eine ist der einen Asymptotenebene, die andere der andern parallel.

Das hyperbolische Paraboloid wird daher von zwei Systemen von Geraden bedeckt; die Geraden jedes Systems sind einer Asymptotenebene parallel; durch jeden Punkt der Fläche geht eine Gerade jedes Systems. Die Geraden desselben Systems schneiden sich nicht; denn sonst würden durch den Schnittpunkt zwei derselben Asymptotenebene parallele Geraden der Fläche gehen. Legt man durch eine Gerade g der Fläche und durch einen Punkt P auf einer Geraden h des andern Systems eine Ebene T, so schneidet diese die Fläche f in einem Kegelschnitte, von dem die Gerade g ein Theil ist; zu der Schnittlinie

gehört daher noch eine zweite Gerade, die durch P geht; diese zweite Gerade ist also eine der beiden durch P gehenden Geraden der Fläche. Da diese zweite Gerade nicht desselben Systems sein kann wie g (denn zwei Gerade desselben Systems schneiden sich nicht), so folgt, dass T die Fläche in den Geraden g und h schneidet, dass also g und h sich schneiden. Wir schliessen daher: Jede Gerade des einen Systems wird von jeder Geraden des andern Systems geschnitten.

Jede Ebene, die durch g geht, schneidet f in einem Kegelschnitte, von welchem g ein Theil ist, der also aus g und aus einer Geraden h des andern Systems besteht, und berührt daher die Fläche in dem Punkte, in welchem g und h sich durchschneiden. Wir schliessen daher: Es giebt zwei Systeme von Ebenenbüscheln, welche aus lauter Tangentenebenen eines hyperbolischen Paraboloids bestehen; jede Tangentenebene gehört zu zwei solchen Büscheln, die verschiedenen Systemen angehören. Die Träger der Büschel sind die auf der Fläche liegenden Geraden.

3. Die allgemeine Gleichung der Fläche II. O. enthält zehn Coefficienten, deren Verhältnisse eindeutig berechnet werden, wenn neun Punkte der Fläche bekannt sind; denn durch jeden Punkt P_r ist eine Gleichung

$$f_r = Ax_r^2 + 2Bx_r y_r + \ldots + 2Jz_r + K = 0$$

gegeben, die linear und homogen für die Coefficienten $A, B, \ldots J, K$ ist. Eine Fläche II. O. ist daher durch neun Punkte bestimmt.

Wenn drei Punkte einer Fläche in gerader Linie liegen, so liegt diese Gerade ganz auf der Fläche; denn die Coordinaten der Schnittpunkte einer Geraden und einer Fläche II. O. hängen von einer quadratischen Gleichung ab, und wenn dieser von mehr als zwei Wurzeln genügt wird, so ist sie identisch.

Sind von einem hyperbolischen Paraboloide zwei Gerade α und α_1 gegeben, die sich nicht schneiden, so gelten diese daher für zusammen sechs Punkte der Fläche; sind noch zwei Gerade β und β_1 gegeben, deren jede die Geraden α und α_1 schneidet, so dass α, α_1 und β, β_1 die Gegenseiten eines unebenen Vierseits bilden, so gelten die Geraden β und β_1, da jede durch zwei gegebene Punkte der Fläche, nämlich durch Punkte auf α und α_1 gelegt ist, zusammen für zwei neue Punkte. Ein unebenes Vierseit, das ganz auf einer Fläche II. O. enthalten ist, zählt also für acht Punkte der Fläche.

Da für die Coefficienten in der Gleichung eines Paraboloids die Bedingung gilt

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{vmatrix} = 0,$$

so kann auf Grund dieser Gleichung einer der Coefficienten, z. B. F, durch die andern ausgerechnet werden; man bedarf daher zur Bestimmung eines Paraboloids eines Punktes weniger als im allgemeinen Falle. Wir sehen daher: Ein Paraboloid ist durch acht Punkte bestimmt. Ein hyperbolisches Paraboloid ist durch ein unebenes Vierseit bestimmt.

Um das Paraboloid zu construiren, auf welchem das unebene Vierseit der Geraden α, β, α_1, β_1 liegt, bemerken wir, dass eine Asymptotenebene parallel den Geraden α und α_1, die andere parallel β und β_1 ist. Da nun alle Geraden des Systems, zu welchem β und β_1 gehören, die beiden Geraden α und α_1 des andern Systems schneiden und der letzteren Asymptotenebene parallel sind, so erhält man das ganze Paraboloid, wenn man eine Gerade γ längs der Geraden

α und α_1 so fortführt, dass sie einer Ebene E parallel bleibt, die zu β und β_1 parallel ist.

Die Punkte P und Q, in welchen α und α_1 von der Geraden γ in irgend einem Augenblicke getroffen wird, sind daher zugleich Schnittpunkte der Geraden α und α_1 mit einer zu E parallelen Ebene. Sind nun P_1, Q_1 und P_2, Q_2 die Schnittpunkte von α, α_1 mit β und β_1, so hat man die Proportion

$$P_1P : Q_1Q = P_1P_2 : Q_1Q_2 .$$

Dies ergiebt: Die Geraden α, α_1 etc. eines hyperbolischen Paraboloids werden von den Geraden des andern Systems γ in ähnlichen Punktreihen geschnitten, und zwar entsprechen sich die Punkte, die auf derselben Geraden γ liegen.

Umgekehrt schliesst man leicht, dass, wenn zwei ähnliche Punktreihen auf zwei Geraden α und α_1 liegen, die sich nicht schneiden, die Verbindungsgeraden je zweier entsprechenden Punkte einer festen Ebene parallel sind. Wir schliessen daher: Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier ähnlichen Punktreihen bedecken ein hyperbolisches Paraboloid; sie bilden die Geraden eines Systems, während die Träger α und α_1 der Punktreihen zu dem andern Systeme gehören.

4. Um zu erfahren, ob durch einen Punkt Π eines Hyperboloids

$$f \equiv Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 - 1 = 0$$

reale Gerade gezogen werden können, die ganz auf der Fläche liegen, haben wir nachzusehen, ob in der Tangentenebene T des Punktes Π durch Π Gerade gezogen werden können, welche Mantellinien des Asymptotenkegels parallel sind. Legt man durch den Mittelpunkt der Fläche eine Ebene T_1 parallel zu T, so lassen sich in T durch Π zwei reale verschiedene, zwei reale zusammenfallende, oder keine realen Geraden parallel zu Mantellinien des Asymptotenkegels legen, je nachdem derselbe von der Parallelebene T_1 in zwei Mantellinien geschnitten, oder entlang einer Mantellinie berührt wird, oder ausser der Spitze keine realen Schnittpunkte mit T_1 gemein hat.

Die Gleichungen des Asymptotenkegels und der Tangentialebene T sind

1. $$k \equiv Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 = 0 ,$$

2. $$T \equiv A\xi x + D\eta y + F\zeta z - 1 = 0 .$$

Die Gleichung der den Mittelpunkt enthaltenden Paralellebene T_1 ist demnach

3. $$T_1 \equiv A\xi x + D\eta y + F\zeta z = 0 .$$

Multiplicirt man 1. mit $F\zeta^2$ und setzt dann für $F^2\zeta^2z^2$ den Werth aus 3. ein, so entsteht

$$F\zeta^2(Ax^2 + Dy^2) + (A\xi x + D\eta y)^2 = 0 ,$$

oder besser geordnet

4. $$(FA\zeta^2 + A^2\xi^2)x^2 + 2AD\xi\eta \cdot xy + (FD\zeta^2 + D^2\eta^2)y^2 = 0 .$$

Dies ist die Gleichung der Horizontalprojection des Schnittes von k und T; sie stellt zwei durch den Nullpunkt gehende Gerade dar; dieselben sind real verschieden, zusammenfallend, oder imaginär, je nachdem die Gleichung 4., nach x aufgelöst, zwei reale verschiedene, zusammenfallende, oder imaginäre Wurzeln hat, je nachdem also

$$A^2D^2\xi^2\eta^2 - (FD\zeta^2 + D^2\eta^2)(FA\zeta^2 + A^2\xi^2) \gtreqless 0 .$$

Multiplicirt man die beiden Binome, so erhält man

5. $$- ADF\zeta^2(A\xi^2 + D\eta^2 + F\zeta^2) \gtreqless 0 .$$

Da nun Π auf dem Hyperboloide liegt, so ist $A\xi^2 + D\eta^2 + F\zeta^2 = 1$, das Kriterium 5. geht daher über in

6. $$-ADF \gtreqless 0.$$
Das zweischalige Hyperboloid hat die Gleichung
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$
also ist hier $-ADF = -\frac{1}{a^2 b^2 c^2}$;
das einschalige Hyperboloid hat die Gleichung
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$
folglich ist $-ADF = \frac{1}{a^2 b^2 c^2}$.

Hieraus folgt: Auf dem zweischaligen Hyperboloide liegen keine realen Geraden. Durch jeden Punkt eines einschaligen Hyperboloids lassen sich zwei reale Gerade auf der Fläche ziehen.

Die durch einen Punkt eines einschaligen Hyperboloids gehenden Geraden fallen nur dann zusammen, wenn für diesen Punkt
$$A\xi^2 + D\eta^2 + F\zeta^2 = 0,$$
also wenn der Punkt zugleich auf dem Asymptotenkegel liegt. Da nun die Mantellinien des Asymptotenkegels mit dem Hyperboloid unendlich ferne Punkte gemein haben, und da ferner zwei Gerade, die im unendlich Fernen sich unter einem verschwindend kleinen Winkel schneiden, parallel sind, so folgt der Satz: Die Geraden eines einschaligen Hyperboloids sind paarweis parallel.

5. Wie beim hyperbolischen Paraboloide (No. 2), so überzeugt man sich auch hier, dass jede Ebene, die durch eine Gerade g eines Hyperboloids gelegt wird, die Fläche in einer zweiten Geraden h schneidet, und Tangentenebene der Fläche in dem Schnittpunkte P der Geraden g und h ist; sowie, dass durch jeden Punkt P des Hyperboloids eine Gerade h desselben geht, welche die Gerade g schneidet. Die zweite Gerade g_1, die ausser h durch P geht, kann die Gerade g nicht schneiden; denn sonst würden die drei Geraden g, h, g_1 auf einer Ebene liegen, diese Ebene würde also mit der Fläche ein Gebilde dritter Ordnung, nämlich den Verein der drei Geraden g, h, g_1, gemein haben — im Widerspruche mit der Thatsache, dass eine Ebene mit einer Fläche II. O. nur ein Gebilde zweiter Ordnung gemein hat. Sämmtliche Gerade eines einschaligen Hyperboloids zerfallen also in zwei Systeme: in solche, die eine gegebene Gerade g der Fläche schneiden, und in solche, die g nicht schneiden; durch jeden Punkt der Fläche geht von jedem der beiden Systeme eine Gerade. Zwei Gerade h und h_1, welche g schneiden, können sich ebenfalls nicht schneiden, da sonst das Dreieck der Geraden h, h_1, g auf der Fläche liegen würde. Jedes der beiden Systeme von Geraden, die auf einem einschaligen Hyperboloide liegen, enthält also solche Gerade, die sich nicht schneiden, während jede Gerade des einen Systems von jeder Geraden des andern Systems geschnitten wird.

Da jede durch eine Gerade eines Hyperboloids gelegte Ebene die Fläche in einem Punkte dieser Geraden berührt, so hat man den Satz: Es giebt zwei Systeme von Ebenenbüscheln, deren Ebenen sämmtlich Tangentenebenen eines einschaligen Hyperboloids sind; jede Tangentenebene des Hyperboloids gehört zu zwei Büscheln verschiedener Systeme; die Träger dieser Systeme von Tangentialebenen-Büscheln sind die beiden Systeme von Geraden des Hyperboloids.

6. Durch drei Gerade g_1, g_2, g_3, die nicht zu zweien auf einer Ebene liegen, ist ein Hyperboloid bestimmt, denn diese Geraden des Hyperboloids sind gleichbedeutend mit neun gegebenen Punkten, deren je drei auf einer der Geraden liegen. Die Geraden g_1, g_2, g_3 schneiden sich nicht, sie gehören also zu demselben Systeme; es werden daher alle drei von jeder Geraden h des andern Systems geschnitten. Da nun durch jeden Punkt der Geraden g nur eine Gerade gelegt werden kann, welche g_2 und g_3 schneidet, so folgt: Wenn eine Gerade h sich so bewegt, dass sie in allen ihren Lagen drei gegebene Gerade g_1, g_2, g_3 schneidet, so beschreibt sie ein einschaliges Hyperboloid; die verschiedenen Lagen von h sind die Geraden des einen Systems, die Geraden g_1, g_2, g_3 gehören zu dem andern Systeme.

Durch ein unebenes Vierseit und einen Punkt A ist ein einschaliges Hyperboloid bestimmt. Die Geraden des Hyperboloids, die durch A gehen, sind die Geraden, welche die Gegenseiten des unebenen Vierecks schneiden.

7. Die Gerade h, die durch einen Punkt P der Geraden g_1 geht und die Geraden g_2, g_3 schneidet, wird dadurch erhalten, dass man den Punkt P durch Ebenen T und T' projicirt, die durch g_2 und g_3 gelegt sind; die Schnittgerade dieser Ebenen ist die gesuchte Gerade.

Rückt nun P auf g_1 fort, so beschreiben die Ebenen T und die Ebenen T' zwei Ebenenbüschel, welche die Träger g_2 und g_3 haben; diese Büschel, die aus lauter Tangentenebenen der Fläche bestehen, sind projectiv mit der Punktreihe auf h, die sie projiciren, und mithin auch unter einander projectiv.

Wir sehen daher: Je zwei zu demselben Systeme gehörige Büschel von Tangentenebenen eines einschaligen Hyperboloids (und eines hyperbolischen Paraboloids, auf welches man denselben Beweisgang anwenden kann) sind projectiv; und zwar entsprechen sich die Ebenen, welche dieselbe Gerade des andern Systems enthalten, also zusammen ein Büschel des andern Systems bilden.

Man kann die Gerade g_1 durch irgend eine andere Gerade g desselben Systems ersetzen; g wird von allen Geraden h des andern Systems geschnitten, in jedem Punkte von g treffen sich also zwei entsprechende Ebenen der Büschel, deren Träger g_2 und g_3 sind; mithin werden die Geraden, die zu demselben Systeme gehören, von den Geraden des andern Systems in projectiven Punktreihen getroffen, und zwar entsprechen sich die Punkte, die auf derselben Geraden des andern Systems liegen.

8. Umgekehrt schliesst man leicht: Der Ort der Schnittgeraden je zweier entsprechenden Ebenen zweier projectiven Ebenenbüschel, deren Träger nicht auf einer Ebene liegen, ist ein einschaliges Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid.

Denn sind in den beiden Büscheln die Ebenen $T_1, T_2, T_3 \barwedge T_1', T_2', T_3'$ und sind die Gleichungen von T_3 und T_3'

$$T_3 \equiv a_1 T_1 + a_2 T_2 = 0, \quad T_3' \equiv b_1 T_1' + b_2 T_2' = 0,$$

so sind die Gleichungen zweier entsprechenden Ebenen

$$T \equiv \lambda_1 a_1 T_1 + \lambda_2 a_2 T_2 = 0, \quad T \equiv \lambda_1 b_1 T_1' + \lambda_2 b_2 T_2' = 0.$$

Die Schnittpunkte beider Ebenen genügen der Gleichung, die sich durch Elimination von λ_1 und λ_2 aus $T = 0$ und $T' = 0$ ergiebt, also der Gleichung

$$a_1 b_2 T_1 T_2' - a_2 b_1 T_2 T_1' = 0;$$

dies ist eine Gleichung zweiten Grades.

Wenn die beiden Ebenenbüschel ein hyperbolisches Paraboloid erzeugen, so sind die beiden Träger der einen, und die Schnittlinien je zweier entsprechenden Ebenen der andern Asymptotenebene parallel; daher schneiden je zwei entsprechende Ebenen die letztere Asymptotenebene in parallelen Geraden, erzeugen also auf ihr zwei projective Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen parallel sind. Durch Umkehrung findet man: Hat man auf einer Ebene E zwei congruente Strahlbüschel S und S', deren entsprechende Strahlen parallel sind, zieht durch die Träger zwei nicht auf E liegende sich nicht schneidende Gerade a und a' und projicirt S und S' von a und a' aus, so schneiden sich je zwei entsprechende Ebenen der so erzeugten Ebenenbüschel in den Geraden eines hyperbolischen Paraboloids; eine Asymptotenebene desselben ist parallel zu E, die andere parallel zu a und a'.

Ferner: Die Ebenenbüschel, deren Träger die entsprechenden Punkte zweier projectiven Punktreihen verbinden (die nicht auf derselben Ebene liegen) umhüllen (berühren) ein einschaliges Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid.

Sind nämlich entsprechende Punktpaare der beiden Reihen

$$P_1, P_2, P_3 \barwedge P_1', P_2', P_3', \text{ und ist}$$

$$P_3 \equiv a_1 P_1 + a_2 P_2, \quad P_3' \equiv b_1 P_1' + b_2 P_2',$$

so sind die Gleichungen irgend zweier entsprechenden Punkte

$$P \equiv \lambda_1 a_1 P_1 + \lambda_2 a_2 P_2 = 0, \quad P' \equiv \lambda_1 b_1 P_1' + \lambda_2 b_2 P_2' = 0.$$

Die Ebenen, welche durch zwei entsprechende Punkte gehen, erfüllen die Gleichung, welche durch Elimination von λ_1 und λ_2 aus $P = 0$ und $P' = 0$ hervorgeht

$$a_1 b_2 P_1 P_2' - a_2 b_1 P_2 P_1' = 0.$$

Dies ist die Gleichung der umhüllten Fläche in Ebenencoordinaten. Man kann dem soeben bewiesenen Satze auch folgende Fassung geben: Der Ort der Geraden h, welche je zwei entsprechende Punkte zweier projectiven Punktreihen verbinden, deren Träger nicht auf derselben Ebene liegen, ist ein einschaliges Hyperboloid; die Geraden h bilden das eine System von Geraden des Hyperboloids, die Träger der beiden Punktreihen gehören zu dem anderen Systeme.

Wir bemerken schliesslich, dass die Flächen zweiter Ordnung, welche Gerade enthalten, unter der Bezeichnung Regelflächen zweiten Grades zusammengefasst werden.

§ 9. Schnittcurve und Schnittpunkte von Flächen zweiter Ordnung. Kreisschnitte.

1. Die Schnittpunkte zweier Flächen II. O. genügen den Gleichungen der beiden Flächen

$f \equiv Ax^2 + 2Bxy + \ldots + 2Jz + K = 0$ und $g \equiv A'x^2 + 2B'xy + \ldots + 2J'z + K' = 0$; eliminirt man der Reihe nach x, y und z aus diesen Gleichungen, so erhält man die Gleichungen der drei Projectionen der Schnittcurve der beiden Flächen; diese drei Gleichungen sind vom vierten Gerade; die Projectionen der Schnittcurven zweier Flächen II. O. sind also Curven vierter Ordnung. Um die Coordinaten der Punkte zu erhalten, in denen die Schnittcurve der Flächen f und g von einer Ebene

$$T \equiv mx + ny + pz + q = 0$$

geschnitten wird, kann man z mittelst der Gleichung $T = 0$ auch den Gleichungen $f = 0$ und $g = 0$ entfernen; man erhält dann zwei Gleichungen zweiten Grades für x und y; bestimmt man die vier gemeinsamen Wurzelsysteme, und zu jedem Werthsysteme durch die Gleichung $T = 0$ den zugehörigen Werth von z, so erhält man die Coordinaten der gesuchten Schnittpunkte. Man sieht hieraus: Die Schnittcurve zweier Flächen II. O. wird von einer Ebene in vier Punkten geschnitten.

Man bezeichnet daher diese Schnittcurve als eine Raumcurve vierter Ordnung; indem man als Raumcurve $n$ter Ordnung eine Raumcurve bezeichnet, die von einer Ebene in n Punkten geschnitten wird. Zum Unterschiede von Raumcurven vierter Ordnung, die nicht auf zwei Flächen II. O. liegen, bezeichnet man die Schnittcurve zweier Flächen II. O. als Raumcurve vierter Ordnung erster Species.

2. Wenn eine Fläche II. O. die acht Punkte $P_1, \ldots P_8$ enthält, so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} &Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + \ldots + 2Jz + K = 0, \\ &Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + 2Cx_1z_1 + Dy_1^2 + \ldots + 2Jz_1 + K = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &Ax_8^2 + 2Bx_8y_8 + 2Cx_8z_8 + Dy_8^2 + \ldots + 2Jz_8 + K = 0. \end{aligned}$$

Der Verein dieser Gleichungen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$f = \begin{vmatrix} Ax^2 + 2Bxy, & xz & y^2 & yz & z^2 & x & y & z & 1 \\ Ax_1^2 + 2Bx_1y_1, & x_1z_1 & y_1^2 & y_1z_1 & z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ Ax_2^2 + 2Bx_2y_2, & x_2z_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Ax_8^2 + 2Bx_8y_8, & x_8z_8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z_8 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Bedingung dafür, dass P auf einer durch die gegebenen Punkte gehenden Fläche II. O. liegt, ist also der allgemeine Form der Gleichung irgend einer durch $P_1, \ldots P_8$ gehende Fläche II. O. Die Function f zerfällt in die Summe zweier quadratischen Functionen

$$f = A \cdot \varphi + 2B \cdot \psi,$$

wobei φ und ψ aus f hervorgehen, wenn man die erste Colonne durch $x^2, x_1^2, x_2^2, \ldots x_8^2$, bez. durch $xy, x_1y_1, \ldots x_8y_8$ ersetzt. Die eindeutig bestimmten Flächen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ enthalten die gegebenen acht Punkte; denn wenn man in φ oder ψ die Coordinaten x, y, z durch die Coordinaten eines der Punkte $P_1, \ldots P_8$ ersetzt, so wird die erste Zeile in φ und ψ mit einer der übrigen identisch, mithin verschwinden φ und ψ. Alle Punkte, deren Coordinaten die beiden Gleichungen erfüllen

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \psi = 0,$$

genügen auch der Gleichung

$$f = A\varphi + B\psi = 0.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz: Alle die unendlich vielen Flächen II. O., die durch acht gegebene Punkte gehen, haben eine durch diese Punkte gehende Raumcurve vierter Ordnung mit einander gemein; diese Curve ist der Schnitt zweier durch die Coordinaten der gegebenen Punkte vollständig bestimmten Flächen II. O. ($\varphi = 0$ und $\psi = 0$) und mithin selbst durch die acht Punkte eindeutig bestimmt.

3. Wenn eine Fläche II. O. durch acht auf einer Raumcurve C

vierter Ordnung erster Species beliebig gewählte Punkte $P_1, \ldots P_8$ hindurch geht, so geht sie durch alle Punkte dieser Curve. Denn zwei Flächen f_1 und f_2, deren Schnitt die Curve C ist, gehen beide durch die Punkte $P_1, \ldots P_8$, mithin enthalten sie auch die durch diese Punkte bestimmte Raumcurve vierter Ordnung, folglich ist dieselbe mit C identisch. Durch eine Raumcurve IV. O. 1. Sp. lassen sich unzählig viele Flächen zweiter Ordnung legen. Diese Flächen bilden ein Büschel, dessen Träger die Raumcurve ist, die sie gemein haben.

4. Haben zwei Flächen II. O. eine Gerade G gemein, so schneiden sie sich ausserdem noch in einer realen Curve; denn jede Ebene E, die durch G gelegt wird, schneidet die beiden Flächen noch ausserdem jede in einer realen Geraden, und der endlich oder unendlich ferne Punkt P dieser beiden Geraden ist ein gemeinsamer Punkt der beiden Flächen II. O.; dreht sich E um die Gerade G, so beschreibt P die Curve, in welcher die beiden Flächen ausserhalb G sich schneiden.

Diese Schnittcurve hat mit einer Ebene nur noch drei Punkte gemein, und ist daher eine Raumcurve dritter Ordnung.

5. Wenn fünf Punkte der Durchschnittscurve zweier Flächen II. O. $f = 0$ und $g = 0$ auf einer Ebene T liegen, so haben die Flächen den durch diese fünf Punkte auf T bestimmten Kegelschnitt mit einander gemein; denn die Ebene T trifft jede der beiden Flächen in einem Kegelschnitte, der durch die fünf Punkte geht, mithin sind diese beiden Kegelschnitte identisch. Wählt man T zur XY-Ebene eines Coordinatensystems, und sind

$$f \equiv Ax^2 + 2Bxy + \ldots + K = 0, \quad g \equiv A_1x^2 + 2B_1xy + \ldots + K_1 = 0$$

die Gleichungen der Flächen in Bezug auf dieses System, so muss die Substitution $z = 0$ in f und g auf Gleichungen führen, die gleichbedeutend sind, die also nur um einen constanten Faktor von einander abweichen. Ist n dieser Faktor, so hat man daher

$$Ax^2 + 2Bxy + Dy^2 + 2Gx + 2Hy + K \equiv n(A_1x^2 + 2B_1xy + D_1y^2 + \ldots + K_1).$$

Bildet man die Differenz $f - ng$, so erhält man

$$f - ng \equiv z[2(C - C_1)x + 2(E - E_1)y + (F - F_1)z + 2(J - J_1)].$$

Die Punkte, welche $f = 0$ und $g = 0$ erfüllen, und für welche nicht $z = 0$ ist, genügen somit der Gleichung

$$T_1 \equiv 2(C - C_1)x + 2(E - E_1)y + (F - F_1)z + 2(J - J_1) = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer bestimmten Ebene; je nachdem diese Ebene f und g in einem realen oder imaginären Kegelschnitte trifft, haben die beiden Flächen ausser dem auf T liegenden Kegelschnitte noch diesen realen oder imaginären Kegelschnitt gemein; die Ebene T_1 dieses Kegelschnitts ist immer real. Wir schliessen daher: Wenn fünf Schnittpunkte 1, 2, 3, 4, 5 zweier Flächen II. O. auf einer Ebene T liegen, so zerfällt die Schnittcurve der beiden Flächen in zwei Kegelschnitte; der eine auf T liegende ist durch die Punkte 1 . . 5 bestimmt, der andere kann real oder imaginär sein; die Ebene, die ihn enthält, ist auch im letzteren Falle real.

Oder: Wenn zwei Flächen II. O. einen Kegelschnitt gemein haben, so haben sie noch einen realen oder imaginären Kegelschnitt gemein, dessen Ebene stets real ist.

Bezieht man die Flächen f und g auf ein beliebiges Coordinatensystem, und hat man dabei u. A. die Substitution auszuführen

$$z = \alpha x' + \beta y' + \gamma z',$$

wobei x', y', z' die Coordinaten im neuen Systeme sind, so erhält man, wenn f', g', T_1' die Functionen sind, in welche f, g und T in Folge der Transformation übergehen

$$f' - ng' \equiv (\alpha x' + \beta y' + \gamma z')\, T_1'.$$

Hieraus folgt: Wenn zwei Flächen II. O. $f = 0$ und $g = 0$ sich in zwei ebenen Curven schneiden, so kann man die Function g mit einer geeigneten Zahl multipliciren, so dass die Differenz $f - ng$ in zwei lineare Factoren zerfällt, die, gleich Null gesetzt, die Gleichungen der Ebenen der beiden Schnittcurven sind.

6. Wenn eine Fläche II. O.

$$1. \qquad Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + \ldots + 2Jz + K = 0$$

sieben gegebene Punkte $P_1, \ldots P_7$ enthält, so bestehen die Gleichungen

$$2. \qquad \begin{array}{l} Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + 2Cx_1z_1 + \ldots + 2Jz_1 + K = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ax_7^2 + 2Bx_7y_7 + 2Cx_7z_7 + \ldots + 2Jz_7 + K = 0. \end{array}$$

Der Verein der Gleichungen 1. und 2. wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$f \equiv \begin{vmatrix} Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz, & y^2 & yz & z^2 & x & y & z & 1 \\ Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + 2Cx_1z_1, & y_1^2 & y_1z_1 & z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Ax_7^2 + 2Bx_7y_7 + 2Cx_7z_7, & y_7^2 & y_7z_7 & z_7^2 & x_7 & y_7 & z_7 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die allgemeine Form der Gleichung einer Fläche II. O., die durch die sieben gegebenen Punkte geht. Die Determinante f zerfällt in drei Determinanten

$$1. \qquad f \equiv A \cdot \varphi + 2B \cdot \psi + C \cdot \chi;$$

die quadratischen Functionen φ, ψ, χ gehen aus f hervor, wenn man die erste Colonne der Reihe nach durch x^2, $x_1^2 \ldots x_7^2$, bez. xy, x_1y_1, $\ldots x_7y_7$, bez. xz, x_1z_1, $\ldots x_7z_7$ ersetzt. Aus 1. ist ersichtlich, dass alle Punkte, die den drei Flächen φ, ψ, χ gemeinsam sind, auch auf jeder Fläche II. O. liegen, die durch die gegebenen sieben Punkte hindurch geht.

Die Theorie der Gleichungen lehrt, dass drei Gleichungen zweiten Grades mit drei Unbekannten x, y, z durch acht Werthsysteme derselben befriedigt werden. Hieraus folgt, dass drei Flächen II. O. sich in acht Punkten schneiden.

Jede Fläche II. O., die durch die sieben Punkte $1, 2 \ldots 7$ geht, enthält also die acht Punkte, in denen sich die Flächen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ und $\chi = 0$ schneiden. Diese drei Flächen haben die gegebenen sieben Punkte gemein; denn wenn man in φ, ψ, φ die Coordinaten x, y, z durch x_r, y_r, z_r, $r = 1 \ldots 7$, ersetzt, so verschwinden φ, ψ, χ identisch.

Da nun durch die sieben gegebenen Punkte die Functionen φ, ψ, χ vollständig bestimmt sind, so ist auch der achte Punkt bestimmt, den die Flächen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ ausser den gegebenen sieben gemein haben. Wir schliessen daher: Alle Flächen II. O., die durch sieben gegebene Punkte gehen, enthalten noch einen achten Punkt, der durch die gegebenen bestimmt ist. Oder: Ein System von acht Schnittpunkten dreier Flächen II. O. enthält nicht lauter von einander unabhängige Punkte, sondern jeder der acht Punkte ist durch die andern sieben bestimmt.

Der Satz: »Eine Raumcurve IV. O. 1. Sp. ist durch acht Punkte bestimmt«

bedarf hiernach einer Einschränkung; diese acht Punkte dürfen nicht die acht Schnittpunkte dreier Flächen II. O. sein; durch acht Schnittpunkte dreier Flächen II. O. gehen unzählig viele Schnittcurven zweier Flächen II. O.

7. Wir untersuchen nun, ob es Ebenen giebt, die eine Fläche II. O. in einem Kreise schneiden, und beweisen hierzu zunächst folgenden Satz: Parallele Ebenen schneiden eine Fläche II. O. in ähnlichen Kegelschnitten.

Wir nehmen eine der parallelen Schnittebenen zur XY-Ebene eines Coordinatensystems; ist die Gleichung der Fläche in Bezug auf dieses System

$$f \equiv Ax^2 + 2Bxy + \ldots + K = 0,$$

so ist die Gleichung der Horizontalspur dieser Fläche

$$1. \qquad Ax^2 + 2Bxy + Dy^2 + 2Gx + 2Hy + K = 0.$$

Ist diese Curve eine Ellipse, oder eine Hyperbel, oder besteht sie aus zwei sich schneidenden Geraden, so nehmen wir die beiden Symmetrieachsen der Spur zur X- und Y-Achse, so dass die Gleichung der Spur die Form annimmt

$$Ax^2 + Dy^2 + K = 0.$$

Die Gleichung der Fläche bezüglich des neuen Systems ist daher

$$f \equiv Ax^2 + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Jz + K = 0.$$

Eine Ebene, die parallel zur XY-Ebene und von derselben um z_0 entfernt ist, schneidet die Fläche in einer Curve, deren Gleichung ist

$$Ax^2 + 2Cxz_0 + Dy^2 + 2Eyz_0 + Fz_0^2 + 2Jz_0 + K = 0.$$

Hierfür kann man schreiben

$$A\left(x + 2\frac{Cz_0}{A}x + \frac{C^2z_0^2}{A^2}\right) + D\left(y^2 + 2\frac{Ez_0}{D}y + \frac{E^2z_0^2}{D^2}\right) + Fz_0^2 + 2Jz_0 + K$$
$$- \frac{C^2z_0^2}{A} - \frac{E^2z_0^2}{D} = 0,$$

oder

$$2. \qquad A\left(x + \frac{Cz_0}{A}\right)^2 + D\left(y + \frac{Ez_0}{D}\right)^2 - K_1 = 0,$$

wobei $K_1 \equiv \frac{C^2z_0^2}{A} + \frac{E^2z_0^2}{D} - Fz_0^2 - 2Jz_0 - K.$

Die Gleichung 2. gehört einem Kegelschnitte an, dessen Achsen parallel der X- und Y-Achse sind und dessen Mittelpunkt die Coordinaten hat $\xi = -Cz_0 : A$, $\eta = -Ez_0 : D$. Die Halbachsen a_1 und b_1 dieses Kegelschnitts sind $a_1 = \sqrt{K_1 : A}$, $b_1 = \sqrt{K_1 : D}$; man hat demnach

$$a_1 : b_1 = \sqrt{D} : \sqrt{A};$$

das Verhältniss der Halbachsen hat also für alle parallelen Schnitte denselben Werth; mithin sind die Schnitte ähnlich und haben parallele Achsen.

Ist die Horizontalspur 1. eine Parabel, so wähle man die Achse derselben zur X-Achse, den Scheitel zum Nullpunkte; die Gleichung 1. geht dann über in

$$Dy^2 + 2Gx = 0;$$

die Gleichung der Fläche bezüglich des neuen Systems ist daher

$$f \equiv 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Jz = 0.$$

Der Schnitt der Fläche mit der Ebene $z = z_0$ hat die Gleichung

$$2Cxz_0 + Dy^2 + 2Eyz_0 + Fz_0^2 + 2Gx + 2Jz_0 = 0.$$

Hierfür kann man setzen

$$D\left(y + \frac{Ez_0}{D}\right)^2 + 2(G + Cz_0)\left(x + \frac{(DF - E^2)z_0^2 + 2JDz_0}{2D(G + Cz_0)}\right) = 0.$$

Der Schnitt ist daher eine Parabel, deren Achse der Achse der Spur parallel i deren Scheitel die Coordinaten hat

$$\xi = -\frac{[(DF - E^2) z_0^2 + 2JDz_0]}{2D(G + Cz_0)}, \quad \eta = -\frac{Ez_0}{D},$$

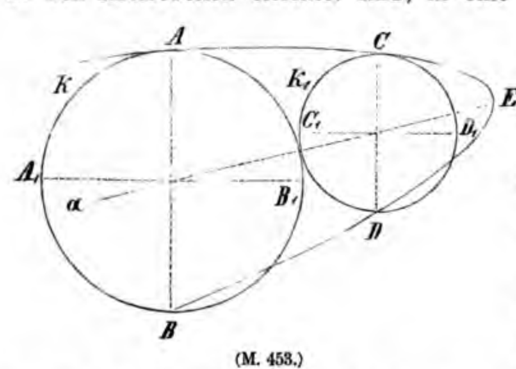
und deren Parameter $p = -(G + Cz_0) : D$ ist.

Da nun je zwei Parabeln einander ähnlich sind, so ist damit der Satz bewiesen.

Insbesondere folgt: Wird eine Fläche II. O. von einer Ebene in einem Kreise geschnitten, so wird die Fläche auch von allen Parallelebenen in Kreisen geschnitten.

8. Die Fläche II. O. $f = 0$ enthalte den Kreis K. Legt man durch K und durch einen anderen auf f liegenden Punkt eine Kugel S, so schneidet dieselbe die Fläche f ausser in K noch in einer ebenen Curve, hat also mit f noch einen Kreis K_1 gemein.

Die Ebene dieses Kreises ist im Allgemeinen nicht zu K parallel. Denn sind K und K_1 parallel, so fallen die Geraden, welche in den Centren normal zu den Kreisebenen errichtet sind, in eine Gerade α zusammen, da sie beide durch das Centrum der Kugel S gehen und parallel sind. Die Gerade α ist Symmetrieachse für jeden ebenen Schnitt der Fläche f, der α enthält, da α zwei parallele Sehnen jedes solchen Schnittes, z. B. AB und CD senkrecht halbirt. Dreht man den durch α gehenden ebenen Schnitt A_1, B_1, C_1, D_1 der Fläche f um α bis die Ebene in die ebenfalls durch α gehende Schnittebene $ABCD$ fällt, so fallen A und A_1, B und B_1, C und C_1 zusammen. Da nun die beiden Schnittcurven noch die beiden Punkte gemein haben, in welchem f von α geschnitten wird, so folgt, dass beide ebene Schnitte congruent sind; mithin sind alle durch α gehenden ebenen Schnitte congruent; folglich ist die Fläche eine Rotationsfläche und α ihre Rotationsachse. Wenn also f keine Rotationsfläche ist, so sind die Kreisebenen K und K_1 nicht parallel; wir schliessen daher: Wenn auf eine Fläche II. O., die keine Rotationsfläche ist, Kreise liegen, so giebt es zwei Schaaren von Parallelebenen, welche die Fläche in Kreisen schneiden.



(M. 453.)

9. Ueber das Vorhandensein von Kreisen auf einer Fläche II. O. werden wir nun in der Weise entscheiden, dass wir die Bedingungen untersuchen, unter denen die Schnittcurve der Fläche f und einer Kugel S in zwei ebene Curven zerfällt. Wir werden die Untersuchung für die einzelnen Flächenarten der Reihe nach durchführen. Vorerst bemerken wir noch, dass beim hyperbolischen Cylinder, beim parabolischen Cylinder und beim hyperbolischen Paraboloide von Kreisschnitten nicht die Rede sein kann. Denn jede Ebene schneidet einen hyperbolischen Cylinder sowie ein hyperbolisches Paraboloid in einer Curve, welche Punkte im Unendlichfernen hat, nämlich die Punkte, die auf den Schnittgeraden der Ebene E mit den beiden Asymptotenebenen der Fläche gelegen sind. Jeder ebene Schnitt eines hyperbolischen Cylinders ist also eine Hyperbel oder besteht aus zwei parallelen Geraden, je nachdem die Schnittebene der Mantellinien nicht parallel oder parallel ist; und jeder ebene Schnitt eines hyperbolischen Paraboloids ist eine Hyperbel oder eine Parabel, je nachdem die Ebene

der Achse nicht parallel oder parallel ist. Jeder ebene Schnitt eines parabolischen Cylinders ist eine Parabel oder besteht aus zwei Mantellinien.

10. Kreisschnitte des elliptischen Cylinders. Die Mittelpunkte aller ebenen Schnitte eines Cylinders liegen auf der Achse des Cylinders; wenn daher Kreise auf einem Cylinder liegen, so kann man jeden Punkt der Cylinderachse als Centrum einer Kugel wählen, die einen Kreisschnitt enthält. Soll die um den Nullpunkt mit dem Radius r beschriebene Kugel

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

den elliptischen Kegel

$$f \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

in Kreisen schneiden, so muss für eine bestimmte Wahl des Faktors n die Differenz

$$1. \qquad f - n \cdot S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 - n(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)$$

in zwei reale lineare Faktoren zerfallen. Hierzu ist zunächst erforderlich, dass die Fläche $f - nS = 0$ unendlich viele Doppelpunkte habe, dass also für die Function $f - nS$ die Bedingungen gelten

$$\Delta = 0, \quad \Delta_1 = 0.$$

Nun ist in unserm Falle

$$\Delta = -\left(\frac{1}{a^2} - n\right)\left(\frac{1}{b^2} - n\right) n \cdot (nr^2 - 1), \quad \Delta_1 \equiv -\left(\frac{1}{a^2} - n\right)\left(\frac{1}{b^2} - n\right) \cdot n.$$

Die Gleichungen $\Delta = 0$ und $\Delta_1 = 0$ haben die Wurzeln gemein

$$n = 0, \quad n = \frac{1}{a^2}, \quad n = \frac{1}{b^2}.$$

Die erste Wurzel führt zu keiner Lösung unserer Aufgabe. Die Wurzeln $n = 1 : a^2$ und $n = 1 : b^2$ liefern

$$2. \qquad f - \frac{1}{a^2} S \equiv \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) y^2 - \frac{1}{a^2} z^2 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right),$$

$$3. \qquad f - \frac{1}{b^2} S \equiv \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) x^2 - \frac{1}{b^2} z^2 - \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right).$$

Die Gleichungen

$$f - \frac{1}{a^2} S = 0 \quad \text{und} \quad f - \frac{1}{b^2} S = 0$$

sind die Gleichungen zweier Cylinder zweiten Grades, die durch die Schnittcurve von f und S gehen und deren Mantellinien parallel zur X-Achse, bez. zur Y-Achse sind. Diese beiden Cylinder zerfallen in zwei Ebenen, wenn $r^2 = a^2$, bez. $r^2 = b^2$. Man erhält unter diesen Voraussetzungen

$$4. \qquad \varphi \equiv f - \frac{1}{a^2}(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) \equiv \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) y^2 - \frac{1}{a^2} z^2,$$

$$5. \qquad \varphi_1 \equiv f - \frac{1}{b^2}(x^2 + y^2 + z^2 - b^2) \equiv \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) x^2 - \frac{1}{b^2} z^2.$$

Ist nun $a > b$, so ist in φ der Coefficient von y^2 positiv, mithin ist $\varphi = 0$ die Gleichung des Vereins der beiden realen Ebenen

$$T \equiv \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} \cdot y - \frac{1}{a} z = 0 \quad \text{und} \quad T_1 \equiv \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} \cdot y + \frac{1}{a} z = 0.$$

Die Gleichung $\varphi_1 = 0$ gehört hingegen zu zwei imaginären Ebenen, da der Coefficient von x^2 negativ ist.

Es giebt also beim elliptischen Cylinder zwei Systeme von Kreisschnitten;

dieselben sind parallel zu den Ebenen T und T_1. Die Kreisschnitte eines elliptischen Cylinders sind normal zu der Symmetrieebene, in welcher die kleine Achse des Cylinders liegt, und sind gegen einen Normalschnitt des Cylinders um den Winkel α geneigt, für welchen

$$tang\,\alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} : \frac{1}{a} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

11. Kreisschnitte des Kegels zweiter Ordnung. Die Gleichung des Kegels sei

$$1. \qquad C \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

die Gleichung einer Kugel, deren Centrum die Coordinaten d, e, f und die den Radius r hat, ist

$$2. \qquad \varphi \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2dx - 2ey - 2fz + p = 0,$$

wenn $p = d^2 + e^2 + f^2 - r^2$.

Die Determinanten Δ und Δ_1 der Function $C - n\varphi$ sind

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - n, & 0, & 0, & nd \\ 0, & \frac{1}{b^2} - n, & 0, & ne \\ 0, & 0, & -\frac{1}{c^2} - n, & nf \\ nd, & ne, & nf, & -np \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \left(\frac{1}{a^2} - n\right)\left(\frac{1}{b^2} - n\right)\left(-\frac{1}{c^2} - n\right).$$

Setzt man die Wurzeln der Gleichung $\Delta_1 = 0$, nämlich die Werthe

$$n = \frac{1}{a^2}, \quad n = \frac{1}{b^2}, \quad n = -\frac{1}{c^2},$$

der Reihe nach in Δ ein, so erhält man

$$-\frac{d^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left(-\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right); \text{ bez. } -\frac{e^2}{b^4}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\left(-\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right);$$

$$\text{bez. } -\frac{f^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Diese Werthe verschwinden nur, wenn $d = 0$, bez. $e = 0$, bez. $f = 0$. Unter diesen Voraussetzungen erhält man der Reihe nach

$$3. \quad C - \frac{1}{a^2} S \equiv \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) y^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) z^2 + 2\frac{e}{a^2} y + 2\frac{f}{a^2} z - \frac{p}{a^2} = 0,$$

$$4. \quad C - \frac{1}{b^2} S \equiv \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) x^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}\right) z^2 + 2\frac{d}{b^2} x + 2\frac{f}{b^2} z - \frac{p}{b^2} = 0,$$

$$5. \quad C + \frac{1}{c^2} S \equiv \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) y^2 - 2\frac{d}{c^2} x - 2\frac{e}{c^2} y + \frac{p}{c^2} = 0.$$

Dies sind die Gleichungen der Cylinder, welche durch die Schnittcurve des Kegels C und der Kugel S gelegt werden können; die Mantellinien derselben sind der Reihe nach der X-Achse, der Y-Achse, der Z-Achse parallel. Nehmen wir nun an, es sei $a > b$, so ist

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} > 0;$$

die Gleichungen 4. und 5. gehören dann zu elliptischen Cylindern; diese können für keine Wahl der unbestimmten Coordinaten des Kugelcentrums und des Radius r in zwei Ebenen ausarten; dies ist nur bei dem hyperbolischen Cylinder 3. möglich.

Zerfällt 3. in ein Ebenenpaar, so muss die Gleichung 3., als Gleichung

eines Kegelschnitts in der YZ-Ebene betrachtet, in ein Geradenpaar zerfallen, es muss also die Determinante verschwinden:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}, & 0, & \frac{e}{a^2} \\ 0, & -\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}, & \frac{f}{a^2} \\ \frac{e}{a^2}, & \frac{f}{a^2}, & -\frac{p}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)p - \left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{f^2}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)\frac{e^2}{a^2}\right] = 0.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung p durch $e^2 + f^2 - r^2$, so erhält man nach einfacher Reduction

$$6. \quad \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)e^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)f^2 - \left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)r^2 = 0.$$

Sieht man r als gegeben, die Coordinaten e und f als unbestimmt an, so ergiebt sich hieraus der Satz: Die Kugeln mit gegebenem Radius r, die einen Kegel II. O. in Kreisen schneiden, haben ihre Centra auf einer Ellipse, die auf einem Hauptschnitte liegt.

Aus 3. ergiebt sich für den Winkel α, den die Kreisschnittebenen des Kegels mit der XY-Ebene bilden

$$7. \quad \tan g\,\alpha = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right):\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)} = \pm\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}}.$$

Die Kreisschnitte des Kegels II. O. sind rechtwinkelig zu dem Hauptschnitte des Kegels, dessen Mantellinien den kleineren Winkel mit der Kegelachse bilden, und bilden gleiche Winkel ($90^\circ - \alpha$) mit der Achse.

12. Kreisschnitte des Ellipsoids. Ist k ein Kreis auf einem Ellipsoide, so lege man eine Ebene parallel zu k durch das Centrum des Ellipsoids. Diese Ebene schneidet das Ellipsoid ebenfalls in einem Kreise, und durch diesen Kreis kann man eine Kugel legen, deren Centrum in das Centrum des Ellipsoids fällt. Um also die Kreisschnitte des Ellipsoids zu finden, hat man die Kugeln aufzusuchen, die mit dem Ellipsoide concentrisch sind und dasselbe in zwei ebenen Curven schneiden. Die Gleichungen des Ellipsoids und der Kugel sind

$$F \equiv \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1 = 0, \qquad S \equiv x^2+y^2+z^2-r^2 = 0.$$

Die Determinanten Δ und Δ_1 der Function $f - nS$ sind

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2}-n, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{b^2}-n, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{c^2}-n, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -1+nr^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2}-n, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{b^2}-n, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{c^2}-n \end{vmatrix},$$

also ist

$$\Delta = \left(\frac{1}{a^2}-n\right)\left(\frac{1}{b^2}-n\right)\left(\frac{1}{c^2}-n\right)\left(nr^2-1\right), \quad \Delta_1 = \left(\frac{1}{a^2}-n\right)\left(\frac{1}{b^2}-n\right)\left(\frac{1}{c^2}-n\right).$$

Die Gleichungen $\Delta = 0$ und $\Delta_1 = 0$ haben die gemeinsamen Wurzeln

$$n = \frac{1}{a^2}, \quad n = \frac{1}{b^2}, \quad n = \frac{1}{c^2}.$$

Für diese erhält man

$$1.\quad F - \frac{1}{a^2}S \equiv \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)z^2 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = 0,$$

$$2.\quad F - \frac{1}{b^2}S \equiv \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)z^2 - \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) = 0,$$

$$3.\quad F - \frac{1}{c^2}S \equiv \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)y^2 - \left(1 - \frac{r^2}{c^2}\right) = 0.$$

Dies sind die Gleichungen der drei Cylinder, die durch die Schnittcurve von F und S gehen, und deren Mantellinien der Reihe nach der X-, der Y-, der Z-Achse parallel sind. Setzen wir voraus, es sei $a > b > c$, so sind 1. und 3. elliptische Cylinder, während 2. ein hyperbolischer Cylinder ist; es kann daher nur dieser durch besondere Wahl des Kugelradius r in ein Ebenenpaar ausarten, und zwar tritt dies ein, wenn $r = b$, denn dann hat man

$$F - \frac{1}{b^2}S \equiv -\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)z^2 = 0;$$

diese Gleichung zerfällt in das Produkt zweier Ebenengleichungen

$$F - \frac{1}{b^2}S \equiv \left(\frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{bc}\cdot z + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab}\cdot x\right)\left(\frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{bc}\cdot z - \frac{\sqrt{a^2 - b_2}}{ab}\cdot x\right) = 0.$$

Diese beiden Ebenen gehen durch die Y-Achse und ihr Neigungswinkel gegen die XY-Ebene folgt aus

$$tang\,\alpha = \pm\,\frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{a\sqrt{b^2 - c^2}}.$$

Ein dreiachsiges Ellipsoid hat daher zwei Systeme von Kreisschnitten; die Ebenen derselben sind parallel zu der mittleren Achse (b) des Ellipsoids und gegen die grosse Achse gleich geneigt.

Die zwei Paar Gegenpunkte, in welchen das Ellipsoid von den vier Ebenen berührt wird, die den Kreisschnitten parallel sind, heissen die Kreispunkte des Ellipsoids.

13. Kreisschnitte des einschaligen Hyperboloids. Wenn es hier Kreisschnitte giebt, so giebt es auch Kreisschnitte, die das Centrum des Hyperboloids enthalten, und man kann daher auch diesmal die Kugel S mit dem Hyperboloide concentrisch annehmen. Aus den Gleichungen des Hyperboloids und der Kugel

$$F \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

ergeben sich für die Function $f - nS$ die Determinanten

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - n, & 0\ , & 0\ , & 0 \\ 0\ , & \frac{1}{b^2} - n, & 0\ , & 0 \\ 0\ , & 0\ , & -\frac{1}{c^2} - n, & 0 \\ 0\ , & 0\ , & 0, & -1 + nr^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - n, & 0\ , & 0 \\ 0\ , & \frac{1}{b^2} - n, & 0 \\ 0\ , & 0\ , & -\frac{1}{c^2} - n \end{vmatrix}.$$

Die gemeinsamen Wurzeln der Gleichungen $\Delta = 0$ und $\Delta_1 = 0$ sind daher

$$n = \frac{1}{a^2}, \quad n = \frac{1}{b^2}, \quad n = -\frac{1}{c^2}.$$

Für dieselben hat man der Reihe nach

$$1.\quad F - \frac{1}{a^2}S \equiv \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)z^2 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = 0,$$

$$2.\quad F - \frac{1}{b^2}S \equiv \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)x^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}\right)z^2 - \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) = 0,$$

3. $$F + \frac{1}{c^2} S \equiv \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) y^2 - \left(1 + \frac{r^2}{c^2}\right) = 0 .$$

Dies sind die Gleichungen der drei Cylinder II. O., welche durch die Schnittcurve von F und S gelegt werden können; ihre Mantellinien sind der Reihe nach den Coordinatenachsen parallel. Setzen wir voraus, dass $a > b$, so ist der erste Cylinder hyperbolisch, der zweite und dritte hingegen sind elliptisch. Es kann daher nur der erste in ein Ebenenpaar ausarten, und zwar tritt dies ein, wenn $r = a$; man erhält dann

$$F - \frac{1}{a^2} S \equiv \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) y^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) z^2 = 0 .$$

Diese Gleichung zerfällt in lineare Faktoren

$$F - \frac{1}{a^2} S \equiv \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab} \cdot y + \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{ac} \cdot z\right)\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab} \cdot y - \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{ac} \cdot z\right) = 0,$$

sie stellt daher zwei Ebenen dar, die durch die X-Achse gehen, und deren Neigungswinkel gegen die XY-Ebene sich ergeben aus

$$\tan g\, \alpha = \pm \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{b\sqrt{a^2 + c^2}} .$$

Im einschaligen Hyperboloide giebt es zwei Systeme von Kreisschnitten; die Ebenen derselben sind normal zu dem hyperbolischen Hauptschnitte, der die kleinere Hauptachse hat und sind gegen den elliptischen Hauptschnitt gleich geneigt.

14. Kreisschnitte des zweischaligen Hyperboloids. Da die durch das Centrum gehenden Ebenen, welche die Fläche treffen, dieselbe in einer Hyperbel schneiden, so geht kein realer Kreisschnitt durch das Centrum, wir haben daher die Kugel S in allgemeiner Lage vorauszusetzen. Die Gleichungen des Hyperboloids und der Kugel seien

$$F \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 ,$$

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2ex - 2fy - 2gz + p = 0 , \quad p = e^2 + f^2 + g^2 - r^2 .$$

Für die Function $F - nS$ hat man die Determinanten

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - n, & 0, & 0, & en \\ 0, & -\frac{1}{b^2} - n, & 0, & fn \\ 0, & 0, & -\frac{1}{c^2} - n, & gn \\ en, & fn, & gn, & -1 - pn \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - n, & 0, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{b^2} - n, & 0 \\ 0, & 0, & -\frac{1}{c^2} - n \end{vmatrix} .$$

Die Wurzeln der Gleichungen $\Delta_1 = 0$ sind

$$n = \frac{1}{a^2}, \quad n = -\frac{1}{b^2}, \quad n = -\frac{1}{c^2} .$$

Für diese Werthe von n geht die Determinante Δ über in

$$-\frac{e^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right), \quad \text{bez.} \quad \frac{f^2}{b^4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right),$$

$$\text{bez.} \quad -\frac{g^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) .$$

Soll einer dieser drei Werthe verschwinden, so muss entweder $e = 0$, oder $f = 0$, oder $g = 0$ sein. Unter diesen Voraussetzungen hat man die Gleichungen:

1. $$F - \frac{1}{a^2} S \equiv -\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right) y^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) z^2 + 2\frac{f}{a^2} y + 2\frac{g}{a^2} z - \frac{p}{a^2} = 0 ,$$

2. $F + \frac{1}{b^2} S \equiv \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) x^2 - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) z^2 - 2 \frac{e}{b^2} x - 2 \frac{g}{b^2} z + \frac{p}{b^2} = 0,$

3. $F + \frac{1}{c^2} S \equiv \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) x^2 - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) y^2 - 2 \frac{e}{c^2} x - 2 \frac{f}{c^2} y + \frac{p}{c^2} = 0.$

Setzen wir voraus, dass $b > c$, so sind 1. und 3. elliptische Cylinder, während 2. ein hyperbolischer Cylinder ist. Nur dieser kann in den Verein zweier Ebenen ausarten; dies tritt ein, wenn die Gleichung 2., als Gleichung einer Curve II. O. in der XZ-Ebene betrachtet, in zwei Gerade zerfällt, also wenn

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, & 0, & -\frac{e}{b^2} \\ 0, & -\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}, & -\frac{g}{b^2} \\ -\frac{e}{b^2}, & -\frac{g}{b^2}, & \frac{p}{b^2} \end{vmatrix} \equiv \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) \cdot \frac{p}{b^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \frac{g^2}{b^4} - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) \frac{e^2}{b^4} = 0.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung p durch $e^2 + g^2 - r^2$, so erhält man

4. $$\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) e^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) g^2 - r^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0.$$

Ist r gegeben, so ist dies die Gleichung einer bestimmten Ellipse. Wir haben daher: Die Centra der Kugeln mit gegebenem Radius, die ein zweischaliges Hyperboloid in zwei Kreisen schneiden, liegen auf einer Ellipse, die auf dem hyperbolischen Hauptschnitte liegt, der die kleinere Nebenachse hat.

Wählt man e, g und r so, dass sie der Gleichung 4. genügen, so zerfällt der Cylinder 2. in zwei Ebenen, die parallel der Y-Achse sind und deren Neigungswinkel mit der XY-Ebene sich aus der Formel ergeben

$$tang\,\alpha = \pm \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{a\sqrt{b^2 - c^2}}.$$

Wir schliessen daher: Ein zweischaliges Hyperboloid enthält zwei Systeme von Kreisschnitten; dieselben sind normal zu dem hyperbolischen Hauptschnitte, der die kleinere Nebenachse hat und sind gegen die Ebene des andern hyperbolischen Hauptschnitts unter gleichen Winkeln geneigt.

15. Kreisschnitte des elliptischen Paraboloids. Wir haben hier wieder die Kugel S in allgemeiner Lage vorauszusetzen, haben also von den Gleichungen des Paraboloids und der Kugel auszugehen:

$$F \equiv \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0, \quad S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2ex - 2fy - 2gz + p = 0.$$

Für die Function $F - nS$ hat man diesmal die Determinanten

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} - n, & 0, & 0, & en \\ 0, & \frac{1}{b} - n, & 0, & fn \\ 0, & 0, & -n, & -1 + gn \\ en, & fn, & -1 + gn, & -pn \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} - n, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{b} - n, & 0 \\ 0, & 0, & -n \end{vmatrix}.$$

Die Wurzeln der Gleichung $\Delta_1 = 0$ sind

$$n = \frac{1}{a}, \quad n = \frac{1}{b}, \quad n = 0.$$

Für die Wurzel $n = 0$ reducirt sich $F - nS$ auf F allein, also wird durch diese Wurzel das Problem nicht gelöst. Für $n = 1 : a$ und $n = 1 : b$ erhält Δ die Werthe

$$\frac{e^2}{a^3}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) \quad \text{und} \quad \frac{f^2}{b^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

Damit $1:a$ oder $1:b$ gemeinsame Wurzel der Gleichungen $\Delta = 0$ und $\Delta_1 = 0$ ist, muss also $e = 0$ oder $f = 0$ sein. Unter diesen Voraussetzungen ist

$$1. \quad F - \frac{1}{a}S \equiv \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)y^2 - \frac{1}{a}z^2 + 2\frac{f}{a}y - 2\left(1-\frac{g}{a}\right)z - \frac{p}{a} = 0,$$

$$2. \quad F - \frac{1}{b}S \equiv \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)x^2 - \frac{1}{b}z^2 + 2\frac{e}{b}x - 2\left(1-\frac{g}{b}\right)z - \frac{p}{b} = 0.$$

Diese Gleichungen sind die Gleichungen von Cylindern, deren Achsen parallel der X-Achse, bez. der Y-Achse sind; setzt man $a > b$ voraus, so ist 1. ein hyperbolischer, 2. ein elliptischer Cylinder. Nur der erstere kann für besondere Werthe von f, g und r in ein Ebenenpaar ausarten, und zwar tritt dies ein, wenn

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{b}-\frac{1}{a}, & 0, & \frac{f}{a} \\ 0, & -\frac{1}{a}, & -\left(1-\frac{g}{a}\right) \\ \frac{f}{a}, & -\left(1-\frac{g}{a}\right), & -\frac{p}{a} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung giebt entwickelt

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)p - \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{g}{a}\right)^2 + \frac{1}{a^3}f^2 = 0.$$

Hieraus erhält man nach einfacher Umrechnung die Gleichung

$$3. \quad f^2 + 2(a-b)\left(g - \frac{r^2+a^2}{a}\right) = 0.$$

Für einen gegebenen Werth r ist dies die Gleichung einer Parabel, deren Achse mit der Z-Achse zusammenfällt, die sich in der Richtung der negativen Z-Achse erstreckt, deren Parameter gleich der Differenz $(a - b)$ ist und deren Scheitel die Ordinate hat $z = (r^2 + a^2):a$.

Wählt man nun f, g und r der Gleichung 3. gemäss, so zerfällt der Cylinder 1. in zwei Ebenen, die der X-Achse parallel sind, und für deren Winkel α mit der XY-Ebene

$$\tang \alpha = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right):\frac{1}{a}} = \pm \sqrt{\frac{a-b}{b}}.$$

Im elliptischen Paraboloide giebt es also ebenfalls zwei Systeme von Kreisschnitten; dieselben sind normal zu dem parabolischen Hauptschnitte, der den kleineren Parameter enthält, und sind gegen die XY-Ebene gleich geneigt.

§ 10. Die abwickelbare Fläche, die zwei Flächen zweiter Klasse umschrieben ist. Gemeinsame Tangentenebenen dreier Flächen zweiter Klasse. Umschriebene Rotationskegel.

1. Die Coordinaten der Ebenen, welche zwei Flächen II. Kl.

$$1. \quad \varphi \equiv Au^2 + 2Buv + \ldots + 2Jw + K = 0,$$

$$2. \quad \psi \equiv A_1u^2 + 2B_1uv + \ldots + 2J_1w + K_1 = 0$$

zugleich berühren, genügen den beiden Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$.

Eliminirt man z. B. w aus 1. und 2., so erhält man eine Gleichung vierten Grades in u und v; betrachtet man diese Gleichung als die eines Gebildes in der XY-Ebene, so erkennt man: Die Spuren der Ebenen, die zwei Flächen II. Kl. berühren, umhüllen in jeder Coordinatenebene eine Curve

vierter Klasse. Oder: Die Spuren der Fläche, welche von den gemeinsamen Tangentenebenen zweier Flächen II. Kl. umhüllt wird, sind Curven vierter Klasse.

Die Anzahl Tangentenebenen dieser Fläche, die durch einen gegebenen Punkt

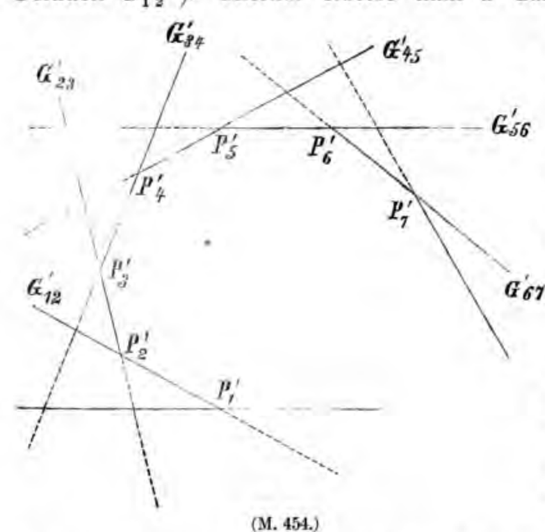
$$3. \qquad P \equiv Lu + Mv + Nw + Q = 0$$

gehen, wird durch Auflösung des Systems erhalten

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad P = 0.$$

Aus der dritten Gleichung berechnet man z. B. w und setzt die Werthe in die beiden ersten ein; man erhält dann zwei quadratische Gleichungen in u und v. Diese ergeben vier Wurzelpaare, und zu jedem folgt der zugehörige Werth w aus der Gleichung $P = 0$. Wir schliessen daher: Von der Fläche, welche die gemeinsamen Tangentenebenen zweier Flächen II. Kl. umhüllen, gehen vier Tangentenebenen durch einen gegebenen Punkt. Die genannte Fläche wird aus diesem Grunde als Fläche vierter Klasse, und zwar zum Unterschiede von andern Flächen vierter Klasse, als Fläche vierter Klasse, erster Species, bezeichnet.

2. Um eine Vorstellung vom Baue dieser Fläche zu geben, bemerken wir Folgendes: Es sei T_1 eine Ebene, deren Coordinaten u_1, v_1, w_1 den beiden Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ genügen. Aendert man u_1 um einen kleinen endlichen Betrag, in dem man es durch den nur wenig davon verschiedenen Werth u_2 ersetzt, so folgen aus $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ zwei dazu gehörige Werthe v_2 und w_2, die um so weniger von v_1 und w_1 abweichen, je näher u_2 an u_1 liegt. Die zu u_2, v_2, w_2 gehörige Ebene sei T_2; dieselbe schneidet T_1 in einer Geraden G_{12}*). Hierauf ersetze man u durch einen nicht viel von u_2 verschiedenen Werth u_3, und bestimme aus $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ die zugehörigen Werthe v_3 und w_3; man erhält damit eine dritte Ebene T_3, welche T_2 in einer Geraden G_{23} schneidet. Die beiden Geraden G_{12} und G_{23} liegen auf einer Ebene T_2 und haben daher einen Punkt P_2 mit einander gemein.



(M. 454.)

Fährt man so fort, so erhält man eine Reihe von Ebenen T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 ...., die den Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ genügen; jede T_i wird von der folgenden T_{i+1} in einer Geraden $G_{i,\,i+1}$ geschnitten, auf jeder Ebene liegen zwei solche Gerade, die sich in einem Punkte P_i schneiden. Jede Gerade, $G_{i-1,\,i}$ wird von der folgenden Geraden $G_{i,\,i+1}$ in einem Punkte P_i geschnitten, auf jeder Geraden $G_{i,\,i+1}$ liegen zwei solche Punkte, nämlich P_i und P_{i+1}. Diese Punkte sind die Ecken und die zwischen ihnen liegenden Strecken sind die Seiten eines unebenen Polygons R.

Durchläuft man R in der Richtung P_1, P_2, P_3 . . . , bestimmt durch diese

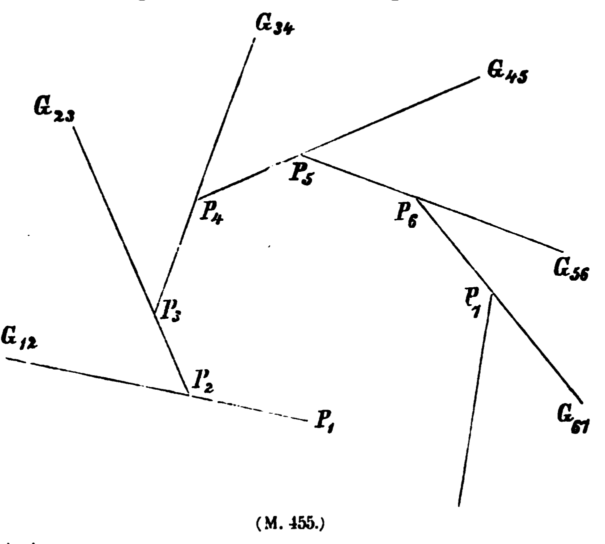
*) Die Figur ist als Grundriss gedacht; daher die Bezeichnungen G_{12}', P_1' u. s. w.

Bewegung den positiven Sinn aller Seiten des Polygons, und lässt von jeder Ebene nur den von zwei positiven Schenkeln eingeschlossenen Winkel sowie seinen Scheitelwinkel stehen, während man die beiden Scheitelwinkel wegnimmt, deren Schenkel vom Scheitel aus gerechnet ungleichsinnig sind, so erhält man die von den Ebenen gebildete Fläche.

Die Projection der Fläche auf eine geeignet gewählte Ebene ist von dem Polygone P_1', P_2', P_3', P_4' ... begrenzt, so dass der von dem Polygone ausgeschlossene Theil der Projectionsebene von der Projection der Fläche bedeckt wird, während die innerhalb P_1', P_2' ... liegenden Punkte nicht Projectionen von Punkten der Fläche sind.

Sind die auf einander folgenden Werthe u_1, u_2, u_3, u_4 ... nur wenig von einander verschieden, so unterscheiden sich auch die Stellungen der Ebenen T_1, T_2, T_3, T_4 .. nur wenig von einander. Gewisse Ausnahmestellen abgerechnet, ist daher der Flächenwinkel, der an dem positiven Theile der von P_i sich erstreckenden Geraden $G_{i-1,\,i}$ liegt, sowie dessen Scheitelwinkel, der an dem von P_{i-1} sich erstreckenden negativen Theile derselben Geraden liegt, nicht viel von einem gestreckten Winkel verschieden; dagegen ist der Flächenwinkel, der an der Kante $P_{i-1}\,P_i$ liegt, als Supplement eines nahezu gestreckten Winkels, ein sehr kleiner Winkel; das Polygon P_1, P_2, P_3 ... erscheint daher als eine scharfe Kante der Fläche.

Denkt man sich die Fläche entlang des Polygons P_1, P_2, P_3 ... zerschnitten, so zerfällt die Fläche in zwei getrennte Mäntel, die gleich und ähnlich sind; zu jedem Mantel gehört von jeder Ebene nur noch ein Winkelfeld. Zerschneidet man einen solchen Mantel entlang einer Geraden, z. B. G_{12}, so kann man die auf T_2 folgende Ebene T_3 um G_{23} drehen, bis sie mit T_2 zusammenfällt und die vorhandenen Winkelfelder von T_2 und T_3 nicht auf einander liegen. Verfährt man ebenso mit jeder folgenden Ebene, erst mit T_4, dann mit T_5 u. s. w., so wird dadurch der ganze Mantel der Fläche in eine Ebene ausgebreitet.



(M. 455.)

Lässt man u nun alle realen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig durchlaufen, so geht das unebene Polygon P_1, P_2, P_3 ... in eine Raumcurve über; die Geraden der Fläche werden zu Tangenten dieser Curve, da sie zwei unendlich nahe Punkte der Curve verbinden; die Winkel unter denen die beiden Mäntel entlang der Curve R sich treffen, werden verschwindend klein; die Eigenschaft beider Mäntel, sich in eine Ebene abwickeln (ausbreiten) zu lassen, bleibt bestehen.

Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass jede in eine Ebene abwickelbare Fläche von dem eben beschriebenen Typus ist; denn eine solche Fläche ist noth-

wendig geradlinig, und jede Gerade der Fläche wird von den nächstfolgenden geschnitten.

Die Curve R, längs deren die beiden Mäntel einer abwickelbaren Fläche sich berühren, bezeichnet man als Cuspidalkante der Fläche.

3. Doppelt gekrümmte Curven und abwickelbare Flächen stehen im engsten Zusammenhange.

Jede doppelt gekrümmte Curve kann man als Cuspidalkante einer abwickelbaren Fläche betrachten; die Geraden der Fläche sind die Tangenten der Curve, die Ebenen der Fläche sind die Ebenen, welche durch je zwei auf einander folgende Tangenten bestimmt sind. Da eine Curventangente zwei benachbarte Punkte einer Curve enthält, so liegen auf der von zwei benachbarten Tangenten der Curve bestimmten Ebene drei benachbarte Curvenpunkte. Eine solche Ebene heisst eine Schmiegungsebene (Osculationsebene) der Curve. Die Schmiegungsebenen einer Raumcurve sind also die umhüllenden Ebenen der abwickelbaren Fläche, die von den Tangenten der Raumcurve beschrieben wird.

4. Der Kegel II. O. ist die einzige abwickelbare Fläche zweiten Grades (den Cylinder kann man als Kegel mit unendlich ferner Spitze betrachten); da aber die Cuspidalkante hier zu einem Punkte, der Spitze des Kegels, eingeschrumpft ist, so kann der Kegel nur als Ausartung einer abwickelbaren Fläche bezeichnet werden.

Eine unebene Curve II. O., d. i. eine Curve, die eine Ebene nur in zwei Punkten trifft, kann es nicht geben, da man durch drei Punkte einer Curve immer eine Ebene legen kann.

Betrachtet man die ebene Curve II. O. als Cuspidalkante einer abwickelbaren Fläche, so ist diese Fläche von der Ebene der Curve nicht verschieden. Der von den Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel bedeckte Theil der Ebene kann als ein geradliniges Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

angesehen werden, in welchem entweder c oder b einen verschwindend kleinen Werth angenommen hat.

Der von den Tangenten einer Parabel bedeckte Theil einer Ebene kann als ein hyperbolisches Paraboloid betrachtet werden,

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0,$$

in welchem b verschwindend klein ist.

Eine eigentliche abwickelbare Fläche II. Kl. giebt es ebensowenig, wie eine eigentliche Raumcurve II. O.; denn drei Tangentialebenen der abwickelbaren Fläche gehen immer durch einen Punkt.

5. Die zwei Flächen II. O. gemeinsame abwickelbare Fläche (d. i. die von ihren gemeinsamen Tangentenebenen gebildete abwickelbare Fläche) berührt jede der beiden Flächen längs einer Raumcurve IV. O. 1. Sp.

Die Ebene, welche die Fläche

$$f \equiv A\xi^2 + 2B\xi\eta + \ldots + 2J\zeta + K = 0$$

im Punkte x, y, z berührt, hat die Gleichung

$$T \equiv f_x' \cdot \xi + f_y' \cdot \eta + f_z' \cdot \zeta + f_p' = 0,$$

wobei $f_x' \equiv Ax + By + Cz + G, \quad f_y' \equiv Bx + Dy + Ez + H,$
$f_z' \equiv Cx + Ey + Fz + J, \quad f_p' \equiv Gx + Hy + Jz + K.$

Die Coordinaten der Ebene T sind hiernach

$$1. \qquad u = -f_x' : f_p', \quad v = -f_y' : f_p', \quad w = -f_z' : f_p'.$$

Soll nun die Ebene T noch eine andere Fläche zweiten Grades berühren, deren Gleichung in Ebenencoordinaten ist

2. $$\varphi = A_1 u^2 + 2B_1 uv + \ldots + 2J_1 w + K_1 = 0,$$

so müsse die Werthe 1. der Gleichung 2. genügen; setzt man diese Werthe ein, so erhält man

3. $$\begin{aligned} &A_1 f_x'^2 + 2B_1 f_x' f_y' + 2C_1 f_x' f_z' + D_1 f_y'^2 + E_1 f_y' f_z' + F_1 f_z'^2 \\ &- 2G_1 f_x' f_p' - 2H_1 f_y' f_p' - 2J_1 f_z' f_p' + K_1 f_p'^2 = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist zweiten Grades in Bezug auf die Coordinaten x, y, z; die Punkte, in denen die gemeinsamen Tangentialebenen der Flächen $f = 0$ und $\varphi = 0$ die erstere berühren, liegen also noch auf der durch die Gleichung 3. charakterisirten Fläche II. O. Ebenso beweist man den analogen Satz: Die Tangential-Ebenen einer Fläche II. O. längs einer auf ihr liegenden Raumcurve IV. O. 1. Sp., berühren noch eine Fläche II. O.; denn der Punkt P, in welchem die Fläche

$$\varphi = A\mathfrak{u}^2 + 2B\mathfrak{u}\mathfrak{v} + \ldots + 2J\mathfrak{w} + K = 0$$

von der Ebene u, v, w berührt wird, hat die Gleichung

$$P = \varphi_u' \cdot \mathfrak{u} + \varphi_v' \cdot \mathfrak{v} + \varphi_w' \cdot \mathfrak{w} + \varphi_r' = 0,$$

wobei $\varphi_u' = Au + Bv + Cw + G$, $\quad \varphi_v' = Bu + Dv + Ew + H$,

$\varphi_w' = Cu + Ev + Fw + J$, $\quad \varphi_r' = Gu + Hv + Jw + K$.

Die Coordinaten von P sind hiernach

4. $$x = -\varphi_u' : \varphi_r', \quad y = -\varphi_v' : \varphi_r', \quad z = \varphi_w' : \varphi_r'.$$

Wenn nun durch diesen Punkt noch eine zweite gegebene Fläche zweiten Grades geht

5. $$f = A_1 x^2 + 2B_1 xy + \ldots + 2J_1 z + K_1 = 0,$$

so müssen die Werthe 4. der Gleichung 5. genügen; man erhält also für die u, v, w die Bedingungsgleichung

6. $$\begin{aligned} &A_1 \varphi_u'^2 + 2B_1 \varphi_u' \varphi_v' + 2C_1 \varphi_u' \varphi_w' + D_1 \varphi_v'^2 + 2E_1 \varphi_v' \varphi_w' + F_1 \varphi_w'^2 \\ &- 2G_1 \varphi_u' \varphi_r' - 2H_1 \varphi_v' \varphi_r' - 2J \varphi_w' \varphi_r' + K_1 \varphi_r'^2 = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist zweiten Grades in u, v, w; alle Ebenen, welche die Fläche φ längs ihrer Schnittcurve mit der Fläche f bewähren, sind daher auch Tangentenebenen der Fläche 6.

6. Die abwickelbare Fläche, die zwei Flächen II. Kl. umschrieben ist, ist unzählig vielen Flächen II. Kl. umschrieben. Denn die Ebenen, welche die Flächen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ berühren, berühren auch alle Flächen, deren Gleichungen von der Form sind

$$\chi = \lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi = 0,$$

wobei λ_1 und λ_2 zwei Zahlen von beliebigem Verhältniss bedeuten.

Wir schliessen daher: Auf einer zwei Flächen II. Kl. umschriebenen abwickelbaren Fläche giebt es unzählig viele Raumcurven IV. O. 1. Sp. Und dem entsprechend: Durch die Punkte einer Raumcurve IV. O. 1. Sp. gehen unzählig viele abwickelbare Flächen IV. Kl. 1. Sp.

7. Wenn die Fläche

1 $$Au^2 + 2Buv + 2Cuw + \ldots + 2Hv + 2Jw + K = 0$$

von acht gegebenen Ebenen T_1, $T_2 \ldots T_8$ berührt wird, so ist

2 $Au_1^2 + 2Bu_1 v_1 + 2Cu_1 w_1 + Dv_1^2 + 2Ev_1 w_1 + Fw_1^2 + 2Gu_1 + 2Hv_1 + 2Jw_1 + K = 0,$

3 $Au_2^2 + 2Bu_2 v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2Jw_2 + K = 0,$

4 $Au_3^2 + 2Bu_3 v_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2Jw_3 + K = 0,$

. . . .

9 $Au_8^2 + 2Bu_8 v_8 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2Jw_8 + K = 0.$

Fügt man zu den Gleichungen 2. 3. 9. die Gleichung 1., so folgt aus dem Verein dieser neun Gleichungen

$$\varphi = \begin{vmatrix} u^2 & uv & uw & v^2 & vw & w^2 & u & v & Jw + K \\ u_1^2 & u_1 v_1 & u_1 w_1 & v_1^2 & v_1 w_1 & w_1^2 & u_1 & v_1 & Jw_1 + K \\ u_2^2 & u_2 v_2 & u_2 w_2 & v_2^2 & v_2 w_2 & w_2^2 & u_2 & v_2 & Jw_2 + K \\ u_3^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Jw_3 + K \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_8^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Jw_8 + K \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist das Resultat der Elimination der acht Coefficienten $A, B, \ldots H$ aus den Gleichungen 1. . . . 9.; sie ist daher die Gleichung einer den acht gegebenen Tangentenebenen eingeschriebenen Fläche II. Kl. Die Determinante φ zerfällt in die Summe zweier Determinanten

10. $$\varphi = J \cdot \psi + K \cdot \chi,$$

wobei ψ und χ aus φ hervorgehen, wenn man die letzte Colonne durch $w, w_1, w_2 \ldots w_8$ bez. durch 1, 1, . . . 1 ersetzt.

Die Gleichung $\varphi = J\psi + K\chi = 0$ enthält die beiden willkürlichen Zahlen J und K; ändert man deren Verhältniss in jeder Weise ab, so erhält man die Gleichungen der unendlich vielen Flächen II. Kl., die von den gegebenen acht Ebenen berührt werden.

Die Tangentenebenen, für deren Coordinaten die Functionen ψ und χ verschwinden, erfüllen auch die Gleichung $\varphi = 0$; wir schliessen daher: Alle Flächen zweiter Klasse, die von acht gegebenen Ebenen berührt werden, sind einer abwickelbaren Fläche IV. Kl. 1. Sp. eingeschrieben. Eine abwickelbare Fläche IV. Kl. 1. Sp. ist durch acht berührende Ebenen bestimmt.

8. Die Coordinaten der Ebenen, welche drei gegebene Flächen zweiter Klasse $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ berühren, sind die Wurzeln der drei Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \chi = 0.$$

Wie die Theorie der Gleichungen lehrt, haben diese drei Gleichungen zweiten Grades acht gemeinsame Wurzelsysteme. Es giebt daher acht Ebenen, welche drei Flächen II. Kl. berühren.

9. Wird die Fläche

1. $$Au^2 + 2Buv + 2Cuw + \ldots + 2Hv + 2Jw + K = 0$$

von sieben gegebenen Ebenen $T_1, \ldots T_7$ berührt, so bestehen die Gleichungen 2. . . . 7. in No. 7; aus dem Verein dieser sieben Gleichungen und der Gleichung 1. kann man die sieben Unbekannten A, B, C, D, E, F, G eliminiren; man erhält

2. $$\varphi = \begin{vmatrix} u^2 & uv & uw & v^2 & vw & w^2 & u & Hv + Jw + K \\ u_1^2 & u_1 v_1 & u_1 w_1 & v_1^2 & v_1 w_1 & w_1^2 & u_1 & Hv_1 + Jw_1 + K \\ u_2^2 & u_2 v_2 & u_2 w_2 & v_2^2 & v_2 w_2 & w_2^2 & u_2 & Hv_2 + Jw_2 + K \\ u_3^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Hv_3 + Jw_3 + K \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_7^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Hv_7 + Jw_7 + K \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe zerfällt in die Summen dreier Determinanten

3. $$\varphi = H\psi + J\chi + K\omega;$$

wenn mit ψ, χ, ω die Functionen bezeichnet werden, die aus φ hervorgehen, wenn man die letzte Colonne durch $v, v_1, \ldots v_7$ bez. $w, w_1, \ldots w_7$, bez. 1, . . 1 ersetzt.

In der Function φ treten drei unbestimmte Zahlen H, J, K auf; für jeden Werth dieser Zahlen stellt die Gleichung 3. eine Fläche II. O. dar, die von den gegebenen sieben Ebenen berührt wird.

Die drei Gleichungen $\psi = 0$, $\chi = 0$, $\omega = 0$ werden, wie man sieht, von den Coordinaten der gegebenen Ebenen erfüllt. Ausser diesen sieben Ebenen haben diese drei Flächen (nach No. 8) noch eine d rch den Verein der Gleichungen $\varphi = \chi = \omega = 0$ bestimmte achte Tangentenebene gemein; wir schliessen daher: Alle Flächen II. Kl., die von sieben gegebenen Ebenen berührt werden, haben noch eine achte gemeinsame Tangentenebene, die durch die gegebenen sieben Ebenen eindeutig bestimmt ist.

Zugleich bemerkt man: Durch acht Ebenen ist eine abwickelbare Fläche IV. Kl. 1. Sp. nur dann bestimmt, wenn dieselben nicht ein System gemeinsamer Tangentenebenen dreier Flächen II. O. bilden

10. Wenn zwei Flächen II. Kl. einem Kegel II. O. eingeschrieben sind, so wähle man ein Coordinatensystem, in welchem die Z-Achse durch die Spitze dieses Kegels geht. Ist nun $w = w_0$ die Gleichung der Kegelspitze, so müssen die Gleichungen, welche aus den Gleichungen der beiden Flächen

$$1.\qquad \varphi \equiv Au^2 + 2Buv + \ldots + 2Jw + K = 0,$$

$$2.\qquad \varphi_1 \equiv A_1u^2 + 2B_1u_1v_1 + \ldots + 2J_1w + K_1 = 0$$

durch die Substitution $w = w_0$ hervorgehen, geometrisch gleich bedeutend sein, denn sie stellen den den Flächen von der Spitze $w = w_0$ aus umschriebenen Kegel II. O. dar. Für eine bestimmte Zahl m gilt also die Identität

$$\begin{aligned} & Au^2+2Buv+2Cuw_0+Dv^2+2Evw_0+Fw_0^2+2Gu+2Hv+2Jw_0+K \\ 3.\quad & \equiv m(A_1u^2 + 2B_1uv + 2C_1uw_0 + D_1v^2 + 2E_1vw_0 + F_1w_0^2 + 2G_1u \\ & + 2H_1v + 2J_1w_0 + K_1). \end{aligned}$$

Aus dieser Identität folgen die Gleichungen

$$4.\qquad A = mA_1, \quad B = mB_1, \quad D = mD_1,$$

$$5.\qquad \begin{aligned} & Cw_0 + G = mC_1w_0 + mG_1, \quad Ew_0 + H = mE_1w_0 + H_1, \\ & Fw_0^2 + 2Jw_0 + K = mF_1w_0^2 + m\cdot 2J_1w_0 + mK_1. \end{aligned}$$

Aus 5. ergiebt sich

$$6.\qquad \begin{aligned} & (G - mG_1) = -(C - mC_1)w_0, \quad H - mH_1 = -(E - mE_1)w_0, \\ & K - mK_1 = -(F - mF_1)w_0^2 - 2(J - mJ_1)w_0. \end{aligned}$$

Bildet man nun die Function $\varphi - m\varphi_1$, so erhält man in Rücksicht auf 4. und 6.

$$\begin{aligned} \varphi - m\varphi_1 & \equiv 2(C - mC_1)uw + 2(E - mE_1)vw + (F - mF_1)w^2 - 2(C - mC_1)w_0u \\ & - 2(E - mE_1)w_0v + 2(J - mJ_1)w - (F - mF_1)w_0^2 - 2(J - mJ_1)w_0 \\ & \equiv (w - w_0)[2(C - mC_1)u + 2(E - mE_1)v + (F - mF_1)w + (F - mF_1)w_0 + (J - mJ_1)]. \end{aligned}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass für alle Ebenen, welche zugleich die Fläche φ und φ_1 berühren, entweder $w = w_0$ oder

$$P \equiv 2(C - mC_1)u + 2(E - mE_1)v + (F - mF_1)w + (F - mF_1)w_0 + J - mJ_1 = 0$$

ist; und dass, umgekehrt, alle Ebenen, die den Gleichungen $P = 0$ und $\varphi = 0$ genügen, auch die Gleichung $\varphi_1 = 0$ erfüllen. Dies lehrt, dass die beiden Flächen φ und φ_1 noch einem Kegel II. O. eingeschrieben sind, dessen Spitze die Gleichung $P = 0$ hat. Wenn also zwei Flächen II. Kl. $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ einem Kegel II. O. eingeschrieben sind, so sind sie noch einem zweiten Kegel II. O. eingeschrieben; es giebt dann eine bestimmte Zahl m, für welche die Differenz $\varphi - m\psi$ in das Produkt zweier linearen Functionen zerfällt, die einzeln gleich Null gesetzt die Gleichungen der beiden Kegelspitzen ergeben.

11. Die Schnittpunkte einer Geraden, die durch einen Punkt P_0 unter den Winkeln α, β, γ gegen die Achsen gelegt ist, mit der Fläche II. O.

$$f \equiv Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + \ldots + 2Jz + K = 0$$

sind bekanntlich durch die Gleichung bestimmt

$$f_0 + 2(f_{x_0}' \cos\alpha + f_{y_0}' \cos\beta + f_{z_0}' \cos\gamma)r + (A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\cos\beta + 2C\cos\alpha\cos\gamma + D\cos^2\beta + 2E\cos\beta\cos\gamma + F\cos^2\gamma)r^2 = 0.$$

Die Gerade tangirt die Fläche, wenn diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln für r liefert, also unter der Bedingung

$$f_0(A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\cos\beta + 2C\cos\alpha\cos\gamma + D\cos^2\beta + 2E\cos\beta\cos\gamma + F\cos^2\gamma) - (f_{x_0}'\cos\alpha + f_{y_0}'\cos\beta + f_{z_0}'\cos\gamma)^2 = 0.$$

Führen wir statt der Winkel α, β, γ die Coordinaten x, y, z des auf einer Tangente liegenden Punktes P ein, um so die Gleichung der Kegelfläche zu erhalten, die von den Tangenten gebildet wird, so geschieht dies durch

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = (x - x_0) : (y - y_0) : (z - z_0).$$

Wir erhalten

$$1. \quad f_0[A(x-x_0)^2 + 2B(x-x_0)(y-y_0) + 2C(x-x_0)(z-z_0) + D(y-y_0)^2 + 2E(y-y_0)(z-z_0) + F(z-z_0)^2] - [f_{x_0}'(x-x_0) + f_{y_0}'(y-y_0) + f_{z_0}'(z-z_0)]^2 = 0.$$

Setzt man abkürzend

$$T \equiv f_{x_0}'x + f_{y_0}'y + f_{z_0}'z + Gx_0 + Hy_0 + Jz_0 + K,$$

so hat man (§ 5, No. 3, 6)

$$f_{x_0}'(x - x_0) + f_{y_0}'(y - y_0) + f_{z_0}'(z - z_0) \equiv T - f_0;$$

ferner ergiebt sich leicht

$$A(x - x_0)^2 + \ldots + F(z - z_0)^2 \equiv f + f_0 - 2T.$$

Daher wird aus Gleichung 1.

$$f_0(f + f_0 - 2T) - (T - f_0)^2 = 0.$$

Löst man die Klammern auf, so erhält man schliesslich

$$2. \quad f_0 \cdot f - T^2 = 0.$$

Diese Gleichung lehrt: Die Tangenten einer Fläche II. O., die durch einen gegebenen Punkt P_0 gehen, sind die Mantellinien eines Kegels II. O., der die Gleichung hat

$$3. \quad f_0 f - T^2 = 0.$$

Die Punkte, in welchen dieser Kegel die Fläche $f = 0$ berührt, genügen der Gleichung 3. und der Gleichung $f = 0$, mithin genügen sie auch der linearen Gleichung $T = 0$. Liegt daher ein Punkt P_0 nicht auf der Fläche $f = 0$ so ist $T = 0$ die Gleichung der Ebene, welche die Berührungspunkte der von P_0 an $f = 0$ gelegten Tangenten enthält.

12. Die Gleichung der centralen Flächen II. O. ist von der allgemeinen Form

$$f \equiv \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - 1 = 0.$$

Die Gleichung des von P_0 aus an diese Fläche gelegten Tangentenkegels ist demnach

$$1. \quad f_0 f - (\alpha x_0 x + \beta y_0 y + \gamma z_0 z - 1)^2 = 0.$$

Die Coefficienten dieser Gleichung sind

$$2. \quad \begin{aligned} A &\equiv \alpha \cdot f_0 - \alpha^2 x_0^2, & B &= -\alpha\beta x_0 y_0, & C &= -\alpha\gamma x_0 z_0, \\ D &\equiv \beta \cdot f_0 - \beta^2 y_0^2, & E &\equiv -\beta\gamma y_0 z_0, & F &\equiv \gamma \cdot f_0 - \gamma^2 z_0^2. \end{aligned}$$

Ist der Kegel 1. Rotationskegel, so sind die Bedingungen erfüllt (§ 7, No. 1).

$$3. \quad \frac{AE - BC}{E} = \frac{DC - BE}{C} = \frac{FB - CE}{B}.$$

Aus den Formeln 2. ergiebt sich

4. $$A - \frac{BC}{E} = \alpha f_0, \quad D - \frac{BE}{C} = \beta f_0, \quad F - \frac{CE}{B} = \gamma f_0 .$$

Die Gleichungen 3. sind unabhängig von P_0 erfüllt, sobald $\alpha = \beta = \gamma$, d. i. wenn die Fläche f eine Kugel ist.

Ist f keine Kugel, so kann den Gleichungen 3. genügt werden, wenn $f = 0$ ist; in diesem Falle geht der Tangentenkegel in die Berührungsebene der Fläche f im Punkte P_0 über, und diese kann man in der That als eine Rotationsfläche ansehen. Abgesehen hiervon kann den Gleichungen 3. nur dadurch genügt werden, dass zwei von den drei Coefficienten B, C, E verschwinden und der dritte von Null verschieden ist. Nehmen wir zunächst

$$B = C = 0, \quad E \gtrless 0, \quad \text{also } x_0 = 0 .$$

Nach § 7 No. 13 ist alsdann 1. eine Rotationsfläche, wenn $(D-A):E = E:(F-A)$; setzt man $x_0 = 0$ in 2. ein, so erhält man aus dieser Proportion

$$[(\beta - \alpha) f_0 - \beta^2 y_0^2][(\gamma - \alpha) f_0 - \gamma^2 z_0^2)] - \beta^2 \gamma^2 y_0^2 z_0^2 = 0 .$$

Rechnet man die linke Seite aus und unterdrückt den Faktor f_0, so ergiebt sich

5. $$\frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} y_0^2 + \frac{\alpha\gamma}{\alpha - \gamma} z_0^2 - 1 = 0 .$$

Die Annahmen $B = E = 0$, bez. $C = E = 0$ führen in derselben Weise für die Spitzen der umschriebenen Rotationskegel auf die Gleichungen

6. $$y_0 = 0, \quad \frac{\beta\alpha}{\beta - \alpha} x_0^2 + \frac{\beta\gamma}{\beta - \gamma} z_0^2 - 1 = 0,$$

7. $$z_0 = 0, \quad \frac{\gamma\alpha}{\gamma - \alpha} x_0^2 + \frac{\gamma\beta}{\gamma - \beta} y_0^2 - 1 = 0 .$$

Dies sind die Gleichungen dreier in den Coordinatenebenen liegenden der Fläche $f = 0$ zugeordneten Kegelschnitte; man bezeichnet sie als die Focalkegelschnitte der Fläche f.

13. Wir stellen nun die Gleichungen der Focalkegelschnitte des Ellipsoids und der beiden Hyperboloide der Reihe nach auf und entscheiden über die Realität der von ihren Punkten aus der Fläche umschriebenen Rotationskegel.

A. Für das Ellipsoid ist $\alpha = 1 : a^2$, $\beta = 1 : b^2$, $\gamma = 1 : c^2$. Die Gleichungen der Focalkegelschnitte sind daher

$$\frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{c^2 - a^2} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{c^2 - b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0 .$$

Setzen wir $a > b > c$ voraus, so sind dies der Reihe nach die Gleichungen einer imaginären Ellipse, einer realen Hyperbel und einer realen Ellipse. Die letztere liegt ganz im Innern des Ellipsoids, daher können von ihren Punkten aus reale Kegel nicht um die Fläche gelegt werden. Der Ort der Spitzen der einem dreiachsigen Ellipsoide umschriebenen realen Rotationskegels ist der Theil der in der Ebene der grössten und kleinsten Achse enthaltenen Focalhyperbel, der ausserhalb des Ellipsoids liegt. Die Schnittpunkte dieser Hyperbel und des Ellipsoids sind die Kreispunkte des letzteren.

B. Für das einschalige Hyperboloid ist $\alpha = 1 : a^2$, $\beta = 1 : b^2$, $\gamma = -1 : c^2$. Die Gleichungen der Focalkegelschnitte sind daher

$$\frac{y^2}{b^2 - a^2} - \frac{z^2}{c^2 + a^2} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 + b^2} - 1 = 0.$$
$$\frac{x^2}{a^2 + c^2} + \frac{y^2}{b^2 + c^2} - 1 = 0.$$

Ist $a > b$, so ist die erste Curve imaginär, die zweite ist eine Hyperbel, die ganz im Innern des Hyperboloids liegt, die letzte eine ganz ausserhalb der Fläche gelegene Ellipse. Der Ort der Spitzen der einem einschaligen Hyperboloide umschriebenen Rotationskegel wird von der realen Focalellipse und der realen Focalhyperbel gebildet.

C. Für das zweischalige Hyperboloid ist $\alpha = 1 : a^2$, $\beta = -1 : b^2$, $\gamma = -1 : c^2$. Die Gleichungen der Focalkegelschnitte sind

$$\frac{y^2}{b^2 + a^2} + \frac{z^2}{c^2 + a^2} + 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{z^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0,$$
$$\frac{x^2}{a^2 + c^2} - \frac{y^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0.$$

Die erste Curve ist imaginär; ist $b > c$, so ist die zweite eine Ellipse, die dritte eine Hyperbel, die ganz im Innern des Hyperboloids liegt. Der Ort der Spitzen der einem zweischaligen Hyperboloide umschriebenen Rotationskegel ist die reale Focalellipse; dieselbe liegt auf dem Hauptschnitte, der die kleinere Nebenachse enthält. Die Schnittpunkte dieser Focalellipse und der Fläche sind die Kreispunkte der letzteren.

14. Man kann eine Ellipse als Ellipsoid und eine Hyperbel als zweischaliges Hyperboloid mit verschwindend kleiner c-Achse betrachten, und findet somit: Die Spitzen der Rotationskegel, die eine gegebene Ellipse enthalten, liegen auf einer Hyperbel, deren Scheitel mit den Brennpunkten der Ellipse zusammenfallen, und deren Ebene normal zur Ebene der Ellipse ist. Die Spitzen der Rotationskegel, die eine gegebene Hyperbel enthalten, liegen auf einer Ellipse, deren Scheitel mit den Brennpunkten der Hyperbel zusammenfallen, und deren Ebene normal zur Ebene der Hyperbel ist.

15. Die Gleichungen der beiden Paraboloide haben die Form

$$f \equiv \alpha x^2 + \beta y^2 - 2z = 0.$$

Hier ist $\quad f_x' \equiv \alpha x, \quad f_y' \equiv \beta y, \quad f_z' \equiv -1, \quad f_p' \equiv -z,$

daher ist die Gleichung des von P_0 aus der Fläche umschriebenen Tangentenkegels

1. $$f_0 (\alpha x^2 + \beta y^2 - 2z) - (\alpha x_0 x + \beta y_0 y - z + z_0)^2 = 0.$$

Hiernach ist

$$A = \alpha f_0 - \alpha^2 x_0^2, \quad B = -\alpha\beta x_0 y_0, \quad C = \alpha x_0,$$
$$D = \beta f_0 - \beta^2 y_0^2, \quad E = \beta y_0, \quad F = -1;$$
$$A - \frac{BC}{E} = \alpha f_0, \quad D - \frac{BE}{C} = \beta f_0, \quad F - \frac{CE}{B} = 0.$$

Lösungen des Problems erhalten wir daher nur, wenn zwei von den Grössen B, C und E verschwinden. Ist $B = C = 0$, so folgt $x_0 = 0$. Die Proportion $(D - A) : E = E : (F - A)$ ergiebt alsdann

$$[(\beta - \alpha) f_0 - \beta^2 y_0^2][1 + \alpha f_0] + \beta^2 y_0^2 = 0.$$

Rechnet man die linke Seite aus und unterdrückt den Faktor f_0, so erhält man

2. $$y_0^2 = 2\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)\left(z_0 - \frac{1}{2\alpha}\right).$$

Die Voraussetzung $B = E = 0$ führt auf

3. $$y_0 = 0, \quad x_0^2 = 2\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)\left(z_0 - \frac{1}{2\beta}\right).$$

Die Voraussetzung $C = E = 0$ führt auf $x_0 = y_0 = 0$, also ist auch $B = 0$; soll nun 1. Rotationskegel sein, so muss $A = D = F$ sein; diese Bedingung ist für keinen Punkt der Z-Achse erfüllbar.

Die Parabeln 2. und 3. werden als die Focalparabeln des Paraboloids $f = 0$ bezeichnet.

16. Für ein elliptisches Paraboloid ist $\alpha = 1 : a$, $\beta = 1 : b$; folglich sind die Focalparabeln

$$y^2 = 2(b - a)(z - \tfrac{1}{2}a), \quad x^2 = 2(a - b)(z - \tfrac{1}{2}b).$$

Wie man sieht, geht jede dieser Parabeln durch den Brennpunkt des auf der Ebene der andern liegenden Hauptschnitts des Paraboloids; der Scheitel jeder dieser Parabeln ist der Brennpunkt der anderen. Ist $a > b$, so liegt die zweite Parabel ganz auf der concaven Seite des Paraboloids, während die erste das Paraboloid in zwei realen Punkten schneidet. Dies ergiebt: Der Ort der Spitzen der einem elliptischen Paraboloide umschriebenen realen Rotationskegel ist der auf der convexen Seite liegende Theil der Focalparabel, die auf der Ebene des Hauptschnitts liegt, der den kleinsten Parameter hat.

Für ein hyperbolisches Paraboloid ist $\alpha = 1 : a$, $\beta = -1 : b$; folglich sind die Focalparabeln

$$y^2 = -2(a + b)(z - \tfrac{1}{2}a), \quad x^2 = 2(a + b)(z + \tfrac{1}{2}b).$$

Jede der beiden Parabeln geht durch den Brennpunkt der andern, und ihre Scheitel sind die Brennpunkte des in der Ebene der andern Focalparabel liegenden Hauptschnitts; keine der beiden Curven schneidet das Paraboloid. Wir erhalten daher: Es giebt zwei Systeme Rotationskegel, die einem hyperbolischen Paraboloide umschrieben sind; die Spitzen des einen Systems liegen auf der einen, die des andern auf der andern Focalparabel.

17. Eine Parabel kann man als ein elliptisches Paraboloid ansehen, für welches $b = 0$ ist. Die Rotationskegel, die eine gegebene Parabel enthalten, haben daher ihre Spitzen auf einer congruenten Parabel, deren Ebene normal zur Ebene der gegebenen Parabel ist, und die zum Scheitel den Brennpunkt derselben und den Scheitel der gegebenen Parabel zum Brennpunkte hat.

18. Für die Lage der Achsen der einer Fläche II. O. umschriebenen Rotationskegel ergiebt sich noch ein bemerkenswerther Satz.

Bei centralen Rotationsflächen besteht unter der Annahme $C = E = 0$ für die Stellungswinkel der Symmetrieebenen, welche durch die Rotationsachse gehen, die Gleichung (§ 7 No. 13)

1. $$(A - F)\cos\alpha + B\cos\beta = 0;$$

ferner ist

2. $$(A - F) : B = B : (D - F).$$

Nun ist für einen der Fläche $f = 0$ umgeschriebenen Rotationskegel unter der gemachten Voraussetzung, und wenn f central ist (No. 12, 2)

$$A - F = (\alpha - \gamma)f_0 - \alpha^2 x_0^2, \quad B = -\alpha\beta x_0 y_0, \quad z_0 = 0.$$

Aus der Proportion 2. und der von P_0 erfüllten Gleichung des auf der XY-Ebene liegenden Focalkegelschnitts No. 12, 7 folgt

$$(\alpha - \gamma)f_0 - \alpha^2 x_0^2 = \frac{\beta^2(\alpha - \gamma)}{\beta - \gamma} \cdot y_0^2;$$

daher erhält man aus 1.

$$\frac{\beta}{\beta-\gamma}\cdot y_0\cdot\cos\alpha-\frac{\alpha}{\alpha-\gamma}x_0\cdot\cos\beta=0.$$

Diese Gleichung lehrt, dass alle ihr genügenden Symmetrieebenen zu der Ebene normal sind, für deren Stellungswinkel φ, ψ, χ

$$\cos\varphi:\cos\psi=\frac{\beta y_0}{\beta-\gamma}:-\frac{\alpha x_0}{\alpha-\gamma},\qquad \cos\chi=0.$$

Die Gerade, welche durch x_0, y_0 geht und diese Winkel φ, ψ, χ mit den Achsen bildet, ist daher die Rotationsachse.

Die Gleichung der Tangente des Focalkegelschnitts

$$\frac{\gamma\alpha}{\gamma-\alpha}x^2+\frac{\gamma\beta}{\gamma-\beta}y^2-1=0$$

im Punkte x_0, y_0 ist

$$\frac{\gamma\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot x_0 x+\frac{\gamma\beta}{\gamma-\beta}\cdot y_0 y-1=0.$$

Die Winkel φ_1, ψ_1 welche diese Tangente mit den positiven Seiten der X- und der Y-Achse bildet, ergeben sich daher aus

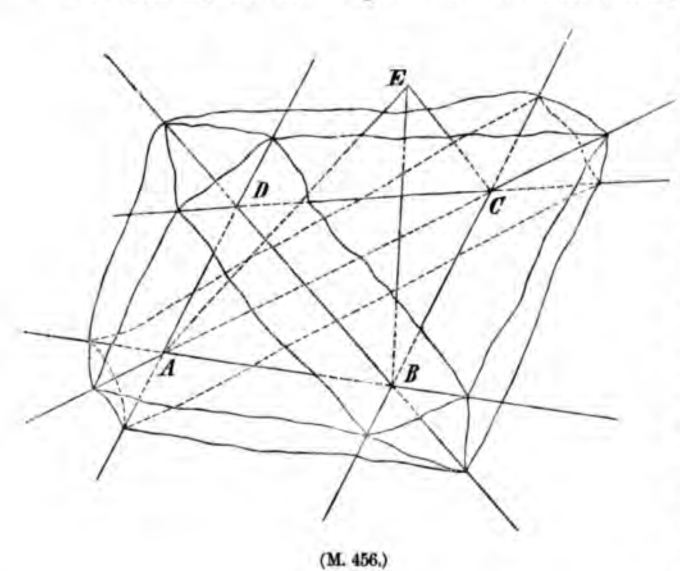
$$\cos\varphi_1:\cos\psi_1=\frac{\beta}{\beta-\gamma}y_0:-\frac{\alpha}{\alpha-\gamma}x_0.$$

Daher findet man $\varphi=\varphi_1$, $\psi=\psi_1$. Aehnliche Schlüsse ergeben sich auch für die Rotationsachsen der den Paraboloiden umgeschriebenen Kegel. Man erhält daher den Satz: Jede Tangente eines Focalkegelschnitts ist die Achse des Rotationskegels, dessen Spitze in dem Berührungspunkte der Tangente liegt.

§ 11. Homogene Coordinaten des Punktes und der Ebene. Gleichung der Ebene und des Punktes.

1. Bevor wir homogene Coordinaten des Punktes und der Ebene einführen, haben wir einige Bemerkungen über Tetraëdersummen vorauszuschicken, die sich an die Erörterungen über das Vorzeichen von Tetraëdern anschliessen, die wir in § 3, No. 7 mitgetheilt haben.

Vier Ebenen, die keinen gemeinsamen Punkt haben, theilen den Raum in 15 getrennte Gebiete; eins derselben, nämlich das von den vier Ebenen eingeschlossene Tetraëder $ABCD$ ist von endlicher Grösse, die übrigen sind unendlich gross; vier Gebiete sind dreiseitige Ecken, nämlich die Gegenecken der Tetraëderecken; vier sind die von je drei dreiseitigen Ecken gebildeten Raumfiguren, die von je einer der dreiseitigen Ecken



(M. 456.)

des Tetraëders übrig bleiben, wenn man von derselben das Tetraëder abschneidet; sechs sind keilförmige, von je zwei dreiseitigen Ecken gebildete an den Kanten des Tetraëders aussen anliegende Figuren.

Liegt ein fünfter Punkt auf keiner der Ebenen des Tetraëders, so kann er zunächst im Innern des Tetraëders oder an einer der an den Tetraëderecken aussen anliegenden dreiseitigen Ecken liegen; in jedem Falle liegt dann einer der fünf Punkte $ABCDE$ im Innern des von den vier andern bestimmten Tetraëders. Denn nimmt man z. B. E im Innern der an A gelegenen Ecke an, so liegt A im Innern des Tetraëders $BCDE$. Befindet sich hingegen E in einem der vier dreieckigen, an den Tetraëderflächen oder in einem der sechs zweieckigen, an den Tetraëderkanten aussen anliegenden Gebiete, so liegt immer einer der fünf Punkte in dem an einem Dreiecke des von den vier andern bestimmten Tetraëders aussen anliegenden Raumtheile; denn ist E z. B. in dem an DC liegenden keilförmigen Gebiete, so liegt offenbar D in Bezug auf das Tetraëder $ABCE$ in dem an EAB aussen anliegenden Gebiete.

Wir beweisen nun folgenden Satz: Für je fünf Punkte A, B, C, D, E des Raumes ist

1. $$EABC - EBCD + ECDA - EDAB = DABC,$$

oder, in anderer Anordnung

2. $$ABCD + BCDE + CDEA + DEAB + EABC = 0.$$

Nimmt man zunächst an, einer von den fünf Punkten liege im Innern des Tetraëders der vier andern, und bezeichnet diesen mit E, die andern mit A, B, C, D, so ist ersichtlich, dass die vier Dreiecke

$$ABC, \quad BAD, \quad CBD, \quad CDA$$

von E aus gesehen in gleicher Drehrichtung erscheinen, und zwar in derselben, wie ABC von D aus. Daher haben die fünf Tetraëder

$$EABC, \quad EBAD, \quad ECBD, \quad ECDA, \quad DABC$$

gleiche Vorzeichen.

Nun ist, abgesehen noch vom Vorzeichen, die Summe der vier Tetraëder, welche die Seiten eines Tetraëders $ABCD$ zu Basen und einen Punkt im Innern desselben zur gemeinsamen Spitze haben, gleich dem Tetraëder $ABCD$; man hat daher die nun auch in Bezug auf die Vorzeichen genaue Gleichung

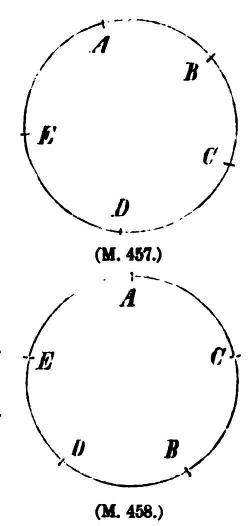
3. $$EABC + EBAD + ECBD + ECDA = DABC.$$

Da nun $EBAD$ und $EDAB$, sowie $ECBD$ und $EBCD$ Permutationen ungleicher Klasse sind, so ist

$$EBAD = -EDAB, \quad ECBD = -EBCD;$$

indem man dies in 3. einführt, erhält man 1. und durch geeignete Permutationen hieraus 2.

Um die richtige Aufeinanderfolge der Buchstaben in 2. sicher und leicht zu treffen, kann man die fünf Buchstaben in der Reihenfolge $ABCDE$ hinter einander an die Peripherie eines Kreises schreiben.



(M. 457.)

(M. 458.)

Man hat nun, von jedem der fünf Punkte anfangend, und immer in derselben Richtung fortschreitend, je vier auf einander folgende Punkte aufzuschreiben.

Vertauscht man irgend zwei benachbarte der fünf Buchstaben, z. B. B und C, so erhält man die beistehende Hülfsfigur, und daher für die Summe 2. die Tetraëder

$$ACBD, \quad CBDE, \quad BDEA, \quad DEAC, \quad EACB.$$

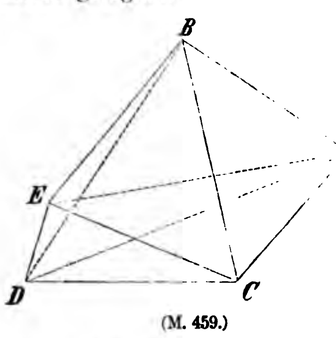
Da nun $ACBD = -ABCD$, $CBDE = -BCDE$,
$BDEA = -DEAB$, $DEAC = -CDEA$, $EACB = -EABC$,
so folgt aus 2., dass auch

$$ABCD + CBDA + BDCA + DEAC + EACB = 0.$$

Durch fortgesetzte Vertauschung zweier benachbarter Elemente kann aus $ABCDE$ jede Permutation dieser fünf Buchstaben abgeleitet werden. Wenn daher einer der fünf Punkte A, B, C, D, E im Tetraëder der vier andern liegt, so gilt die Gleichung 2., gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die fünf Punkte mit den Buchstaben A, B, C, D, E bezeichnet hat.

Es bleibt nun noch übrig, den Beweis für den Fall zu führen, dass keiner der fünf Punkte im Tetraëder der vier andern liegt.

Bezeichnet man zunächst den Punkt mit E, der in Bezug auf das Tetraëder der vier andern $ABCD$ in dem an einer Seite anliegenden dreieckigen Gebiete liegt, und mit BCD diese Seite, so dass also E und A auf verschiedenen Seiten von BCD liegen und EA die Ebene BCD in einem im Innern des Dreiecks BCD gelegnen Punkte schneidet, so werden die Dreiecke ABC, BCD, CDA, DBA, von E aus unter derselben Drehrichtung gesehen, und zwar unter der entgegengesetzten Drehrichtung, wie BCD vom Punkte A aus. Daher haben die Tetraëder $EABC$, $EBCD$, $ECDA$, $EDBA$, $ACBD$ dasselbe Zeichen.



(M. 459.)

Nun giebt rücksichtlich der absoluten Werthe die Summe der Tetraëder, welche die in an A liegenden Seiten des Tetraëders zu Basen und E zur gemeinsamen Spitze haben, vermindert um das Tetraëder, welches E zur Spitze und die A gegenüberliegende Seite zur Basis hat, das Tetraëder der vier Punkte A, B, C, D. Daher gilt auch rücksichtlich der Vorzeichen die Gleichung

$$4.\quad EABC + EDBA + ECDA - EBCD = ACBD.$$

Da nun $ACBD = -ABCD$, $EBCD = -BCDE$, $ECDA = CDEA$, $EDBA = DEAB$, so folgt aus 4. die Gleichung 2.

Hieraus schliesst man wie im vorigen Falle, dass die Gleichung 2. für jede Permutation der fünf Punkte A, B, C, D, E gilt.

Somit ist die Gleichung 2. für jede Lage der fünf Punkte und für jede Anordnung derselben gültig.

Liegen die vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene, so ist $ABCD = 0$, und man erhält daher aus 1.

$$5.\quad EABC - EBCD + ECDA - EDAB = 0.$$

2. Als homogene Coordinaten des Punktes P verwenden wir die senkrechten Abstände des Punktes von den Ebenen eines Tetraëders $A_1A_2A_3A_4$. Der Abstand des Punktes P von der A_i gegenüberliegenden Tetraëderfläche wird mit x_i bezeichnet, und x_i wird positiv oder negativ gerechnet, je nachdem P und A_i auf derselben Seite der A_i gegenüberliegenden Tetraëderfläche sich befinden oder nicht. Für einen Punkt im Innern des Tetraëders sind daher alle vier Coordinaten positiv. Für einen Punkt in einem an einer Tetraëderfläche aussen anliegenden Gebiete ist die auf dieser Fläche normale Coordinate negativ, die andern sind positiv. Für einen Punkt in einem an einer Kante aussen anliegenden Gebiete sind die Coordinaten negativ, die

normal zu den diese Kante enthaltenden Tetraëderebenen sind, die andern beiden positiv. Für einen in einer Gegenecke einer Tetraëderecke gelegenen Punkt sind die drei Coordinaten negativ, die auf den Seiten dieser Ecke normal sind, die vierte Coordinate ist positiv. Für keinen Punkt des Raumes sind alle vier Coordinaten negativ.

Bezeichnet man die Höhen des Achsentetraëders $A_1 A_2 A_3 A_4$ mit h_1, h_2, h_3, h_4, und zwar mit h_i die von A_i auf die gegenüberliegende Fläche gefällte Normale, so sind die Coordinaten

	x_1	x_2	x_3	x_4
von A_1:	h_1	0	0	0 ,
„ A_2:	0	h_2	0	0 ,
„ A_3:	0	0	h_3	0 ,
„ A_4:	0	0	0	h_4 .

Für jeden Punkt einer Tetraëderkante sind zwei Coordinaten Null; z. B. für jeden auf $A_1 A_2$ gelegenen Punkt ist $x_3 = x_4 = 0$. Für jeden Punkt einer Tetraëderfläche ist eine Coordinate gleich Null; z. B. für die auf $A_1 A_2 A_3$ liegenden Punkte ist $x_4 = 0$.

3. Für jede Lage des Punktes P gilt die Gleichung (No. 1, 1)

$$PA_2 A_3 A_4 - PA_3 A_4 A_1 + PA_4 A_1 A_2 - PA_1 A_2 A_3 = A_1 A_2 A_3 A_4 .$$

Hieraus folgt

1. $$\frac{PA_2 A_3 A_4}{A_1 A_2 A_3 A_4} + \frac{PA_3 A_4 A_1}{A_2 A_3 A_4 A_1} + \frac{PA_4 A_1 A_2}{A_3 A_4 A_1 A_2} + \frac{PA_1 A_2 A_3}{A_4 A_1 A_2 A_3} = 1 .$$

Das Verhältniss der Tetraëder $PA_k A_l A_m : A_i A_k A_l A_m$ ist numerisch gleich dem Verhältniss der von P und A_i auf die Ebene $A_i A_k A_l$ gefällten Normalen, also dem absoluten Werthe nach gleich dem Verhältnisse $x_i : h_i$.

Liegen nun P und A_i auf derselben Seite von $A_k A_l A_m$, so ist sowol $PA_k A_l A_m : A_i A_k A_l A_m$ als auch $x_i : h_i$ positiv; und liegen P und A_i auf verschiedenen Seiten von $A_k A_l A_m$, so sind beide Verhältnisse negativ. Es gilt also auch rücksichtlich der Vorzeichen die Gleichung

2. $$PA_k A_l A_m : A_i A_k A_l A_m = x_i : h_i .$$

Hiernach folgt aus 1.

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1 .$$

Die vier homogenen Coordinaten eines Punktes genügen also der Gleichung

3. $$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1 .$$

Umgekehrt schliesst man leicht: Wenn vier Strecken dieser Gleichung genügen so sind sie die homogenen Coordinaten eines durch sie eindeutig bestimmten Punktes.

4. Als homogene Coordinaten einer Ebene T verwenden wir die Quotienten aus den Abständen der Ebene T von den Eckpunkten des Achsendreiecks und dem Abstande von einem beliebig gewählten festen Punkte C. Sind die Abstände der Ebene T von A_i und von C bez. v_i und ρ, so sind die Coordinaten von T die Zahlen

$$u_1 = \frac{v_1}{\rho} , \quad u_2 = \frac{v_2}{\rho} , \quad u_3 = \frac{v_3}{\rho} , \quad u_4 = \frac{v_4}{\rho} .$$

Sind S_1, S_2, S_3, S_4 die Spuren von T auf den Geraden A_1C, A_2C, A_3C, A_4C, so sind daher die Coordinaten von T den Verhältnissen gleich

$$u_1 = \frac{A_1 S_1}{CS_1}, \quad u_2 = \frac{A_2 S_2}{CS_2}, \quad u_3 = \frac{A_3 S_3}{CS_3}, \quad u_4 = \frac{A_4 S_4}{CS_4}.$$

Sind ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 die homogenen Coordinaten von C, und bezeichnet G_i die dem Eckpunkte A_i gegenüberliegende Tetraëderfläche, so sind die Coordinaten

	u_1	u_2	u_3	u_4
von G_1:	$h_1 : \rho_1$,	0 ,	0 ,	0 ,
„ G_2:	0 ,	$h_2 : \rho_2$,	0 ,	0 ,
„ G_3:	0 ,	0 ,	$h_3 : \rho_3$,	0 ,
„ G_4:	0 ,	0 ,	0 ,	$h_4 : \rho_4$.

Für jede durch eine Ecke A_i des Achsentetraëders gehende Ebene ist eine Coordinate u_i gleich Null; für jede durch eine Kante $A_i A_k$ gehende Ebene sind zwei Coordinaten u_i und u_k gleich Null.

5. Wenn drei Gerade α, β, γ durch einen Punkt O gehen und von zwei Ebenen T_1 und T_2 der Reihe nach in den Punkten A_1, B_1, C_1, bez. A_2, B_2, C_2 geschnitten werden, so gilt auch rücksichtlich der Vorzeichen die Gleichung

1. $$\frac{OA_1B_1C_1}{OA_2B_2C_2} = \frac{OA_1}{OA_2} \cdot \frac{OB_1}{OB_2} \cdot \frac{OC_1}{OC_2}.$$

In der analytischen Planimetrie ist bewiesen worden, dass

2. $$\frac{OA_1B_1}{OA_2B_2} = \frac{OA_1}{OA_2} \cdot \frac{OB_1}{OB_2}.$$

Nun ist dem absoluten Werthe nach das Verhältniss $OC_1 : OC_2$ dem Verhältnisse der Abstände der Punkte C_1 und C_2 von den Ebenen OA_1B_1 und OA_2B_2 gleich. Folglich ist zunächst für die absoluten Werthe

3. $$\frac{OA_1B_1C_1}{OA_2B_2C_2} = \frac{OA_1B_1}{OA_2B_2} \cdot \frac{OC_1}{OC_2}.$$

Liegen nun C_1 und C_2 auf derselben Seite von O, so ist das Verhältniss $OC_1 : OC_2$ positiv, und die Verhältnisse

4. $$\frac{OA_1B_1C_1}{OA_2B_2C_2} \quad \text{und} \quad \frac{OA_1B_1}{OA_2B_2}$$

haben dasselbe Vorzeichen. Werden hingegen C_1 und C_2 durch O getrennt, so ist das Verhältniss OC_1 und OC_2 negativ, und die Verhältnisse 4. haben ungleiche Vorzeichen; daher gilt die Gleichung 3. auch rücksichtlich der Vorzeichen. Berücksichtigt man nun die Gleichung 2., so erhält man aus 3. die behauptete Gleichung 1.

6. Aus der Gleichung No. 1, 5 folgt

1. $$CS_1S_2S_3 - CS_2S_3S_4 + CS_3S_4S_1 - CS_4S_1S_2 = 0.$$

Nach No. 5 hat man

$$CS_iS_kS_l = CA_iA_kA_l \cdot \frac{CS_i \cdot CS_k \cdot CS_l}{CA_i \cdot CA_k \cdot CA_l}.$$

Setzt man dies in 1. ein, so erhält man

$$CA_1A_2A_3 \cdot \frac{CS_1 \cdot CS_2 \cdot CS_3}{CA_1 \cdot CA_2 \cdot CA_3} - CA_2A_3A_4 \cdot \frac{CS_2 \cdot CS_3 \cdot CS_4}{CA_2 \cdot CA_3 \cdot CA_4}$$
$$+ CA_3A_4A_1 \cdot \frac{CS_3 \cdot CS_4 \cdot CS_1}{CA_3 \cdot CA_4 \cdot CA_1} - CA_4A_1A_2 \cdot \frac{CS_4 \cdot CS_1 \cdot CS_2}{CA_4 \cdot CA_1 \cdot CA_2} = 0.$$

Multiplicirt man alle Glieder dieser Gleichung mit

$$\frac{CA_1 \cdot CA_2 \cdot CA_3 \cdot CA_4}{CS_1 \cdot CS_2 \cdot CS_3 \cdot CS_4},$$

so erhält man die einfachere Gleichung

$$2.\quad CA_1A_2A_3\cdot\frac{CA_4}{CS_4}-CA_2A_3A_4\cdot\frac{CA_1}{CS_1}+CA_3A_4A_1\cdot\frac{CA_2}{CS_2}-CA_4A_1A_2\cdot\frac{CA_3}{CS_3}=0.$$

Nun ist $\frac{CA_i}{CS_i}=\frac{CS_i-A_iS_i}{CS_i}=1-\frac{A_iS_i}{CS_i}=1-u_i$, daher erhält man aus 2.

$$CA_1A_2A_3(1-u_4)-CA_2A_3A_4(1-u_1)+CA_3A_4A_1(1-u_2)-CA_4A_1A_2(1-u_3)=0.$$

Löst man die Klammern auf und berücksichtigt, dass nach No. 1, 1

$$CA_1A_2A_3-CA_2A_3A_4+CA_3A_4A_1-CA_4A_1A_2=A_4A_1A_2A_3,$$

so erhält man zunächst

$$CA_1A_2A_3\cdot u_4-CA_2A_3A_4\cdot u_1+CA_3A_4A_1\cdot u_2-CA_4A_1A_2\cdot u_3=A_1A_2A_3A_4.$$

Da nun (No. 3, 2) $CA_kA_lA_m : A_iA_kA_lA_m=\rho_i : h_i$, so folgt schliesslich

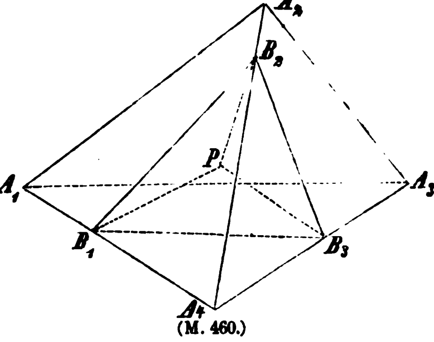
$$\frac{\rho_1}{h_1}u_1+\frac{\rho_2}{h_2}u_2+\frac{\rho_3}{h_3}u_3+\frac{\rho_4}{h_4}u_4=1.$$

Wir haben daher den Satz: Die vier homogenen Coordinaten jeder Ebene T erfüllen die Gleichung

$$3.\quad \frac{\rho_1}{h_1}u_1+\frac{\rho_2}{h_2}u_2+\frac{\rho_3}{h_3}u_3+\frac{\rho_4}{h_4}u_4=1.$$

Umgekehrt schliesst man: Wenn vier Zahlen u_1, u_2, u_3, u_4 dieser Gleichung genügen, so sind sie die Coordinaten einer eindeutig bestimmten Ebene.

7. Sind B_1, B_2, B_3 die Schnittpunkte einer Ebene T mit den Kanten A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 des Coordinatentetraëders, und theilt ein Punkt P der Ebene T das Dreieck $B_1B_2B_3$ im Verhältnisse $n_1:n_2:n_3$, sind ferner ξ_{1m}, ξ_{2m}, ξ_{3m}, ξ_{4m} die Coordinaten von B_m, so sind die Coordinaten von P (§ 2, No. 28)



(M. 460.)

$$1.\quad x_k=\frac{n_1\xi_{k1}+n_2\xi_{k2}+n_3\xi_{k3}}{n_1+n_2+n_3};$$
$k=1, 2, 3, 4.$

Nun gilt für die Coordinaten von B_m, wenn k, l, m eine Permutation von 1, 2, 3 ist

$$2.\quad \xi_{km}=\xi_{lm}=0,\quad \xi_{4m}:h_4=A_mB_m:A_mA_4,\quad \xi_{mm}:h_m=A_4B_m:A_4A_m.$$

Da nun $B_mA_m : B_mA_4=v_m:v_4=u_m:u_4$, so ist

$$A_mB_m:A_mA_4=A_mB_m:(A_mB_m+B_mA_4)=1:\left(1-\frac{u_4}{u_m}\right),$$

$$A_4B_m:A_4A_m=A_4B_m:(A_4B_m+B_mA_m)=1:\left(1-\frac{u_m}{u_4}\right).$$

Daher gewinnt man aus 2.

$$\xi_{4m}=\frac{u_m}{u_m-u_4}\cdot h_4,\quad \xi_{mm}=\frac{u_4}{u_4-u_m}\cdot h_m.$$

Folglich sind die Coordinaten der Punkte B_1, B_2, B_3

$$\xi_{11}=\frac{u_4}{u_4-u_1}h_1,\quad \xi_{21}=0,\quad \xi_{31}=0,\quad \xi_{41}=\frac{u_1}{u_1-u_4}h_4;$$

$$3.\quad \xi_{12}=0,\quad \xi_{22}=\frac{u_4}{u_4-u_2}h_2,\quad \xi_{32}=0,\quad \xi_{42}=\frac{u_2}{u_2-u_4}h_4;$$

$$\xi_{13}=0,\quad \xi_{23}=0,\quad \xi_{33}=\frac{u_4}{u_4-u_3}h_3,\quad \xi_{43}=\frac{u_3}{u_3-u_4}h_4.$$

Führt man diese Werthe in die vier Formeln 1. ein, so erhält man für die Coordinaten von P, wenn man $n_1 + n_2 + n_3 = n$ setzt

$$4.\quad x_1 = \frac{n_1}{n}\cdot\frac{u_4}{u_4 - u_1}\cdot h_1,\quad x_2 = \frac{n_2}{n}\cdot\frac{u_4}{u_4 - u_2}\cdot h_2,\quad x_3 = \frac{n_3}{n}\cdot\frac{u_4}{u_4 - u_3}\cdot h_3,$$

$$5.\quad -x_4 = \frac{n_1}{n}\cdot\frac{u_1}{u_4 - u_1}\cdot h_4 + \frac{n_2}{n}\cdot\frac{u_2}{u_4 - u_2}\cdot h_4 + \frac{n_3}{n}\cdot\frac{u_3}{u_4 - u_3}\cdot h_4 .$$

Aus 4. folgt

$$6.\quad \frac{n_1}{n}\cdot\frac{1}{u_4 - u_1} = \frac{x_1}{h_1 u_4},\quad \frac{n_2}{n}\cdot\frac{1}{u_4 - u_2} = \frac{x_2}{h_2 u_4},\quad \frac{n_3}{n}\cdot\frac{1}{u_4 - u_3} = \frac{x_3}{h_3 u_4};$$

setzt man diese Werthe in 5. ein, so erhält man zunächst

$$7.\quad -\frac{x_4}{h_4} = \frac{u_1 x_1}{u_4 h_1} + \frac{u_2 x_2}{u_4 h_2} + \frac{u_3 x_3}{u_4 h_3} .$$

Hieraus folgt die Gleichung

$$\frac{1}{h_1} u_1 x_1 + \frac{1}{h_2} u_2 x_2 + \frac{1}{h_3} u_3 x_3 + \frac{1}{h_4} u_4 x_4 = 0 .$$

Wenn also der Punkt P auf der Ebene T liegt, so erfüllen die Coordinaten des Punktes P und der Ebene T die für beide Reihen von Coordinaten lineare Gleichung

$$8.\quad \frac{1}{h_1} u_1 x_1 + \frac{1}{h_2} u_2 x_2 + \frac{1}{h_3} u_3 x_3 + \frac{1}{h_4} u_4 x_4 = 0 .$$

Umgekehrt: Wenn die Coordinaten von P und T dieser Gleichung genügen, so ist auch 7. erfüllt; man kann daher drei Zahlen $n_1 : n$, $n_2 : n$, $n_3 : n$ aus den Gleichungen 6. ableiten, und erhält somit für die Coordinaten von P die Formeln 4. und 5., welche mit den Gleichungen 1. für die angegebenen Werthe der Coordinaten der Punkte B_1, B_2, B_3 übereinstimmen; hieraus schliesst man: Wenn die Coordinaten eines Punktes und einer Ebene der Gleichung 8. genügen, so liegen der Punkt und die Ebene vereint (d. i. der Punkt liegt auf der Ebene).

8. Haben die Coordinaten der Ebene T gegebene Werthe $u_i = a_i$, so ist die Gleichung

$$\frac{1}{h_1} a_1 x_1 + \frac{1}{h_2} a_2 x_2 + \frac{1}{h_3} a_3 x_3 + \frac{1}{h_4} a_4 x_4 = 0$$

die Bedingungsgleichung für die Coordinaten der Punkte, welche auf der Ebene T liegen, ist also die Gleichung dieser Ebene in Punktcoordinaten; haben hingegen die Coordinaten des Punktes P gegebene Werthe $x_i = \alpha_i$, so ist

$$\frac{1}{h_1} \alpha_1 u_1 + \frac{1}{h_2} \alpha_2 u_2 + \frac{1}{h_3} \alpha_3 u_3 + \frac{1}{h_4} \alpha_4 u_4 = 0$$

die Bedingungsgleichung für die Coordinaten der Ebenen, welche durch P gehen, ist also die Gleichung dieses Punktes in Ebenencoordinaten.

Jede homogene lineare Gleichung in Punktcoordinaten ist die Gleichung einer durch die Verhältnisse der Coefficienten eindeutig bestimmten Ebene. Sind a_1, a_2, a_3, a_4 beliebige Zahlen, so ist

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

die Gleichung der Ebene, deren Coordinaten der Proportion genügen

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = h_1 a_1 : h_2 a_2 : h_3 a_3 : h_4 a_4 ,$$

also die Werthe haben

$$u_1 = k a_1 h_1,\quad u_2 = k a_2 h_2,\quad u_3 = k a_3 h_3,\quad u_4 = k a_4 h_4,$$

$$\text{wobei}\quad k = 1 : (\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \rho_3 a_3 + \rho_4 a_4) .$$

Jede homogene lineare Gleichung in Ebenencoordinaten ist di

Gleichung eines durch die Verhältnisse der Coefficienten eindeutig bestimmten Punktes. Sind α_1, α_2, α_3, α_4 beliebige Zahlen, so ist

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$$

die Gleichung des Punktes, dessen Coordinaten sich aus der Proportion ergeben

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = h_1 \alpha_1 : h_2 \alpha_2 : h_3 \alpha_3 : h_4 \alpha_4 ;$$

also hat man

$$x_1 = k\alpha_1 h_1 , \quad x_2 = k\alpha_2 h_2 , \quad x_3 = k\alpha_3 h_3 , \quad x_4 = k\alpha_4 h_4 ,$$
$$\text{wobei} \quad k = 1 : (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) .$$

9. Die homogene lineare Gleichung

$$1. \qquad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 0$$

ist die Gleichung einer Ebene, deren Coordinaten nach No. 8 die Werthe haben $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$. Diese Ebene theilt die Strecken $A_1 C$, $A_2 C$, $A_3 C$, $A_4 C$ aussen im Verhältniss 1., ist also unendlich fern.

Wenn in der homogenen linearen Gleichung in Punktcoordinaten

$$2. \qquad P \equiv \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$$

die Summe der Coefficienten verschwindet

$$3. \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 ,$$

so wird der Gleichung durch die Werthe genügt

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1 ,$$

der Punkt P liegt daher auf der unendlich fernen Ebene und ist somit selbst unendlich fern.

10. Die Gleichung der durch die Punkte P_1, P_2, P_3 bestimmten Ebene erhält man durch Elimination der Constanten a_1, a_2, a_3, a_4 aus den vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 &= 0 , \\
a_1 x_{11} + a_2 x_{21} + a_3 x_{31} + a_4 x_{41} &= 0 , \\
a_1 x_{12} + a_2 x_{22} + a_3 x_{32} + a_4 x_{42} &= 0 , \\
a_0 x_{13} + a_2 x_{23} + a_3 x_{33} + a_4 x_{43} &= 0 ,
\end{aligned}$$

wenn mit x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i} die Coordinaten des Punktes P_i bezeichnet werden. Aus diesen vier Gleichungen ergiebt sich die gesuchte Gleichung in Determinantenform

$$T \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} \end{vmatrix} = 0 .$$

Die Gleichung des den Ebenen T_1, T_2, T_3 gemeinsamen Punktes P ergiebt sich durch Elimination der Coefficienten aus den vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 &= 0 , \\
\alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{21} + \alpha_3 u_{31} + \alpha_4 u_{41} &= 0 , \\
\alpha_1 u_{12} + \alpha_2 u_{22} + \alpha_3 u_{32} + \alpha_4 u_{42} &= 0 , \\
\alpha_1 u_{13} + \alpha_2 u_{23} + \alpha_3 u_{33} + \alpha_4 u_{43} &= 0 .
\end{aligned}$$

Man erhält

$$P \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} & u_{41} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} \end{vmatrix} = 0 .$$

11. Die Coordinaten des Schnittpunkts der Ebenen $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ sind die Lösungen des Systems

$$T_1 \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0,$$
$$T_2 \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0,$$
$$T_3 \equiv c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x + c_4x_4 = 0,$$
$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1.$$

Die Coordinaten der Ebene, welche durch die Punkte $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ bestimmt ist, ergeben sich aus dem Systeme

$$P_1 \equiv \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3 + \alpha_4u_4 = 0,$$
$$P_2 \equiv \beta_1u_1 + \beta_2u_2 + \beta_3u_3 + \beta_4u_4 = 0,$$
$$P_3 \equiv \gamma_1u_1 + \gamma_2u_2 + \gamma_3u_3 + \gamma_4u_4 = 0,$$
$$\frac{\rho_1}{h_1}u_1 + \frac{\rho_2}{h_2}u_2 + \frac{\rho_3}{h_3}u_3 + \frac{\rho_4}{h_4}u_4 = 1.$$

12. Der Abstand eines Punktes P von der Ebene T kann aus den Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 des Punktes und der Gleichung der Ebene

$$T \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$

in folgender Weise bestimmt werden:

Der Punkt Π, in welchem die Ebene T von der Geraden PA_4 geschnitten wird, theile die Strecke PA_4 im Verhältnisse $n_2 : n_1$; aus den Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 des Punktes P und 0, 0, 0, h_4 des Punktes A_4 ergeben sich hiernach die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 von Π zu

$$\xi_1 = \frac{n_1x_1}{n_1+n_2}, \quad \xi_2 = \frac{n_1x_2}{n_1+n_2}, \quad \xi_3 = \frac{n_1x_3}{n_1+n_2}, \quad \xi_4 = \frac{n_1x_4 + n_2h_4}{n_1+n_2}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung der Ebene ein, so erhält man

$$n_1(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4) + n_2a_4h_4 = 0,$$

daher folgt

1. $$n_2 : n_1 = -T : a_4h_4.$$

Das Verhältniss der Abstände der Punkte P und A_4 von der Ebene T stimmt numerisch mit dem Verhältnisse überein, in welchem die Strecke PA_4 von Π getheilt wird; geben wir den Abständen zweier Punkte von einer Ebene gleiche oder ungleiche Vorzeichen, je nachdem die Punkte auf derselben Seite der Ebene liegen oder nicht, so haben die beiden Verhältnisse ungleiche Vorzeichen. Bezeichnet daher p den Abstand des Punktes P von der Ebene T, so ist

2. $$p : v_4 = -n_2 : n_1,$$

daher folgt aus 1.

3. $$p : v_4 = T : a_4h_4.$$

Nun ist $v_4 = u_4\rho$ und (No. 8.) $a_4h_4 = (\rho_1a_1 + \rho_2a_2 + \rho_3a_3 + \rho_4a_4)\cdot u_4$.

Wird der Werth, welchen die Function T annimmt, wenn man darin die x_k durch die Coordinaten ρ_k des Punktes C ersetzt, mit τ bezeichnet, so erhält man aus 2.

4. $$p = \frac{\rho}{\tau}\cdot T.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz: Der Abstand eines Punktes P von einer Ebene $T = 0$ ist dem Werthe proportional, den die Function T für die Coordinaten des Punktes P annimmt.

13. Um den Faktor $\rho : \tau$ zu bestimmen, mit dem man die Function T multipliciren muss, damit man den Abstand des Punktes P von $T = 0$ erhält, entwickeln wir zunächst die Gleichung, durch welche die Abstände v_1, v_2, v_3, v_4 der Ecken eines Tetraëders von einer Ebene mit einander verbunden werden.

Es seien α_i, β_i, γ_i die Stellungswinkel der dem Eckpunkte A_i gegenüberliegenden Tetraëderebene in Bezug auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen Nullpunkt im Innern des Tetraëders liegt, α, β, γ die Stellungswinkel der Ebene T und d ihr Abstand vom Nullpunkte, also die Gleichung von T in Normalform

$$T \equiv \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - d = 0;$$

ferner seien x_i, y_i, z_i die Coordinaten von A_i; alsdann ist

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cdot x_1 + \cos\beta \cdot y_1 + \cos\gamma \cdot z_1 - d &= - v_1, \\ \cos\alpha \cdot x_2 + \cos\beta \cdot y_2 + \cos\gamma \cdot z_2 - d &= - v_2, \\ \cos\alpha \cdot x_3 + \cos\beta \cdot y_3 + \cos\gamma \cdot z_3 - d &= - v_3, \\ \cos\alpha \cdot x_4 + \cos\beta \cdot y_4 + \cos\gamma \cdot z_4 - d &= - v_4. \end{aligned}$$

Löst man dieses System linearer Gleichungen zunächst in Bezug auf $\cos\alpha$ auf, so erhält man

$$2. \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \cos\alpha = - \begin{vmatrix} v_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ v_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ v_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ v_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\begin{vmatrix} y_i & z_i & 1 \\ y_k & z_k & 1 \\ y_l & z_l & 1 \end{vmatrix} = \cdot 2 A_i A_k A_l \cos\alpha_m,$$

wenn i, k, l, m eine Permutation von 1, 2, 3, 4 ist; ferner ist der Faktor von $\cos\alpha$ dem sechsfachen Tetraëdervolumen entgegengesetzt gleich (§ 3, 7). Daher hat man aus 2.

$$\begin{aligned} - 3 \cdot A_1 A_2 A_3 A_4 \cdot \cos\alpha = A_2 A_3 A_4 \cdot \cos\alpha_1 \cdot v_1 + A_4 A_3 A_1 \cdot \cos\alpha_2 \cdot v_2 \\ + A_1 A_2 A_4 \cdot \cos\alpha_3 \cdot v_3 + A_1 A_3 A_2 \cdot \cos\alpha_4 \cdot v_4. \end{aligned}$$

Dividirt man durch $3. A_1 A_2 A_3 A_4$, so erhält man

$$3. \qquad \cos\alpha = \frac{v_1}{h_1} \cos\alpha_1 + \frac{v_2}{h_2} \cos\alpha_2 + \frac{v_3}{h_3} \cos\alpha_3 + \frac{v_4}{h_4} \cos\alpha_4.$$

Ebenso erhält man die beiden entsprechenden Gleichungen

$$4. \qquad \cos\beta = \frac{v_1}{h_1} \cos\beta_1 + \frac{v_2}{h_2} \cos\beta_2 + \frac{v_3}{h_3} \cos\beta_3 + \frac{v_4}{h_4} \cos\beta_4,$$

$$5. \qquad \cos\gamma = \frac{v_1}{h_1} \cos\gamma_1 + \frac{v_2}{h_2} \cos\gamma_2 + \frac{v_3}{h_3} \cos\gamma_3 + \frac{v_4}{h_4} \cos\gamma_4.$$

Quadrirt man diese drei Gleichungen und addirt sie dann, und berücksichtigt, dass, wenn man mit ε_{ik} den Winkel der den Ecken A_i, A_k gegenüberliegenden Tetraëderflächen bezeichnet, die Gleichungen gelten

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1, \\ \cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i &= 1, \\ \cos\alpha_i \cos\alpha_k + \cos\beta_i \cos\beta_k + \cos\gamma_i \cos\gamma_k &= - \cos\varepsilon_{ik}, \end{aligned}$$

so erhält man schliesslich die gesuchte Gleichung:

$$6. \qquad \begin{aligned} \left(\frac{v_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{v_3}{h_3}\right)^2 + \left(\frac{v_4}{h_4}\right)^2 - 2\frac{v_1}{h_1} \cdot \frac{v_2}{h^2} \cos\varepsilon_{12} - 2\frac{v_1}{h_1} \cdot \frac{v_3}{h_3} \cdot \cos\varepsilon_{13} \\ - 2\frac{v_1}{h_1} \cdot \frac{v_4}{h_4} \cdot \cos\varepsilon_{14} - 2\frac{v_2}{h_2} \cdot \frac{v_3}{h_3} \cos\varepsilon_{23} - 2\frac{v_2}{h_2} \cdot \frac{v_4}{h_4} \cos\varepsilon_{24} - 2\frac{v_3}{h_3} \cdot \frac{v_4}{h_4} \cdot \cos\varepsilon_{34} = 1. \end{aligned}$$

14. Um nun in der Gleichung (No. 12, 4)

$$p = k \cdot T, \quad k = \rho : \tau,$$

den Faktor k als Function der Coefficienten von T und der Dimensionen des Tetraëders $A_1 A_2 A_3 A_4$ zu bestimmen, setzen wir für den Punkt P nach einander die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4. Dadurch erhalten wir

$$v_1 = k \cdot a_1 h_1, \quad v_2 = k \cdot a_2 h_2, \quad v_3 = k \cdot a_3 h_3, \quad v_4 = k \cdot a_4 h_4 .$$

Führen wir diese Werthe in No. 13, 6 ein, so erhalten wir den gesuchten Werth k aus

$$k^2 = 1 : [a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 2a_1a_2 \cos\varepsilon_{12} - 2a_1a_3 \cos\varepsilon_{13} - 2a_1a_4 \cos\varepsilon_{14} \\ - 2a_2a_3 \cos\varepsilon_{23} - 2a_2a_4 \cos\varepsilon_{24} - 2a_3a_4 \cos\varepsilon_{34}].$$

Ueber das Vorzeichen von k kann so verfügt werden, dass für die auf einer bestimmten Seite von T gelegenen Punkte die Abstände positiv, mithin für die auf der andern Seite liegenden Punkte negativ ausfallen.

15. Sind ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 die Abstände eines Punktes von den Ebenen eines Tetraëders $B_1B_2B_3B_4$ und ist die Gleichung der B_i gegenüberliegenden Ebene T_i dieses Tetraëders

$$T_i \equiv a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + a_{4i}x_4 = 0;$$

ist ferner k_i der in voriger Nummer bestimmte Faktor für die Ebene T_i, und sein Vorzeichen so gewählt, dass der Punkt B_i einen positiven Abstand von der gegenüberliegenden Fläche hat, so ergeben sich die Coordinaten ξ_i von P in Bezug auf das Tetraëder $B_1B_2B_3B_4$ aus den Gleichungen:

$$1. \quad \begin{aligned} \xi_1 &= k_1(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4), \\ \xi_2 &= k_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4), \\ \xi_3 &= k_3(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4), \\ \xi_4 &= k_4(a_{14}x_1 + a_{24}x_4 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4). \end{aligned}$$

Werden die Determinante dieses Systems mit R und die zu $k_i \cdot a_{ij}$ gehörige Subdeterminante mit $\mathfrak{a}_{ij}$ bezeichnet, so erhält man hieraus

$$2. \quad \begin{aligned} R \cdot x_1 &= \mathfrak{a}_{11}\xi_1 + \mathfrak{a}_{12}\xi_2 + \mathfrak{a}_{13}\xi_3 + \mathfrak{a}_{14}\xi_4, \\ R \cdot x_2 &= \mathfrak{a}_{21}\xi_1 + \mathfrak{a}_{22}\xi_2 + \mathfrak{a}_{23}\xi_3 + \mathfrak{a}_{24}\xi_4, \\ R \cdot x_3 &= \mathfrak{a}_{31}\xi_1 + \mathfrak{a}_{32}\xi_2 + \mathfrak{a}_{33}\xi_3 + \mathfrak{a}_{34}\xi_4, \\ R \cdot x_4 &= \mathfrak{a}_{41}\xi_1 + \mathfrak{a}_{42}\xi_2 + \mathfrak{a}_{43}\xi_3 + \mathfrak{a}_{44}\xi_4. \end{aligned}$$

Dies sind die Transformationsformeln in homogenen Punktcoordinaten zum Uebergange aus dem Systeme $A_1A_2A_3A_4$ zu dem neuen Systeme $B_1B_2B_3B_4$. Wie man sieht, erfolgt dieser Uebergang durch homogene lineare Substitutionen. Man überzeugt sich leicht, dass auch der Uebergang aus einem gewöhnlichen rechtwinkeligen Systeme in ein homogenes System durch homogene lineare Substitutionen erfolgt.

16. Aus der Gleichung eines Punktes

$$P \equiv \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$$

und den Coordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 einer Ebene T kann man den Abstand der Ebene von P bestimmen. Denn die Gleichung der Ebene T ist

$$T \equiv \frac{u_1}{h_1}x_1 + \frac{u_2}{h_2}x_2 + \frac{u_3}{h_3}x_3 + \frac{u_4}{h_4}x_4 = 0,$$

und die Coordinaten von P sind (No. 8)

$$x_k = \frac{1}{\sigma}\alpha_k h_k, \quad \sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 .$$

Der gesuchte Abstand p ist daher

$$1. \quad p = \frac{r}{\sigma} \cdot (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4) = \frac{r}{\sigma} \cdot P,$$

wobei r den Werth des Coefficienten k (No. 14) bezeichnet, der entsteht, wenn man in k für a_1, a_2, a_3 die besonderen hier geltenden Werthe $u_1 : h_1$, $u_2 : h_2$, $u_3 : h_3$ einsetzt; man hat daher

$$r^2 = 1 : \left[\left(\frac{u_1}{h_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{u_4}{h_4}\right)^2 - 2\frac{u_1}{h_1} \cdot \frac{u_2}{h_2} \cos\varepsilon_{12} - \ldots - 2\frac{u_3}{h_3} \cdot \frac{u_4}{h_4} \cos\varepsilon_{34}\right].$$

Dividirt man diese Gleichung durch r^2 und vergleicht das Resultat mit No. 13, 6, so sieht man, dass r der Abstand des Punktes C von der Ebene T ist. Daher ist

2. $$u = \frac{p}{r} = \frac{1}{\sigma} P$$

die Coordinate von T in Bezug auf P, d. i. der Quotient aus den Abständen der Ebene T von P und von C.

17. Der soeben gefundene Werth für u führt auf die Transformationsformeln für Ebenencoordinaten.

Sind B_1, B_2, B_3, B_4 die Eckpunkte des neuen Coordinatentetraëders und ist die Gleichung von B_i

$$\alpha_{1i}u_1 + \alpha_{2i}u_2 + \alpha_{3i}u_3 + \alpha_{4i}u_4 = 0,$$

und

$$\alpha_{1i} + \alpha_{2i} + \alpha_{3i} + \alpha_{4i} = \sigma_i;$$

sind ferner U_1, U_2, U_3, U_4 die Coordinaten einer Ebene T in Bezug auf das Tetraëder B_1, B_2, B_3, B_4, so hat man die Gleichungen

1. $$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{\sigma_1}(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \alpha_{31}u_3 + \alpha_{41}u_4), \\ U_2 &= \frac{1}{\sigma_2}(\alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{32}u_3 + \alpha_{42}u_4), \\ U_3 &= \frac{1}{\sigma_3}(\alpha_{13}u_1 + \alpha_{23}u_2 + \alpha_{33}u_3 + \alpha_{43}u_4), \\ U_4 &= \frac{1}{\sigma_4}(\alpha_{14}u_1 + \alpha_{24}u_2 + \alpha_{34}u_3 + \alpha_{44}u_4). \end{aligned}$$

Die Auflösungen dieses Systems ergeben homogene lineare Functionen für die u_i; wir sehen daher: Der Uebergang von einem homogenen Coordinatensysteme zu einem andern erfolgt für Ebenencoordinaten ebenfalls durch homogene lineare Substitutionen.

18. Die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} \end{vmatrix}$$

kann als der Werth betrachtet werden, den die Gleichung der durch je drei der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 bestimmten Ebene (No. 10) annimmt, wenn man in derselben x_1, x_2, x_3, x_4 durch die Coordinaten des vierten Punktes ersetzt. Werden daher die Höhen des Tetraëders P_1, P_2, P_3, P_4 mit H_1, H_2, H_3, H_4, und mit k_i der Faktor k für die lineare Function

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_{1l} & x_{2l} & x_{3l} & x_{4l} \\ x_{1m} & x_{2m} & x_{3m} & x_{4m} \\ x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & x_{4n} \end{vmatrix} \quad (i,\ l,\ m,\ n \text{ eine Permutation gerader Klasse von } 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

bezeichnet, so hat man

1. $$\Delta = k_1 H_1 = k_2 H_2 = k_3 H_3 = k_4 H_4.$$

Andererseits ist, wenn mit V das Tetraëdervolumen $P_1 P_2 P_3 P_4$ und mit G_1, G_2, G_3, G_4 die Flächenzahlen der Seiten dieses Tetraëders bezeichnet werden

2. $$3V = G_1 H_1 = G_2 H_2 = G_3 H_3 = G_4 H_4.$$

Hieraus folgt die Proportion

$$k_1 : k_2 : k_3 : k_4 : \Delta = G_1 : G_2 : G_3 : G_4 : 3V.$$

Man kann daher setzen $G_i = \lambda k_i$, $3V = \lambda\Delta$.

Da G_i und k_i von den Coordinaten des Punktes P_i nicht abhängen, so ist auch λ von diesen Coordinaten unabhängig; folglich ist λ eine von den Coordinaten der Eckpunkte des Tetraëders $P_1P_2P_3P_4$ unabhängige Constante und kann durch jeden Specialfall bestimmt werden. Wendet man, um λ zu erhalten, die Gleichung $V = \lambda\Delta$ auf das Tetraëder $A_1A_2A_3A_4$ an, so erhält man

3. $$A_1A_2A_3A_4 = \lambda \cdot h_1h_2h_3h_4 .$$

Wird das Volumen des Achsentetraëders $A_1A_2A_3A_4$ mit t bezeichnet, so hat man daher die Gleichung

4. $$P_1P_2P_3P_4 = \pm \frac{t}{h_1h_2h_3h_4} \cdot \Delta .$$

Man überzeugt sich leicht, (vergl. § 3), dass die Determinante Δ und das Volumen $P_1P_2P_3P_4$ immer zugleich das Vorzeichen wechseln; also gilt in 4. nur eines der beiden Zeichen. Um zu entscheiden, welches gültig ist, kann man $P_1P_2P_3P_4$ mit den Ecken des Achsentetraëders vertauschen. Man erfährt dann, dass in 4. das positive Zeichen gilt, und hat sonach das Volumen eines Tetraëders aus den homogenen Coordinaten seiner Eckpunkte

$$P_1P_2P_3P_4 = \frac{t}{h_1h_2h_3h_4} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} \end{vmatrix} .$$

§ 12. Polarebene und Pol für Flächen zweiter Ordnung.

1. Wenn in einer ganzen Function tetraëdrischer Punkt- oder Ebenencoordinaten der Grad eines Gliedes der Function um δ-Einheiten kleiner ist als der Grad n der Function, so kann man dieses Glied mit dem der Einheit gleichen Faktor (§ 11, No. 3, 3 und No. 6, 3)

$$\left(\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4}\right)^\delta, \quad \text{bez. mit} \quad \left(\frac{\rho_1}{h_1}u_1 + \frac{\rho_2}{h_2}u_2 + \frac{\rho_3}{h_3}u_3 + \frac{\rho_4}{h_4}u_4\right)^\delta,$$

multipliciren; dadurch gehen aus diesem Gliede eine Reihe von Gliedern hervor, die alle den Grad n haben. Führt man dies bei allen Gliedern der Function aus, deren Grad niedriger ist als n, so erhält man schliesslich eine Function, deren Glieder alle vom $n$ten Grade sind, die also homogen ist. Bei Benutzung homogener Coordinaten kann man sich daher auf die Betrachtung homogener Functionen beschränken.

2. A. Die allgemeine Form einer homogenen quadratischen Function tetraëdrischer Punktcoordinaten ist

1. $$f \equiv A_{11}x_1^2 + 2A_{12}x_1x_2 + 2A_{13}x_1x_3 + 2A_{14}x_1x_4 + A_{22}x_2^2 + 2A_{23}x_2x_3 + 2A_{24}x_2x_4 + A_{33}x_3^2 + 2A_{34}x_3x_4 + A_{44}x_4^2.$$

Geht die Fläche $f = 0$ durch den Eckpunkt A_i des Achsentetraëders, so wird der Gleichung durch die Coordinaten $x_i = h_i$, $x_k = x_l = x_m = 0$ genügt; also ist $A_{ii} = 0$. Die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, welche dem Achsentetraëder umschrieben ist, hat daher die Form

2. $$f \equiv 2A_{12}x_1x_2 + 2A_{13}x_1x_3 + 2A_{14}x_1x_4 + 2A_{23}x_2x_3 + 2A_{24}x_2x_4 + 2A_{34}x_3x_4 = 0.$$

Wenn die Fläche $f = 0$ die Gerade A_iA_k enthält, so wird der Gleichung durch $x_l = x_m = 0$ unabhängig von x_i und x_k genügt, es ist daher

$$A_{ii} = A_{ik} = A_{kk} = 0.$$

Enthält die Fläche alle Seiten des unebenen Vierecks $A_1A_2A_3A_4$, so ist daher

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = A_{44} = A_{12} = A_{23} = A_{34} = A_{14} = 0,$$

und die Gleichung der Fläche reducirt sich auf

3. $$f = 2A_{13}x_1x_3 + 2A_{24}x_2x_4 = 0.$$

Diese Gleichung enthält nur noch eine verfügbare Constante, nämlich das Verhältniss $A_{13} : A_{24}$; sie bestätigt, dass eine Fläche II. O. durch ein auf ihr liegendes unebenes Viereck und einen Punkt eindeutig bestimmt ist.

B. Die allgemeine Form einer homogenen quadratischen Function in tetraëdrischen Ebenencoordinaten ist

1. $$\varphi = B_{11}u_1^2 + 2B_{12}u_1u_2 + 2B_{13}u_1u_3 + 2B_{14}u_1u_4 + B_{22}u_2^2 + 2B_{23}u_2u_3 + 2B_{24}u_2u_4 + B_{33}u_3^2 + 2B_{34}u_3u_4 + B_{44}x_4^2.$$

Wenn die Fläche $\varphi = 0$ von der A_i gegenüberliegenden Tetraëderfläche berührt wird, so wird der Gleichung durch die Coordinaten $u_k = u_l = u_m = 0$ genügt, also ist $A_{ii} = 0$. Die Gleichung einer dem Coordinatentetraëder eingeschriebenen Fläche zweiter Klasse ist demnach

2. $$\varphi = 2B_{12}u_1u_2 + 2B_{13}u_1u_3 + 2B_{14}u_1u_4 + 2B_{23}u_2u_3 + 2B_{24}u_2u_4 + 2B_{34}u_3u_4 = 0.$$

Enthält die Fläche die Tetraëderkante A_iA_k, so wird der Gleichung $\varphi = 0$ durch $u_i = u_k = 0$ unabhängig von u_l und u_m genügt, also ist

$$B_{ll} = B_{lm} = B_{mm} = 0.$$

Ist das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ auf der Fläche gelegen, so ist daher

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = B_{44} = B_{12} = B_{23} = B_{34} = B_{44} = 0,$$

und die Gleichung der Fläche reducirt sich auf

3. $$\varphi = 2B_{13}u_1u_3 + 2B_{24}u_2u_4 = 0.$$

Da diese Gleichung nur eine Constante enthält, nämlich das Verhältniss $B_{13} : B_{24}$, so folgt, dass eine Fläche II. O. durch ein auf ihr liegendes unebenes Viereck und durch eine Tangentenebene eindeutig bestimmt ist.

3. Zur Vorbereitung der nächsten Untersuchungen schalten wir folgende Bemerkung ein: Die Coordinaten x_k des Punktes P, der die Strecke P_1P_2 im Verhältnisse $\lambda_2 : \lambda_1$ theilt, wobei $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ sei, sind bekanntlich

1. $$x_1 = \lambda_1x_{11} + \lambda_2x_{12}, \quad x_2 = \lambda_1x_{21} + \lambda_2x_{22}, \quad x_3 = \lambda_1x_{31} + \lambda_2x_{32}, \quad x_4 = \lambda_1x_{41} + \lambda_2x_{42}.$$

Die Ebene T, deren Coordinaten u_k aus den Coordinaten u_{k1} und u_{k2} nach den Formeln abgeleitet werden

2. $$u_k = \lambda_1u_{k1} + \lambda_2u_{k2}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

hat die Gleichung (§ 11, 8)

$$T = \Sigma\frac{1}{h_k}(\lambda_1u_{k1} + \lambda_2u_{k2})x_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Hierfür kann man setzen

3. $$T = \lambda_1 \cdot \Sigma\frac{1}{h_k}u_{k1}x_k + \lambda_2 \cdot \Sigma\frac{1}{h_k}u_{k2}x_k = 0.$$

Setzt man nun

4. $$T_1 = \Sigma\frac{1}{h_k}u_{k1}x_k, \quad T_2 = \Sigma\frac{1}{h_k}u_{k2}x_k,$$

so dass also $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ die Gleichungen der beiden Ebenen T_1 und T_2 sind, so hat man

5. $$T = \lambda_1T_1 + \lambda_2T_2 = 0.$$

Die Faktoren k_1 und k_2 der Functionen T_1 und T_2 (§ 11) haben hier die Werthe r_1 und r_2, wenn man hiermit die Abstände der Ebenen T_1 und T_2 von C bezeichnet; setzt man nun

$$T = \frac{\lambda_1}{r_1}(r_1T_1) + \frac{\lambda_2}{r_2}(r_2T_2) = 0,$$

so ist ersichtlich, dass für jeden Punkt P der Ebene T die Gleichung besteht

$$\frac{\lambda_1}{r_1}(r_1 T_1) = -\frac{\lambda_2}{r_2}(r_2 T_2).$$

Nun sind aber $r_1 T_1$ und $r_2 T_2$ die Abstände p_1, p_2 des Punktes P von den Ebenen T_1 und T_2, und haben gleiches Zeichen mit r_1 und r_2; daher hat man für jeden Punkt der Ebene T

$$p_1 : p_2 = -\frac{\lambda_2}{r_2} : \frac{\lambda_1}{r_1}.$$

Hieraus schliessen wir: Die Ebene T, deren Coordinaten aus den Coordinaten der gegebenen Ebenen T_1 und T_2 durch die Formeln abgeleitet werden

$$u_k = \lambda_1 u_{k1} + \lambda_2 u_{k2}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

theilt den Winkel der Ebenen T_1 und T_2 im Sinusverhältnisse

$$\frac{\sin T_1 T}{\sin T T_2} = -\frac{\lambda_2}{r_2} : \frac{\lambda_1}{r_1}.$$

Je nachdem $\lambda_1 : \lambda_2$ negativ oder positiv ist, geht T durch den Winkel, in welchem der Punkt C liegt, oder nicht.

4. Wir bestimmen nun die Verhältnisse, durch welche die Strecke zweier Punkte durch eine Fläche II. O. $f = 0$ getheilt wird, sowie die Sinusverhältnisse, in welchen der Winkel zweier Ebenen durch die Tangentenebenen einer Fläche II. O. $\varphi = 0$ getheilt wird, die durch den Schnitt der beiden gegebenen Ebenen gehen.

A. Sind P_1 und P_2 die beiden gegebenen Punkte und sind

$$x_k = \frac{\lambda_1 x_{k1} + \lambda_2 x_{k2}}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

die Coordinaten eines Punktes in welchem die $P_1 P_2$ von der Fläche

$$f = A_{11} x_1^2 + \ldots = 0$$

geschnitten wird, so hat man die Gleichung

$$A_{11}(\lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{12})^2 + 2A_{12}(\lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{12})(\lambda_1 x_{21} + \lambda_2 x_{22}) + \ldots = 0.$$

Löst man alle Klammern auf, so erhält man

$$1. \quad \lambda_1^2 \cdot f_1 + 2\lambda_1\lambda_2(f_{11}' x_{12} + f_{21}' x_{22} + f_{31}' x_{32} + f_{41}' x_{42}) + \lambda_2^2 \cdot f_2 = 0.$$

Hierin bezeichnen f_1 und f_2 die Werthe, welche die Function f erhält, wenn man die Coordinaten x_k durch die Coordinaten x_{k1} des Punktes P_1, bez. durch die Coordinaten x_{k2} des Punktes P_2 ersetzt. Ferner bezeichnen f_1', f_2', f_3', f_4' die abgeleiteten linearen Functionen

$$2. \quad \begin{aligned} f_1' &\equiv A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4, \quad f_2' \equiv A_{12}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4, \\ f_3' &\equiv A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + A_{33}x_3 + A_{34}x_4, \quad f_4' \equiv A_{14}x_1 + A_{24}x_2 + A_{34}x_3 + A_{44}x_4, \end{aligned}$$

und ein zweiter Index i deutet an, dass man statt der veränderlichen Coordinaten x_k die Coordinaten x_{ki} eines gegebenen Punktes P_i gesetzt hat.

Multiplicirt man die Functionen f_1', f_2', f_3', f_4' der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3, x_4 und addirt, so erhält man die Identität

$$3. \quad f_1' \cdot x_1 + f_2' \cdot x_2 + f_3' \cdot x_3 + f_4' \cdot x_4 \equiv f.$$

Ersetzt man in den Formeln 2. die Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 durch x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, so erhält man die Functionen f_{1i}, f_{2i}, f_{3i}, f_{4i}; multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, x_{4k} und addirt, indem man die in jeder Verticalreihe stehenden Glieder vereint, so ergiebt sich die Identität

$$4. \quad f_{1i}' \cdot x_{1k} + f_{2i}' \cdot x_{2k} + f_{3i}' \cdot x_{3k} + f_{4i}' \cdot x_{4k} \equiv f_{1k}' \cdot x_{1i} + f_{2k}' \cdot x_{2i} + f_{3k}' \cdot x_{3i} + f_{4k}' \cdot x_{4i}.$$

B. Sind T_1 und T_2 die beiden gegebenen Ebenen und sind

$$u_k = \frac{\lambda_1 u_{k1} + \lambda_2 u_{k2}}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

die Coordinaten einer Ebene T_i welche die Fläche $\varphi = B_{11} u_1^2 + .. = 0$ berührt, so ist die Gleichung erfüllt

$$B_{11} (\lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{12})^2 + 2 B_{12} (\lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{12})(\lambda_1 u_{21} + \lambda_2 u_{22}) + \ldots = 0.$$

Nach Auflösung der Klammern ergiebt sich hieraus

5. $\lambda_1^2 \cdot \varphi_1 + 2 \cdot \lambda_1 \lambda_2 (\varphi_{11}' \cdot u_{12} + \varphi_{21}' \cdot u_{22} + \varphi_{31}' \cdot u_{32} + \varphi_{41}' \cdot u_{42}) + \lambda_2^2 \cdot \varphi_2 = 0.$

Hierin sind φ_1 und φ_2 die Werthe, welche die Function φ für die Coordinaten der Ebene T_1 und T_2 annimmt; ferner sind φ_1', φ_2', φ_3', φ_4' die abgeleiteten linearen Functionen

6.
$$\begin{aligned}
\varphi_1' &= B_{11} u_1 + B_{12} u_2 + B_{13} u_3 + B_{14} u_4 ,\\
\varphi_2' &= B_{12} u_1 + B_{22} u_2 + B_{23} u_3 + B_{24} u_4 ,\\
\varphi_3' &= B_{13} u_1 + B_{23} u_2 + B_{33} u_3 + B_{34} u_4 ,\\
\varphi_4' &= B_{14} u_1 + B_{24} u_2 + B_{34} u_3 + B_{44} u_4 .
\end{aligned}$$

Diese Functionen erfüllen die Identitäten

7. $$\varphi_1' u_1 + \varphi_2' u_2 + \varphi_3' u_3 + \varphi_4' u_4 = \varphi ,$$

8. $$\begin{aligned}
&\varphi_{1i}' u_{1k} + \varphi_{2i}' u_{2k} + \varphi_{3i}' u_{3k} + \varphi_{4i}' u_{4k}\\
&= \varphi_{1k}' u_{1i} + \varphi_{2k}' u_{2i} + \varphi_{3k}' u_{3i} + \varphi_{4k}' u_{4i} ,
\end{aligned}$$

wobei ein zweiter Index i andeutet, dass die veränderlichen Coordinaten durch die der Ebene T_i ersetzt worden sind.

5. A. Liegt der Punkt P_1 auf der Fläche $f = 0$, so ist $f_1 = 0$, und die Gleichung No. 4, 1 erhält somit die selbstverständliche Wurzel $\lambda_2 = 0$.

Soll auch der zweite Schnittpunkt der Geraden $P_1 P_2$ und der Fläche f mit P_1 zusammenfallen, soll also $P_1 P_2$ die Fläche in P_1 tangiren, so muss der Coefficient von $\lambda_1 \lambda_2$ verschwinden. Unterdrücken wir die zweiten Indices bei den Coordinaten von P_2, so erhalten wir daher die Gleichung der Tangentenebene der Fläche $f = 0$ im Punkte P_1 desselben

1. $$T = f_{1i}' \cdot x_1 + f_{2i}' \cdot x_2 + f_{3i}' \cdot x_3 + f_{3i}' x_4 = 0.$$

B. Wird die Fläche $\varphi = 0$ von der Ebene T_1 berührt, so ist $\varphi_1 = 0$; die Gleichung No. 4, 4 hat alsdann eine Wurzel $\lambda_2 = 0$. Soll auch die zweite durch den Schnitt von $T_1 T_2$ gehende Tangentenebene der Fläche φ mit T_1 zusammenfallen, so muss die Gleichung noch eine Wurzel $\lambda_2 = 0$ haben, es muss also der Coefficient von $\lambda_1 \lambda_2$ verschwinden. Lässt man den Index 2 bei den Coordinaten der Ebene T_2 weg, so erhält man für den Tangentialpunkt der die Fläche φ berührenden Ebene T_1 die Gleichung

2. $$P = \varphi_{11}' \cdot u_1 + \varphi_{21}' \cdot u_2 + \varphi_{31}' \cdot u_3 + \varphi_{41}' \cdot u_4 = 0.$$

6. A. Wenn es einen Punkt giebt, für dessen Coordinaten

1. $$f_1' = f_2' = f_3' = f_4' = 0,$$

so ist für diesen Punkt zufolge No. 4, 3 auch $f = 0$, der Punkt liegt also auf der Fläche. Für diesen Punkt verschwinden alle Coefficienten in der Gleichung der Tangentenebene (No. 5, 1), und die Gleichung No. 4, 1 hat unabhängig von der Lage des Punktes P_2 zwei Wurzeln $\lambda_2 = 0$; jede durch diesen Punkt gehende Gerade hat daher mit der Fläche zwei Punkte gemein. Der Punkt ist somit als Doppelpunkt der Fläche, die Fläche selbst als Kegelfläche II. O. gekennzeichnet.

Der Verein der Gleichungen 1. wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

2. $$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{vmatrix} = 0 .$$

Die Gleichung $\Delta = 0$ ist daher die Bedingung dafür, dass die Fläche $f = 0$ ein Kegel ist.

Die Verhältnisse der Coordinaten der Kegelspitze ergeben sich aus den linearen Gleichungen 1.; um die Coordinaten selbst zu erhalten, hat man noch die Gleichung § 11 No. 3, 3 zu benutzen.

B. Wenn es eine Ebene $\mathfrak{T}$ giebt, für deren Coordinaten

3. $$\varphi_1' = \varphi_2' = \varphi_3' = \varphi_4' = 0,$$

so erfüllen dieselben zufolge der Identität No. 5, 7 auch $\varphi = 0$, die Ebene $\mathfrak{T}$ berührt daher die Fläche φ. Für diese Ebene verschwinden in der Gleichung No. 4, 5 der Coefficient von λ_1^2 und der von $\lambda_1 \lambda_2$ unabhängig von der Ebene T_2, also gehen durch jede Gerade dieser Ebene zwei mit $\mathfrak{T}$ zusammenfallende Berührungsebenen der Fläche φ. Hierdurch ist $\mathfrak{T}$ als Doppelebene charakterisirt.

Der Verein der vier Gleichungen 3. wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$\nabla = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{43} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Unter der Bedingung $\nabla = 0$ hat die Fläche φ also eine Doppelebene; mithin ist die Fläche unter dieser Bedingung eine Grenzfläche II. O. Die Verhältnisse der Coordinaten der Doppelebene ergeben sich aus dem linearen Systeme 3.

7. A. Die Verhältnisse der Coordinaten u_k der Ebene, die eine Fläche II. O. $f = 0$ im Punkte P_1 derselben berührt, ergeben sich aus den Gleichungen

$$f_{11}' = A_{11}x_{11} + A_{12}x_{21} + A_{13}x_{31} + A_{14}x_{41} = \mu \cdot \frac{u_1}{h_1},$$

$$f_{21}' = A_{12}x_{11} + A_{22}x_{21} + A_{23}x_{31} + A_{24}x_{41} = \mu \cdot \frac{u_2}{h_2},$$

$$f_{31}' = A_{13}x_{11} + A_{23}x_{21} + A_{33}x_{31} + A_{34}x_{41} = \mu \cdot \frac{u_3}{h_3},$$

$$f_{41}' = A_{14}x_{11} + A_{24}x_{21} + A_{34}x_{31} + A_{44}x_{41} = \mu \cdot \frac{u_4}{h_4}.$$

Nimmt man hierzu noch die Gleichung

$$\frac{1}{h_1}x_{11}u_1 + \frac{1}{h_2}x_{21}u_2 + \frac{1}{h_3}x_{31}u_3 + \frac{1}{h_4}x_{41}u_4 = 0,$$

so ist die Bedingung für den Verein dieser fünf für x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41} linearen Gleichungen

$$\varphi = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & \frac{u_1}{h_1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & \frac{u_2}{h_2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & \frac{u_3}{h_3} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & \frac{u_4}{h_4} \\ \frac{u_1}{h_1} & \frac{u_2}{h_2} & \frac{u_3}{h_3} & \frac{u_4}{h_4} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Bedingungen erfüllen die Coordinaten der Ebenen T, welche die Fläche $f = 0$ berühren; mithin ist $\varphi = 0$ die Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten.

B. Die Verhältnisse der Coordinaten des Punktes, in denen eine Fläche II. O. $\varphi = 0$ von der Ebene T_1 berührt wird, ergeben sich aus den Gleichungen

$$\varphi_{11}' \equiv B_{11}u_{11} + B_{12}u_{21} + B_{13}u_{31} + B_{14}u_{41} = \mu \cdot \frac{x_1}{h_1},$$

$$\varphi_{21}' \equiv B_{12}u_{11} + B_{22}u_{21} + B_{23}u_{31} + B_{24}u_{41} = \mu \cdot \frac{x_2}{h_2},$$

$$\varphi_{31}' \equiv B_{13}u_{11} + B_{23}u_{21} + B_{33}u_{31} + B_{34}u_{41} = \mu \cdot \frac{x_3}{h_3},$$

$$\varphi_{41}' \equiv B_{14}u_{11} + B_{24}u_{21} + B_{34}u_{31} + B_{44}u_{41} = \mu \cdot \frac{x_4}{h_4}.$$

Nimmt man hierzu

$$\frac{1}{h_1} u_{11} x_1 + \frac{1}{h_2} u_{21} x_2 + \frac{1}{h_3} u_{31} x_3 + \frac{1}{h_4} u_{41} x_4 = 0,$$

so ergiebt sich für den Verein dieser in Bezug auf u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{41} linearen Gleichungen

$$f \equiv \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & \frac{x_1}{h_1} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & \frac{x_2}{h_2} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{34} & \frac{x_3}{h_3} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} & \frac{x_4}{h_4} \\ \frac{x_1}{h_1} & \frac{x_2}{h_2} & \frac{x_3}{h_3} & \frac{x_4}{h_4} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Fläche in Punktcoordinaten.

8. A. Liegt P_1 nicht auf der Fläche $f = 0$, so wird die Fläche $f = 0$ von der Geraden $P_1 P_2$ berührt, wenn die Gleichung No. 4, 1 zwei gleiche Wurzeln für das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ ergiebt. Die Bedingung hierfür ist

$$f_1 \cdot f_2 - (f_{11}' \cdot x_{12} + f_{21}' \cdot x_{22} + f_{31}' \cdot x_{32} + f_{41}' \cdot x_{42})^2 = 0.$$

Denkt man sich P_1 als gegeben und P_2 als veränderlich, und unterdrückt man demgemäss bei den Coordinaten des letzteren Punktes den Index 2, so erhält man als Gleichung des der Fläche f vom Punkte P_1 aus umschriebenen Kegels

1. $$f_1 \cdot f - (f_{11}' \cdot x_1 + f_{21}' \cdot x_2 + f_{31}' \cdot x_3 + f_{41}' \cdot x_4)^2 = 0.$$

Die Punkte, in welchen dieser Kegel die Fläche f berührt, erfüllen ausser der Gleichung 1. noch die Gleichung $f = 0$, folglich erfüllen sie auch die Gleichung

2. $$T \equiv f_{11}' \cdot x_1 + f_{21}' \cdot x_2 + f_{31}' \cdot x_3 + f_{41}' \cdot x_4 = 0.$$

Dies ist daher die Gleichung der Ebene der Berührungspunkte; sie ist real, auch wenn der Kegel ausser der Spitze keinen realen Punkt hat.

B. Berührt T die Fläche $\varphi = 0$ nicht, so wird die Fläche von der Geraden $T_1 T_2$ berührt, wenn die Gleichung No. 4, 5 für das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ gleiche Wurzeln ergiebt, also wenn

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 - (\varphi_{11}' \cdot u_{12} + \varphi_{21}' \cdot u_{22} + \varphi_{31} \cdot u_{32} + \varphi_{41} \cdot u_{42})^2 = 0.$$

Denkt man sich T_1 gegeben und ersetzt T_2 durch T, so erhält man

3. $$\varphi_1 \cdot \varphi - (\varphi_{11}' \cdot u_1 + \varphi_{21}' \cdot u_2 + \varphi_{31}' \cdot u_3 + \varphi_{41}' \cdot u_4)^2 = 0.$$

Diese Gleichung wird von allen Ebenen T erfüllt, welche die Ebene T_1 in einer Tangente der Fläche φ schneiden; sie stellt daher die der Fläche φ ein-

geschriebene Grenzfläche dar, welche die Ebene T_1 zur Doppelebene hat, d. i. die Gleichung des Kegelschnittes in Ebenencoordinaten, in welchem φ von T_1 geschnitten wird.

Die Tangentialebenen, welche diese Grenzfläche mit der Fläche $\varphi = 0$ gemein hat, genügen ausser der Gleichung 3. auch der Gleichung $\varphi = 0$, mithin erfüllen sie die lineare Gleichung

$$P \equiv \varphi_{11}' \cdot u_1 + \varphi_{21}' \cdot u_2 + \varphi_{31}' \cdot u_3 + \varphi_{41}' \cdot u_4 = 0.$$

Die Ebenen, welche eine Fläche II. O. entlang einer ebenen Curve berühren, gehen also durch einen Punkt, und umhüllen somit einen Kegel II. O., der diesen Punkt zur Spitze hat. Der Punkt P ist auch dann noch real, wenn in der Ebene T_1 keine realen Tangenten der Fläche φ liegen.

9. Wir nehmen auch für die folgenden Untersuchungen den Punkt P_1 und die Ebene T_1 in No. 4, 1 und No. 4, 5 als gegeben an, hingegen den Punkt P_2 und die Ebene T_2 als veränderlich und lassen dem entsprechend den Index 2 hinweg.

A. Wir fragen nun, unter welcher Bedingung die Fläche $f = 0$ die Strecke $P_1 P$ in einem Punktpaare schneidet, das zu $P_1 P$ harmonisch ist.

Sollen die beiden Punkte, in welchen $P_1 P$ von f geschnitten wird, zu $P_1 P$ harmonisch liegen, so müssen die beiden Verhältnisse $\lambda_2 : \lambda_1$, in welchen sie die Strecke $P_1 P$ theilen, entgegengesetzt gleich sein. Diese Theilverhältnisse sind die Wurzeln der Gleichung No. 4, 1. Folglich muss diese Gleichung rein quadratisch sein. Wir erhalten somit als die gesuchte Bedingung

1. $$T \equiv f_{11}' \cdot x_1 + f_{21}' \cdot x_2 + f_{31}' \cdot x_3 + f_{41}' \cdot x_4 = 0.$$

Dies ergiebt: Der Ort der Punkte P, welche auf den durch einen Punkt P_1 gehenden Strahlen zu den Schnittpunkten jedes Strahles mit einer Fläche zweiter Ordnung $f = 0$ und zu P_1 harmonisch zugeordnet sind, ist die Ebene

$$T \equiv f_{11}' \cdot x_1 + f_{21}' \cdot x_2 + f_{31}' \cdot x_3 + f_{41}' \cdot x_4 = 0.$$

Diese Ebene heisst die Polarebene des Punktes P_1 in Bezug auf die Fläche f.

In Rücksicht auf No. 8 haben wir: Die Polarebene eines Punktes P in Bezug auf eine Fläche II. O. ist die Ebene der Berührungspunkte des der Fläche f von der Spitze P aus umschriebenen (realen oder imaginären) Kegels.

B. Wir fragen weiter nach der Bedingung, unter welcher die durch den Schnitt $T_1 T$ der Ebenen T_1 und T gehenden Berührungsebenen einer Fläche zweiter Klasse $\varphi = 0$ den Ebenen $T_1 T$ harmonisch zugeordnet sind.

Sollen diese Ebenen den Ebenen $T_1 T$ harmonisch conjugirt sein, so müssen die Sinusverhältnisse, unter welchen sie den Winkel $T_1 T$ theilen, entgegengesetzt gleich sein; dies ist der Fall, wenn die beiden Werthe des Verhältnisses $\lambda_2 : \lambda_1$, welche der Gleichung No. 4, 5 entspringen, entgegengesetzt gleich sind, wenn also die Gleichung selbst rein quadratisch ist. Die gesuchte Bedingung ist daher

$$P \equiv \varphi_{11}' \cdot u_1 + \varphi_{21}' \cdot u_2 + \varphi_{31}' \cdot u_3 + \varphi_{41}' \cdot u_4 = 0.$$

Hieraus folgt: Legt man durch die Geraden einer Ebene T_1 Tangentenebenen an eine Fläche II. O. $\varphi = 0$, und bestimmt die vierten harmonischen Ebenen zu jedem solchen Paar von Tangentenebenen und zu T_1, so gehen dieselben durch einen Punkt. Dieser Punkt heisst der Pol der Ebene T_1 in Bezug auf die Fläche φ.

Wie aus No. 8, B hervorgeht, ist der Pol einer Ebene T in Bezug auf eine Fläche II. O. φ die Spitze des (realen oder imaginären) Kegels, welcher die Fläche längs ihres Schnittes mit der Ebene T berührt.

10. Aus der letzteren Bemerkung folgt: Ist P der Pol einer Ebene T in Bezug auf eine Fläche II. O. so ist auch T die Polarebene von P.

Wir geben für diesen Satz noch einen direkten algebraischen Beweis. Hierfür machen wir zunächst auf einige bei diesem Beweise zu verwendende Identitäten aufmerksam.

Mit α_{ik} mag das Produkt der Determinante, die aus

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{13} & A_{23} & A_{24} & A_{34} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{vmatrix}$$

durch Unterdrückung der $i$ten Horizontalreihe und der $k$ten Verticalreihe hervorgeht, mit dem Faktor $(-1)^{i+k}$ bezeichnet werden. Dann ist bekanntlich

1. $$A_{1i}\cdot\alpha_{1k} + A_{2i}\cdot\alpha_{2k} + A_{3i}\cdot\alpha_{3k} + A_{4i}\cdot\alpha_{4k} = \Delta \text{ oder } = 0,$$

je nachdem $i = k$, oder i von k verschieden ist, wenn wir dabei A_{ik} und A_{ki} als gleichbedeutende Symbole gelten lassen. Nun ist

2. $$\begin{aligned} \alpha_{1k}f_1' + \alpha_{2k}f_2' + \alpha_{3k}f_3' + \alpha_{4k}f_4' = \\ (A_{11}\alpha_{1k} + A_{21}\alpha_{2k} + A_{31}\alpha_{3k} + A_{41}\alpha_{4k})\, x_1 \\ + (A_{12}\alpha_{1k} + A_{22}\alpha_{2k} + A_{32}\alpha_{3k} + A_{42}\alpha_{4k})\, x_2 \\ + (A_{13}\alpha_{2k} + A_{23}\alpha_{2k} + A_{33}\alpha_{3k} + A_{43}\alpha_{4k})\, x_3 \\ + (A_{14}\alpha_{1k} + A_{24}\alpha_{2k} + A_{34}\alpha_{3k} + A_{44}\alpha_{4k})\, x_4 \,. \end{aligned}$$

In Rücksicht auf 1. ergiebt sich hieraus

3. $$\alpha_{1k}f_1' + \alpha_{2k}f_2' + \alpha_{3k}f_3' + \alpha_{4k}f_4' = \Delta\cdot x_k \,.$$

Sind nun u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{41} die Coordinaten der Polarebene des Punktes P_1, so haben wir in Rücksicht auf die Gleichung der Polarebene die Proportion

4. $$\frac{1}{h_1}u_{11} : \frac{1}{h_2}u_{21} : \frac{1}{h_3}u_{31} : \frac{1}{h_4}u_{41} = f_{11}' : f_{21}' : f_{31}' : f_{41}' \,.$$

Das Verhältniss der Polynome

$$\begin{aligned} &\left(\alpha_{11}\frac{u_{11}}{h_1} + \alpha_{12}\frac{u_{21}}{h_2} + \alpha_{13}\frac{u_{31}}{h_3} + \alpha_{14}\frac{u_{41}}{h_4}\right) \\ :&\left(\alpha_{21}\frac{u_{11}}{h_1} + \alpha_{22}\frac{u_{21}}{h_2} + \alpha_{23}\frac{u_{31}}{h_3} + \alpha_{24}\frac{u_{41}}{h_4}\right) \\ :&\left(\alpha_{31}\frac{u_{11}}{h_1} + \alpha_{32}\frac{u_{21}}{h_2} + \alpha_{33}\frac{u_{31}}{h_3} + \alpha_{34}\frac{u_{41}}{h_4}\right) \\ :&\left(\alpha_{41}\frac{u_{11}}{h_1} + \alpha_{42}\frac{u_{21}}{h_1} + \alpha_{43}\frac{u_{31}}{h_3} + \alpha_{44}\frac{u_{41}}{h_4}\right) \end{aligned}$$

bleibt daher ungeändert, wenn wir darin $u_{k1} : h_k$ durch f_{k1}' ersetzen. In Rücksicht auf die vier in 3. enthaltenen Identitäten erhalten wir

5. $$\begin{aligned} x_{11} : x_{21} : x_{31} : x_{41} = &\left(\alpha_{11}\frac{u_{11}}{h_1} + \alpha_{12}\frac{u_{21}}{h_2} + \alpha_{13}\frac{u_{31}}{h_3} + \alpha_{14}\frac{u_{41}}{h_4}\right) \\ :&\left(\alpha_{21}\frac{u_{11}}{h_1} + \alpha_{22}\frac{u_{21}}{h_2} + \alpha_{23}\frac{u_{31}}{h_3} + \alpha_{24}\frac{u_{41}}{h_4}\right) \\ :&\left(\alpha_{31}\frac{u_{11}}{h_1} + \alpha_{32}\frac{u_{21}}{h_2} + \alpha_{33}\frac{u_{31}}{h_3} + \alpha_{34}\frac{u_{41}}{h_4}\right) \\ :&\left(\alpha_{41}\frac{u_{11}}{h_1} + \alpha_{42}\frac{u_{21}}{h_2} + \alpha_{43}\frac{u_{31}}{h_3} + \alpha_{44}\frac{u_{41}}{h_4}\right). \end{aligned}$$

Die Gleichung der Fläche f in Ebenencoordinaten ist (No. 7, A)

$$\varphi = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & \frac{u_1}{h_1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & \frac{u_2}{h_2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & \frac{u_3}{h_3} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & \frac{u_4}{h_4} \\ \frac{u_1}{h_1} & \frac{u_2}{h_2} & \frac{u_3}{h_3} & \frac{u_4}{h_4} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man die Determinante φ nach den Gliedern der letzten Zeile, so erhält man

$$\varphi = \frac{u_1}{h_1}\left(\alpha_{11}\frac{u_1}{h_1} + \alpha_{21}\frac{u_2}{h_2} + \alpha_{31}\frac{u_3}{h_3} + \alpha_{41}\frac{u_4}{h_4}\right) + \frac{u_2}{h_2}\left(\alpha_{21}\frac{u_1}{h_1} + \alpha_{22}\frac{u_2}{h_2} + \alpha_{32}\frac{u_3}{h_3} + \alpha_{42}\frac{n_4}{h_4}\right)$$
$$+ \frac{u_3}{h_3}\left(\alpha_{31}\frac{u_1}{h_1} + \alpha_{32}\frac{u_2}{h_2} + \alpha_{33}\frac{u_3}{h_3} + \alpha_{43}\frac{u_4}{h_4}\right) + \frac{u_4}{h_4}\left(\alpha_{41}\frac{u_1}{h_1} + \alpha_{42}\frac{u_2}{h_2} + \alpha_{43}\frac{u_3}{h_3} + \alpha_{44}\frac{u_4}{h_4}\right).$$

Da die Determinante Δ symmetrisch ist, d. h. da $A_{ik} = A_{ki}$ ist, so ist auch $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ und die Function φ ist daher

6.
$$\varphi = \frac{\alpha_{11}}{h_1^2}u_1^2 + 2\frac{\alpha_{12}}{h_1h_2}u_1u_2 + 2\frac{\alpha_{13}}{h_1h_3}u_1u_3 + 2\frac{\alpha_{14}}{h_1h_4}u_1u_4 + \frac{\alpha_{22}}{h_2^2}u_2^2$$
$$+ 2\frac{\alpha_{23}}{h_2h_3}u_2u_3 + 2\frac{\alpha_{24}}{h_2h_4}u_2u_4 + \frac{\alpha_{33}}{h_3^2}u_3^2 + 2\frac{\alpha_{34}}{h_3h_4}u_3u_4 + \frac{\alpha_{44}}{h_4^2}u_4^2.$$

Die abgeleiteten Functionen φ_i' von φ sind

7.
$$\varphi_1' = \frac{1}{h_1}\left(\alpha_{11}\frac{u_1}{h_1} + \alpha_{12}\frac{u_2}{h_2} + \alpha_{13}\frac{u_3}{h_3} + \alpha_{14}\frac{u_4}{h_4}\right),$$
$$\varphi_2' = \frac{1}{h_2}\left(\alpha_{21}\frac{u_1}{h_1} + \alpha_{22}\frac{u_2}{h_2} + \alpha_{23}\frac{u_3}{h_3} + \alpha_{24}\frac{u_4}{h_4}\right),$$
$$\varphi_3' = \frac{1}{h_3}\left(\alpha_{31}\frac{u_1}{h_1} + \alpha_{32}\frac{u_2}{h_2} + \alpha_{33}\frac{u_3}{h_3} + \alpha_{34}\frac{u_4}{h_4}\right),$$
$$\varphi_4' = \frac{1}{h_4}\left(\alpha_{41}\frac{u_1}{h_1} + \alpha_{42}\frac{u_2}{h_2} + \alpha_{43}\frac{u_3}{h_3} + \alpha_{44}\frac{u_4}{h_4}\right).$$

Die Gleichung des Poles Π_1 der Ebene T_1 ist

$$\Pi_1 = \varphi_{11}' \cdot u_1 + \varphi_{21}' \cdot u_2 + \varphi_{31}' \cdot u_3 + \varphi_{41}' \cdot u_4 = 0;$$

die Coordinaten $\xi_{11}, \xi_{21}, \xi_{31}, \xi_{41}$ desselben folgen daher aus der Proportion

8. $$\xi_{11} : \xi_{21} : \xi_{31} : \xi_{41} = h_1\varphi_{11}' \cdot h_2\varphi_{21}' : h_3\varphi_{31}' : h_4\varphi_{41}'.$$

Setzt man hier die Werthe aus 7. ein, und vergleicht dann die Proportion mit 5., so ist ersichtlich, dass

$$x_{11} : x_{21} : x_{31} : x_{41} = \xi_{11} : \xi_{21} : \xi_{31} : \xi_{41}.$$

Hieraus folgt, dass die Punkte P_1 und Π_1 identisch sind, w. z. b. w.

11. Aus der Definition der Polarebene und des Poles, sowie aus den Identitäten No. 4, 4 und 8 folgt sofort: Wenn P_k auf der Polarebene des Punktes P_i liegt, so liegt auch P_i auf der Polarebene des Punktes P_k. Wenn die Ebene T_k durch den Pol der Ebene T_i geht, so geht auch T_i durch den Pol der Ebene T_k.

Ferner: Die Polarebenen aller Punkte einer Ebene gehen durch den Pol dieser Ebene. Die Pole aller durch einen Punkt gehenden Ebenen liegen auf einer Ebene, der Polarebene des Punktes.

Legt man durch eine Gerade γ zwei Ebenen T_1 und T_2, bestimmt deren

Pole P_1 und P_2, und bestimmt ferner die Polarebene T eines Punktes Q der Geraden γ, so geht T durch P_1 und durch P_2, weil Q auf T_1 und auf T_2 liegt. Wir erhalten somit: Die Polarebenen aller Punkte einer Geraden γ gehen durch eine Gerade γ' $(P_1 P_2)$.

Legt man durch $P_1 P_2$ zwei Ebenen $T_1' T_2'$, so liegen deren Pole auf der Geraden γ, da diese Pole sowol auf T_1 als auf T_2 liegen müssen. Hieraus folgt, dass auch die Polarebenen aller Punkte der Geraden γ' durch die Gerade γ gehen.

Zu jeder Geraden γ giebt es also eine in Bezug auf eine Fläche II. O. conjugirte Gerade derart, dass jede der beiden Geraden die Pole der Ebenen enthält, die durch die andere Gerade gehen. Die Geraden, die den Geraden einer Ebene conjugirt sind, gehen durch den Pol der Ebene; die Geraden, die den durch einen Punkt gehenden Geraden conjugirt sind, liegen auf der Polarebene des Punktes.

12. Der Punkt P_0, der die Strecke $P_1 P_2$ im Verhältniss $\lambda_2 : \lambda_1$ theilt, hat die Coordinaten

$$x_{k0} = \lambda_1 x_{k1} + \lambda_2 x_{k2},$$

wenn man voraussetzt, dass $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ist. Da man nun offenbar hat

$$f_{k0}' \equiv \lambda_1 f_{k1}' + \lambda_2 f_{k2}',$$

so hat die Polarebene von P_0 die Gleichung

$$1. \qquad T_0 \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 = 0,$$

wobei

$$T_1 \equiv f_{11}' \cdot x_1 + f_{21}' \cdot x_2 + f_{31}' \cdot x_3 + f_{41}' \cdot x_4 = 0,$$
$$T_2 \equiv f_{12}' \cdot x_1 + f_{22}' \cdot x_2 + f_{32}' \cdot x_3 + f_{42}' \cdot x_4 = 0$$

die Gleichungen der Polarebenen von P_1 und P_2 sind.

Die Gleichung 1. bestätigt, dass die Polarebene von P_0 durch die Schnittgerade der Polarebenen von P_1 und P_2 geht, dass also die Polarebenen der Punkte der Geraden $P_1 P_2$ ein Büschel bilden; sie lehrt aber zugleich, dass die Punkte einer Geraden mit dem Büschel ihrer Polarebenen projectiv sind.

Durch die Polarebenen der Punkte der Geraden $P_1 P_2$ wird auf dieser Geraden eine Punktreihe ausgeschnitten, die mit der auf $P_1 P_2$ liegenden Reihe der P_0 projectiv ist. Die Beziehung der Punkte beider Reihen ist wechselseitig; denn wenn Π auf der Polarebene von P_0 liegt, so liegt auch P_0 auf der Polarebene von Π. Folglich fallen die Gegenpunkte beider Reihen zusammen, da sie demselben Punkte der Geraden, nämlich dem unendlich fernen, entsprechen. Hieraus folgt weiter, dass die beiden projectiven Punktreihen eine Involution bilden.

13. Die Gleichung der Polarebene eines Punktes P_1 in Bezug auf $f = 0$, und die Gleichung des Poles einer Ebene T_1 in Bezug auf $\varphi = 0$ können zufolge der Identitäten No. 4, 4 und 8 auch geschrieben werden

$$1. \qquad T_1 \equiv f_1' \cdot x_{11} + f_2' \cdot x_{21} + f_3' \cdot x_{31} + f_4' \cdot x_{41} = 0,$$
$$2. \qquad P_1 \equiv \varphi_1' \cdot u_{11} + \varphi_2' \cdot u_{21} + \varphi_3' \cdot u_{31} + \varphi_4' \cdot u_{41} = 0.$$

Hieraus erhält man leicht die Gleichungen der Polarebenen der Ecken des Achsentetraëders; nämlich für die

$$\text{Polarebene von } A_1: \quad f_1' \equiv A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4 = 0,$$
$$\text{„ „ „ } A_2: \quad f_2' \equiv A_{12}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4 = 0,$$
$$\text{„ „ „ } A_3: \quad f_3' \equiv A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + A_{33}x_3 + A_{34}x_4 = 0,$$
$$\text{„ „ „ } A_4: \quad f_4' \equiv A_{14}x_1 + A_{24}x_2 + A_{34}x_3 + A_{44}x_4 = 0.$$

Aus Gleichung 2. ergeben sich die Gleichungen der Pole der Ebenen des Achsentetraëders; man erhält für den

Pol der Ebene $A_2A_3A_4$: $\varphi_1' \equiv B_{11}u_1 + B_{12}u_2 + B_{13}u_3 + B_{14}u_4 = 0$,

" " " $A_1A_3A_4$: $\varphi_2' \equiv B_{12}u_1 + B_{22}u_2 + B_{23}u_3 + B_{24}u_4 = 0$,

" " " $A_1A_2A_4$: $\varphi_3' \equiv B_{13}u_1 + B_{23}u_2 + B_{33}u_3 + B_{34}u_4 = 0$,

" " " $A_1A_2A_3$: $\varphi_4' \equiv B_{14}u_1 + B_{24}u_2 + B_{34}u_3 + B_{44}u_4 = 0$.

Hierdurch ist die geometrische Bedeutung der abgeleiteten linearen Functionen f_k' und φ_k' gegeben.

14. Die Gleichung des Pols der unendlich fernen Ebene ergiebt sich aus der Gleichung No. 13, 2, wenn man darin die Coordinaten der unendlich fernen Ebene $u_{11} = u_{21} = u_{31} = u_{41} = 1$ einsetzt. Man erhält

$$1.\quad M \equiv \varphi_1' + \varphi_2' + \varphi_3' + \varphi_4'$$
$$\equiv (B_{11} + B_{12} + B_{13} + B_{14})u_1 + (B_{12} + B_{22} + B_{23} + B_{24})u_2$$
$$+ (B_{13} + B_{23} + B_{33} + B_{34})u_3 + (B_{14} + B_{24} + B_{34} + B_{44})u_4 = 0.$$

Dieser Punkt M ist auf jeder durch ihn gehenden Sehne den beiden Endpunkten der Sehne und ihrem unendlich fernen Punkte harmonisch conjugirt; folglich sind in M die Mitten aller durch M gehenden Sehnen vereint; M ist daher der Mittelpunkt der Fläche $\varphi = 0$. Aus der Gleichung des Mittelpunkts ergiebt sich für die Coordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ desselben die Proportion

$$2.\quad \frac{\xi_1}{h_1} : \frac{\xi_2}{h_2} : \frac{\xi_3}{h_3} : \frac{\xi_4}{h_4} = (B_{11} + B_{12} + B_{13} + B_{14}) : (B_{12} + B_{22} + B_{23} + B_{24})$$
$$: (B_{13} + B_{23} + B_{33} + B_{34}) : (B_{14} + B_{24} + B_{34} + B_{44}).$$

Der Mittelpunkt der Fläche $\varphi = 0$ ist unendlich fern, wenn die Coefficienten der Bedingung genügen (§ 11, No. 9)

$$3.\quad B_{11} + 2B_{12} + 2B_{13} + 2B_{14} + B_{22} + 2B_{23} + 2B_{24} + B_{33} + 2B_{34} + B_{44} = 0.$$

Unter dieser Bedingung wird, wie man sieht, der Gleichung $\varphi = 0$ durch die Coordinaten $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$ genügt, also wird die Fläche φ von der unendlich fernen Ebene berührt. Durch diese Eigenschaften sind die beiden Paraboloide charakterisirt.

Die Gleichung einer Fläche II. O., die das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ enthält, haben wir gefunden (No. 2, 3)

$$\varphi \equiv 2B_{13}u_1u_3 + 2B_{24}u_2u_4 = 0.$$

Soll diese Fläche ein Paraboloid sein, so muss nach 2. die Bedingung gelten

$$2B_{13} + 2B_{24} = 0.$$

Die Gleichung des das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ enthaltenden hyperbolischen Paraboloids ist daher

$$u_1u_3 - u_2u_4 = 0, \quad \text{oder} \quad u_1 : u_2 = u_4 : u_3.$$

Dieser Gleichung genügt jede Ebene, die A_1A_2 in demselben Verhältnisse theilt wie A_4A_3. Hieraus folgt: Die Ebenen, welche zwei Gerade (A_1A_2 und A_4A_3) in entsprechenden Punkten zweier ähnlichen Punktreihen treffen, umhüllen ein hyperbolisches Paraboloid, das die Träger der beiden Punktreihen enthält (§ 8, No. 3)

Ist die Summe $B_{13} + B_{24}$ von Null verschieden, so ist

$$B_{13}u_1u_3 + B_{24}u_2u_4 = 0$$

die Gleichung eines einschaligen Hyperboloids. Für die Coordinaten des Centrums M dieses Hyperboloids hat man die Proportion

$$\frac{\xi_1}{h_1} : \frac{\xi_2}{h_2} : \frac{\xi_3}{h_3} : \frac{\xi_4}{h_4} = B_{13} : B_{24} : B_{13} : B_{24}.$$

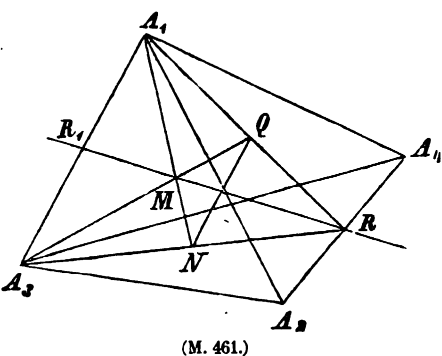
Daher hat man insbesondere

$$\xi_1 : h_1 = \xi_3 : h_3, \quad \xi_2 : h_2 = \xi_4 : h_4.$$

Legt man eine Ebene durch $A_1 A_3 M$ und ist R der Schnittpunkt dieser Ebene mit der $A_1 A_3$ gegenüberliegenden Tetraëderkante $A_2 A_4$, sind ferner N und Q die Schnittpunkte der Geraden $A_1 M$ und $A_3 M$ mit $A_3 R$ und $A_1 R$, so ist

$$\xi_1 : h_1 = MN : A_1 N;$$
$$\xi_3 : h_3 = MQ : A_3 Q;$$

folglich ist auch $MN : A_1 N = MQ : A_3 Q$.



(M. 461.)

Hieraus folgt weiter, dass NQ und $A_1 A_3$ parallel sind, sowie dass die Gerade RM durch die Mitte R_1 der Seite $A_1 A_3$ des Dreieckes $A_1 R A_3$ geht;*) folglich liegt das Centrum des Hyperboloids auf der Ebene, welche durch $A_2 A_4$ und die Mitte der gegenüberliegenden Kante $A_1 A_3$ geht.

Ebenso schliessen wir aus der Gleichung $\xi_2 : h_2 = \xi_4 : h_4$, dass M auf der Ebene liegt, welche die Kante $A_1 A_3$ mit der Mitte der gegenüberliegenden Kante $A_2 A_4$ verbindet.

Wir gewinnen so den Satz: Die Centren aller Flächen II. O., die ein gegebenes unebenes Viereck enthalten, liegen auf der Geraden, welche die Mitten der Diagonalen dieses Vierecks verbindet.

15. Construirt man zu einem Punkte A_1 die Polarebene T_1 in Bezug auf eine Fläche II. O., wählt einen Punkt A_2 auf T_1 und construirt die Polarebene desselben T_2, so geht T_2 durch A_1; wählt man auf der Schnittgeraden von T_1 und T_2 einen dritten Punkt A_3 und bestimmt dessen Polarebene T_3, so geht diese durch A_1 und A_2. Der Punkt A_4, den T_1, T_2 und T_3 gemein haben, hat eine Polarebene, die durch A_1, A_2 und A_3 geht, also ist diese die Ebene $A_1 A_2 A_3$.

Man erhält so ein Tetraëder $A_1 A_2 A_3 A_4$, dessen Seitenflächen die Polarebenen der gegenüberliegenden Ecken sind; ein solches Tetraëder wird als Polartetraëder der Fläche f bezeichnet.

Wie man sieht, giebt es unzählig viele Polartetraëder einer Fläche f; einen Eckpunkt (A_1) kann man beliebig im Raume wählen; den zweiten Eckpunkt (A_2) kann man beliebig auf der Polarebene von A_1 wählen; den dritten Eckpunkt kann man beliebig auf einer Geraden, dem Schnitte der Polarebenen von T_1 und T_2, wählen; der vierte ist durch diese drei bestimmt.

Oder man wählt eine Ebene (T_1) beliebig im Raume; die zweite Ebene (T_2) kann man unter den durch einen Punkt (den Pol von T_1) gehenden Ebenen beliebig wählen; die dritte kann man unter den durch eine Gerade (die die Pole von T_1 und T_2 verbindet) gehenden beliebig wählen; die vierte ist durch diese drei bestimmt.

*) Den Beweis dafür, dass MR die Seite $A_1 A_3$ halbirt, kann man dem Satze (analyt. Planimetrie § 5, No. 13) entnehmen: Theilt man die Seiten $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ eines Dreiecks der Reihe nach in den Verhältnissen $n_1 : n_2$, $n_2 : n_3$, $n_3 : n_1$, und verbindet die Theilpunkte mit den gegenüberliegenden Ecken, so gehen diese drei Geraden durch einen Punkt. Theilt man also $A_3 R$ im Verhältnisse $m : n = A_3 N : NR$ und RA_1 im Verhältnisse $RQ : QA_1 = RN : NA_3 = n : m$, so wird $A_1 A_3$ von RM im Verhältnisse $m : m$ getheilt, folglich ist $A_1 R_1 = R_1 A_3$.

Wählt man ein Polartetraëder zum Achsentetraëder, so müssen sich in den Gleichungen einer Fläche $f = 0$, bez. $\varphi = 0$ die Gleichungen der Polarebenen der Ecken des Achsentetraëders

$$f_1' = 0, \quad f_2' = 0, \quad f_3' = 0, \quad f_4' = 0$$

auf die Gleichungen der Tetraëderebenen reduciren

$$A_{11}x_1 = 0, \quad A_{22}x_2 = 0, \quad A_{33}x_3 = 0, \quad A_{44}x_4 = 0.$$

Die Gleichungen der Pole der Tetraëderebenen

$$\varphi_1' = 0, \quad \varphi_2' = 0, \quad \varphi_3' = 0, \quad \varphi_4' = 0$$

müssen sich auf die Gleichungen der Ecken des Tetraëders reduciren

$$B_{11}u_1 = 0, \quad B_{22}u_2 = 0, \quad B_{33}u_3 = 0, \quad B_{44}u_4 = 0.$$

Hieraus folgt als Bedingung dafür, dass das Achsentetraëder ein Polartetraëder der Fläche $f = 0$, bez. $\varphi = 0$ ist,

$$A_{12} = A_{13} = A_{14} = A_{23} = A_{24} = A_{34} = 0,$$

bez. $$B_{12} = B_{13} = B_{14} = B_{23} = B_{24} = B_{34} = 0.$$

Die Gleichung einer Fläche zweiten Grades in Bezug auf ein Polartetraëder ist daher

in Punktcoordinaten: $A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 + A_{44}x_4^2 = 0$,

in Ebenencoordinaten: $B_{11}u_1^2 + B_{22}u_2^2 + B_{33}u_3^2 + B_{44}u_4^2 = 0$.

A. Die abgeleiteten Functionen der Function

$$f \equiv A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 + A_{44}x_4^2 = 0$$

sind $f_1' \equiv A_{11}x_1, \quad f_2' \equiv A_{22}x_2, \quad f_3' \equiv A_{33}x_3, \quad f_4' \equiv A_{44}x_4$.

Die Gleichung der Tangentenebene des Punktes P_1 (bez. der Polarebene desselben) ist daher

1. $$T \equiv A_{11}x_{11} \cdot x_1 + A_{22}x_{21} \cdot x_2 + A_{33}x_{31} \cdot x_3 + A_{44}x_{41} \cdot x_4 = 0.$$

Sind u_1, u_2, u_3, u_4 die Coordinaten der Tangentenebene, so hat man die Proportion

2. $$A_{11}x_{11} : A_{22}x_{21} : A_{33}x_{31} : A_{44}x_{41} = \frac{u_1}{h_1} : \frac{u_2}{h_2} : \frac{u_3}{h_3} : \frac{u_4}{h_4}.$$

Hieraus folgt

3. $$x_{11} : x_{21} : x_{31} : x_{41} = \frac{u_1}{A_{11}h_1} : \frac{u_2}{A_{22}h_2} : \frac{u_3}{A_{33}h_3} : \frac{u_4}{A_{44}h_4}.$$

Setzt man für die Coordinaten x_{k1} die proportionalen Werthe $u_k : A_{kk}h_k$ in die Gleichung ein

$$\frac{1}{h_1}x_{11}u_1 + \frac{1}{h_2}x_{21}u_2 + \frac{1}{h_3}x_{31}u_3 + \frac{1}{h_4}x_{41}u_4 = 0,$$

so erhält man die Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten

4. $$\frac{1}{A_{11}h_1^2} \cdot u_1^2 + \frac{1}{A_{22}h_2^2} \cdot u_2^2 + \frac{1}{A_{33}h_3^2} \cdot u_3^2 + \frac{1}{A_{44}h_4^2} \cdot u_4^2 = 0.$$

B. Die abgeleiteten Functionen von

$$\varphi \equiv B_{11}u_1^2 + B_{22}u_2^2 + B_{33}u_3^2 + B_{44}u_4^2$$

sind $\varphi_1' \equiv B_{11}u_1, \quad \varphi_2' \equiv B_{22}u_2, \quad \varphi_3' \equiv B_{33}u_3, \quad \varphi_4' \equiv B_{44}u_4$.

Die Gleichung des Tangentialpunktes der Ebene T_1 (bez. des Poles derselben) ist

5. $$P \equiv B_{11}u_{11} \cdot u_1 + B_{22}u_{21} \cdot u_2 + B_{33}u_{31} \cdot u_3 + B_{44}u_{41} \cdot u_4 = 0.$$

Die Gleichung der Fläche in Punktcoordinaten ergiebt sich zu

6. $$\frac{1}{B_{11}h_1^2}x_1^2 + \frac{1}{B_{22}h_2^2}x_2^2 + \frac{1}{B_{33}h_3^2}x_3^2 + \frac{1}{B_{44}h_4^2}x_4^2 = 0.$$

Sind daher bezogen auf ein Polartetraëder die Gleichungen derselben Fläche II. O.

in Punktcoordinaten: $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 = 0$,
in Ebenencoordinaten: $\beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_2^2 + \beta_3 u_3^2 + \beta_4 u_4^2 = 0$,

so ist

7. $$h_1^2 \alpha_1 \beta_1 = h_2^2 \alpha_2 \beta_2 = h_3^2 \alpha_3 \beta_3 = h_4^2 \alpha_4 \beta_4 = 1 .$$

16. Aus der Proportion 3. in No. 15 ergeben sich die Coordinaten des Centrums, wenn man $u_{k_1} = 1$ setzt.

Wenn als Gleichung der Fläche vorausgesetzt wird

$$\varphi \equiv \beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_2^2 + \beta_3 u_3^2 + \beta_4 u_4^2 = 0,$$

so erhält man daher für die Coordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ des Centrums

$$\xi_1 = \frac{\beta_1}{\beta} h_1 , \quad \xi_2 = \frac{\beta_2}{\beta} h_2 , \quad \xi_3 = \frac{\beta_3}{\beta} h_3 , \quad \xi_4 = \frac{\beta_4}{\beta} h_4 ,$$

wenn man β abkürzungsweise für $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$ setzt.

17. Wenn man durch Coordinatentransformation von der Gleichung einer Fläche II. O. in Bezug auf ein Polartetraëder zur Gleichung derselben Fläche in Bezug auf irgend ein anderes Polartetraëder übergeht, so bleibt sowol die Summe der Coefficienten in der Gleichung für Punktcoordinaten, als auch in der Gleichung für Liniencoordinaten ungeändert. Sind die Gleichungen im ursprünglichen Systeme

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 = 0,$$
$$\beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_2^2 + \beta_3 u_3^2 + \beta_4 u_4^2 = 0,$$

und im neuen Systeme

$$A_1 \xi_1^2 + A_2 \xi_2^2 + A_3 \xi_3^2 + A_4 \xi_4^2 = 0,$$
$$B_1 w_1^2 + B_2 w_2^2 + B_3 w_3^2 + B_4 w_4^2 = 0,$$

so gelten die Gleichungen

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 ,$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 .$$

Beweis. Da in unseren Gleichungen nur die Quadrate der Coordinaten vorkommen, so kann in den Transformationsformeln § 11, No. 15, 1 und. No 17, 1 über die Coefficienten immer so verfügt werden, dass

1. $$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = +1 \quad \text{und} \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = +1 .$$

Unter dieser Voraussetzung sind die Transformationsformeln

$$\xi_1 = a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3 + a_{41} x_4 , \quad \xi_2 = a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{32} x_3 + a_{42} x_4 ,$$
$$\xi_3 = a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 + a_{43} x_4 , \quad \xi_4 = a_{14} x_1 + a_{24} x_2 + a_{34} x_3 + a_{44} x_4 .$$

Setzt man dies in die Gleichung der Fläche

$$A_1 \xi_1^2 + A_2 \xi_2^2 + A_3 \xi_3^2 + A_4 \xi_4^2 = 0,$$

so erhält man aus der Identität

2. $$A_1 \xi_1^2 + A_2 \xi_2^2 + A_3 \xi_3^2 + A_4 \xi_4^2 \equiv \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2$$

zunächst folgende vier Gleichungen, welche aussagen, dass in der transformirten Gleichung die Coefficienten, welche Produkte von je zwei Coordinaten multipliciren, verschwinden

3. $$A_1 a_{i1} a_{k1} + A_2 a_{i2} a_{k2} + A_3 a_{i3} a_{k3} + A_4 a_{i4} a_{k4} = 0,$$

wobei man für i, k jede Combination zu zweien aus den vier Ziffern 1, 2, 3, 4 zu nehmen hat, so dass man sechs Gleichungen dieser Art erhält.

Ferner erhält man aus 2.

$$\alpha_i = A_1 a_{i1}^2 + A_2 a_{i2}^2 + A_3 a_{i3}^2 + A_4 a_{i4}^2 ,$$

daher ergiebt sich die Coefficientensumme

4. $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \Sigma A_k (a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + a_{3k}^2 + a_{4k}^2), \quad k = 1, 2, 3, 4 .$$

Multiplicirt man nun jeden der sechs Ausdrücke 3. mit $2 \cos \varepsilon_{ik}$ (§ 11, No. 13, 6)

subtrahirt sie dann von der rechten Seite der Gleichung 5., und ordnet nach den neuen Coefficienten A_1, A_2, A_3, A_4, so erhält man

$$5.\quad \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \Sigma A_k (a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + a_{3k}^2 + a_{4k}^2 - 2a_{1k}a_{2k}\cos\varepsilon_{12} \\ - 2a_{1k}a_{3k}\cos\varepsilon_{13} - 2a_{1k}a_{4k}\cos\varepsilon_{14} - 2a_{2k}a_{3k}\cos\varepsilon_{23} - 2a_{2k}a_{4k}\cos\varepsilon_{24} \\ - 2a_{3k}a_{4k}\cos\varepsilon_{34}) \, . \end{aligned}$$

Nun ist aber nach der Voraussetzung (§ 11, No. 14)

$$a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + a_{3k}^2 + a_{4k}^2 - 2a_{1k}a_{2k}\cos\varepsilon_{12} - \ldots - 2a_{3k}a_{4k}\cos\varepsilon_{34} = 1 ;$$

folglich erhält man aus 5. die erste der beiden behaupteten Gleichungen

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \, .$$

Um die Richtigkeit der zweiten nachzuweisen, führe man in

$$6.\quad B_1 w_1^2 + B_2 w_2^2 + B_3 w_3^2 + B_4 w_4^2 = 0$$

die Coordinaten des ursprünglichen Systems u_1, u_2, u_3, u_4 mit Hülfe der Formeln § 11, No. 17 ein; unter der Voraussetzung 1. ist

$$w_1 = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \alpha_{31}u_3 + \alpha_{41}u_4 , \quad w_2 = \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{32}u_3 + \alpha_{42}u_4 ,$$
$$w_3 = \alpha_{13}u_1 + \alpha_{23}u_2 + \alpha_{33}u_3 + \alpha_{43}u_4 , \quad w_4 = \alpha_{14}u_1 + \alpha_{24}u_2 + \alpha_{34}u_3 + \alpha_{44}u_4 .$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung 6. ein, so erhält man aus der Identität

$$7.\quad B_1 w_1^2 + B_2 w_2^2 + B_3 w_3^2 + B_4 w_4^2 \equiv \beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_2^2 + \beta_3 u_3^2 + \beta_4 u_4^2$$

zunächst die sechs Gleichungen

$$8.\quad B_1 \alpha_{i1}\alpha_{k1} + B_2 \alpha_{i2}\alpha_{k2} + B_3 \alpha_{i3}\alpha_{k3} + B_4 \alpha_{i4}\alpha_{k4} = 0 ,$$

wo man wieder für i, k die sechs Paare aus den vier Ziffern 1, 2, 3, 4 zu setzen hat. Aus 7. folgt weiter

$$\beta_i = B_1 \alpha_{i1}^2 + B_2 \alpha_{i2}^2 + B_3 \alpha_{i3}^2 + B_4 \alpha_{i4}^2 ,$$

daher erhält man

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \Sigma B_k (\alpha_{1k}^2 + \alpha_{2k}^2 + \alpha_{3k}^2 + \alpha_{4k}^2) , \quad k = 1, 2, 3, 4 .$$

Addirt man in dieser Gleichung zu der rechten Seite die sechs Grössen 8., jede mit 2 multiplicirt, so erhält man

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 &= \Sigma B_k (\alpha_{1k}^2 + \alpha_{2k}^2 + \alpha_{3k}^2 + \alpha_{4k}^2 + 2\alpha_{1k}\alpha_{2k} + 2\alpha_{1k}\alpha_{3k} \\ &\quad + 2\alpha_{1k}\alpha_{4k} + 2\alpha_{2k}\alpha_{3k} + 2\alpha_{2k}\alpha_{4k} + 2\alpha_{3k}\alpha_{4k}) \\ &= \Sigma B_k (\alpha_{1k} + \alpha_{2k} + \alpha_{3k} + \alpha_{4k})^2 = \Sigma B_k \sigma_k^2 \, . \end{aligned}$$

Da nach der Voraussetzung $\sigma_k = 1$, so ergiebt sich hieraus die zweite der behaupteten Gleichungen

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \, .$$

18. Um zu zeigen, wie man die Flächen II. O. nach den Coefficienten ihrer Gleichungen in Bezug auf ein Polartetraëder unterscheiden kann, schalten wir einen allgemeinen Satz über die Transformation quadratischer Functionen ein.

Wenn die quadratische Function

$$1.\quad a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + \ldots + a_r y_r^2$$

durch die homogenen linearen Substitutionen

$$2.\quad \begin{aligned} y_1 &= c_{11} z_1 + c_{21} z_2 + \ldots + c_{r1} z_r , \\ y_2 &= c_{12} z_1 + c_{22} z_2 + \ldots + c_{r2} z_r , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r &= c_{1r} z_1 + c_{2r} z_2 + \ldots + c_{rr} z_r \end{aligned}$$

in die Function übergeht

$$3.\quad b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + b_3 z_3^2 + \ldots + b_r^2 z_r ,$$

so ist die Anzahl der positiven Coefficienten unter den a gleich der Anzahl der positiven Coefficienten unter den b.

Beweis. Aus der Identität

$$a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \ldots + a_r y_r^2 \equiv b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + \ldots + b_r z_r^2$$

folgt

4. $$a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \ldots + a_r y_r^2 - b_1 z_1^2 - b_2 z_2^2 - \ldots - b_r z_r^2 \equiv 0\,.$$

Denken wir uns die Functionen

$$a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \ldots \quad \text{und} \quad b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + \ldots .$$

so geordnet, dass erst alle Glieder mit positiven Coefficienten kommen, dann die mit negativen; es seien $a_1, a_2 \ldots a_m$ positiv, $a_{m+1} \ldots a_r$ negativ; sowie $b_1, b_2 \ldots b_n$ positiv, $b_{n+1} \ldots b_r$ negativ. Nimmt man nun zunächst an, es sei $n < m$, so wäre die Anzahl der negativen Glieder in dem Polynom 4.

$$r - m + n = r - (n - m)\,,$$

also kleiner als r. Setzt man alle y, welche negative Coefficienten haben, gleich Null, also

5. $$y_{m+1} = y_{m+2} = \ldots = y_r = 0\,,$$

so kann man noch ausserdem über die z so verfügen, dass man alle in der Function $b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + \ldots$ mit positiven Coefficienten versehenen z annullirt, also

6. $$z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 0$$

annimmt. Denn die letzten $r - m$ der Formeln 2. gehen dann in $r - m$ homogene lineare Gleichungen der $r - n$ Grössen $z_{n+2}, z_{n+1} \ldots z_r$ über, enthalten also mehr unbestimmte Grössen, als die Anzahl der Gleichungen beträgt, und sind daher auf mehr als eine Weise durch von Null verschiedene Werthe der Unbestimmten erfüllbar.

Durch die Substitutionen 5. und 6. verschwinden in 4. alle negativen Glieder; da nun eine Summe von positiven Grössen nicht verschwinden kann, so folgt, dass die Annahme falsch ist; also ist n nicht kleiner als m.

Nimmt man an, n sei grösser als m, so kann man, ohne auf widersprechende Bestimmungen zu stossen, alle y gleich Null setzen, welche in der Function 1. positive Coefficienten haben, und alle z, welche in 3. negative Coefficienten haben. Dann fallen in 4. alle positiven Grössen hinweg, im Widerspruche damit, dass die algebraische Summe aller in 4. stehenden Glieder identisch verschwindet.

Es ist nicht überflüssig, hervorzuheben, dass diese Schlussweise in dem Falle $m = n$ ihre Anwendbarkeit verliert; denn setzt man alle y, deren Coefficienten negativ, und alle z, deren Coefficienten positiv sind gleich Null, so erhält man aus den letzten $r - m$ Formeln der Gruppe 2. ebensoviele homogene lineare Gleichungen für die Grössen $z_{n+1} \ldots z_r$, die gerade so viel Unbestimmte enthalten, als die Anzahl der Gleichungen beträgt, und daher im Allgemeinen nur durch verschwindende Werthe der Grössen $z_{m+1} \ldots z_r$ erfüllt werden können. Aus $z_{m+1} = z_{m+2} = \ldots z_r = 0$ folgt dann auf Grund der Gleichungen 2., dass auch die übrigen y verschwinden, so dass nun die Identität 4. erfüllbar ist, da alle Glieder derselben verschwinden.

19. Wenn in der Gleichung

$$\varphi \equiv \beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_2^2 + \beta_3 u_3^2 + \beta_4 u_4^2 = 0$$

kein Coefficient Null oder unendlich gross ist und auch die Summe der Coefficienten nicht verschwindet, so ist die Fläche keine Grenzfläche, kein Kegel und kein Paraboloid; man kann dann die Gleichung durch die Summe aller Coefficienten dividiren. Man kann daher im Falle

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \gtrless 0$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1\,.$$

Geht man nun durch die Transformationsformeln zu irgend einem andern

Polartetraëder über, so ist auch in der neuen Gleichung (No. 17) die Summe der Coefficienten der positiven Einheit gleich; ferner enthält auf Grund des soeben bewiesenen Satzes die neue Gleichung ebensoviel positive Coefficienten, als die ursprüngliche.

Die Flächen ordnen sich daher in drei Arten, je nachdem A. ein positiver Coefficient und drei negative, oder B. drei positive Coefficienten und ein negativer, oder C. zwei positive und zwei negative vorhanden sind.

A. Sind unter den Coefficienten drei negative, so kann man die Gleichung schreiben

$$\varphi = b_1^2 u_1^2 - b_2^2 u_2 - b_3^2 u_3^2 - b_4^2 u_4^2 = 0\,.$$

Die Coordinaten ξ_k des Centrums sind

$$\xi_1 = b_1^2 h_1\,, \quad \xi_2 = -b_2^2 h_2\,, \quad \xi_3 = -b_3^2 h_3\,, \quad \xi_4 = -b_4^2 h_4\,,$$

das Centrum liegt daher in jedem Polartetraëder in einer Gegenecke einer Tetraëderecke.

Die Gleichung der Fläche in Punktcoordinaten ist

$$f = \frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_1^2 - \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_2^2 - \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_3^2 - \frac{1}{b_4^2 h_4^2} x_4^2 = 0.$$

Setzt man hier die Coordinaten des Centrums ein, so erhält man

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 - b_4^2 = 1,$$

nach der über die Coefficienten von φ gemachten Voraussetzung. Da nun für die Coordinaten A_1, A_2, A_3, A_4 des Coordinatentetraëders die Function f die Werthe erhält

$$1 : b_1^2, \quad -1 : b_2^2, \quad -1 : b_3^2, \quad -1 : b_4^2\,,$$

so folgt, dass das Centrum M und die Ecke A_1 auf derselben Seite der Fläche liegen, während A_2, A_3 und A_4 mit M nicht auf derselben Seite liegen.

Verbindet man das Centrum mit einem Punkte P_2 der Ebene $A_2 A_3 A_4$, so bestimmt sich das Verhältniss, in welchem die Strecke MP_2 von der Fläche getheilt wird, aus der Gleichung No. 4, 1, wenn man darin

$$f = \frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_1^2 - \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_2^2 - \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_3^2 - \frac{1}{b_4^2 h_4^2} x_4^2 = 0\,,$$

für x_{kl} die Coordinaten ξ_k des Centrums, sowie $x_{12} = 0$ setzt, weil P_2 auf $A_2 A_3 A_4$ liegt. Demnach hat man

$$f_1 = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 1\,,$$

$$f_{11}' \cdot x_{12} + f_{21}' \cdot x_{22} + f_{31}' \cdot x_{32} + f_{41}' \cdot x_{42} = \frac{x_{22}}{h_2} + \frac{x_{32}}{h_3} + \frac{x_{42}}{h_4} = 1.$$

Daher wird die Gleichung für $\lambda_1 : \lambda_2$

$$\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2 \left(\frac{1}{b_2^2 h_2^2} \cdot x_{22}^2 + \frac{1}{b_3^2 h_3^2} \cdot x_{32}^2 + \frac{1}{b_4^2 h_4^2} \cdot x_{42}^2\right) = 0.$$

Hieraus folgt

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 \sqrt{1 + \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_{22}^2 + \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_{32}^2 + \frac{1}{b_4^2 h_4^2} x_{42}^2}\,,$$

also wird der Gleichung unabhängig von der Wahl des Punktes P_2 durch zwei reale Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2$ genügt, jede durch das Centrum und durch einen Punkt der Ebene $A_2 A_3 A_4$ gelegte Gerade, d. i. jede Gerade durch das Centrum schneidet die Fläche in realen Punkten. Hieran wird die Fläche als Ellipsoid erkannt.

B. Sind drei Coefficienten positiv und einer negativ, so kann man setzen

$$\varphi = b_1^2 u_1^2 + b_2^2 u_2^2 + b_3^2 u_3^2 - b_4^2 u_4^2 = 0\,.$$

Die Coordinaten des Centrums sind

$$\xi_1 = b_1^2 h_1\,, \quad \xi_2 = b_2^2 h_2\,, \quad \xi_3 = b_3^2 h_3\,, \quad \xi_4 = -b_4^2 h_4\,.$$

Das Centrum liegt daher in einem an einer Tetraëderfläche aussen anliegenden Raume.

Die Gleichung der Fläche in Punktcoordinaten ist

$$f = \frac{1}{b_1^2 h_1^2} \cdot x_1^2 + \frac{1}{b_2^2 h_2^2} \cdot x_2^2 + \frac{1}{b_3^2 h_3^2} \cdot x_3^2 - \frac{1}{b_4^2 h_4^2} \cdot x_4^2 = 0.$$

Für die Coordinaten des Centrums nimmt f den Werth an

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 = 1;$$

für die Coordinaten der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 erhält f die Werthe

$$1 : b_1^2, \quad 1 : b_2^2, \quad 1 : b_3^2, \quad -1 : b_4^2.$$

Daher liegen drei Ecken jedes Polartetraëders A_1, A_2, A_3 mit dem Centrum auf derselben Seite der Fläche, die vierte A_4 wird von M durch die Fläche getrennt.

Für das Verhältniss, in welchem die Strecke, die das Centrum mit einem Punkte P_2 der Ebene $A_1 A_2 A_3$ verbindet, von f geschnitten wird, ergiebt sich jetzt die Gleichung

$$\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\left(\frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_{12}^2 - \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_{22}^2 - \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_{32}^2\right) = 0,$$

aus welcher folgt

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 \sqrt{1 - \frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_{12}^2 + \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_{22}^2 + \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_{32}^2}.$$

Der Radicand wird für unendlich grosse Werthe von x_{12}, x_{22}, x_{32} negativ unendlich. Wir sehen daher: Die Ebene, die durch das Centrum parallel der Ebene eines Polartetraëders gelegt wird, deren Ecken mit dem Centrum auf derselben Seite der Fläche liegen, hat mit der Fläche keinen realen Punkt gemein. Es giebt daher Ebenen durch das Centrum, die die Fläche nicht schneiden. Folglich ist die Fläche ein zweischaliges Hyperboloid.

Setzt man in den Gleichungen des Ellipsoids und des zweischaligen Hyperboloids

$$b_1^2 x_1^2 - b_2^2 x_2^2 - b_3^2 x_3^2 - b_4^2 x_4^2 = 0, \quad \text{bez.} \quad b_1^2 x_1^2 + b_2^2 x_2^2 + b_3^2 x_3^2 - b_4^2 x_4^2 = 0$$

der Reihe nach $x_1 = 0$ und $x_4 = 0$, so erhält man

$$-b_2^2 x_2^2 - b_3^2 x_3^2 - b_4^2 x_4^2 = 0, \quad \text{bez.} \quad b_1^2 x_1^2 + b_2^2 x_2^2 + b_3^2 x_3^2 = 0.$$

Beiden Gleichungen kann durch reale Punkte nicht genügt werden. In jedem Polartetraëder eines Ellipsoids und eines zweischaligen Hyperboloids giebt es daher eine Ebene, welche die Fläche nicht schneidet. Hierdurch wird bestätigt, dass auf dem Ellipsoide und auf dem zweischaligen Hyperboloide keine Geraden liegen; denn von einer Geraden wird jede Ebene in einem realen Punkte getroffen.

C. Sind zwei Coefficienten der Function φ positiv, und zwei negativ, so kann man setzen

$$\varphi = b_1^2 u_1^2 + b_2^2 u_2^2 - b_3^2 u_3^2 - b_4^2 u_4^2.$$

Die Coordinaten des Centrums sind jetzt

$$\xi_1 = b_1^2 h_1, \quad \xi_2 = b_2^2 h_2, \quad \xi_3 = -b_3^2 h_3, \quad \xi_4 = -b_4^2 h_4$$

Die Gleichung in Punktencoordinaten ist

$$f = \frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_1^2 + \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_2^2 - \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_3^2 - \frac{1}{b_4^2 h_4^2} x_4^2 = 0.$$

Für die Coordinaten des Centrums und der Ecken des Polartetraëders nimmt die Function f die Werthe an

$$1. \quad 1 : b_1^2, \quad 1 : b_2^2, \quad -1 : b_3^2, \quad -1 : b_4^2.$$

Daher liegen zwei Ecken A_1, A_2 jedes Polartetraëders mit dem Centrum auf derselben Seite der Fläche, die beiden andern A_3, A_4 werden durch die Fläche vom Centrum getrennt. Das Centrum liegt, da zwei Coordinaten positiv, die andern beiden negativ sind, in einem an einer Kante anliegenden zweieckigen Raume. Giebt man f die Form

$$f = \left(\frac{1}{b_1 h_1} x_1 + \frac{1}{b_3 h_3} x_3\right)\left(\frac{1}{b_1 h_1} x_1 - \frac{1}{b_3 h_3} x_3\right) + \left(\frac{1}{b_2 h_2} x_2 + \frac{1}{b_4 h_4} x_4\right)\left(\frac{1}{b_2 h_2} x_2 - \frac{1}{b_4 h_4} x_4\right) = 0,$$

und setzt

$$\frac{1}{b_1 h_1} x_1 + \frac{1}{b_3 h_3} x_3 = T_1, \quad \frac{1}{b_2 h_2} x_2 + \frac{1}{b_4 h_4} x_4 = T_1'$$

$$\frac{1}{b_1 h_1} x_1 - \frac{1}{b_3 h_3} x_3 = T_2', \quad \frac{1}{b_2 h_2} x_2 - \frac{1}{b_4 h_4} x_4 = -T_2,$$

so wird der Gleichung der Fläche durch die Punkte genügt, für welche bei willkürlicher Wahl des Verhältnisses $\mu_1 : \mu_2$ die beiden Gleichungen gelten

$$\mu_1 T_1 = \mu_2 T_2, \quad \mu_1 T_1' = \mu_2 T_2',$$

welche also den beiden Ebenen gemeinsam sind

$$T = \mu_1 T_1 - \mu_2 T_2 = 0, \quad T_1' = \mu_1 T_1' - \mu_2 T_2' = 0.$$

Diese Ebenen sind entsprechende Ebenen zweier projectiven Ebenbüschel, in denen T_1 und T_2 den Ebenen T_1' und T_2' entsprechen.

Dies charakterisirt die Fläche als e i n s c h a l i g e s H y p e r b o l o i d.

20. Ist in der Gleichung

$$\varphi = \beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_2^2 + \beta_3 u_3^2 + \beta_4 u_4^2 = 0$$

kein Coefficient Null oder unendlich und die Summe der Coefficienten

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 0,$$

so sind die C o o r d i n a t e n d e s C e n t r u m s u n e n d l i c h g r o s s, und die Fläche ein Paraboloid (No. 14). Alsdann haben entweder drei, oder zwei Coefficienten gleiche Zeichen.

A. Haben drei Coefficienten dasselbe Zeichen, so kann man die Gleichung schreiben

$$\varphi = b_1^2 u_1^2 + b_2^2 u_2^2 + b_3^2 u_3^2 - b_4^2 u_4^2 = 0.$$

Daher ist die Gleichung in Punktcoordinaten

$$f = \frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_1^2 + \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_2^2 + \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_3^2 - \frac{1}{b_4^2 h_4^2} x_4^2 = 0.$$

Setzt man in beiden Gleichungen der Reihe nach $u_4 = 0$, $x_4 = 0$, so ergiebt sich

$$b_1^2 u_1^2 + b_2^2 u_2^2 + b_3^2 u_3^2 = 0, \quad \text{bez.} \quad \frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_1^2 + \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_2^2 + \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_3^2 = 0.$$

Beiden Gleichungen kann durch reale Werthe des Coordinaten nicht genügt werden. Wir sehen daher: I n j e d e m P o l a r t e t r a ë d e r g i e b t es eine E c k e, d u r c h w e l c h e s i c h k e i n e r e a l e n T a n g e n t e n e b e n e n d e r Fläche l e g e n l a s s e n, u n d d i e d i e s e r E c k e g e g e n ü b e r l i e g e n d e S e i t e des T e t r a ë d e r s h a t m i t d e r F l ä c h e k e i n e r e a l e n P u n k t e g e m e i n.

Hierdurch ist das e l l i p t i s c h e P a r a b o l o i d charakterisirt; denn eine geradlinige Fläche wird von jeder Ebene in realen Punkten getroffen, und sendet durch jeden Punkt des Raumes reale Tangentenebenen.

Für die Coordinaten der Ecken des Achsentetraëders nimmt die Function f die Werthe an

$$1 : b_1^2, \quad 1 : b_2^2, \quad 1 : b_3^2, \quad -1 : b_4^2.$$

Hieraus folgt, dass die Ecken A_1, A_2, A_3 durch die Fläche f von A_4 getrennt sind. Die durch A_4 gehenden Kanten und Flächen des Tetraëders schneiden also die Fläche in realen Punkten, die andern nicht.

B. Haben nur zwei Coefficienten dasselbe Zeichen, so kann man die Gleichung s[illegible]n

$$\varphi \equiv b_1^2 u_1^2 + b_2^2 u_2^2 - b_3^2 u_3^2 - b_4^2 u_4^2 = 0.$$

Die Gleichung in Punktcoordinaten ist daher

$$f = \frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_1^2 + \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_2^2 - \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_3^2 - \frac{1}{b_4^2 h_4^2} x_4^2 = 0.$$

Man überzeugt sich wie bei der Gleichung des einschaligen Hyperboloids No. 19, C. dass diese Fläche geradlinig ist; wir haben daher das hyperbolische Paraboloid vor uns.

Für die Coordinaten der Tetraëderecken erhält f die Werthe

$$1 : b_1^2, \quad 1 : b_2^2, \quad -1 : b_3^2, \quad -1 : b_4^2.$$

Daher werden A_1 und A_2, sowie A_3 und A_4 durch die Fläche nicht getrennt, während die Tetraëderkanten A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4 von der Fläche geschnitten werden, und zwar, wie aus den Polareigenschaften folgt, so, dass innerhalb jeder Strecke nur ein Schnittpunkt liegt, — eine Bemerkung, die in Bezug auf jede Fläche II. O. von jeder Kante eines Polartetraëders gilt, die die Fläche in realen Punkten trifft.

21. Wir schliessen hieran die Frage nach den Punkten im Raume, welche in Bezug auf zwei Flächen II. O. dieselbe Polarebene haben.

Wir beziehen beide Flächen auf ein Polartetraëder einer der Flächen; die Gleichungen in Punktcoordinaten seien

$$F \equiv b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 = 0,$$
$$f \equiv a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \ldots + a_{44} x_4^2 = 0.$$

Die Polarebenen eines Punktes P_0 bezüglich beider Flächen sind

$$T \equiv b_1 x_{10} \cdot x_1 + b_2 x_{20} \cdot x_2 + b_3 x_{30} \cdot x_3 + b_4 x_{40} \cdot x_4 = 0,$$
$$T' \equiv f_{10}' \cdot x_1 + f_{20}' \cdot x_2 + f_{30}' \cdot x_3 + f_{40}' \cdot x_4 = 0.$$

Sollen T und T' geometrisch gleichbedeutend sein, so muss die Function T durch Multiplication mit einer Zahl λ identisch mit T' werden. Man hat daher die Gleichungen

$$1.\quad \begin{aligned} a_{11}x_{10} + a_{12}x_{20} + a_{13}x_{30} + a_{14}x_{40} &= \lambda b_1 x_{10}, \\ a_{12}x_{10} + a_{22}x_{20} + a_{23}x_{30} + a_{24}x_{40} &= \lambda b_2 x_{20}, \\ a_{13}x_{10} + a_{23}x_{20} + a_{33}x_{30} + a_{34}x_{40} &= \lambda b_3 x_{30}, \\ a_{14}x_{10} + a_{24}x_{20} + a_{34}x_{30} + a_{44}x_{40} &= \lambda b_4 x_{40}. \end{aligned}$$

Reducirt man diese auf Null, so erhält man

$$2.\quad \begin{aligned} (a_{11} - \lambda b_1)x_{10} + a_{12}x_{20} + a_{13}x_{30} + a_{14}x_{40} &= 0, \\ a_{12}x_{10} + (a_{22} - \lambda b_2)x_{20} + a_{23}x_{30} + a_{24}x_{40} &= 0, \\ a_{13}x_{10} + a_{23}x_{20} + (a_{33} - \lambda b_3)x_{30} + a_{34}x_{40} &= 0, \\ a_{14}x_{10} + a_{24}x_{20} + a_{34}x_{30} + (a_{44} - \lambda x_4)x_{40} &= 0. \end{aligned}$$

Der Verein dieser vier homogenen linearen Gleichungen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$3.\quad C \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda b_3 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} - \lambda b_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine Gleichung vierten Grades für λ. Hat man sie aufgelöst, so setzt man die Wurzeln der Reihe in das System 2. ein und erhält somit aus den

vier Wurzeln der Gleichung 3. vier verschiedene Systeme zur Bestimmung der Coordinaten x_{k0}. Bezeichnet man mit α_{ik} den Coefficienten des k-Elements der i-ten Zeile von C, so hat man

4. $$x_{10} : x_{20} : x_{30} : x_{40} = \alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \alpha_{i3} : \alpha_{i4}$$

wo nun die α_{ik} für die vier Wurzeln λ im Allgemeinen verschiedene Werthe annehmen Es giebt somit vier Punkte im Raume, die für zwei Flächen II. O. dieselbe Polarebene haben.

Ist Π_1 ein Punkt, der für F und f dieselbe Polarebene T_1 hat, und hat Π_2 für F und f dieselbe Polarebene T_2, so liegen Π_2 auf T_1 und Π_1 auf T_2. Denn angenommen, Π_2 läge nicht auf T_1, mithin auch Π_1 nicht auf T_2, so betrachte man auf der Geraden $\Pi_1 \Pi_2$ die beiden Involutionen (No. 12), deren Paare durch die Punkte dieser Geraden und durch die Schnittpunkte derselben mit den Polarebenen der Punkte in Bezug auf F bez. f gebildet werden. Diese beiden Involutionen haben zwei gemeinsame Paare, nämlich die, zu welchen Π_1 und Π_2 gehören. Wenn aber zwei Involutionen zwei gemeinsame Paare haben, so sind sie identisch. Folglich treffen die Polarebenen jedes Punktes Π der Geraden $\Pi_1 \Pi_2$ in Bezug auf F und f diese Gerade in demselben Punkte; da sie nun ausserdem beide durch den Schnitt von T_1 und T_2 gehen, so sind sie identisch. Es fallen also für alle Punkte der Geraden $\Pi_1 \Pi_2$ die Polarebenen bezüglich F und f zusammen. Dies widerspricht der Thatsache, dass die Gleichung $C = 0$ im Allgemeinen nicht durch unendlich viele Wurzeln λ erfüllt wird, sowie dass im Allgemeinen nicht für eine Wurzel λ der Gleichung $C = 0$ die vier Gleichungen des Systems 2. sich auf zwei Gleichungen reduciren, in welchem Falle allerdings alle Punkte auf dem Schnitte der durch die beiden übrig bleibenden Gleichungen dargestellten Ebenen zusammenfallende Polarebenen haben würden.*)

Hieraus folgt, dass im allgemeinen Falle, wenn nicht mehr als vier Punkte vorhanden sind, deren Polarebenen für f und F zusammenfallen, die Polarebene jedes der vier Punkte P_0 durch die drei andern geht.

Zwei Flächen II. O. haben also ein gemeinsames Polartetraëder. Hat die Gleichung $C = 0$ vier reale Wurzeln, so sind alle Ecken dieses Tetraëders real. Hat $C = 0$ ein Paar conjugirt complexe Wurzeln, so sind zwei Ecken des Tetraëders und die ihnen gegenüberliegenden Ebenen real; die Gerade der beiden realen Ecken und die Schnittlinie ihrer Polarebenen bilden zwei Gegenkanten des Polartetraëders und sind für beide Flächen f und F conjugirte

*) Von der Richtigkeit dieser Bemerkungen überzeugt man sich, indem man die Gleichungen zweier Flächen bildet, die ein gemeinsames Polartetraëder haben. Die Gleichungen in Bezug auf dieses Tetraëder seien

$$F \equiv b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 = 0 \quad f \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0.$$

Die Gleichung $C = 0$ wird jetzt $(a_1 - \lambda b_1)(a_2 - \lambda b_1)(a_3 - \lambda b_3)(a_4 - \lambda_4 b) = 0$, und ergiebt für λ die vier Auflösungen $a_1 : b_1$, $a_2 : b_2$, $a_3 : b_3$, $a_4 : b_4$.

Aus den Gleichungen 2. ergeben sich, wenn die Verhältnisse der a von den Verhältnissen der entsprechenden b verschieden sind, die Ecken des Achsentetraëders als Lösungen der Aufgabe.

Nur dann, wenn zwei Coefficienten in f dasselbe Verhältniss haben, wie die entsprechenden in F, tritt eine Abweichung ein. Ist z. B. $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, und sind ξ_1, ξ_2 die Coordinaten eines auf $A_1 A_2$ liegenden Punktes P, so sind die Polarebenen von P

$$a_1 \xi_1 \cdot x_1 + a_2 \xi_2 \cdot x_2 = 0, \quad b_1 \xi_1 \cdot x_1 + b_2 \xi_2 \cdot x_2 = 0,$$

und diese sind identisch, da $b_1 : b_2 = a_1 : a_2$.

Ist $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$, so haben alle auf $A_1 A_2 A_3$ liegenden Punkte dieselbe Polarebene für f und F.

Gerade. Hat $C = 0$ keine reale Wurzel, so sind die gleichbezifferten Coordinaten je zweier Punkte, welche einem Paare conjugirt complexer Wurzeln von μ zugehören, conjugirt complex; daher werden auch die Gleichungen der Polarebenen zweier solchen conjugirt complexen Punkte conjugirt complex.

Aehnlich, wie die Bemerkungen über conjugirt complexe Punkte und Geraden in der Ebene, leitet man die Sätze ab: Zwei conjugirt complexe Punkte genügen den Gleichungen einer durch sie bestimmten realen Geraden. Zwei conjugirt complexe Ebenen haben eine reale Schnittgerade.

Daher schliessen wir: Zwei Flächen II. O. haben in jedem Falle ein Paar reale conjugirte Gerade gemein.

Diese Untersuchung kann auch mit Hülfe der Gleichungen in Ebenencoordinaten durchgeführt werden.

Sind
$$d_1 u_1^2 + d_2 u_2^2 + d_3 u_3^2 + d_4 u_4^2 = 0$$
und
$$c_{11} u_1^2 + 2c_{12} u_1 u_2 + \ldots + c_{44} u_4^2 = 0$$
die Gleichungen von F und f in Ebenencoordinaten, so erhält man die Coordinaten der Ebenen, deren Pole für f und F zusammenfallen, aus drei Gleichungen des Systems

$$5.\quad \begin{aligned} &(c_{11} - \lambda d_1) u_1 + c_{12} u_2 + c_{13} u_3 + c_{14} u_4 = 0, \\ &c_{12} u_1 + (c_{22} - \lambda d_2) u_2 + c_{23} u_3 + c_{24} u_4 = 0, \\ &c_{13} u_1 + c_{23} u_2 + (c_{33} - \lambda d_3) u_3 + c_{34} u_4 = 0, \\ &c_{14} u_1 + c_{24} u_2 + c_{34} u_3 + (c_{44} - \lambda d_4) u_4 = 0, \end{aligned}$$

wobei λ eine Wurzel der Gleichung ist

$$6.\quad \Gamma = \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda d_1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{12} & c_{22} - \lambda d_2 & c_{23} & c_{24} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} - \lambda d_3 & c_{34} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} - \lambda d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichungen $C = 0$ und $\Gamma = 0$ haben daher immer die gleiche Anzahl reale Wurzeln.

22. Die soeben mitgetheilte Untersuchung hängt aufs Engste zusammen mit der Frage nach den Kegeln II. O., die durch die Schnittcurve zweier Flächen II. O. gehen, sowie mit der Frage nach den Grenzflächen II. Kl., die den gemeinsamen Tangentenebenen zweier Flächen II. Kl. eingeschrieben sind; oder allgemeiner: mit der Frage nach den Kegeln II. O., die zu einem Flächenbüschel II. O. gehören, bez. nach den Grenzflächen, die zu einer Schaar von Flächen II. Kl. gehören.

Sind f und F zwei quadratische Functionen in Punktcoordinaten

$$1.\quad \begin{aligned} f &\equiv a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \ldots + a_{44} x_4^2, \\ F &\equiv b_{11} x_1^2 + 2b_{12} x_1 x_2 + \ldots + b_{44} x_4^2, \end{aligned}$$

so versteht man unter einem Flächenbüschel II. O. die Gesammtheit aller Flächen, deren Gleichungen unter der Form enthalten sind

$$2.\quad \varphi \equiv \lambda_1 f + \lambda_2 F = 0.$$

Alle Punkte, für welche $f = 0$ und zugleich $F = 0$, genügen auch der Gleichung $\varphi = 0$. Jede Fläche des Büschels enthält also alle den Flächen $f = 0$ und $F = 0$ gemeinsamen (realen oder imaginären) Punkte.

Umgekehrt: Alle Flächen II. O., die durch eine gegebene Raumcurve IV. O. 1. Sp. gehen, bilden ein Büschel. Denn es ist in § 9, No. 3 nachgewiesen worden, dass die Gleichung jeder dieser Flächen die Form 2. hat, wobei $f = 0$ und $F = 0$ die Gleichungen zweier bestimmten, die Raumcurve enthaltenden Flächen II. O. sind. Ferner folgt aus § 9, No. 2: Durch acht Punkte, die nicht

ein Schnittpunktsystem dreier Flächen II. O. bilden, ist ein Büschel von Flächen II. O. bestimmt.

Sind $f = 0$ und $F = 0$ quadratische Functionen in Ebenencoordinaten

$$3.\quad \begin{aligned} f &\equiv c_{11}u_1^2 + 2c_{12}u_1u_2 + \ldots + c_{44}u_4^2 , \\ F &\equiv d_{11}u_1^2 + 2d_{12}u_1u_2 + \ldots + d_{44}u_4^2 , \end{aligned}$$

so versteht man unter einer Schaar von Flächen II. Kl. die Gesammtheit aller der Flächen, deren Gleichungen unter der Form enthalten sind

$$4.\quad \varphi = \lambda_1 f + \lambda_2 F = 0 .$$

Jede Fläche der Schaar wird von allen gemeinsamen (realen oder imaginären) Tangentenebenen der Flächen $f = 0$ und $F = 0$ berührt. Alle Flächen II. Kl., die der abwickelbaren Fläche der den Flächen $f = 0$ und $F = 0$ gemeinsamen Tangentenebenen eingeschrieben sind, bilden eine Schaar; denn die Gleichung jeder solchen Fläche ist nach § 10, No. 7 von der Form 4.

Wir wählen ein Polartetraëder von $F = 0$ als Coordinatentetraëder, so dass also die Gleichungen dieser Fläche sind

$$\text{in Punktcoordinaten:}\quad b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + b_3x_3^2 + b_4x_4^2 ,$$
$$\text{in Ebenencoordinaten:}\quad d_1u_1^2 + d_2u_2^2 + b_3u_3^2 + d_4u_4^2 .$$

Soll nun $\varphi = 0$ ein Kegel sein, so müssen λ_1 und λ_2 so gewählt werden, dass die Gleichung erfüllt wird (No. 6)

$$5.\quad \begin{vmatrix} \lambda_1a_{11} + \lambda_2b_1 & \lambda_1a_{12} & \lambda_1a_{13} & \lambda_1a_{14} \\ \lambda_1a_{12} & \lambda_1a_{22} + \lambda_2b_2 & \lambda_1a_{23} & \lambda_1a_{24} \\ \lambda_1a_{13} & \lambda_1a_{23} & \lambda_1a_{33} + \lambda_2b_3 & \lambda_1a_{34} \\ \lambda_1a_{14} & \lambda_1a_{24} & \lambda_1a_{34} & \lambda_1a_{44} + \lambda_2b_4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Dividirt man jede Zeile dieser Determinante durch λ_1 und ersetzt dann $\lambda_2 : \lambda_1$ durch $(-\lambda)$, so erhält man die Determinante C in No. 21.

Die Kegelspitzen sind die Lösungen des Systems

$$6.\quad \varphi_1' = 0 , \quad \varphi_2' = 0 , \quad \varphi_3' = 0 , \quad \varphi_4' = 0 ,$$

wenn man für λ_1 und λ_2 Werthe eingeführt hat, die der Gleichung 5. genügen. Stellt man diese Gleichungen auf und ersetzt $\lambda_2 : \lambda_1$ durch $(-\lambda)$, so werden dieselben mit dem System No. 21, 3 identisch. Die Ecken des zwei Flächen II. O. gemeinsamen Polartetraëders sind zugleich die Spitzen der Kegel, welche in dem durch die beiden Flächen bestimmten Büschel enthalten sind.

Soll die Fläche φ der durch f und F bestimmten Schaar eine Grenzfläche sein, so muss die Gleichung erfüllt sein (No. 6)

$$7.\quad \begin{vmatrix} \lambda_1c_{11} + \lambda_2d_1 & \lambda_1c_{12} & \lambda_1c_{13} & \lambda_1c_{14} \\ \lambda_1c_{12} & \lambda_1c_{22} + \lambda_2d_2 & \lambda_1c_{23} & \lambda_1c_{24} \\ \lambda_1c_{13} & \lambda_1c_{23} & \lambda_1c_{33} + \lambda_2d_3 & \lambda_1c_{34} \\ \lambda_1c_{14} & \lambda_1c_{24} & \lambda_1c_{34} & \lambda_1c_{44} + \lambda_2d_4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Setzt man $(-\lambda)$ an die Stelle von $\lambda_2 : \lambda_1$, so geht diese Gleichung in $\Gamma = 0$ (No. 21, 6) über; durch dieselbe Substitution gehen die Gleichungen

$$\varphi_1' = 0 , \quad \varphi_2' = 0 , \quad \varphi_3' = 0 , \quad \varphi_4' = 0 ,$$

deren Verein von den Coordinaten der Doppelebene einer Grenzfläche erfüllt wird, in das System No. 21, 5 über. Die Ebenen des zwei Flächen II. O. gemeinsamen Polartetraëders sind daher die Doppelebenen, die in der von den beiden Flächen bestimmten Schaar enthalten sind.

23. Die abgeleiteten Functionen der Function

$$\varphi \equiv \lambda_1 f + \lambda_2 F = 0$$

in Punkt- oder in Ebenencoordinaten sind

$$\varphi_k' \equiv \lambda_1 f_k' + \lambda_2 F_k' .$$

A. Daher ist die Gleichung der Polarebene des Punktes P_0

$$T \equiv (\lambda_1 f_{10}' + \lambda_2 F_{10}') x_{10} + \ldots + (\lambda_1 f_{40}' + \lambda_2 F_{40}') x_{40} = 0,$$

oder

1. $$T \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 = 0,$$

wobei

2. $$T_1 \equiv f_{10}' x_1 + f_{20}' x_2 + f_{30}' x_3 + f_{40}' x_4 = 0,$$
$$T_2 \equiv F_{10}' x_1 + F_{20}' x_2 + F_{30}' x_3 + F_{40}' x_4 = 0$$

die Gleichungen der Polarebenen von P_0 bezüglich der Flächen $f = 0$ und $F = 0$ sind. Hieraus folgt: Die Polarebenen eines Punktes in Bezug auf die Flächen eines Büschels II. O. bilden ein Ebenenbüschel; die verschiedenen Punkten zugehörigen Büschel von Polarebenen sind projectiv.

Die der Geraden $P_0 P_1$ in Bezug auf $\varphi = 0$ conjugirte Gerade ist der Schnitt der Polarebenen von P_0 und P_1 bezüglich $\varphi = 0$; diese beiden Polarebenen sind entsprechende Ebenen der beiden projectiven Polarebenenbüschel, die den Punkten P_0 und P_1 in Bezug auf die Flächen des Büschels zugehören. Daher folgt: Die Geraden, welche einer Geraden γ in Bezug auf alle Flächen eines Büschels conjugirt sind, bilden ein System von Geraden einer Regelfläche II. O.; die Geraden des andern Systems auf derselben Regelfläche sind die Träger der Polarenbüschel, welche den Punkten der Geraden γ in Bezug auf die Flächen des Büschels zugehören.

B. Die Gleichung des Poles einer Ebene T_0 für die Fläche einer Schaar $\varphi \equiv \lambda_1 f + \lambda_2 F = 0$ ist

$$P \equiv (\lambda_1 f_{10}' + \lambda_2 F_{10}') u_1 + \ldots (\lambda_1 f_{40}' + \lambda_2 F_{40}') u_4 = 0.$$

Daher hat man

3. $$P \equiv \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0,$$

wobei

4. $$P_1 \equiv f_{10}' \cdot u_1 + f_{20}' \cdot u_2 + f_{30}' \cdot u_3 + f_{40}' \cdot u_4 = 0,$$
$$P_2 \equiv F_{10}' \cdot u_1 + F_{20}' \cdot u_2 + F_{30}' \cdot u_3 + F_{40}' \cdot u_4 = 0$$

die Pole von T_0 in Bezug auf $f = 0$ und $F = 0$ sind. Man schliesst hieraus: Die Pole einer festen Ebene in Bezug auf die Flächen einer Schaar liegen auf einer Geraden. Die geradlinigen Polreihen, welche irgend zwei Ebenen in Bezug auf die Flächen der Schaar zugehören, sind projectiv.

Die Pole zweier Ebenen T_0 und T_1 in Bezug auf die Fläche

$$\varphi \equiv \lambda_1 f + \lambda_2 F = 0$$

sind entsprechende Punkte der beiden projectiven zu T_0 und T_1 gehörigen Polreihen; ihre Verbindungsgerade ist die dem Durchschnitt der Ebenen T_0 und T_1 in Bezug auf φ conjugirte Gerade. Daher folgt: Die Geraden, welche einer Geraden γ in Bezug auf die Flächen einer Schaar conjugirt sind, bilden die Geraden eines Systems einer Regelfläche II. O.; die Geraden des andern Systems derselben Regelfläche sind die Träger der Polreihen, welche den durch die Gerade γ gehenden Ebenen in Bezug auf die Flächen der Schaar zugehören.

Das Centrum einer Fläche II. O. ist der Pol der unendlich fernen Ebene; daher folgt: Die Centra aller Flächen einer Schaar liegen auf einer Geraden.

Wenn ein Paar Pol und Polarebene für beide Flächen f und F zusammengehören, so gehören sie auch für jede Fläche des durch f und F bestimmten

Büschel oder der durch beide Flächen bestimmten Schaar zusammen. Alle Flächen II. O., die ein Büschel oder eine Schaar bilden, haben also ein gemeinsames (reales oder imaginäres) Polartetraëder.

24. Bezieht man die Gleichungen der Flächen eines Büschels oder einer Schaar auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, welches eine gegebene Ebene zur XY-Ebene hat, und setzt in der Gleichung einer Fläche des Büschels bez. der Schaar $z = 0$, bez. $w = 0$, so erhält man die Gleichung des Kegelschnitts, in welchem φ von der XY-Ebene geschnitten, bez. in welchem φ von dem unendlich fernen Punkte der Z-Achse aus auf die XY-Ebene projicirt wird.

Bezeichnet man die linken Seiten der Gleichungen dieser Kegelschnitte dadurch, dass man die linke Seite der Gleichung der betreffenden Fläche in Klammer setzt, so hat man

$$(\varphi) \equiv \lambda_1(f) + \lambda_2(F) = 0 .$$

Hieraus folgt: Die Flächen eines Büschels werden von einer Ebene in Kegelschnitten eines Büschels geschnitten. Die Flächen einer Schaar werden von einem unendlich fernen (ebenso wie von einem endlich fernen) Punke aus in Kegelschnitten einer Schaar auf eine Ebene projicirt.

Dies ergiebt sofort: Die Flächen einer Schaar werden von einer Geraden in Punktpaaren einer quadratischen Involution geschnitten; die Involutionen auf allen Geraden sind projectiv, und zwar entsprechen sich je zwei derselben Fläche angehörige Paare von Schnittpunkten; ferner sind diese Involutionen den Punktreihen projectiv, in denen die Flächen des Büschels die Geraden schneiden, die durch einen gemeinsamen Punkt der Flächen des Büschels gehen.

Die Flächen einer Schaar werden von einer Geraden aus von Ebenenpaaren berührt, die eine quadratische Involution bilden; diese Involutionen sind projectiv, und zwar entsprechen sich die Paare, welche dieselbe Fläche berühren; sie sind ferner mit den Ebenenbüscheln projectiv, deren Ebenen die Flächen der Schaar berühren und deren Träger auf einer gemeinsamen Berührungsebene der Flächen der Schaar liegen.

25. Wenn f und F und φ drei von einander unabhängige quadratische Functionen in Punktcoordinaten sind, so kann man durch drei willkürliche Zahlen λ_1, λ_2, λ_3 neue quadratische Functionen von der Form bilden

$$1. \qquad \psi \equiv \lambda_1 f + \lambda_2 F + \lambda_3 \varphi .$$

Die Gesammtheit der Flächen $\psi = 0$ bezeichnet man als ein Flächenbündel.

Die Gleichung $\psi = 0$ wird von den Gruppen von Coordinaten erfüllt, welche dem Vereine von Gleichungen

$$f = 0 , \quad F = 0 , \quad \varphi = 0$$

genügen. Hieraus folgt: Alle Flächen II. O. eines Bündels haben acht gemeinsame Punkte. Umgekehrt: Die Flächen II. O., die durch sieben gegebene Punkte gehen, bilden ein Bündel. Denn nach § 9, No. 6 hat jede solche Fläche eine Gleichung von der Form 1., wobei die Functionen f, F, φ durch die sieben gegebenen Punkte bestimmt sind. Durch die gegebenen sieben Punkte ist noch ein achter Punkt bestimmt, der allen Flächen des Bündels angehört.

Die Gleichung der Polarebene eines Punktes P_0 in Bezug auf die Fläche ψ eines Bündels ist

2. $$T \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_3 T_3 = 0,$$

wobei

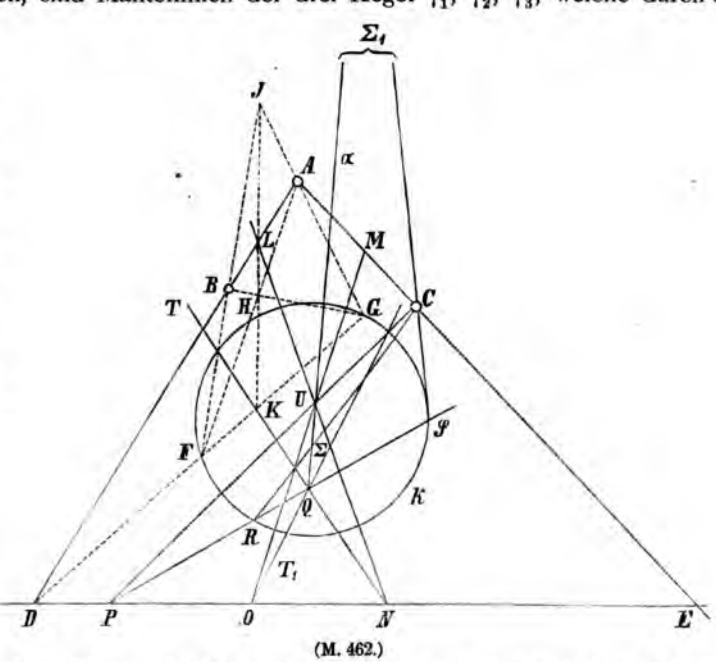
$$T_1 \equiv f_{10}' x_1 + f_{20}' x_2 + f_{30}' x_3 + f_{40}' x_4 = 0,$$
$$T_2 \equiv F_{10}' x_1 + F_{20}' x_2 + F_{30}' x_3 + F_{40}' x_4 = 0,$$
$$T_3 \equiv \varphi_{10}' x_1 + \varphi_{20}' x_2 + \varphi_{30}' x_3 + \varphi_{40}' x_4 = 0$$

die Gleichungen der Polarebenen von P_0 in Bezug auf die Flächen f, F, φ sind. Dies lehrt: Die Polarebenen eines Punktes P_0 in Bezug auf die Fläche II. O. eines Bündels gehen durch einen Punkt P_0'. Die Beziehung dieser Punkte ist reciprok (No. 11); sie werden als conjugirte Punkte des Flächenbündels bezeichnet.

§ 13. Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten.

1. Construction eines Kegels zweiter Ordnung, der einen gegebenen Kegelschnitt k enthält und durch drei gegebene Punkte geht.

Die Mantellinien des gesuchten Kegels, die durch die gegebenen Punkte A, B und C gehen, sind Mantellinien der drei Kegel γ_1, γ_2, γ_3, welche durch k gehen, und der Reihe nach A, B und C zu Spitzen haben; folglich ist die Spitze Σ des gesuchten Kegels ein gemeinsamer Punkt der drei Kegel γ_1, γ_2, γ_3. Je zwei dieser drei Kegel haben den Kegelschnitt k gemein und schneiden sich daher ausser dem noch in einer ebenen Curve (§ 9, No. 5). Ist D



(M. 462.)

die Spur der Geraden AB auf der Ebene k und legt man eine Gerade durch D, welche k in F und G trifft, so sind H und J zwei den Kegeln γ_1 und γ_2 gemeinsame Punkte; denn AF und AG sind Mantellinien von γ_1, und BF, BG sind Mantellinien von γ_2. Die Gerade HJ liegt auf der zweiten Schnittebene von γ_1 und γ_2; sie trifft DG in dem Punkte K, der zu F, G, D harmonisch ist, also in einem Punkte der Polaren T des Punktes D in Bezug auf k. Die Ebene, welche die Schnittpunkte von γ_1 und γ_2 enthält, die nicht auf k liegen, ist also durch die Polare T und durch den Punkt L bestimmt, der zu A, B und D harmonisch liegt.

Ebenso ist die Ebene, welche die Punkte enthält, die γ_1 und γ_3 ausserhalb

k noch gemein haben, durch die Polare T_1 der Spur E der Geraden AC in Bezug auf den Kegelschnitt k und durch den vierten harmonischen Punkt M zu A, C und E bestimmt.

Die Ebene ABC wird von der Ebene LT in LN, und von der Ebene MT_1 in MO geschnitten; mithin ist α die Schnittlinie von LT und MT_1. Die Gerade α trifft daher die Kegel γ_1, γ_2, γ_3 in den beiden Punkten, welche diese drei Kegel ausser k noch gemein haben. Diese beiden Punkte können als Schnittpunkte von α mit irgend einem der drei Kegel leicht gefunden werden.

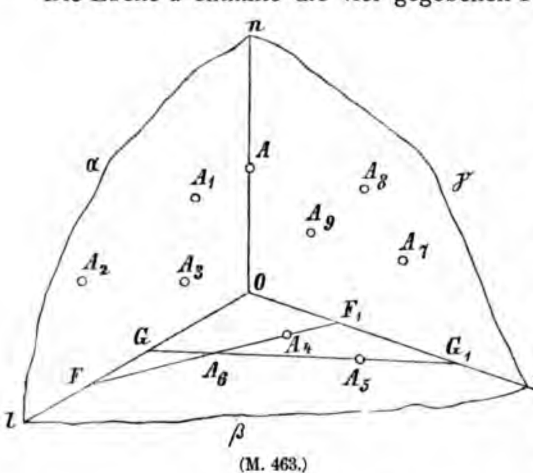
Bestimmt man z. B. die Spur P der Geraden CU, und schneidet k durch die Gerade PQ, so sind die Schnittpunkte Σ und Σ_1 der Geraden α mit CR und CS die gesuchten Spitzen der beiden durch k und A, B, C bestimmten Kegel.

Diese beiden Kegel haben ausser k noch einen Kegelschnitt gemein, der auf der Ebene A, B, C liegt; folglich ist die Projection von k auf die Ebene ABC von den Projectionscentren Σ und Σ_1 aus ein und derselbe Kegelschnitt k_1. Dieser Kegelschnitt k_1 ist allen Flächen II. O. gemein, die durch k und A, B, C gehen.

Sind daher ein ebener Schnitt einer Fläche II. O., und noch weitere vier Punkte der Fläche bekannt, die nicht in einer Ebene liegen — wodurch die Fläche eindeutig bestimmt ist — so kann man auf linearem Wege (ohne Anwendung des Zirkels) den Kegelschnitt finden, in welchem jede durch drei bekannte Punkte der Fläche gehende Ebene die Fläche schneidet.

2. Eine Fläche II. O. durch neun gegebene Punkte, von denen vier auf einer Ebene liegen, kann folgendermaassen construirt werden:

Die Ebene α enthalte die vier gegebenen Punkte A, A_1, A_2, A_3, die Ebene β die drei gegebenen A_4, A_5, A_6, die Ebene γ die beiden gegebenen A_7, A_8 und A; die Schnittlinien je zweier dieser Ebenen seien l, m, n, ihr Schnittpunkt O.



(M. 463.)

Gesetzt L sei der Kegelschnitt, in welchem die Ebene α von der gesuchten Fläche f geschnitten wird; n werde von L ausser in A noch in B getroffen. Bestimmt man die Schnittpunkte von l und L, und legt durch diese und durch A_4, A_5, A_6 einen Kegelschnitt M, so ist dieser auf f enthalten; ferner liegt auch der Kegelschnitt N auf f, der durch die Schnittpunkte von m und l, sowie durch A_7, A_8, A geht.

Der Punkt C, welchen N mit n ausser A noch gemein hat, muss mit B zusammenfallen.

Alle Kegelschnitte L_1, L_2, L_3 ... des Büschels $AA_1A_2A_3$ treffen n (ausser in A) in einer Punktreihe B_1, B_2, B_3 und l in Punktpaaren einer quadratischen Involution λ_1, λ_2, λ_3 ... Die Reihe B_1, B_2, B_3 ... ist mit der Involution λ_1, λ_2, λ_3 ... projectiv.

Die beiden Kegelschnitte M_1 und M_2, welche durch A_4, A_5, A_6 und ausserdem noch der Reihe nach durch die Punktpaare λ_1 und λ_2 gehen, haben noch einen vierten realen Schnittpunkt A' (ausser A_4, A_5, A_6). Ein Kegelschnitt M_i dieses Büschels $A_4 A_5 A_6 A'$, der durch einen Punkt des Paares λ_i geht, enthält auch den andern, da die Kegelschnitte dieses Büschels die Gerade l in den Punktpaaren der durch die beiden Paare λ_1 und λ_2 bestimmten Involution treffen. Die Kegelschnitte M_1, M_2, M_3, M_4 . . . welche der Reihe nach durch die Paare λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 . . . und ausserdem alle durch die Punkte A_4, A_5, A_6 gehen, bilden daher ein Büschel, und treffen mithin die Kante m in Punktpaaren μ_1, μ_2, μ_3 . . einer Involution, die mit der Involution λ_1, λ_2, λ_3 . . . projectiv ist.

Die Kegelschnitte N_1, N_2, N_3, . . . , die durch die Paare μ_1, μ_2, μ_3, . . und ausserdem noch alle durch die drei Punkte A_7, A_8, A gehen, bilden ebenfalls ein Büschel, und treffen die Gerade n ausser in A in einer Punktreihe C_1, C_2, C_3 . . . , die mit der Involution μ_1, μ_2, μ_3 . . . projectiv ist.

Da die Reihe B_1, B_2 . . . mit der Involution λ_1, λ_2 . . ; da diese mit der Involution μ_1, μ_2 . . . ; und da letztere mit der Reihe C_1, C_2, . . . projectiv ist, so sind auch die Reihen B_1, B_2, B_3 . . . und C_1, C_2, C_3 . . . projectiv.

Diese beiden Reihen haben offenbar den Punkt O zum Doppelpunkte. Sie sind daher bestimmt, wenn man noch zwei Paar entsprechende Punkte B_1, C_1 und B_2, C_2 kennt. Der zweite Doppelpunkt B dieser Reihen ist nun der Punkt, welchen die gesuchte Fläche f mit der Kante m ausser A noch gemein hat. Man findet diesen Doppelpunkt auf linearem Wege, wenn man (in der Projection auf die Bildfläche) B_1, B_2 von einem Punkte D, und C_1, C_2 von einem andern Punkte E aus projicirt; die Punkte O, D, E, sowie die Schnittpunkte von DB_1 und EC_1, sowie von DB_2 und EC_2 bestimmen den Kegelschnitt, auf welchem sich je zwei von D und E nach entsprechenden Punkten der Reihen B_1, B_2, B_3 . . . und C_1, C_2, C_3 . . . gehende Strahlen schneiden. Der gesuchte Doppelpunkt P ist daher der Punkt, in welchem dieser Kegelschnitt die Gerade m (ausser in O) schneidet.

Hat man B, so hat man auch die drei Kegelschnitte L, M, N, in welchen die Ebenen α, β, γ die gesuchte Fläche f treffen.

Legt man nun z. B. eine Ebene δ durch A_1 und A_4, so findet man auf linearem Wege den weiteren Schnittpunkt dieser Ebene mit dem auf α liegenden Kegelschnitte L; nach der in der vorigen Nummer gegebenen Construction kann man (auf linearem Wege) aus diesen drei Punkten und dem Kegelschnitte N den Kegelschnitt finden, in welchem f von der Ebene δ geschnitten wird. Dreht man δ um die Gerade $A_1 A_4$, und wiederholt für jede Lage die Construction, so erhält man die gesuchte Fläche vollständig.

3. Man kann diese Lösung so anordnen, dass alle dabei auftretenden Constructionen linear sind.

Man durchschneide die Kanten l und m mit den Geraden $A_4 A_6$ und $A_5 A_6$, und nehme als Kegelschnitte L_1 und L_2 die durch F und G gehenden des Büschels $AA_1 A_2 A_3$; die Punkte F' und G', in welchen L_1 und L_2 die Kante l noch schneiden, geben die beiden Paare FF' und GG'; dies sind die Paare λ und λ_2 der auf der Kante l liegenden Involution.

Die Geraden FA_4 und $F'A_5$ bilden dann den Kegelschnitt M_1 und die Geraden GA_5 und $G'A_4$ den Kegelschnitt M_2.

Durchschneidet man die Kante m mit der Geraden $F'A_5$ in F_1' und mit $G'A_4$ in G_1', so ist $F_1 F_1'$ das Paar μ_1, und $G_1 G_1'$ das Paar μ_2 der auf m

liegenden Involution. Die Bestimmung von C_1 und C_2, sowie alles Weitere erfolgt auf linearem Wege.

4. Wir ersetzen A durch einen andern Punkt A' der Kante n und bestimmen auf gleiche Weise den Kegelschnitt N', in welchem die durch die neun Punkte $A' A_1 A_2 \ldots A_8$ gehende Fläche f' die Ebene γ schneidet. Jede Fläche II. O., die durch die acht Punkte $A_1 \ldots A_8$ geht, gehört zu dem durch die Flächen f und f' bestimmten Büschel, und schneidet daher die Ebene γ in einem Kegelschnitte, der zu dem durch N und N' bestimmten Büschel gehört.

Die durch die neun Punkte $A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots A_9$ bestimmte Fläche II. O. F wird daher von der Ebene γ in dem Kegelschnitte $\mathfrak{N}$ des Büschels NN' geschnitten, der durch A_9 geht.

Dieser Kegelschnitt $\mathfrak{N}$ kann linear gefunden werden, wenn man, von einem dritten Punkte A'' der Kante γ ausgehend, noch einen Kegelschnitt N'' des Büschels NN' ermittelt. Durchschneidet man mit der Geraden $A_8 A_9$ die Kegelschnitte des Büschels $N, N', N'' \ldots$ in den Punkten $P_1, P_2, P_3 \ldots$ und durch einen andern durch A_8 gehenden Strahl in den Punkten $P_1', P_2', P_3', \ldots$, so sind diese Punktreihen projectiv; construirt man aus den bekannten drei Paar entsprechenden Punkten P_1, P_2, P_3 und P_1', P_2', P_3' zu A_9 den entsprechenden Punkt A_9' der Reihe $P_1' P_2'$, so liegt A_9' auf dem durch A_9 gehenden Kegelschnitte des Büschels NN'. Ermittelt man in gleicher Weise den auf einem dritten durch A_8 gezogenen Strahl liegenden Punkt A_9'' des Kegelschnitts $\mathfrak{N}$, so sind nun von $\mathfrak{N}$ fünf Punkte bekannt $A_7, A_8, A_9, A_9', A_9''$.

Um die Construction der gesuchten Fläche F linear zu vollenden, construirt man nach No. 1 mit Hülfe des Kegelschnitts $\mathfrak{N}$ den auf der Ebene α liegenden Kegelschnitt von F, und fährt dann fort wie bei der vorigen Construction (No. 2).*)

5. Der conjugirte Punkt eines Punktes P in Bezug auf das durch sieben gegebene Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 bestimmte Bündel von Flächen II. O. kann auf lineare Weise gefunden werden.

Construirt man von den Punkten 5, 6 und 7 aus die drei Geraden $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, welche die beiden Geraden 1 2 und 3 4 schneiden, so bestimmen diese fünf Geraden eine Regelfläche II. O. f, die dem Bündel angehört. Eine Ebene, die durch P und eine dieser fünf Geraden, etwa durch die von 5 ausgehende α_1 gelegt ist, trifft die Fläche in einer zweiten Geraden α_1', die sich sofort ermitteln lässt; die Gerade β, welche durch den Schnitt Q von α_1 und α_1' geht und zu α_1, α_1' und QP harmonisch zugeordnet ist, liegt auf der Polarebene des Punktes P in Bezug auf die Fläche f.

Construirt man auf gleichem Wege noch eine zweite auf dieser Polarebene liegende Gerade, so ist damit diese Polarebene T gefundeu. In gleicher Weise erhält man die Polarebene T' von P in Bezug auf die Regelfläche des Bündels, welche die Geraden 1 3 und 2 4 enthält, sowie die Polarebene T'' in Bezug auf die Fläche, welche die Geraden 1 4 und 2 3 enthält. Der Schnittpunkt P' von T, T' und T'' ist der gesuchte zu P conjugirte Punkt.

6. Jede Fläche II. O., die dem durch acht gegebene Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bestimmten Büschel angehört, gehört zu den beiden Bündeln, welche durch die Gruppen von je sieben Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 bestimmt sind.

---

*) CHASLES, Comptes rendus hebdomaires des séances de l'academie des sciences, T. XLI, pag. 1103 (1855).

Die Polarebene von P in Bezug auf jede Fläche des Büschels 1, . . . 8 geht daher durch die beiden Punkte P' und P'', die dem Punkte P in Bezug auf die Bündel 1, . . 6, 7 und 1, . . 6, 8 conjugirt sind.

Man hat somit auf linearem Wege die Gerade $P'P''$ gefunden, durch welche alle Polarebenen des Punktes P in Bezug auf die Flächen des Büschels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 hindurchgehen.

7. Die durch die neun Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bestimmte Fläche II. O. f gehört dem Bündel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sowie dem Bündel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 und dem Bündel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9 an; die Polarebene von P in Bezug auf f geht daher durch die Punkte P', P'', P''', die dem Punkte P in Bezug auf diese drei Bündel conjugirt sind.

Hiernach ist die Polarebene eines Punktes in Bezug auf eine durch neun Punkte bestimmte Fläche II. O. linear construirt.

8. Construirt man so die Polarebene eines Punktes P der Ebene 1, 2, 3, so ist ihre Spur auf dieser Ebene die Polare von P für den auf 1, 2, 3 liegenden Kegelschnitt von f.

Durch die Punkte 1, 2, 3 und die Polare von P ist dieser Kegelschnitt bestimmt und kann linear construirt werden.

Von diesem Kegelschnitte aus kann nun die Construction der Fläche wie in No. 2 fortgesetzt werden.*)

§ 14. Projective Punktebenen, Geradenebenen, Ebenenbündel und Strahlenbündel.

1. Sind P_1, P_2, P_3 drei von einander unabhängige lineare Functionen in (homogenen oder gewöhnlichen) Ebenencoordinaten oder Liniencoordinaten, so kann die Gleichung eines vierten Punktes P_6 der Ebene $P_1 P_2 P_3$ bekanntlich in der Form geschrieben werden

$$P_6 \equiv a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 = 0,$$

wobei das Verhältniss $a_1 : a_2 : a_3$ durch die Lage von P_6 eindeutig bestimmt ist.

Aehnliches ergiebt sich für die Geraden einer Ebene und für die Ebenen eines Ebenenbündels, d. i. für die Ebenen, die durch einen Punkt (den Träger des Bündels) gehen.

Sind nämlich T_1, T_2, T_3 drei von einander unabhängige lineare Functionen in gewöhnlichen oder in homogenen Punktcoordinaten, so kann man eine lineare Function

$$T \equiv a_1 T_1 + a_2 T_2 + a_3 T_3 = 0 \qquad 2.$$

durch geschickte Wahl des Verhältnisses $a_1 : a_2 : a_3$ so bestimmen, dass der Gleichung $T = 0$ durch zwei willkürlich gewählte Punkte P_1 und P_2 genügt wird. Bezeichnet man durch T_{i1} und T_{i2} die Werthe, welche die Function T_i annimmt, wenn man in ihr die variabeln Coordinaten durch die Coordinaten von P_1 bez. P_2 ersetzt, so hat man a_1, a_2, a_3 so zu wählen, dass die beiden Gleichungen erfüllt sind

$$a_1 T_{11} + a_2 T_{21} + a_3 T_{31} = 0,$$
$$a_1 T_{12} + a_2 T_{22} + a_3 T_{33} = 0.$$

*) Hesse, Crelles Journal Bd. 24, pag. 36 (1842). Mehrere Methoden zur Construction des achten Schnittpunkts dreier Flächen II. O., der Schnittcurve zweier Flächen II. O. aus acht Punkten, sowie einer Fläche II. O. aus neun Punkten findet man zusammengestellt und bearbeitet in der Abhandlung des Verfassers: Die Construction einer Fläche II. O. aus neun gegebenen Punkten und verwandte Constructionen, Leipzig 1881.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$a_1 : a_2 : a_3 = \begin{vmatrix} T_{21} & T_{31} \\ T_{22} & T_{33} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} T_{31} & T_{11} \\ T_{33} & T_{12} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} .$$

Sind nun T_1, T_2, T_3 lineare Functionen von Punktcoordinaten in der Ebene, so wird in der Form 2. die Gleichung jeder durch zwei willkürliche Punkte der Ebene gehenden Geraden, also jeder Geraden der Ebene dargestellt. Sind hingegen T_1, T_2, T_3 lineare Functionen von Punktcoordinaten im Raume, so wird die Gleichung

$$T \equiv a_1 T_1 + a_2 T_2 + a_3 T_3 = 0$$

durch die Coordinaten des Punktes erfüllt, für welchen zugleich

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0,$$

die Ebene T geht also durch den gemeinsamen Punkt der Ebenen T_1, T_2 und T_3. Da nun ausserdem T durch die zwei willkürlichen Punkte P_1 und P_2 geht, so folgt, dass durch die Gleichung 2. jede durch den Schnittpunkt von T_1, T_2, T_3 gehende Ebene dargestellt werden kann.

2. Man denke sich in zwei verschiedenen oder zusammenfallenden Ebenen Σ und Σ' je ein rechtwinkeliges Coordinatensystem und die Punkte jeder Ebene durch ihre Coordinaten bestimmt.

Man kann nun jeden Punkt P der einen Ebene mit einem Punkte P' der andern dadurch verknüpfen, dass man für die Coordinaten von P und P' zwei für jede der beiden Coordinatenpaare lineare Gleichungen festsetzt

$$1. \quad \begin{aligned} A &\equiv a\, xx' + b\, xy' + c\, x + d\, yx' + e\, yy' + f\, y + g\, x' + h\, y' + i = 0, \\ B &\equiv a_1 xx' + b_1 xy' + c_1 x + d_1 yx' + e_1 yy' + f_1 y + g_1 x' + h_1 y' + i_1 = 0, \end{aligned}$$

worin $a \ldots i$, $a_1 \ldots i_1$ gegebene Constanten sind, welche die Verwandtschaft charakterisiren.

Man kann diese Gleichungen in der Weise zusammenfassen

$$2. \quad \begin{aligned} A &\equiv A'x + B'y + C' \equiv Ax' + By' + C = 0, \\ B &\equiv D'x + E'y + F' \equiv Dx' + Ey' + F = 0, \end{aligned}$$

worin $A' \ldots F'$ lineare Functionen von x', y', und $A \ldots F$ lineare Functionen von x, y bedeuten. Aus diesen Gleichungen erhält man x, y durch x', y' ausgedrückt und umgekehrt:

$$3. \quad x = \frac{B'F' - C'E'}{A'E' - B'D'}, \quad y = \frac{C'D' - A'F'}{A'E' - B'D'},$$

$$4. \quad x' = \frac{BF - CE}{AE - BD}, \quad y' = \frac{CD - AF}{AE - BD}.$$

Einer Geraden in Σ'

$$T' \equiv \lambda x' + \mu y' + \nu = 0$$

entspricht in Σ die Linie, deren Gleichung man erhält, wenn man in T' die Coordinaten x', y' gemäss der Formeln 4. durch die Coordinaten des entsprechenden Punktes x, y ersetzt. Dadurch erhält man nach Beseitigung des Nenners $(AE - BD)$ die Gleichung

$$5. \quad K \equiv \lambda(BF - CE) + \mu(CD - AF) + \nu(AE - BD) = 0.$$

Dies ist eine Gleichung zweiten Grades.

Für die X'-Achse, die Y'-Achse und die unendlich ferne Gerade der Ebene Σ' ist der Reihe nach

$$\mu = \nu = 0, \quad \lambda = \nu = 0, \quad \lambda = \mu = 0.$$

Der X'-Achse entspricht daher der Kegelschnitt: $K_1 \equiv BF - CE = 0$,
„ Y'-Achse „ „ „ „ „ : $K_2 \equiv CD - AF = 0$,
„ unendlich fernen Geraden in Σ' entspricht : $K_3 \equiv AE - BD = 0$.

Die drei Functionen K_1, K_2, K_3 sind, wie man sofort sieht, durch die identische Gleichung verbunden

$$AK_1 + BK_2 \equiv - CK_3.$$

Für jeden Punkt, den die Kegelschnitte K_1 und K_2 gemein haben, verschwindet die linke Seite dieser Identität, folglich auch die rechte; jeder Schnittpunkt von $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ liegt daher entweder auf der Geraden $C = 0$, oder auf dem Kegelschnitte $K_3 = 0$. Die Gerade $C = 0$ trifft K_1 in den Punkten, für welche zugleich $B = 0$ oder $F = 0$, und den Kegelschnitt K_2 in den Schnittpunkten desselben mit $A = 0$ oder $F = 0$. Da nun im Allgemeinen die drei Geraden A, B, C nicht durch einen Punkt gehen, so folgt, dass die Gerade C nur einen Schnittpunkt von K_1 und K_2 enthält, nämlich den Punkt, in welchem C von F geschnitten wird. Wir schliessen hieraus: Die drei Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 haben drei Punkte gemein. Diese Punkte gehören offenbar auch jedem Kegelschnitte K an; die Kegelschnitte K, welche den Geraden in Σ' entsprechen, haben daher drei gemeinsame Punkte. Dem Schnittpunkte zweier Geraden T_1', T_2' in Σ' entspricht der vierte Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte, welche T_1' und T_2' entsprechen.

Die drei Punkte, in denen sich die Kegelschnitte K der Ebene Σ schneiden, heissen die Grundpunkte auf Σ.

In gleicher Weise ergiebt sich, dass jeder Geraden T auf Σ ein Kegelschnitt K' auf Σ' entspricht, und dass alle diese Kegelschnitte drei gemeinsame Punkte haben, welche als die Grundpunkte auf Σ' bezeichnet werden.

Der Verein der drei Gleichungen $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ kann durch die Proportion ersetzt werden

$$5. \qquad A : B : C = D : E : F.$$

Die drei Grundpunkte auf Σ erfüllen diese Proportion, für jeden dieser Punkte werden also die Verwandtschaftsgleichungen 2. identisch. Dies ergiebt: Jedem Grundpunkte auf Σ entsprechen die Punkte der Geraden

$$Ax' + By' + C = 0,$$

wenn man darin x, y durch die Coordinaten dieses Grundpunkts ersetzt; ebenso entsprechen jedem Grundpunkte auf Σ' die Punkte der Geraden

$$A'x + B'y + C' = 0,$$

wenn man hierin für x', y' die Coordinaten dieses Grundpunkts setzt.

Das Vorhandensein dieser ausgezeichneten Punkte und Geraden in den Systemen Σ und Σ' fordert dazu auf, homogene Coordinatensysteme zu Grunde zu legen, und die ausgezeichneten Elemente zu den Achsendreiecken zu verwenden.

In Bezug auf zwei beliebig gewählte Coordinatendreiecke in Σ und Σ' erhält man die Verwandtschaftsgleichungen

$$G_1'x_1 + G_2'x_2 + G_3'x_3 = 0 \quad \text{und} \quad H_1'x_1 + H_2'x_2 + H_3'x_3 = 0,$$

worin die G' und H' lineare Functionen von x_1', x_2', x_3' sind.

Wir wollen nun in Σ die drei Geraden zu Coordinatenachsen wählen, welche den Grundpunkten in Σ' entsprechen, und zwar mögen den Grundpunkten Π_1', Π_2', Π_3' der Reihe nach die Achsen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ entsprechen. Hieraus folgt, dass für die Coordinaten von Π_1' die Functionen G_2', G_3', H_2' und H_3' verschwinden, sowie ferner, dass für die Coordinaten von Π_2' die Functionen $G_1' = G_3' = H_1' = H_3' = 0$ sind, und endlich, dass man für die Coordinaten von Π_3' hat $G_1' = G_2' = H_1' = H_2' = 0$.

Dies zeigt, dass die Dreiecke $G_1' = 0$, $G_2' = 0$, $G_3' = 0$ und $H_1' = 0$, $H_2' = 0$, $H_3' = 0$ zusammenfallen, und dass die Grundpunkte Π_1', Π_2', Π_3' die Ecken dieses Dreiecks sind, so dass Π_i' der Seite $G_i' \equiv H_i'$ gegenüberliegt.

Wählt man nun dieses Dreieck zum Coordinatendreiecke in Σ', so reduciren sich die linearen Functionen G' und H' auf

$$G_1' \equiv a_1 x_1', \quad G_2' \equiv a_2 x_2', \quad G_3' \equiv a_3 x_3',$$
$$H_1' \equiv b_1 x_1', \quad H_2' \equiv b_2 x_2', \quad H_3' \equiv b_3 x_3'.$$

Man erhält somit die Verwandtschaftsgleichungen

6. $a_1 x_1' x_1 + a_2 x_2' x_2 + a_3 x_3' x_3 = 0$ und $b_1 x_1' x_1 + b_2 x_2' x_2 + b_3 x_3' x_3 = 0$.

Aus der Symmetrie dieser Gleichungen sieht man, dass das Coordinatendreieck in Σ die Grundpunkte auf Σ zu Ecken hat, und dass denselben die Seiten des Coordinatendreiecks auf Σ' entsprechen.

Hieraus folgt der Satz: Den Grundpunkten in jedem der beiden Systeme entsprechen die Seiten des von den Grundpunkten des andern Systems gebildeten Dreiecks.

Den Punkten der Geraden auf Σ'

7. $$T \equiv \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3' = 0$$

entsprechen auf Σ die Punkte, für welche der Verein der Gleichungen 6. und 7. besteht; folglich die Punkte, für welche die Determinante verschwindet

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ a_1 x_1 & a_2 x_2 & a_3 x_3 \\ b_1 x_1 & b_2 x_2 & b_3 x_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Entwickelt man dieselbe, so erhält man die Gleichung des der Geraden T entsprechenden Kegelschnitts in der Form

8. $$\lambda_1 A_1 x_2 x_3 + \lambda_2 A_2 x_3 x_1 + \lambda_3 A_3 x_1 x_2 = 0,$$

wobei $A_1 \equiv a_2 b_3 - a_3 b_2$, $A_2 \equiv a_3 b_1 - a_1 b_3$, $A_3 \equiv a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Diese geometrische Verwandtschaft ist von Jacob Steiner*) aufgestellt und zur Lösung von Constructionsaufgaben verwendet worden.

3. Die durch die Gleichungen No. 2, 1 definirte Verwandtschaft erleidet eine wesentliche Abänderung, wenn jede der drei Functionen K_1, K_2, K_3 in zwei lineare Faktoren zerfällt, und wenn diese drei Produkte einen linearen Faktor gemeinsam haben.

Der Kegelschnitt K_1 wird durch zwei projective Strahlbüschel erzeugt, welche den Schnitt von B und C, sowie den von E und F zu Trägern haben. Zerfällt K_1 in zwei Gerade, so sind diese Büschel perspectiv; ist $G = 0$ die Gerade der beiden Träger, so sind C und F in der Form darstellbar

1. $$C \equiv G + \alpha B, \quad F \equiv \beta G + \alpha E.$$

Hieraus folgt nun

2. $$K_1 \equiv BF - CE \equiv G(\beta B - E).$$

Zerfällt K_3 in zwei Gerade, deren eine G ist, so schliesst man in gleicher Weise, dass B und E in der Form darstellbar sind

3. $$B \equiv G + \gamma A, \quad E \equiv \delta G + \gamma D.$$

Hiernach wird

4. $$K_3 \equiv AE - BD \equiv G(\delta A - D).$$

Führt man die Werthe 3. in 2. ein, so erhält man

5. $$K_1 \equiv G[(\beta - \delta) G + \beta\gamma A - \gamma D].$$

*) Steiner, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin 1832, pag. 254. Vergl. auch Durège, Die ebenen Curven dritter Ordnung, Leipzig 1871, pag. 121.

Ferner erhält man

$$K_2 \equiv CD - AF \equiv (G + \alpha B) D - (\beta G + \alpha E) A,$$
6. $$\equiv (G + \alpha G + \alpha\gamma A) D - (\beta G + \alpha\delta G + \alpha\gamma D) A,$$
$$\equiv G[(1+\alpha) D - (\beta + \alpha\delta) A].$$

Es zerfällt also auch K_2 in zwei Gerade, und die drei Geradenpaare K_1, K_2, K_3 haben die Gerade G gemein.

Der Kegelschnitt K, welcher der Geraden

$$T' \equiv \lambda x' + \mu y' + \nu = 0$$

entspricht, ist nun

$$K \equiv \lambda G[(\beta - \delta) G + \beta\gamma A - \gamma D] + \mu G[(1+\alpha) D - (\beta + \alpha\delta) A] + \nu G(\delta A - D) = 0;$$

er zerfällt in die Gerade $G = 0$ und in die von T' abhängige Gerade

7. $$T \equiv \lambda[(\beta - \delta) G + \beta\gamma A - \gamma D] + \mu[(1+\alpha) D - (\beta + \alpha\delta) A] + \nu(\delta A - D) = 0.$$

In den Auflösungen der Verwandtschaftsgleichungen in Bezug auf x', y' kann man den Faktor G in den Zählern und im Nenner unterdrücken, und erhält dieselben in der Form

8. $$x' = \frac{H_1}{H_3}, \quad y' = \frac{H_2}{H_3},$$

worin H_1, H_2, H_3 lineare Functionen der Coordinaten x, y bedeuten.

Man überzeugt sich leicht, dass die in den Functionen auftretenden Constanten immer so gewählt werden können, dass H_1, H_2, H_3 beliebig gewählte lineare Functionen werden.

Den Punkt P, welcher einem Punkte x', y' entspricht, bestimmt man nun, indem man die Gleichungen 8. in Bezug auf x und y auflöst.

Setzt man $H_3 \equiv a_3 x + b_3 y + c_3$, $H_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1$, $H_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2$, so hat man die Gleichungen aufzulösen

$$(a_1 - a_3 x') x + (b_1 - b_3 x') y = -(c_1 - c_3 x'),$$
$$(a_2 - a_3 y') x + (b_2 - b_3 y') y = -(c_2 - c_3 y').$$

Man erhält hieraus

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1 + (b_2 c_3 - b_3 c_2) x' + (b_3 c_1 - b_1 c_3) y'}{a_1 b_2 - a_2 b_1 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) x' + (a_3 b_1 - a_1 b_3) y'},$$
$$y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2 + (a_3 c_2 - a_2 c_3) x' + (a_1 c_3 - a_3 c_1) y'}{a_1 b_2 - a_2 b_1 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) x' + (a_3 b_1 - a_1 b_3) y'}.$$

Man hat daher

9. $$x = H_1' : H_3', \quad y = H_2' : H_3',$$

wo H_1', H_2', H_3' lineare Functionen von x', y' sind.

Dieser besondere Fall der STEINER'schen Verwandtschaft zeichnet sich vor dem allgemeinen dadurch aus, dass der Kegelschnitt, welcher im allgemeinen Falle einer Geraden eines Systems entspricht, in eine feste und in eine veränderliche Gerade zerfällt.

Geht man von den Verwandtschaftsgleichungen 8. oder von ihren Umkehrungen 9. aus, so kommen diese festen Geraden in beiden Systemen nicht mehr zur Erscheinung, da der gemeinsame Faktor im Nenner und in den Zählern von x und y, sowie bei x' und y' bereits unterdrückt ist; die Grundpunkte, die in diesem Falle auf den festen Geraden liegen, kommen damit ausser Betracht.

Die durch die Gleichungen 8. oder 9. definirte Verwandtschaft ist daher dadurch charakterisirt, dass die Coordinaten jedes Punktes des einen Systems mit den Coordinaten des entsprechenden Punktes im andern Systeme durch lineare Gleichungen verbunden sind, und dass jeder Geraden des einen Systems eine Gerade des andern entspricht.

Diese Art der Verwandtschaft ist von MÖBIUS*) in die Geometrie eingeführt und als collineare Verwandtschaft bezeichnet worden; wir gebrauchen statt dessen die Bezeichnung projective Verwandtschaft.

4. Die projective Verwandtschaft zweier Ebenen ist also durch die Gleichungen definirt

$$1. \qquad x' = \frac{H_1}{H_3}, \quad y' = \frac{H_2}{H_3},$$

aus denen sich die Umkehrungen ergeben

$$2. \qquad x = \frac{H_1'}{H_3'}, \quad y' = \frac{H_2'}{H_3'},$$

wobei H_1, H_2, H_3 und H_1', H_2', H_3' die linearen Functionen bezeichnen

$$3. \quad \begin{aligned} H_1 &\equiv A_1 x + B_1 y + C_1, \\ H_2 &\equiv A_2 x + B_2 y + C_2, \\ H_3 &\equiv A_3 x + B_3 y + C_3, \end{aligned} \qquad 4. \quad \begin{aligned} H_1' &\equiv \mathrm{A}_1 x' + \mathrm{B}_1 y' + \Gamma_2, \\ H_2' &\equiv \mathrm{A}_2 x' + \mathrm{B}_2 y' + \Gamma_2, \\ H_3' &\equiv \mathrm{A}_3 x' + \mathrm{B}_3 y' + \Gamma_3, \end{aligned}$$

und $\mathrm{A}_1 \ldots \Gamma_3$ abkürzungsweise gesetzt sind für

$$5. \quad \begin{aligned} \mathrm{A}_1 &\equiv B_2 C_3 - B_3 C_2; & \mathrm{A}_2 &\equiv C_2 A_3 - C_3 A_2; & \mathrm{A}_3 &\equiv A_2 B_3 - A_3 B_2; \\ \mathrm{B}_1 &\equiv B_3 C_1 - B_1 C_3; & \mathrm{B}_2 &\equiv C_3 A_1 - C_1 A_3; & \mathrm{B}_3 &\equiv A_3 B_1 - A_1 B_3; \\ \Gamma_1 &\equiv B_1 C_2 - B_2 C_1; & \Gamma_2 &\equiv C_1 A_2 - C_2 A_1; & \Gamma_3 &\equiv A_1 B_2 - A_2 B_1. \end{aligned}$$

5. Der Geraden der Ebene Σ'

$$T' \equiv u'x' + v'y' - 1 = 0$$

entspricht in Σ die Gerade

$$T \equiv u'H_1 + v'H_2 - H_3 = 0.$$

Ordnet man dies nach den Coordinaten, so erhält man

$$T \equiv (A_1 u' + A_2 v' - A_3) x + (B_1 u' + B_2 v' - B_3) y + (C_1 u' + C_2 v' - C_3) = 0.$$

Die Coordinaten dieser Geraden sind daher

$$6. \qquad u = \frac{J_1'}{J_3'}, \quad v = \frac{J_2'}{J_3'},$$

wenn $J_1' \equiv A_1 u' + A_2 v' - A_3$, $J_2' \equiv B_1 u' + B_2 v' - B_3$, $J_3' \equiv C_1 u' - C_2 v' + C_3$.

Umgekehrt entspricht der Geraden in Σ

$$T \equiv ux + vy - 1 = 0$$

die Gerade in Σ', welche die Gleichung hat

$$T' \equiv u \cdot H_1' + v \cdot H_2' - H_3' = 0,$$

deren Coordinaten also sind

$$7. \qquad u' = \frac{J_1}{J_3}, \quad v' = \frac{J_2}{J_3},$$

$$J_1 \equiv \mathrm{A}_1 u + \mathrm{A}_2 v - \mathrm{A}_3, \quad J_2 \equiv \mathrm{B}_1 u + \mathrm{B}_2 u - \mathrm{B}_3, \quad J_3 = -\Gamma_1 u - \Gamma_2 v + \Gamma.$$

Die Gleichungen 7. können auch dadurch erhalten werden, dass man die Gleichungen 6. nach u', v' auflöst.

Von den Gleichungen 6. (oder 7.) gelangt man zu den Verwandtschaftsgleichungen in No. 3 zurück; man kann daher die projective Verwandtschaft auch durch 6. und 7. definiren:

Zwei ebene Systeme sind projectiv, wenn die Coordinaten jeder Geraden der einen Ebene mit den Coordinaten der entsprechenden Geraden der andern Ebene durch lineare Gleichungen verbunden sind, und wenn jedem Strahlbüschel der einen Ebene ein Strahlbüschel der andern entspricht.

5. Wenn man mit H_{ik} den Werth bezeichnet, den die Function H_i annimmt,

---

*) MÖBIUS, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, pag. 179.

wenn man darin x, y durch die Coordinaten x_k, y_k eines Punktes P_k ersetzt, so entsprechen den Punkten P_1, P_2, P_3 des Systems Σ die Punkte P_1', P_2' P_3' des Systems Σ', deren Coordinaten sind

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \frac{H_{11}}{H_{31}} \\ y_1' &= \frac{H_{21}}{H_{31}} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_2' &= \frac{H_{12}}{H_{32}} \\ y_2' &= \frac{H_{22}}{H_{32}} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_3' &= \frac{H_{13}}{H_{33}} \\ y_3' &= \frac{H_{23}}{H_{33}} \end{aligned}\right\}.$$

Für den Punkt P_4', der dem Punkte P_4 entspricht, dessen Coordinaten sind

$$x_4 = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}{a_1 + a_2 + a_3}, \quad y_4 = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3}{a_1 + a_2 + a_3},$$

ergeben sich die Functionen H

$$H_{i4} = \frac{1}{a_1 + a_2 + a_3}(a_1 H_{i1} + a_2 H_{i2} + a_3 H_{i3}).$$

Daher hat man

$$x_4' = \frac{a_1 H_{11} + a_2 H_{12} + a_3 H_{13}}{a_1 H_{31} + a_2 H_{32} + a_3 H_{33}}, \quad y_4' = \frac{a_1 H_{21} + a_2 H_{22} + a_3 H_{33}}{a_1 H_{31} + a_2 H_{32} + a_3 H_{33}}.$$

Hierfür kann man setzen

$$1. \quad x_4' = \frac{b_1 x_1' + b_2 x_2' + b_3 x_3'}{b_1 + b_2 + b_3}, \quad y_4' = \frac{b_1 y_1' + b_2 y_2' + b_3 y_3'}{b_1 + b_2 + b_3},$$

wobei

$$2. \quad b_i = \frac{a_i H_{3i}}{a_1 H_{31} + a_2 H_{32} + a_3 H_{33}}.$$

Die Coordinaten jedes Punktes auf Σ ergeben sich für ein bestimmtes Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ aus den Formeln

$$3. \quad x = \frac{\lambda_1 a_1 x_1 + \lambda_2 a_2 x_2 + \lambda_3 a_3 x_3}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3}, \quad y = \frac{\lambda_1 a_1 x_1 + \lambda_2 a_2 x_2 + \lambda_3 a_3 x_3}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3}.$$

Nach 1. und 2. sind die Coordinaten des entsprechenden Punktes

$$4. \quad x' = \frac{\lambda_1 b_1 x_1' + \lambda_2 b_2 x_2' + \lambda_3 b_3 x_3'}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3}, \quad y' = \frac{\lambda_1 b_1 y_1' + \lambda_2 b_2 y_2' + \lambda_3 b_3 y_3'}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3}.$$

Umgekehrt schliesst man leicht: Wenn man zu vier Paar gegebenen entsprechenden Punkten die Coordinaten je zweier entsprechenden nach den Formeln 3. und 4. bestimmt, so sind die beiden Ebenen projectiv. Zugleich ist hieraus ersichtlich: Die projective Verwandtschaft zweier Ebenen ist durch vier Paar entsprechende Punkte eindeutig bestimmt.

In gleicher Weise erhält man von den Gleichungen No. 4, 6 und 7 ausgehend: Die projective Verwandtschaft zweier Ebenen ist durch vier Paare entsprechende Gerade bestimmt; entsprechen sich T_1, T_2, T_3, T_4 und T_1', T_2', T_3', T_4' und ist

$$5. \quad \left.\begin{aligned} u_4 &= \frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ v_4 &= \frac{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} u_4' &= \frac{\beta_1 u_1' + \beta_2 u_2' + \beta_3 u_3'}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \\ v_4' &= \frac{\beta_1 v_1' + \beta_2 v_2' + \beta_3 v_3'}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \end{aligned}\right\},$$

so folgen die Coordinaten je zweier entsprechenden Geraden aus den Formeln

$$6. \quad \begin{aligned} u &= \frac{\lambda_1 \alpha_1 u_1 + \lambda_2 \alpha_2 u_2 + \lambda_3 \alpha_3 u_3}{\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3}, \quad & v &= \frac{\lambda_1 \alpha_1 v_1 + \lambda_2 \alpha_2 v_2 + \lambda_3 \alpha_3 v_3}{\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3}, \\ u' &= \frac{\lambda_1 \beta_1 u_1' + \lambda_2 \beta_2 u_2' + \lambda_3 \beta_3 u_3'}{\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_3}, \quad & v' &= \frac{\lambda_1 \beta_1 v_1' + \lambda_2 \beta_2 v_2' + \lambda_3 \beta_3 v_3'}{\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_3}. \end{aligned}$$

Dieses Formelsystem kann durch das folgende ersetzt werden: Sind $P_1 = 0$

und $P_1' = 0$, $P_2 = 0$ und $P_2' = 0$, $P_3 = 0$ und $P_3' = 0$, $P_4 = 0$ und $P_4' = 0$ die Gleichungen von vier Paar entsprechenden Punkten und ist

$$P_4 \equiv a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 , \quad P_4' \equiv b_1 P_1' + b_2 P_2' + b_3 P_3' ,$$

so werden die Gleichungen jedes Paares entsprechender Punkte in der Form erhalten

$$7. \quad \begin{aligned} P &\equiv \lambda_1 a_1 P_1 + \lambda_2 a_2 P_2 + \lambda_3 a_3 P_3 = 0 , \\ P' &\equiv \lambda_1 b_1 P_1' + \lambda_2 b_2 P_2' + \lambda_3 b_3 P_3' = 0 . \end{aligned}$$

Sind ferner $T_1 = 0$ und $T_1' = 0$, $T_2 = 0$ und $T_2' = 0$, $T_3 = 0$ und $T_3' = 0$, $T_4 = 0$ und $T_4' = 0$ die Gleichungen von vier Paar entsprechenden Geraden und ist

$$T_4 \equiv \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \alpha_3 T_3 , \quad T_4' \equiv \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 + \beta_3 T_3 ,$$

so sind die Gleichungen jedes Paares entsprechender Geraden von der Form

$$8. \quad \begin{aligned} T &\equiv \lambda_1 \alpha_1 T_1 + \lambda_2 \alpha_2 T_2 + \lambda_3 \alpha_3 T_3 = 0 . \\ T' &\equiv \lambda_1 \beta_1 T_1 + \lambda_2 \beta_2 T_2 + \lambda_3 \beta_3 T_3 = 0 . \end{aligned}$$

6. Nimmt man $\lambda_3 = 0$, so geben die Gleichungen No. 5, 7 entsprechende Punkte der Geraden $P_1 P_2$ und $P_1' P_2'$. Aus diesen Gleichungen

$$P \equiv \lambda_1 a_1 P_1 + \lambda_2 a_2 P_2 = 0 , \quad P' \equiv \lambda_1 b_1 P_1 + \lambda_2 b_2 P_2' = 0$$

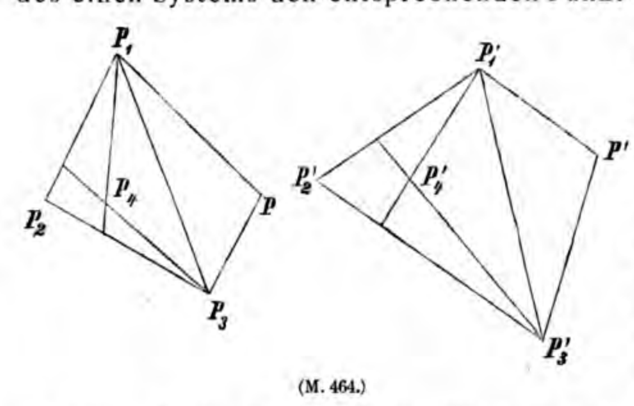
schliesst man: In projectiven ebenen Systemen sind je zwei entsprechende geradlinige Punktreiheu projectiv.

Die Gleichungen (No. 5, 8) geben für $\lambda_3 = 0$ die Gleichungen entsprechender Strahlen der beiden Büschel $T_1 T_2$ und $T_1' T_2'$

$$T \equiv \lambda_1 \alpha_1 T_1 + \lambda_2 \alpha_2 T_2 = 0 , \quad T' \equiv \lambda_1 \beta_1 T_1' + \lambda_2 \beta_2 T_2' = 0 .$$

Hieraus folgt weiter: In projectiven ebenen Systemen sind je zwei entsprechende Strahlbüschel projectiv.

Diese beiden Sätze lehren, zu jedem Punkte und zu jeder Geraden des einen Systems den entsprechenden Punkt und die entsprechende Gerade des andern zu construiren.



(M. 464.)

Um den Punkt zu finden, der P entspricht, construire man die beiden Geraden $P_1' P'$ und $P_3' P'$ so, dass $P_1'(P_2', P_3', P_4', P')$*) $= P_1 (P_2 P_3 P_4 P)$, sowie dass $P_3' (P_2' P_1' P_4' P') = P_3 (P_2 P_1 P_4 P)$. Der Schnittpunkt beider Strahlen ist der gesuchte Punkt P'.

Um ferner die Gerade zu finden, die der Geraden T (Fig. 465) entspricht, construire man auf T_2' den Punkt M_2' so, dass

$$(P_3' P_1' M_1' M_2') = (P_3 P_1 M_1 M_2) ;$$

und auf T_3' den Punkt M_4' so, dass

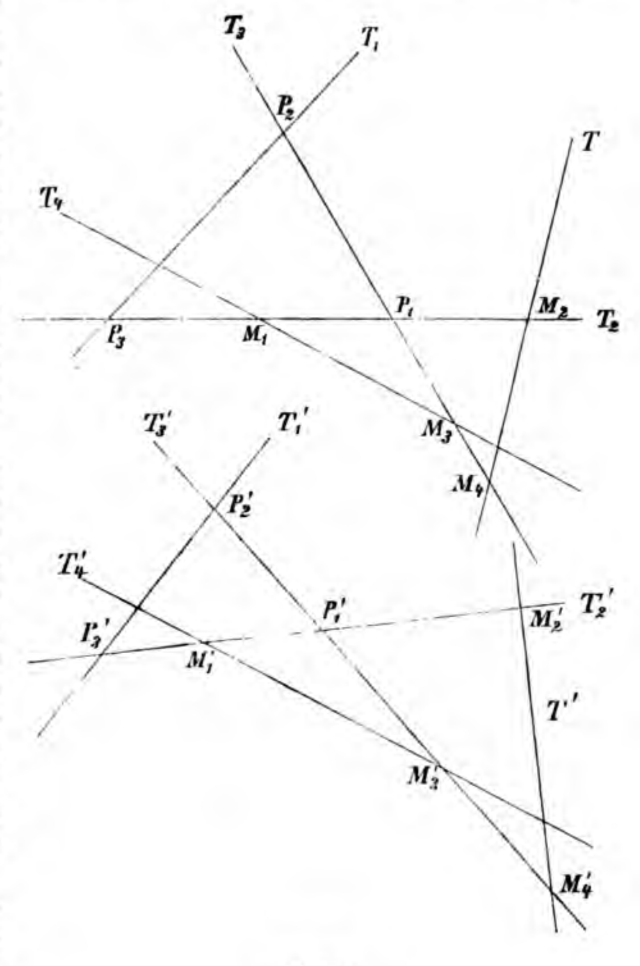
$$(P_1' P_2' M_3' M_4') = (P_1 P_2 M_3 M_4) .$$

Alsdann ist die Gerade $M_2' M_4'$ die gesuchte Gerade T'.

7. Für jeden Punkt der Geraden $H_3 = 0$, bez. $H_3' = 0$ werden die Coordinaten des entsprechenden Punktes unendlich gross; und umgekehrt: einem

*) d. i. das Doppelverhältniss der Strahlen, die P_1' mit P_2', P_3' P_4' P' verbinden.

unendlich entfernten Punkte jedes Systems Σ und Σ' entspricht im andern Systeme ein Punkt der Geraden $H_3' = 0$ bez. $H_3 = 0$. Die Punkte eines ebenen Systems, welche den unendlich fernen Punkten eines projectiven Systems entsprechen, liegen daher auf einer Geraden. Diese Gerade heisst die Gegenachse des Systems. Die Gegenachsen der Systeme Σ und Σ' mögen mit G und G_1 bezeichnet werden.



(M. 465.)

Einem Büschel paralleler Geraden des einen Systems entspricht im andern Systeme ein Strahlbüschel, dessen Träger auf der Gegenachse dieses Systems liegt. Den Geraden eines Systems, die zur Gegenachse dieses Systems parallel sind, entsprechen im andern Systeme Parallele zur Gegenachse dieses Systems.

Bei zwei entsprechenden Parallelen zu den Gegenachsen entsprechen sich die unendlich fernen Punkte; entsprechende Parallelen zu den Gegenachsen enthalten daher ähnliche Punktreihen.

Das Verhältniss entsprechender Strecken auf zwei entsprechenden Parallelen zu den Gegenachsen ergiebt sich in folgender Weise: Liegen P_1 und P_2 auf einer Parallelen zu G, so ist

1. $$A_3x_1 + B_3y_1 + C_3 = A_3x_2 + B_3y_2 + C_3 = \sqrt{A_3^2 + B_3^2}\cdot p,$$

wenn p den Abstand der Geraden P_1P_2 und G bezeichnet. Aus 1. folgt

2. $$A_3(x_2 - x_1) + B_3(y_2 - y_1) = 0;$$

daher ist weiter

3. $$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + \frac{A_3^2}{B_3^2}(x_2 - x_1)^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 \cdot \frac{A_3^2 + B_3^2}{B_3^2}. \end{aligned}$$

Die Coordinaten der entsprechenden Punkte ergeben sich aus den Formeln

$$x_1' = H_{11} : \sqrt{A_3^2 + B_3^2}\cdot p, \quad y_1' = H_{21} : \sqrt{A_3^2 + B_3^2}\cdot p,$$
$$x_2' = H_{12} : \sqrt{A_3^2 + B_3^2}\cdot p, \quad y_2' = H_{22} : \sqrt{A_3^2 + B_3^2}\cdot p.$$

Hieraus folgt

4.
$$x_2' - x_1' = \frac{1}{\sqrt{A_3^2 + B_3^2} \cdot p} \cdot [A_1 (x_2 - x_1) + B_1 (y_2 - y_1)],$$
$$y_2' - y_1' = \frac{1}{\sqrt{A_3^2 + B_3^2} \cdot p} \cdot [A_2 (x_2 - x_1) + B_2 (y_2 - y_1)].$$

In Rücksicht auf 2. folgt weiter
$$x_2' - x_1' = \frac{1}{B_3\sqrt{A_3^2 + B_3^2} \cdot p} (A_1 B_3 - A_3 B_1)(x_2 - x_1),$$
$$y_2' - y_1' = \frac{1}{B_3\sqrt{A_3^2 + B_3^2} \cdot p} (A_2 B_3 - A_3 B_2)(x_2 - x_1).$$

Ersetzt man $(A_1 B_3 - A_3 B_1)$ und $(A_2 B_3 - A_3 B_2)$ nach No. 4 durch $-\mathrm{B}_3$ und A_3, so erhält man

5.
$$P_1' P_2' = \frac{\mathrm{A}_3^2 + \mathrm{B}_3^2}{B_3^2 (A_3^2 + B_3^2) \cdot p^2} (x_2 - x_1)^2,$$

und schliesslich durch Vergleich mit 3.

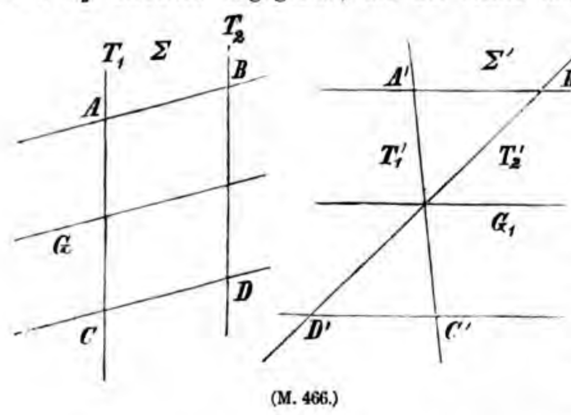
6.
$$\frac{P_1 P_2}{P_1' P_2'} = \frac{A_3^2 + B_3^2}{\sqrt{\mathrm{A}_3^2 + \mathrm{B}_3^2}} \cdot p.$$

In gleicher Weise erhält man für dasselbe Verhältniss

7.
$$\frac{P_1 P_2}{P_2' P_2'} = \frac{\sqrt{A_3^2 + B_3^2}}{\mathrm{A}_3^2 + \mathrm{B}_3^2} \cdot \frac{1}{p'},$$

wenn mit p' der Abstand der Geraden $P_1' P_2'$ und G_1 bezeichnet wird.

Durchschneidet man die Parallelen zur Gegenachse G des Systems Σ durch zwei Parallelen T_1 und T_2 und sucht die entsprechenden Geraden T_1' und T_2' in Σ' auf, so schneiden sich dieselben in einem Punkte der Gegenachse G_1. Auf den Parallelen zu G_1 werden von den Geraden T_1' und T_2' Strecken abgegrenzt, die der Reihe nach den unter sich gleichen und gleich gerichteten Strecken entsprechen, welche von T_1 und T_2 auf den Parallelen zu G ausgeschnitten werden. Setzt man nun in jeder der beiden Ebenen auf Parallelen positive Strecken als gleichgerichtet voraus, und sind die entsprechenden Strecken AB und $A'B'$ beide positiv, so sind CD und $C'D'$ von ungleichen Vorzeichen. Wir schliessen daher: Für



(M. 466.)

Strecken auf zwei Parallelen zu den Gegenachsen sind die Verhältnisse zu den entsprechenden Strecken von gleichen oder ungleichen Zeichen, je nachdem die Parallelen auf derselben Seite der Gegenachse des Systems liegen oder nicht.

8. Ist $p = \pm \frac{\sqrt{\mathrm{A}_3^2 + \mathrm{B}_3^2}}{A_3^2 + B_3^2}$, und mithin $p' = \pm \frac{\sqrt{A_3^2 + B_3^2}}{\mathrm{A}_3^2 + \mathrm{B}_3^2}$, so hat das Verhältniss der durch diese Bedingung bestimmten beiden Paare entsprechender Parallelen zu den Gegenachsen den numerischen Werth 1, ein Paar dieser Parallelen sind daher gleichsinnig, das andere Paar ungleichsinnig congruent.

In zwei projectiven ebenen Systemen giebt es also ein Paar gleichsinnig congruente und ein Paar ungleichsinnig congruente Gerade. Die beiden Geraden jedes Systems, denen congruente Gerade im andern Systeme entsprechen, sind symmetrisch zu der Gegenachse des Systems.

9. Wenn bei zwei auf einander liegenden projectiven Strahlbüscheln zwei entsprechende Strahlen zusammenliegen, so haben die beiden Büschel noch ein paar zusammenfallende entsprechende Strahlen; denn die Doppelstrahlen zweier auf einander liegenden Büschel sind beide real oder beide imaginär. Da man nun zwei projective Büschel auf zweierlei Weise so auf einander legen kann, dass sie denselben Träger haben und dass ein bestimmtes Paar entsprechender Strahlen zusammenfallen, so folgt: Jeder Strahl in einem von zwei projectiven Büscheln ist Schenkel zweier Winkel, die den entsprechenden Winkeln dem absoluten Werthe nach gleich sind; zwei dieser entsprechenden Winkel sind gleich, die andern beiden sind entgegengesetzt gleich. Ebenso findet man, dass bei zwei projectiven geradlinigen Punktreihen an jedem Punkte der einen Reihe zwei Strecken liegen, die den entsprechenden Strecken dem absoluten Werthe nach gleich sind; zwei dieser sich entsprechenden Strecken sind gleich, die andern beiden sind entgegengesetzt gleich.

10. Sind Γ und Γ' die entsprechenden congruenten Geraden, die sich ohne vorherige Umwendung der einen Ebene zur Deckung bringen lassen, sowie Γ_1 und Γ_1' das andere Paar entsprechende congruente Gerade, so lege man die Ebene Σ' so auf Σ, dass die entsprechenden Punkte von Γ und Γ' sich decken; alsdann komme Γ_1' in die Lage $[\Gamma_1']$.

Die beiden in A vereinten projectiven Strahlbüschel haben einen entsprechenden Strahl Γ gemein, also deckt sich noch ein Paar entsprechende durch A gehende Gerade; dies seien die mit AM' zusammenfallenden Geraden beider Systeme. Ebenso schliesst man, dass ausser Γ und Γ' noch zwei durch einen andern Punkt von Γ, durch B, gehende entsprechende Gerade sich decken; dies seien die mit BN' zusammenfallenden Geraden.

(M. 467.)

Dem Schnittpunkte Δ dieser beiden Geraden, als Punkt des Systems Σ gedacht, entspricht in Σ' ein Punkt, der sowol auf BN' als auch auf AM' liegt, also entspricht Δ sich selbst.

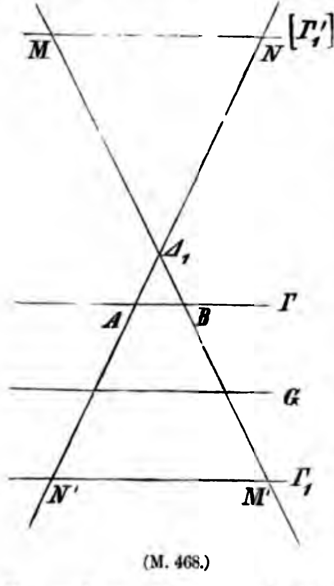
Daher entspricht auch jede Gerade sich selbst, die durch Δ geht; denn jede solche Gerade geht von dem selbstentsprechenden Punkte Δ nach einem selbstentsprechenden Punkte auf Γ. Es decken sich folglich zwei entsprechende Strahlenbüschel beider Systeme und ihr gemeinsamer Träger ist Δ.

Da nun von den Strahlen durch Δ entsprechende Gerade in entsprechenden Punkten geschnitten werden, so folgt, dass $MN = M'N'$; folglich sind die Dreiecke $MN\Delta$ und $M'N'\Delta$ congruent, und Δ auf der Mittellinie des Streifens $'_1\ [\Gamma_1']$ gelegen.

Dreht man hierauf die Ebene Σ' um die Achse Γ um einen gestreckten

Winkel, so liegen nach der Drehung die Ebenen wieder auf einander; Γ_1' liegt auf $[\Gamma_1']$ (Fig. 468).

Wir schliessen wie vorhin, dass von den in zwei Punkten A und B der Geraden Γ zusammenliegenden projectiven Strahlbüscheln der beiden Systeme ausser den Strahlen Γ und Γ' noch ein Paar Strahlen sich decken; diese seien bei den in A vereinten Strahlenbüscheln die mit AN' zusammenfallenden Geraden, und bei den in B vereinten die mit BM' zusammenfallenden. Hieraus schliesst man, dass der Schnittpunkt dieser beiden Geraden Δ_1 sich selbst entspricht, und dass er der Träger eines Büschels von selbstentsprechenden Geraden ist. Dies ergiebt weiter die Gleichheit der Strecken MN und $M'N'$, und daher die Thatsache, dass Δ_1 auf der Mittellinie des Streifens $\Gamma_1[\Gamma_1']$ liegt.



(M. 468.)

Trennt man die beiden Systeme, indem man Σ' in eine beliebige Lage bringt, und rechnet in beiden Systemen positive Winkel in derselben Drehrichtung, so trennen sich die in Δ bez. Δ_1 vereinten Strahlbüschel und treten in den beiden Systemen als congruente entsprechende Büschel auf; und zwar die vorher in Δ vereinten als gleichsinnig congruente, die andern als ungleichsinnig congruente. Wir schliessen daher: Zwei projective ebene Systeme enthalten zwei gleichsinnig congruente und zwei ungleichsinnig congruente Strahlbüschel; der Abstand der Träger dieser Büschel von der Gegenachse eines Systems ist gleich dem Abstande der congruenten Geraden des andern Systems von der Gegenachse dieses Systems.

Man kann das Ergebniss dieser Untersuchung auch in folgenden Satz zusammenfassen: Zwei projective ebene Systeme lassen sich in zweifacher Weise so zusammenlegen, dass sie perspectiv sind, d. i. so, dass die Verbindungsgeraden je zweier entsprechenden Punkte durch einen Punkt (Δ oder Δ_1) gehen, und dass die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Geraden auf einer Geraden (Γ oder Γ_1) liegen.

11. Das Verhältniss der entsprechenden Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $P_1'P_2'P_3'$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix}$$

ergiebt sich, wenn man $x_i'y_i'$ durch x_iy_i ersetzt (No. 4, 1).

Man erhält

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{H_{31}H_{32}H_{33}} \begin{vmatrix} H_{11} & H_{21} & H_{31} \\ H_{12} & H_{22} & H_{32} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} \end{vmatrix}.$$

Nun ist, wie man sofort sieht, wenn man für H_{ik} die ausführlichen Ausdrücke einsetzt

$$\begin{vmatrix} H_{11} & H_{21} & H_{31} \\ H_{12} & H_{22} & H_{32} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Setzt man

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = R,$$

so erhält man für das gewünschte Verhältniss

$$\frac{P_1 P_2 P_3}{P_1' P_2' P_3'} = \frac{H_{31} H_{32} H_{33}}{R}.$$

In gleicher Weise kann man ableiten

$$\frac{P_1 P_2 P_3}{P_1' P_2' P_3'} = \frac{R'}{H_{31}' H_{32}' H_{33}'},$$

wenn R' die Determinante bedeutet

$$R' = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{B}_1 & \Gamma_1 \\ \mathrm{A}_2 & \mathrm{B}_2 & \Gamma_2 \\ \mathrm{A}_3 & \mathrm{B}_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Liegen P_2 und P_3 unendlich nahe an P_1, so sind die Dreiecke $P_1 P_2 P_3$ und $P_1' P_2' P_3'$ verschwindend klein, und die Ausdrücke H_{31}, H_{32}, H_{33} einander gleich. Für das Verhältniss verschwindend kleiner an den entsprechenden Punkten P_1 und P_1' gelegener entsprechenden Flächen f und f' hat man also

$$\frac{f}{f'} = \frac{H_{31}^3}{R}.$$

12. Wir wollen noch mit einigen Worten auf eine Abart der projectiven Verwandtschaft hinweisen.

Wenn $A_3 = B_3 = 0$, so ist auch $\mathrm{A}_3 = \mathrm{B}_3 = 0$ und die Functionen H_3 und H_3' reduciren sich auf die Constanten C_3 und Γ_3. Wenn man sie noch als lineare Functionen von x und y, bez. von x' und y' betrachten will, so muss man sie als solche Functionen betrachten, in denen die Coefficienten der Coordinaten verschwindend klein sind. Den Gleichungen

$$H_3 = 0 \quad \text{und} \quad H_3' = 0$$

kann dann nur durch unendlich grosse Werthe der Coordinaten genügt werden, und wir schliessen daher: In diesem besonderen Falle der projectiven Verwandtschaft sind die Gegenachsen unendlich fern. Man bezeichnet diese Art der Verwandtschaft als Affinität. Das Verhältniss entsprechender Flächen wird in affinen Systemen

$$\frac{P_1 P_2 P_3}{P_1' P_2' P_3'} = \frac{C_3^3}{R},$$

also unabhängig von der Lage der Punkte $P_1 P_2 P_3$. Wir haben daher den Satz, der die charakteristische Eigenschaft affiner Systeme ausspricht: In affinen Systemen ist das Verhältniss entsprechender Flächen constant.

Da in affinen Systemen einem unendlich fernen Punkte in Σ ein unendlich ferner in Σ' entspricht, so folgt weiter: Je zwei entsprechende Gerade in affinen Systemen enthalten ähnliche Punktreihen.

13. Die Gleichungen entsprechender Punkte zweier projectiven Systeme No. 5, 7 beziehen sich auf Coordinatensysteme in den Ebenen Σ und Σ'; durch die Coefficienten $\lambda_1 a_1$, $\lambda_2 a_2$, $\lambda_3 a_3$ . . . werden Beziehungen ausgedrückt, die von jeder Coordinatenbestimmung unabhängig sind, diese Gleichungen gelten auch, wenn die Punkte von Σ und Σ' auf räumliche Coordinatensysteme bezogen werden. Wir wollen für die folgende Untersuchung voraussetzen, dass sie auf ein Coordinatentetraëder bezogen sind.

Aus den Functionen P_1, P_2, P_3 . . . und aus einer willkürlich gewählten linearen Function in Ebenencoordinaten Π bilden wir die Functionen

$$P_1' = P_1 + \delta_1 \Pi, \quad P_2' = P_2 + \delta_2 \Pi, \quad P_3' = P_3 + \delta_3 \Pi.$$

Durch die drei Punkte $P_1' = 0$, $P_2' = 0$, $P_3' = 0$ ist eine Ebene Σ_1 bestimmt, und P_1', P_2', P_3' sind die Projectionen von P_1, P_2, P_3 auf diese Ebene, von dem Centrum Π aus projicirt. Die Identität

$$P_4' \equiv a_1 P_1' + a_2 P_2' + a_3 P_3' \equiv a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + (a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + a_3\delta_3)\Pi = 0$$

zeigt, dass P_3' die Projection des Punktes

$$P_4 \equiv a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 = 0$$

auf die Ebene Σ_1 ist; denn aus

$$P_4' \equiv a_1 P_1' + a_2 P_2' + a_3 P_3'$$

erkennt man, dass P_4' mit P_1', P_2', P_3' auf derselben Ebene liegt, und aus

$$P_4' \equiv a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + (a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + a_3\delta_3)\Pi,$$

dass P_4' auf der Geraden $P_4\Pi$ liegt.

In gleicher Weise ist ersichtlich, dass

$$\begin{aligned} 1.\quad P' &\equiv \lambda_1 a_1 P_1' + \lambda_2 a_2 P_2' + \lambda_3 a_3 P_3' \\ &\equiv \lambda_1 a_1 P_1 + \lambda_2 a_2 P_2 + \lambda_3 a_3 P_3 + (\lambda_1 a_1\delta_1 + \lambda_2 a_2\delta_2 + \lambda_3 a_3\delta_3)\Pi = 0 \end{aligned}$$

die Projection des Punktes

$$2.\quad P \equiv \lambda_1 a_1 P_1 + \lambda_2 a_2 P_2 + \lambda_3 a_3 P_3 = 0$$

auf die Ebene Σ_1 ist.

Aus den Formeln 1. und 2. folgt sofort der Satz: Die Centralprojection eines ebenen Systems Σ auf eine andere Ebene ist dem Systeme Σ projectiv. Hier ist die Parallelprojection mit inbegriffen, da sie als Centralprojection mit unendlich fernem Centrum zu betrachten ist, und da die Schlüsse sich nicht ändern, wenn $\Pi = 0$ die Gleichung eines unendlich fernen Punktes ist.

In der Schnittlinie α der Ebenen Σ und Σ_1 sind zwei congruente Gerade der projectiven Systeme so vereint, dass die entsprechenden Punkte sich decken. Legt man durch Π eine Gerade β parallel zu α, und durch β eine Ebene T so, dass der zwischen Σ und Σ_1 enthaltene Streifen der Ebene T von der Geraden β halbirt wird, so sind die Ränder dieses Streifens das andere Paar congruenter Geraden von Σ und Σ_1. Die Scheitel der beiden Paare congruenter Büschel liegen in der Symmetrieebene der ganzen Figur, d. i. in der durch Π gehenden Normalebene zu α. Die Ebenen, welche durch β parallel zu Σ_1 und Σ gelegt werden, schneiden Σ und Σ_1 in den Gegenachsen beider Systeme.

14. Zwei projective ebene Systeme Σ und Σ' lassen sich immer so legen, dass das eine eine Centralprojection des andern ist.

Man lege Σ' so gegen Σ, dass in der Schnittlinie beider Ebenen zwei congruente Gerade Γ und Γ' mit den entsprechenden Punkten sich decken, und verbinde zwei Paar entsprechende Punkte A und A', B und B', der beiden andern congruenten Geraden; da diese Γ parallel sind, so liegen sie auf einer Ebene, und die Geraden AA' und BB' haben einen Schnittpunkt Π. Verbindet man Π mit zwei auf Γ liegenden Punkten C und D, und projicirt nun von Π aus das System Σ auf die Ebene Σ', so bildet die Projection ein ebenes System Σ_1, das mit Σ, also auch mit Σ' projectiv ist.

Die beiden auf derselben Ebene liegenden projectiven Systeme Σ' und Σ_1 haben vier entsprechende Punkte gemein A', B', C und D, von denen nicht drei in einer Geraden liegen; folglich sind sie identisch; Σ' ist also selbst die Centralprojection von Σ.

15. Die Gesammtheit aller Strahlen, die durch einen Punkt gehen, wird als Strahlbündel bezeichnet. Sowie man das Ebenenbündel als Gesammtheit der Ebenen sich vorstellen kann, welche die Geraden einer Ebene von dem

Träger des Bündels aus projiciren, so kann man sich ein Strahlbündel als den Verein aller der Strahlen vorstellen, durch welche die Punkte einer Ebene vom Träger des Bündels aus projicirt werden.

Bei den vorliegenden Betrachtungen haben wir die Vorstellung einer mit Punkten bedeckten Ebene (ebenes Punktsystem) mit der Vorstellung der mit Geraden bedeckten Ebene (ebenes Geradensystem) vereinigt; ebenso wollen wir auch das Strahlbündel und das Ebenenbündel immer vereint vorstellen; man kann sich dann entweder der einen oder der andern Bezeichnung bedienen, je nachdem man andeuten will, dass man bei einem ebenen Querschnitte der Figur zunächst die Schnittpunkte der Strahlen, oder die Schnittgeraden der Ebenen beachten soll.

Man kann ein ebenes System Σ und ein Strahlbündel, durch welches Σ projicirt wird, in Beziehung setzen, indem man jedem Punkte auf Σ den projicirenden Strahl, jeder Geraden auf Σ die projicirende Ebene zuordnet.

Strahlbündel, welche projective ebene Systeme projiciren, werden als **projective Strahlbündel** bezeichnet, und zwar entsprechen sich darin die Strahlen, welche entsprechende Punkte, sowie die Ebenen, welche entsprechende Gerade projiciren.

In zwei projectiven Strahlbündeln entspricht jedem ebenen Strahlbüschel des einen Systems ein projectives ebenes Strahlbüschel des andern; jedem Ebenenbüschel des einen ein projectives Ebenenbüschel des andern.

Ebene Querschnitte projectiver Strahlbündel sind projectiv. Entsprechen den vier Ebenen

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0, \quad T_4 \equiv a_1 T_1 + a_2 T_2 + a_3 T_3 = 0$$

eines Ebenenbündels die Ebenen

$$T_1' = 0, \quad T_2' = 0, \quad T_3' = 0, \quad T_4' \equiv b_1 T_1' + b_2 T_2' + b_3 T_3' = 0$$

eines projectiven Ebenenbündels, so sind die Gleichungen je zweier entsprechenden Ebenen beider Bündel

$$T \equiv \lambda_1 a_1 T_1 + \lambda_2 a_2 T_2 + \lambda_3 a_3 T_3 = 0, \quad T' \equiv \lambda_1 b_1 T_1' + \lambda_2 b_2 T_2' + \lambda_3 b_3 T_3' = 0.$$

Denn setzt man in diesen Gleichungen z. B. $z = 0$, so erhält man die Gleichungen der Geraden der Querschnitte beider Büschel mit der XY-Ebene, und erkennt sofort, dass beide Querschnitte projectiv sind.

Entsprechend den congruenten Geraden und den congruenten Strahlbüscheln ebener projectiver Systeme giebt es in zwei projectiven Strahlbündeln zwei Paar entsprechende congruente ebene Strahlbüschel und zwei Paar entsprechende congruente Ebenenbüschel; wir müssen uns indessen versagen, hierauf näher einzugehen.*)

16. **Doppelelemente auf einander liegender projectiver Ebenen.** Werden zwei auf einander liegende ebene Systeme auf dasselbe Coordinatensystem bezogen, so fällt ein Punkt P mit seinem entsprechenden P' zusammen, wenn man λ so wählt, dass die Gleichungen zusammen bestehen

$$1. \quad \begin{aligned} \frac{\lambda_1 a_1 x_1 + \lambda_2 a_2 x_2 + \lambda_3 a_3 x_3}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3} &= \frac{\lambda_1 b_1 x_1' + \lambda_2 b_2 x_2' + \lambda_3 b_3 x_3'}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3}, \\ \frac{\lambda_1 a_1 y_1 + \lambda_2 a_2 y_2 + \lambda_3 a_3 y_3}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3} &= \frac{\lambda_1 b_1 y_1' + \lambda_2 b_2 y_2' + \lambda_3 b_3 y_3'}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3}, \end{aligned}$$

Setzt man abkürzungsweise

*) Vergl. u. A. des Verfassers Schrift: Elemente der analytischen Geometrie in homogenen Coordinaten. Braunschweig 1872, pag. 219.

$$\sigma = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3, \quad \tau = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3,$$

so erhält man aus 1. die Gleichungen

$$2. \quad \begin{aligned} (\lambda_1 a_1 x_1 + \lambda_2 a_2 x_2 + \lambda_3 a_3 x_3)\,\tau &= (\lambda_1 b_1 x_1' + \lambda_2 b_2 x_2' + \lambda_3 b_3 x_3')\,\sigma, \\ (\lambda_1 a_1 y_1 + \lambda_2 a_2 y_2 + \lambda_3 a_3 y_3)\,\tau &= (\lambda_1 b_1 y_1' + \lambda_2 b_2 y_2' + \lambda_3 b_3 y_3')\,\sigma. \end{aligned}$$

Dies sind zwei quadratische Gleichungen für die maassgebenden Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_3$ und $\lambda_2 : \lambda_3$. Denselben wird durch die Verhältnisse der λ genügt, welche sich aus den beiden Gleichungen bestimmen $\tau = 0$, $\sigma = 0$. Diese Gleichungen sind linear, haben also ein reales System von Lösungen; durch diese Lösung werden aber keine Doppelpunkte der beiden ebenen Systeme bestimmt, sondern die einander entsprechenden unendlich fernen Punkte beider Systeme, die im Allgemeinen nicht zusammenfallen.

Die übrigen drei Lösungen des Systems 2. führen auf Doppelpunkte. Von diesen Lösungen ist eine wenigstens real. Die beiden andern sind entweder real oder conjugirt complex.

Im letzteren Falle sind auch die Coordinaten der ihnen zugehörigen Doppelpunkte conjugirt complex, und daher die Gerade real, auf der sie liegen. Diese Gerade ist, da sie zwei Doppelpunkte enthält, eine Doppelgerade, d. i. auf ihr liegen zwei entsprechende Gerade beider Systeme. Der reale Doppelpunkt ist Träger zweier auf einander liegenden entsprechenden Strahlbüschel; diese haben zwei Doppelstrahlen, die nicht real sein können, weil sonst ihre Schnittpunkte mit der realen Doppelgeraden reale Doppelpunkte wären, entgegen der Voraussetzung, dass nur ein realer Doppelpunkt vorhanden ist.

Wenn drei reale Doppelpunkte vorhanden sind, so sind die Seiten des von denselben gebildeten Dreiecks Doppelgeraden.

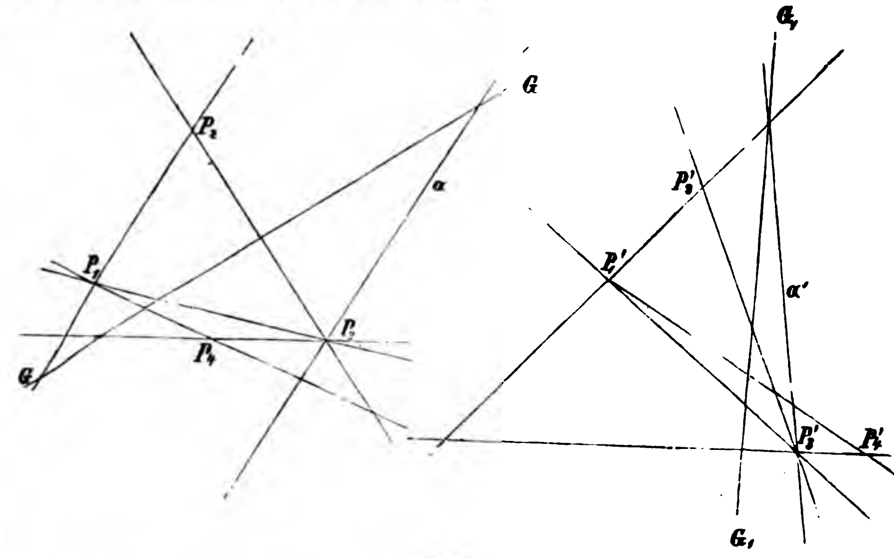
Wir schliessen daher: Zwei auf derselben Ebene liegende ebene Systeme haben drei Doppelpunkte und drei Doppelgerade; auf jeder Doppelgeraden liegen zwei Doppelpunkte, durch jeden Doppelpunkt gehen zwei Doppelgerade. Von diesen Doppelelementen sind entweder alle real, oder es ist eine Ecke des von ihnen gebildeten Doppeldreiecks und die gegenüberliegende Seite real, während die beiden andern Seiten und Ecken conjugirt complex sind.

In besonderen Fällen können auch mehr als drei Doppelpunkte und Doppelgerade vorhanden sein. Wenn vier Doppelpunkte vorhanden sind, von denen nicht drei auf einer Geraden liegen, so sind die beiden Systeme identisch; alle Punkte sind alsdann Doppelpunkte, alle Geraden sind Doppelgerade. Wenn drei Doppelpunkte auf einer Geraden liegen, so ist diese Gerade Doppelgerade und auf ihr fallen zwei entsprechende congruente Gerade mit den entsprechenden Punkten zusammen. Alsdann giebt es noch ausserdem einen realen Doppelpunkt (Δ oder Δ_1) und noch ein Büschel von Doppelstrahlen, (dessen Träger Δ oder Δ_1 ist).

17. Constructionen an projectiven ebenen Systemen. Sind von zwei projectiven Systemen Σ und Σ' vier Paar entsprechende Punkte $P_1 P_2 P_3 P_4$ und $P_1' P_2' P_3' P_4'$ gegeben, so sind sechs Paar entsprechende Gerade bekannt, nämlich die Seiten der beiden vollständigen Vierecke $P_1 P_2 P_3 P_4$ und $P_1' P_2' P_3' P_4'$; auf jedem Paare dieser Seiten sind drei Paar entsprechende Punkte bekannt.

Bestimmt man die Gegenpunkte auf zwei Paar entsprechenden Geraden, und verbindet dieselben, so erhält man die Gegenachsen G und G_1 der beiden Systeme.

Der Geraden α, welche durch P_3 parallel zu $P_1 P_2$ gelegt wird, entspricht die Gerade α', welche P_3' mit dem Gegenpunkte auf $P_1' P_2'$ verbindet.



(M. 469.)

Die beiden Geraden, welche parallel zu G_1 sind, und auf denen von $P_1' P_2'$ und α' Strecken abgeschnitten werden, welche der auf G von $P_1 P_2$ und α abgeschnittenen Strecke gleich sind, sind die Geraden Γ' und Γ_1', denen in Σ congruente Gerade Γ und Γ_1 entsprechen.

Dem von $P_1' P_2'$ und α' bestimmten Strahlbüschel entspricht das Parallelstrahlenbüschel, zu welchem $P_1 P_2$ und α gehören. Die beiden Strahlen des Büschels ($P_1' P_2'$, α'), deren Winkel mit G_1 gleich den Winkeln der Geraden α und G sind, enthalten die Punkte Δ' und Δ_1'; die entsprechenden Strahlen in Σ enthalten die Punkte Δ und Δ_1; man erhält die Träger Δ, Δ_1, Δ', Δ_1', der congruenten Büschel, indem man auf diese beiden Paaren entsprechender Strahlen die Punkte bestimmt, deren Abstände von G und G_1 gleich dem Abstande der Geraden Γ' von G_1 bez. der Geraden Γ von G sind.

Die entsprechenden Strahlen zweier entsprechenden Strahlbüschel in zwei auf einander liegenden projectiven Systemen schneiden sich auf Punkten eines Kegelschnitts, der durch die Doppelpunkte der beiden Systeme geht; denn zwei Strahlen der beiden Büschel, welche nach demselben Doppelpunkte gehen, sind entsprechende Gerade. Sämmtliche Kegelschnitte, die durch die Paare entsprechender Strahlbüschel erzeugt werden, haben also die drei Doppelpunkte gemein. Zwei von diesen Kegelschnitten, welche durch die in A und A', bez. durch die in B und B' liegenden entsprechenden Strahlenbüschel erzeugt werden, haben ausser den Doppelpunkten noch den immer realen Punkt gemein, in welchem sich die Geraden AB und $A'B'$ schneiden; denn AB und $A'B'$ sind entsprechend in beiden Paaren von entsprechenden Strahlbüscheln. Die Construction der Doppelpunkte und Doppelgeraden zweier auf einander liegenden ebenen Systeme ist somit auf die Fundamentalaufgabe für Constructionen dritten und vierten Grades zurückgeführt: Die Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte zu finden, von denen ein Schnittpunkt bekannt ist.

§ 15. Raumcurven dritter Ordnung und abwickelbare Flächen dritter Klasse.

1. Als Raumcurve III. O. (R_3) definiren wir die Raumcurve, in welcher sich zwei Flächen II. O. durchdringen, die eine gerade Linie gemein haben.

Diese Gerade bildet mit R_3 zusammen den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen II. O., also eine Raumcurve IV. O. 1. Sp. Da nun eine solche Raumcurve mit jeder Ebene vier Punkte gemein hat, so folgt, dass eine Raumcurve III. O. von jeder Ebene in drei Punkten geschnitten wird, von denen wenigstens einer real ist.

2. Ist α eine Gerade, die mit R_3 zusammen den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen II. O. bildet, so lege man durch α und R_3 zwei Flächen II. O. F_1 und F_2. Die durch α gelegten Ebenen schneiden F_1 und F_2 in den Geraden des Systems, zu welchem α nicht gehört. Projicirt man diese Geraden auf F_1, bez. auf F_2 von einer Geraden α' auf F_1, bez. von einer Geraden α'' auf F_2 aus, die mit α zu demselben Systeme gehören, so erhält man drei projective Ebenenbüschel, deren Träger die Geraden α, α', α'' sind. Das erste und zweite Büschel erzeugen F_1, das erste und dritte erzeugen F_2. In jedem Punkte von R_3 treffen sich drei entsprechende Ebenen der drei Büschel.

Umgekehrt: Sind α, α', α'' die Träger dreier projectiven Ebenenbüschel, so erzeugen die Büschel α und α' eine Fläche II. O. F_1, α und α'' eine Fläche II. O. F_2; F_1 und F_2 enthalten beide die Gerade α, schneiden sich also ausserdem noch in einer R_3, in deren Punkten je drei entsprechende Ebenen der drei Büschel zusammentreffen.

Wir schliessen daher: Der Ort der Schnittpunkte entsprechender dreier projectiven Ebenenbüschel ist eine Raumcurve III. O. Jeder der drei Träger dieser Büschel bildet mit R_3 zusammen den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen II. O.

3. Die Büschel α' und α'' erzeugen eine Fläche II. O., welche die Gerade α zweimal schneidet. Construirt man zu den beiden entsprechenden Ebenen der Büschel α' und α'', welche nach einem solchen Schnittpunkte gehen, die entsprechende Ebene durch α, so erkennt man, dass in jedem dieser zwei Schnittpunkte drei entsprechende Ebenen der drei Büschel sich treffen. Wir sehen daraus: Jede Gerade α, welche mit einer R_3 zusammen den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen II. O. bildet, trifft R_3 in zwei realen oder conjugirt complexen Punkten. Man nennt diese Geraden daher Secanten der R_3.

4. Durch einen Punkt des Raumes, der nicht auf R_3 liegt, geht nur eine Secante einer R_3, d. i. nur eine Gerade, die R_3 in zwei realen oder conjugirt complexen Punkten trifft. Denn wären durch P zwei Secanten möglich, so hätte die Ebene dieser Secanten vier Schnittpunkte mit R_3, im Widerspruche mit No. 1.

Jede Secante von R_3 bildet mit R_3 den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen II. O. Denn wenn α' Secante von R_3 ist, so lege man durch α, R_3 und einen Punkt P auf α', der nicht auf R_3 liegt, die hierdurch eindeutig bestimmte Fläche II. O. F_1. Diese Fläche enthält α', da sie von α' den Punkt P, sowie die beiden Schnittpunkte mit R_3 enthält. Das Ebenenbüschel α und ein dazu projectives α' projiciren die Geraden auf F_1, die α' schneiden; das Büschel α und ein dazu projectives, dessen Träger α'' auf F_2 liegt und α nicht schneidet,

projiciren die α und α'' schneidenden Geraden auf F_2. Entsprechende Ebenen der drei Büschel α, α' und α'' gehen daher durch gemeinsame Punkte von F_1 und F_2, mit Ausnahme der Punkte auf α; denn ist A auf α gelegen, so entsprechen den Ebenen $A\alpha'$ und $A\alpha''$ im Allgemeinen zwei verschiedene Ebenen des Büschels α. Die Büschel α' und α'' erzeugen eine Fläche II. O., die R_3 und α' enthält, also bilden R_3 und α' den vollständigen Durchschnitt diese Fläche und der Fläche F_1.

5. Sind F_1, F_2, F_3 drei Flächen II. O., die R_3 enthalten und nicht zu demselben Büschel gehören (z. B. die Flächen F_1 und F_2 aus No. 1, und die durch die projectiven Büschel α' und α'' erzeugte Fläche), so ist die Gleichung jeder Fläche II. O., welche R_3 enthält, von der Form

1. $$F = \mu_1 F_1 + \mu_2 F_2 + \mu_3 F_3 = 0.$$

Denn sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte des Raumes, so geht durch jeden eine Secante der R_3; durch diese Secanten und durch R_3 ist eine Fläche II. O. eindeutig bestimmt; also ist durch R_3 und zwei beliebige Punkte ausserhalb R_3 eine Fläche II. O. eindeutig bestimmt. Sind nun F_{1i}, F_{2i}, F_{3i} die Werthe, welche die Functionen F_1, F_2, F_3 für die Coordinaten von P_i annehmen, so enthält die Fläche II. O.

2. $$F = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} \end{vmatrix} = 0$$

die Punkte P_1 und P_2, sowie alle gemeinsamen Punkte von F_1, F_2 und F_3, also die R_3, und ist von der Form 1.

6. Durch einen Punkt P auf R_3 gehen unzählige Secanten der R_3; durch zwei derselben α und α' und durch die R_3 ist eine Fläche II. O. f bestimmt.

Die Fläche f ist ein Kegel; denn wäre f kein Kegel, so würde $\alpha\alpha'$ Tangentenebene von f, folglich die Tangente der Raumcurve in P auf $\alpha\alpha'$ gelegen sein; dies ist aber für keinen Punkt der Raumcurve der Fall, da sonst die Ebene $\alpha\alpha'$ ausser dem Punkte P und den zwei noch auf α und α' gelegenen Curvenpunkten noch den unendlich nahe bei P gelegenen Punkt der Curve mit derselben gemein haben würde. Wir erhalten somit: Eine R_3 wird von jedem ihrer Punkte aus durch einen Kegel II. O. projicirt.

Sind sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 einer R_3 gegeben, so ist damit auch der Kegel II. O. bestimmt, der die R_3 von einem dieser Punkte z. B. von 1 aus projicirt. Denn alsdann sind von diesem Kegel K_1 die fünf Mantellinien bekannt, die 1 mit den andern fünf Punkten verbinden, und durch fünf Mantellinien ist ein Kegel II. O. eindeutig bestimmt. Ebenso ist der Kegel K_2 bestimmt, der R_3 von 2 aus projicirt. Beide Kegel haben ausser der Mantellinie 1 2 eine bestimmte R_3 gemein. Daher schliessen wir: Eine Raumcurve III. O. ist durch sechs Punkte bestimmt. Zugleich ist ersichtlich, wie eine R_3 aus sechs gegebenen Punkten linear construirt werden kann.

7. Legt man eine Ebene T durch eine Secante α (No. 1) einer R_3, so schneidet diese die Fläche F_1 ausser in α noch in einer Geraden β, welche mit α nicht zu demselben Systeme gehört. Auf α liegen zwei Punkte der R_3, welche real oder conjugirt complex sind; folglich liegt auf β der dritte immer reale Schnittpunkt der Ebene T mit der Curve R_3. Wenn alo die Fläche F die Raumcurve R_3 enthält, so haben alle Geraden auf F, die nicht Secanten von R_3 sind, mit R_3 einen realen Punkt gemein.

8. Wenn die Gerade β mit der Raumcurve R_3 nur einen Punkt P gemein hat, so erfüllen alle Secanten von R_3, die β schneiden, eine

Fläche II. O. Legt man durch β eine Ebene, so hat diese mit R_3 ausser P noch zwei Punkte gemein, und die durch diese Punkte bestimmte Secante von R_3 schneidet die Gerade β. Durch zwei solche Secanten α und α' und durch die R_3 ist eine Fläche II. O. bestimmt. Diese Fläche F enthält β ganz, weil drei Punkte von β, nämlich P und die Schnittpunkte von β mit α und α', auf der Fläche liegen; folglich enthält diese Fläche auch alle Secanten der R_3, welche β schneiden.

9. Projicirt man die Secanten von R_3, welche β schneiden, von einem andern Punkte P_1 der R_3 aus, so bilden die projicirenden Ebenen ein Büschel, dessen Träger die Gerade β' der Fläche F ist, die durch P_1 geht und mit β zu demselben Systeme gehört. Die Secanten von R_3, welche β und β' treffen, werden daher von β und β' aus durch zwei projective Ebenenbüschel projicirt.

Jeder Geraden β, die durch P geht, entspricht somit eine bestimmte Gerade β', die durch P_1 geht, und dem Ebenenbüschel, dessen Träger β ist, entspricht ein projectives Ebenenbüschel mit dem Träger β'. Alle Strahlen β, welche auf einer Ebene liegen, werden von der auf dieser Ebene liegenden Secante der R_3 geschnitten; die entsprechenden Strahlen β' liegen auf der Ebene, welche diese Secante von P_1 aus projicirt. Jeder Ebene durch P entspricht daher eine Ebene durch P_1 so, dass beide sich in einer Secante der R_3 schneiden.

Zu einem Strahle β kann daher der entsprechende Strahl β' gefunden werden, wenn man vier Paar entsprechende Strahlen kennt. Wenn nämlich $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ der Reihe nach den durch P_1 gehenden Strahlen $\beta_1', \beta_2', \beta_3', \beta_4'$ entsprechen, so sind durch die drei Paar Ebenen, welche zwei entsprechende Strahlen, z. B. β_1 und β_1' mit den übrigen verbinden, zwei projective Büschel bestimmt; zwei andere projective Büschel werden von den drei Paar Ebenen bestimmt, welche β_2 mit $\beta_1, \beta_3, \beta_4$, und β_2' mit $\beta_1', \beta_3', \beta_4'$ verbinden. Betrachtet man nun einen Strahl β als den Schnitt zweier Ebenen der Büschel mit den Trägern β_1 und β_2 und construirt die entsprechenden Ebenen der projectiven Büschel β_1' und β_2', so ist deren Schnittgerade die gesuchte Gerade β'. Dieselbe Construction haben wir anzuwenden, um bei zwei projectiven Strahlbündeln (§ 14, No. 15 und 6), in denen die Strahlen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ den Strahlen $\beta_1', \beta_2', \beta_3', \beta_4'$, entsprechen, zu einem Strahle β des einen Bündels den entsprechenden des andern zu finden. Wir schliessen daher: Die Secanten einer Raumcurve III. O. werden von je zwei Punkten der Raumcurve aus durch entsprechende Ebenen zweier projectiven Strahlbündel projicirt.

Wenn zwei entsprechende Strahlen β und β' dieser beiden Strahlbündel sich schneiden, so degenerirt die Fläche II. O., welche R_3, β und β' enthält, zu einem Kegel II. O. K, da β und β' Gerade desselben Systems dieser Flächen sind. Da die Ebene der Geraden β und β' ausser diesen beiden Geraden keinen Punkt mit K gemein hat, so liegt der Punkt, den die Ebene ββ' ausser den Punkten P und P_1 noch mit R_3 gemein hat, auf einer der Geraden β oder β'. Da nun ferner jede Secante von R_3, welche β oder β' trifft, auf K liegt, so kann dieser dritte Punkt nur der Schnittpunkt der Geraden β und β' sein. Hieraus folgt: Projicirt man die Secanten einer R_3 von zwei Punkten der Curve aus durch zwei projective Ebenenbündel, so ist die Curve R_3 der Ort der Punkte, in denen sich zwei entsprechende Strahlen beider Bündel schneiden.

10. Die Gleichungen dreier entsprechenden Ebenen zweier projectiven Ebenenbüschel, durch welche eine R_3 erzeugt wird, nehmen eine besonders ein-

fache Gestalt an, wenn man als Träger zweier Büschel zwei Tangenten σ und τ der R_3 und als Träger des dritten die Secante α der R_3 benutzt, welche die Tangentialpunkte A und B der Tangenten σ und τ verbindet.

Sind T_0 und T_3 die Schmiegungsebenen (§ 10, No. 3) in den Punkten A und B, so entspricht die Ebene T_0 des Büschels σ den Ebenen der Büschel α und τ, welche die Curve R_3 in einem dem Punkte A unendlich nahen Punkte treffen; dies ist im Büschel α die Ebene, welche die Tangente σ enthält, denn diese enthält ausser A noch einen unendlich nahe bei A gelegenen Curvenpunkt; und im Büschel τ die Ebene, welche die Gerade α enthält. Es entsprechen sich daher die drei Ebenen

$$T_0 \barwedge \alpha\sigma \barwedge \tau\alpha\,.$$

Die Ebene $\sigma\alpha$ kann als eine Ebene des Büschels σ angesehen werden, welche R_3 in einem dem Punkte B unendlich nahen Punkte trifft; im Büschel α entspricht ihr daher die Ebene, welche die Tangente τ enthält und im Büschel τ die Schmiegungsebene T_3. Es entsprechen sich also die drei Ebenen

$$\sigma\alpha \barwedge \alpha\tau \barwedge T_3\,.$$

Sind $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ die Gleichungen der Ebenen $\sigma\alpha$ und $\tau\alpha$, so kann man sich die Functionen T_0, T_1, T_2, T_3 immer mit solchen Faktoren multiplicirt denken, dass die Gleichungen dreier entsprechenden Ebenen der drei projectiven Büschel σ, α, τ die Form haben

$$T \equiv \lambda_1 T_0 - \lambda_2 T_1 = 0, \quad T' \equiv \lambda_1 T_1 - \lambda_2 T_2 = 0, \quad T'' \equiv \lambda_1 T_2 - \lambda_2 T_3 = 0.$$

Dividirt man diese Gleichungen durch λ_1 und bezeichnet den Quotienten $\lambda_2 : \lambda_1$ mit λ, so gehen diese Gleichungen über in

1. $$T \equiv T_0 - \lambda T_1 = 0\,, \quad T' \equiv T_1 - \lambda T_2 = 0\,, \quad T'' \equiv T_2 - \lambda T_3 = 0\,.$$

Diese drei linearen Gleichungen für x, y, z enthalten einen veränderlichen Parameter λ, und zwar erscheint λ als die einzige unabhängige Veränderliche. Durch λ kann man die Coordinaten jedes Curvenpunktes ausdrücken, indem man das System 1. nach x, y, z auflöst.

Die Auflösungen eines Systems von drei linearen Gleichungen sind bekanntlich Quotienten, welche als gemeinsamen Nenner die Determinante der Gleichungen und als Zähler Determinanten dritten Grades in den Coefficienten der Gleichungen haben. Die Coefficienten der Gleichungen 1. sind lineare Functionen von λ; die Lösungen des Systems 1. haben daher die Form

2. $$\begin{aligned} x &= (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3) : (d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2 + d_3\lambda^3)\,, \\ y &= (b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3) : (d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2 + d_3\lambda^3)\,, \\ z &= (c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3) : (d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2 + d_3\lambda^3)\,. \end{aligned}$$

Die Coordinaten der Punkte eines R_3 lassen sich daher als gebrochene rationale Functionen eines Parameters λ darstellen, und zwar in der Form

3. $$x = \frac{\varphi_0}{\varphi_3}\,, \quad y = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}\,, \quad z = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}\,,$$

wobei φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 ganze Functionen dritten Grades von λ sind.

Setzt man die Werthe 2. in die Gleichung eines Curvenpunktes ein

$$xu + yv + zw - 1 = 0\,,$$

so erhält man, nachdem man mit φ_3 multiplicirt hat

$$\varphi_0 u + \varphi_1 v + \varphi_2 w - \varphi_3 = 0\,.$$

Ordnet man dies nach steigenden Potenzen von λ, so entsteht

4. $$A_0 + \lambda \cdot A_1 + \lambda^2 \cdot A_2 + \lambda^3 \cdot A_3 = 0\,,$$

wobei

$$A_0 \equiv a_0 u + b_0 v + c_0 w - d_0\,, \quad A_1 \equiv a_1 u + b_1 v + c_1 w - d_1\,,$$
$$A_2 \equiv a_2 u + b_2 v + c_2 w - d_2\,, \quad A_3 \equiv a_3 u + b_3 v + c_3 w - d_3\,,$$

so dass $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ die Gleichungen von vier bestimmten Punkten sind*).

11. Man schliesst leicht, dass umgekehrt **die Punkte, deren Gleichungen aus**

$$A_0 + \lambda \cdot A_1 + \lambda^2 \cdot A_2 + \lambda^3 \cdot A_3 = 0$$

hervorgehen, wenn λ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, eine Raumcurve III. O. erfüllen.

Denn aus der Gleichung No. 10, 3 folgen die Gleichungen No. 10, 2. Diese kann man als lineare Gleichungen für die drei Grössen λ^3, λ^2 und λ ansehen. Ordnet man sie demgemäss, so erhält man

$$1.\quad \begin{aligned} (a_3 - xd_3)\lambda^3 + (a_2 - xd_2)\lambda^2 + (a_1 - xd_1)\lambda &= -(a_0 - xd_0)\,,\\ (b_3 - yd_3)\lambda^3 + (b_2 - yd_2)\lambda^2 + (b_1 - yd_1)\lambda &= -(b_0 - yd_0)\,,\\ (c_3 - zd_3)\lambda^3 + (c_2 - zd_2)\lambda^2 + (c_1 - zd_1)\lambda &= -(c_0 - zd_0)\,. \end{aligned}$$

Die Determinante dieses Systems ist

$$T_3 = \begin{vmatrix} a_3 - xd_3 & a_2 - xd_2 & a_1 - xd_1 \\ b_3 - yd_3 & b_2 - yd_2 & b_1 - yd_1 \\ c_3 - zd_3 & c_2 - zd_2 & c_1 - zd_1 \end{vmatrix}.$$

Diese zerfällt in ein Polynom von acht Determinanten, von denen aber die identisch verschwinden, welche in zwei Zeilen Coordinaten als Faktoren stehen haben, da in diesen Determinanten diese beiden Zeilen proportionale Elemente enthalten. Es bleiben mithin nur vier Determinanten übrig

$$2.\quad T_3 \equiv (a_3 b_2 c_1) - (d_3 b_2 c_1)x - (a_3 d_2 c_1)y - (a_3 b_2 d_1)z\,,$$

wenn man unter $(p_i q_k r_l)$ die Determinante versteht

$$(p_i q_k r_l) \equiv \begin{vmatrix} p_i & p_k & p_l \\ q_i & q_k & q_l \\ r_i & r_k & r_l \end{vmatrix}.$$

In gleicher Weise reduciren sich die Zähler der Auflösungen des Systems 1., und man erhält

$$3.\quad \lambda^3 = \frac{T_0}{T_3}\,, \quad \lambda^2 = \frac{T_1}{T_3}\,, \quad \lambda = \frac{T_2}{T_3}\,,$$

wobei

$$\begin{aligned} T_0 &\equiv -(a_0 b_2 c_1) + (d_0 b_2 c_1)x + (a_0 d_2 c_1)y + (a_0 b_2 d_1)z\,,\\ T_1 &\equiv -(a_3 b_0 c_1) + (d_3 b_0 c_1)x + (a_3 d_0 c_1)y + (a_3 b_0 d_1)z\,,\\ T_2 &\equiv -(a_3 b_2 c_0) + (d_3 b_2 c_0)x + (a_3 d_2 c_0)y + (a_3 b_2 d_0)z\,. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 3. ergeben

$$\lambda = \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_0}{T_1}\,,$$

mithin die Gleichungen

$$T_0 - \lambda T_1 = 0\,, \quad T_1 - \lambda T_2 = 0\,, \quad T_2 - \lambda T_3 = 0\,,$$

welche mit den Gleichungen No. 10, 1 übereinstimmen.

12. Die Eigenschaft, dass die Coordinaten jedes Punktes rationale Functionen eines veränderlichen Parameters sind, theilen die Raumcurven III. O. u. A. mit der Geraden und mit den Kegelschnitten.

Wenn A_0, A_1, A_2 lineare Functionen der Ebenencoordinaten sind, so ist der Ort der Punkte, deren Gleichungen unter der Form enthalten sind

$$1.\quad A_0 + \lambda A_1 = 0$$

---

*) Möbius, Der barycentrische Calcul. Leipzig 1827, pag. 114—124.

bekanntlich die Gerade $A_0 A_1$. Aus 1. folgt für die Coordinaten jedes Punktes dieser Geraden die Darstellung

$$x = \frac{\varphi_0}{\varphi_3}, \quad y = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad z = \frac{\varphi_2}{\varphi_3},$$

wobei $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ lineare Functionen von λ sind.

Die Punkte, deren Gleichungen unter der Form enthalten sind

2. $$A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 = 0$$

liegen auf der Ebene der drei Punkte $A_0 A_1 A_2$; denn die Coordinaten dieser Ebene genügen der Gleichung 2. unabhängig von λ.

Wir beziehen die Gleichung auf ein Coordinatensystem, dessen XY-Ebene mit der Ebene $A_0 A_1 A_2$ zusammenfällt, und setzen dann $w = 0$; hierdurch mag entstehen

$$B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 = 0.$$

Dies ist die allgemeine Form der Gleichung eines Punktes unserer Curve in Liniencoordinaten, bezogen auf das neue System XOY. Aus dieser Gleichung folgen für x und y Werthe von der Form

$$x = \frac{a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2}{c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2}, \quad y = \frac{b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2}{c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2}.$$

Betrachtet man diese beiden Gleichungen als lineare Gleichungen in Bezug auf λ und λ^2, so erhält man Auflösungen von der Form

3. $$\lambda = T_1 : T_2, \quad \lambda^2 = T_0 : T_2,$$

wobei T_0, T_1, T_2 lineare Functionen der Coordinaten x und y sind. Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Division

4. $$\lambda = T_0 : T_1.$$

Die beiden Gleichungen 3. kann man durch die erste derselben und durch 4. ersetzen, so dass man die beiden Gleichungen behält

5. $$T_0 - \lambda T_1 = 0, \quad T_1 - \lambda T_2 = 0.$$

Diese lehren sofort, dass die Punkte, die der Gleichung 2. entspringen, die Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projectiven Büschel sind; die Gleichung des erzeugten Kegelschnitts ergiebt sich durch Elimination von λ aus den beiden Gleichungen 5. zu $T_0 T_2 - T_1^2 = 0$. Aus derselben ist ersichtlich, dass T_0 und T_2 die Curve in den beiden Punkten berühren, in denen sie von T_1 geschnitten wird.*)

13. Hat man auf einer Raumcurve III. O. zwei Punkte A und B gewählt, so sind dadurch die Ebenen T_0, T_1, T_2, T_3 bestimmt; die Functionen T_0, T_1, T_2, T_3 (No. 10, 1) sind somit jede bis auf einen constanten Faktor bestimmt.

Ist noch ein Punkt C der Curve bekannt, und schneiden sich in demselben die Ebenen

1. $$a_0 T_0 - a_1 T_1 = 0, \quad a_1 T_1 - a_2 T_2 = 0, \quad a_2 T_2 - a_3 T_3 = 0,$$

so sind die Verhältnisse der Coefficienten a_1, a_2, a_3 bestimmt, und die Punkte der Curve werden für jedes λ als Schnittpunkte der drei Ebenen erhalten

2. $$T_0 - \lambda \cdot a_1 T_1 = 0, \quad a_1 T_1 - \lambda \cdot a_2 T_2 = 0, \quad a_2 T_2 - \lambda \cdot a_3 T_3 = 0.$$

Hieraus ist ersichtlich: Eine Raumcurve III. O. ist durch zwei Punkte, die Tangenten und die Osculationsebenen in diesen Punkten, sowie durch einen dritten Punkt eindeutig bestimmt.

Der Punkt A, in welchem sich die Ebenen T_0, T_1, T_2 schneiden, dessen

*) Möbius, Der baryc. Calcul, 5. Kapitel. Clebsch, Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind. Crelles Journal, Bd. 64, S. 43. 1865.

Schmiegungsebene also T_0 ist, hat den Parameter $\lambda = 0$; denn für diesen Werth von λ reduciren sich die Ebenen 2. auf $T_0 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2 = 0$.

Dividirt man die Gleichungen 2. durch λ und setzt dann $\lambda = \infty$, so reduciren sich die Gleichungen auf $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ und ergeben den Punkt B, dessen Schmiegungsebene T_3 ist. Der Punkt C hat den Parameter $\lambda = 1$. Man kann daher drei beliebig gewählten Punkten der Curve die Parameter 0, ∞, 1 zuertheilen; dann ist der Parameter jedes weiteren Punktes der Curve eindeutig bestimmt.

Wenn wir voraussetzen, dass drei willkürlich gewählten Punkten die Parameterwerthe 0, ∞, 1 zuertheilt worden sind, so können wir nun die Punkte der Curve durch die ihnen zugehörigen Parameterwerthe charakterisiren, und von den Punkten $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ der Curve sprechen.

14. Die Gleichung einer Ebene

$$\mathfrak{T}_1 \equiv T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, T_1 + \lambda_1\lambda_2 T_2 = 0$$

lässt sich schreiben

$$\mathfrak{T}_1 \equiv T_0 - \lambda_1 T_1 - \lambda_2 (T_1 - \lambda_1 T_2) = 0.$$

Sie enthält daher den Schnitt von

$$T_0 - \lambda_1 T_1 = 0 \quad \text{und} \quad T_1 - \lambda_1 T_2 = 0,$$

folglich auch den Punkt λ_1 der R_3, der der Schnittpunkt der Ebenen ist

$$T_0 - \lambda_1 T_1 = 0, \quad T_1 - \lambda_1 T_2 = 0, \quad T_2 - \lambda_1 T_3 = 0.$$

Da man aber $\mathfrak{T}_1$ auch schreiben kann

$$\mathfrak{T}_1 \equiv T_0 - \lambda_2 T_1 - \lambda_1 (T_1 - \lambda_2 T_2) = 0,$$

so schliesst man, dass $\mathfrak{T}_1$ auch durch den Punkt λ_2 der R_3 geht; $\mathfrak{T}_1$ ist daher die Ebene der Punkte A, λ_1, λ_2.

Die Ebenengleichung

$$\mathfrak{T}_2 \equiv T_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, T_2 + \lambda_1\lambda_2 T_3 = 0$$

kann man in den Formen schreiben

$$\mathfrak{T}_2 \equiv T_1 - \lambda_1 T_2 - \lambda_2 (T_2 - \lambda_1 T_3) \equiv T_1 - \lambda_2 T_2 - \lambda_1 (T_2 - \lambda_2 T_3) = 0,$$

und schliesst daraus, dass $\mathfrak{T}_2$ durch die Punkte λ_1 und λ_2 geht, dass $\mathfrak{T}_2$ mithin die Ebene B, λ_1, λ_2 ist.

Der Verein der beiden Gleichungen

$$1. \quad \begin{aligned} \mathfrak{T}_1 &\equiv T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, T_1 + \lambda_1\lambda_2 T_2 = 0, \\ \mathfrak{T}_2 &\equiv T_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, T_2 + \lambda_1\lambda_2 T_3 = 0 \end{aligned}$$

charakterisirt somit die Secante $\lambda_1\lambda_2$ der Raumcurve III. O.

Ist λ_2 von λ_1 nur um verschwindend wenig verschieden, so ist die Gerade $\lambda_1\lambda_2$ Tangente der Curve im Punkte λ_2; in den Gleichungen 1. ist in diesem Falle $\lambda_2 = \lambda_1$ zu setzen. Man erhält daher die Gleichungen der Curventangente im Punkte λ

$$2. \quad \begin{aligned} T_0 - 2\lambda T_1 + \lambda^2 T_2 &= 0, \\ T_1 - 2\lambda T_2 + \lambda^2 T_3 &= 0. \end{aligned}$$

15. Die Ebenengleichung

$$1. \quad \mathfrak{T} \equiv T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\, T_1 + (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2)\, T_2 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 T_3 = 0$$

lässt folgende Anordnungen zu

$$2. \quad \mathfrak{T} \equiv T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, T_1 + \lambda_1\lambda_2 T_2 - \lambda_3 [T_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, T_2 + \lambda_1\lambda_2 T_3],$$

$$3. \quad \equiv T_0 - (\lambda_1 + \lambda_3)\, T_1 + \lambda_1\lambda_3 T_2 - \lambda_2 [T_1 - (\lambda_1 + \lambda_3)\, T_1 + \lambda_1\lambda_3 T_3].$$

Die Gleichung 2. zeigt, dass $\mathfrak{T}$ durch die Punkte λ_1 und λ_2 geht, denn $\mathfrak{T}$ geht durch den Schnitt $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$ (No. 14). In gleicher Weise folgt aus 3., dass $\mathfrak{T}$ durch λ_1 und λ_3 geht. Folglich ist

$$\mathfrak{T} \equiv T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\, T_1 + (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2)\, T_2 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 T_3 = 0$$

die Gleichung der Ebene, welche die drei Curvenpunkte λ_1, λ_2, λ_3 enthält.

Die Gleichung der Ebene, welche die Tangente des Curvenpunktes λ_1 und den Curvenpunkt λ_2 enthält, geht aus 4. hervor, wenn man $\lambda_3 = \lambda_1$ setzt; man erhält

5. $$\mathfrak{T} \equiv T_0 - (2\lambda_1 + \lambda_2)\, T_1 + (\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2)\, T_2 - \lambda_1^2\lambda_2 T_3 = 0.$$

Rückt auch λ_2 unendlich nahe an λ_1, so erhält man die Gleichung der Osculationsebene im Punkte λ_1; in diesem Falle hat man in 5. $\lambda_2 = \lambda_1$ zu setzen, und erhält somit als Gleichung der Osculationsebene im Punkte λ

6. $$S \equiv T_0 - 3\lambda T_1 + 3\lambda^2 T_2 - \lambda^3 T_3 = 0.$$

Setzt man

$$T_0 \equiv \alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z - \delta_0, \quad T_1 \equiv \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \delta_1,$$
$$T_2 \equiv \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z - \delta_2, \quad T_3 \equiv \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z - \delta_3,$$

so folgen aus 6. die Coordinaten der Osculationsebene zu

7. $$\begin{aligned} u &= (\alpha_0 - 3\alpha_1\lambda + 3\alpha_2\lambda^2 - \alpha_3\lambda^3) : (\delta_0 - 3\delta_1\lambda + 3\delta_2\lambda^2 - \delta_3\lambda^3), \\ v &= (\beta_0 - 3\beta_1\lambda + 3\beta_2\lambda^2 - \beta_3\lambda^3) : (\delta_0 - 3\delta_1\lambda + 3\delta_2\lambda^2 - \delta_3\lambda^3), \\ w &= (\gamma_0 - 3\gamma_1\lambda + 3\gamma_2\lambda^2 - \gamma_3\lambda^3) : (\delta_0 - 3\delta_1\lambda + 3\delta_2\lambda^2 - \delta_3\lambda^3). \end{aligned}$$

Die Coordinaten der Osculationsebene sind also gebrochene rationale Functionen dritten Grades des Parameters λ.

Beseitigt man in den Gleichungen 7. die Nenner, und betrachtet die dann entstehenden Gleichungen als lineare Gleichungen der drei Grössen λ, λ^2, λ^3, so erhält man

$$\begin{aligned} (\alpha_0 - \delta_0 u) - 3(\alpha_1 - \delta_1 u)\lambda + 3(\alpha_2 - \delta_2 u)\lambda^2 - (\alpha_3 - \delta_3 u)\lambda^3 &= 0, \\ (\beta_0 - \delta_0 v) - 3(\beta_1 - \delta_1 v)\lambda + 3(\beta_2 - \delta_2 v)\lambda^2 - (\beta_3 - \delta_3 v)\lambda^3 &= 0, \\ (\gamma_0 - \delta_0 w) - 3(\gamma_1 - \delta_1 w)\lambda + 3(\gamma_2 - \delta_2 w)\lambda^2 - (\gamma_3 - \delta_3 w)\lambda^3 &= 0. \end{aligned}$$

In gleicher Weise, wie bei dem analogen Systeme No. 11, 1 schliesst man, dass die Auflösungen dieses Systems nach λ, λ^2, λ^3 Quotienten linearer Functionen von u, v, w sind. Man erhält Lösungen von der Form

8. $$\lambda^3 = P_0 : P_3, \quad \lambda^2 = P_1 : P_3, \quad \lambda = P_2 : P_3,$$

worin $$P_i = \mathfrak{a}_i u + \mathfrak{b}_i v + \mathfrak{c}_i w + \mathfrak{d}_i,$$

und $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$, $\mathfrak{d}_i$ Subdeterminanten dritten Grades des Systems sind

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix}.$$

Die Formeln 8. ergeben durch Division und nachheriger Beseitigung der Nenner das äquivalente Formelsystem

9. $$P_0 - \lambda P_1 = 0, \quad P_1 - \lambda P_2 = 0, \quad P_2 - \lambda P_3 = 0.$$

Die drei Punkte, deren Gleichungen sind

$$\mathfrak{P} \equiv P_0 - \lambda P_1 = 0, \quad \mathfrak{P}' \equiv P_1 - \lambda P_2 = 0, \quad \mathfrak{P}'' \equiv P_2 - \lambda P_3 = 0$$

sind entsprechende Punkte dreier projectiven Reihen, welche zu Trägern die Geraden P_0P_1, P_1P_2 und P_2P_3 haben.

Alle Ebenen, welche durch je zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ gehen, umhüllen die Fläche II. O., deren Gleichung sich aus den Gleichungen $\mathfrak{P} = 0$ und $\mathfrak{P}' = 0$ durch Elimination von λ ergiebt, nämlich

$$\mathfrak{F}_1 \equiv P_0 P_2 - P_1^2 = 0.$$

Alle Ebenen, deren Coordinaten den Gleichungen $\mathfrak{P} = 0$ und $\mathfrak{P}'' = 0$ genügen, umhüllen die Fläche II. O.

$$\mathfrak{F}_2 \equiv P_0 P_3 - P_1 P_2 = 0.$$

Beide Flächen haben das Ebenenbüschel gemein, dessen Träger $P_0 P_1$ ist (haben also als Punktgebilde betrachtet die Gerade $P_0 P_1$ gemein). Wir schliessen daher: *Die Osculationsebenen einer Raumcurve III. O. umhüllen eine abwickelbare Fläche, welche zwei Flächen II. O. umschrieben ist, die eine gemeinsame Gerade haben.*

Analog der Definition einer Raumcurve III. O. *definiren wir als abwickelbare Fläche dritter Klasse die Fläche, welche von den gemeinsamen Tangentenebenen zweier Flächen II. O. gebildet wird, die eine Gerade gemein haben.*

Mit Rücksicht auf diese Definition haben wir daher den Satz: *Die Osculationsebenen einer Raumcurve III. O. umhüllen eine abwickelbare Fläche III. Kl.*

Die Cuspidalkante (§ 10 No. 2) einer abwickelbaren Fläche $n$ter Klasse wird als *Raumcurve* n*ter Klasse* bezeichnet. Wir gewinnen somit den einfachsten Ausdruck für unseren Satz in der Form: *Die Raumcurven III. O. sind zugleich Raumcurven III. Kl.*

Wir unterbrechen hier unsere Erörterungen über die Raumcurven III. O. und wenden uns zu den abwickelbaren Flächen III. Kl., für deren Untersuchung wir den analogen Weg verfolgen. Im Laufe dieser Untersuchung wird sich, wie wir schon jetzt voraussehen können, ergeben, dass die Cuspidalkante jeder abwickelbaren Fläche III. Kl. eine Raumcurve III. O. ist, so dass alle Resultate dieses Abschnitts sich auf die Raumcurve III. O. und die von ihren Tangenten beschriebene (mithin von ihren Osculationsebenen umhüllte) abwickelbare Fläche beziehen.

---

1. B.*) Die abwickelbare Fläche III. Kl. bildet mit einem Ebenenbüschel zusammen die vollständige abwickelbare Fläche IV. Klasse 1. Sp., die zwei Flächen II. Kl. $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ umschrieben ist. Durch jeden Punkt des Raumes gehen vier Ebenen dieser Fläche; eine dieser vier Ebenen gehört dem Ebenenbüschel an. *Durch jeden Punkt des Raumes gehen daher drei Tangentenebenen einer abwickelbaren Fläche III. Kl.*

2. B. Das Ebenenbüschel α bilde mit einer abwickelbaren Fläche III. O. $\mathfrak{R}_3$ eine abwickelbare Fläche IV. Kl. 1. Sp.; wir beschreiben in $\mathfrak{R}_3$ und α zwei Flächen II. O. $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ und bemerken auf $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zwei Ebenenbüschel α' und α'' desselben Systems, wie α (d. i. zwei Büschel von Tangentenebenen von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, deren Träger zu demselben Systeme von Geraden auf $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ gehören, wie der Träger des Büschels α). Durch jeden Punkt P des Trägers von α geht ein Träger eines Büschels β' auf $\mathfrak{F}_1$ und ein Träger eines Büschels β'' auf $\mathfrak{F}_2$, die mit α nicht demselben Systeme angehören. Die Träger der Büschel β' treffen den Träger von α' in einer Punktreihe, welche der Reihe der P projectiv ist; denn zwei Geraden einer Fläche II. O. $\mathfrak{F}_1$, die demselben System angehören, werden von allen Geraden des andern Systems β' in zwei projectiven Punktreihen getroffen. Die Träger der Büschel β'' treffen α'' aus gleichem Grunde in einer Punktreihe, die ebenfalls mit der Reihe der P projectiv ist.

Jede Ebene von $\mathfrak{R}_3$ gehört zu einem Büschel β' und zu einem Büschel β''; durch ihren Schnittpunkt P mit dem Träger von α gehen die Träger von β' und β''; also treffen die Ebenen von $\mathfrak{R}_3$ die Träger der Büschel α, α', α'' in projectiven Punktreihen.

*) Die Abschnitte 1 B, 2 B, . . . entsprechen dual den Abschnitten § 15, 1, 2, . . .

Wir bemerken noch, dass durch die projectiven Reihen α' und α'' eine Fläche II. O. $\mathfrak{F}_3$ erzeugt wird, die ebenfalls der $\mathfrak{R}_3$ eingeschrieben ist, und dass die Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_3$ das Büschel α', die Flächen $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ das Büschel α'' gemein haben; also bilden auch die Büschel α' und α'' mit $\mathfrak{R}_3$ eine vollständige abwickelbare Fläche IV. Kl. 1. Sp.

Die Ebenen, welche eine abwickelbare Fläche III. Kl. umhüllen, gehen durch die entsprechenden Punkte dreier projectiven Punktreihen; die Träger dieser Punktreihen sind die Träger dreier Ebenenbüschel, die mit der $\mathfrak{R}_3$ zusammen eine vollständige abwickelbare Fläche IV. Kl. 1. Sp. bilden. Umgekehrt schliesst man leicht: Die Ebenen, welche durch die entsprechenden Punkte dreier projectiven Punktreihen gehen, umhüllen eine $\mathfrak{R}_3$.

3. B. Wir fragen nun nach den Ebenen der $\mathfrak{R}_3$, welche zum Büschel α gehören. Dies sind die Ebenen dieses Büschels, welche entsprechende Punkte der auf den Trägern von α' und α'' liegenden projectiven Reihen verbinden; also sind es Tangentenebenen von $\mathfrak{F}_3$. Wir schliessen daher: Zu jedem Ebenenbüschel, welches mit $\mathfrak{R}_3$ zusammen eine vollständige abwickelbare Fläche IV. Kl. 1. Sp. bildet, gehören zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$.

Aus diesem Grunde wird α als eine Linie in zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$ bezeichnet.

4. B. Eine Ebene enthält im Allgemeinen nur eine Linie in zwei Ebenen einer $\mathfrak{R}_3$; jede Linie in zwei Ebenen einer $\mathfrak{R}_3$ ist der Träger eines Ebenenbüschels, das mit $\mathfrak{R}_3$ zusammen eine abwickelbare Fläche IV. Kl. 1. Sp. bildet.

5. B. Sind $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ drei Flächen II. Kl., die nicht zu derselben Schaar gehören und einer $\mathfrak{R}_3$ eingeschrieben sind, so wird die Gleichung jeder Fläche, die der $\mathfrak{R}_3$ eingeschrieben ist, in der Form erhalten

1. $$\mathfrak{F} = \mu_1 \mathfrak{F}_1 + \mu_2 \mathfrak{F}_2 + \mu_3 \mathfrak{F}_3 = 0 .$$

Denn zwei Ebenen T_1 und T_2, welche $\mathfrak{R}_3$ nicht berühren, enthalten je eine Linie in zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$; durch diese beiden Linien und durch die $\mathfrak{R}_3$ ist eine Fläche II. Kl. eindeutig bestimmt; also ist durch eine $\mathfrak{R}_3$ und durch zwei Ebenen, die nicht zu $\mathfrak{R}_3$ gehören, eine Fläche II. Kl. eindeutig bestimmt. Sind $\mathfrak{F}_{1i}$, $\mathfrak{F}_{2i}$, $\mathfrak{F}_{3i}$ die Werthe, welche die Functionen $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ für die Coordinaten der Ebene T_i annehmen, so ist offenbar

$$\mathfrak{F} = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_1 & \mathfrak{F}_2 & \mathfrak{F}_3 \\ \mathfrak{F}_{11} & \mathfrak{F}_{21} & \mathfrak{F}_{31} \\ \mathfrak{F}_{12} & \mathfrak{F}_{22} & \mathfrak{F}_{32} \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung einer Fläche II. Kl., welche von den Ebenen T_1 und T_2 berührt wird, der $\mathfrak{R}_3$ eingeschrieben ist; und diese Gleichung ist von der Form 1.

6. B. Aehnlich, wie in No. 6, schliessen wir: Die Linien in zwei Ebenen einer $\mathfrak{R}_3$, die auf einer Ebene der $\mathfrak{R}_3$ liegen, bestimmen eine renzfläche II. Kl.; oder: Die Geraden, in welchen eine Ebene einer $_3$ von den andern geschnitten wird, umhüllen einen Kegelschnitt.

Durch sechs Ebenen 1, 2, 3, 4, 5, 6 einer $\mathfrak{R}_3$ ist die Grenzfläche G_1 beimmt, welche 1 zur Doppelebene hat und von den fünf andern berührt wird; oenso die Grenzfläche G_2, welche 2 zur Doppelebene hat und von 1, 3, 4, 5, 6 erührt wird. Beide Grenzflächen werden von allen Ebenen der $\mathfrak{R}_3$ berührt und aben ausserdem das Ebenenbüschel 1, 2 gemein. Dies zeigt: Eine abwickelare Fläche III. Kl. ist durch sechs Ebenen bestimmt.

Die Construction einer $\mathfrak{R}_3$ aus sechs gegebenen Ebenen ist hiermit erledigt.

7. B. Wenn die Fläche $\mathfrak{F}$ der $\mathfrak{R}_3$ eingeschrieben ist, so enthalten alle Ebenenbüschel auf $\mathfrak{F}$, deren Träger nicht Gerade in zwei Ebenen der Ebenenbüschel $\mathfrak{R}_3$ sind, eine reale Ebene der $\mathfrak{R}_3$.

8. B. Wenn das Ebenenbüschel β nur eine Ebene einer $\mathfrak{R}_3$ enthält, so umhüllen alle Ebenenbüschel, die von einer Linie in zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$ getragen werden und mit β eine Ebene gemein haben, eine Fläche II. Kl.

9. B. Jede Ebene, die eine Gerade b enthält, die auf nur einer Ebene T_1 einer $\mathfrak{R}_3$ liegt, enthält eine Linie in zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$; diese Linien erfüllen (8. B) eine Fläche II. Kl. $\mathfrak{F}$, die $\mathfrak{R}_3$ eingeschrieben ist, und schneiden daher eine andere Ebene T_2 der $\mathfrak{R}_3$ in den Punkten der Geraden b', in welcher $\mathfrak{F}$ von T_2 berührt wird und die mit b zu demselben Systeme gehört. Die Punktreihen, in denen b und b_1 von Linien in zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$ getroffen werden, sind projectiv. Jeder Geraden b in T_1 entspricht somit eine bestimmte Gerade b' in T_2, und die Punkte auf b sind mit der Punktreihe auf b' projectiv.

Durch einen Punkt A auf T_1 gehen ausser T_1 noch zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$, also geht durch A die von diesen beiden Ebenen bestimmte Linie in zwei Ebenen von $\mathfrak{R}_3$. Die Geraden b, welche in T_1 liegen und durch A gehen, werden von dieser Linie getroffen; ihnen entsprechen in T_2 die Geraden b', welche von derselben Linie getroffen werden, welche also durch den Schnittpunkt dieser Linie mit der Ebene T_2 gehen. Einem Strahlbüschel in T_1 entspricht daher ein Strahlbüschel in T_2, und die Träger dieser Strahlbüschel liegen auf einer Linie in zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$.

Zu jeder Geraden b kann man hiernach die entsprechende Gerade b' leicht construiren, wenn zu vier Geraden b_1, b_2, b_3, b_4 in T_1 die entsprechenden b_1', b_2', b_3', b_4' in T_2 gegeben sind.

Die Geraden b_2, b_3, b_4, b bestimmen auf b_1, und die entsprechenden Geraden b_2', b_3', b_4', b' auf b_1' zwei projective Reihen; b' geht daher durch den Punkt auf b_1', der dem Schnittpunkte von b_1 und b entspricht. Ebenso bestimmen b_1, b_3, b_4, b auf b_2 und b_1', b_3', b_4', b' auf b_2' zwei projective Reihen; hierdurch bestimmt sich der Punkt, in welchem b_2' von b' geschnitten wird. Da man nun die Punkte kennt, in denen b_1' und b_2' von b' geschnitten werden, so ist b' selbst bekannt.

Dieselbe Construction verwendet man bei zwei projectiven Ebenen, auf welchen die Geraden b_1, b_2, b_3, b_4 den Geraden b_1', b_2', b_3', b_4' entsprechen, um zu jeder Geraden b der einen Ebene die entsprechende Gerade b' der andern zu construiren. Da nun je zwei Schnittpunkte zweier Geraden auf T_1 und der entsprechenden beiden auf T_2 eine Linie in zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$ bestimmen, so schliessen wir: Die Linien in zwei Ebenen einer $\mathfrak{R}_3$ werden von je zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$ in entsprechenden Punkten zweier projectiven Punktsysteme geschnitten.

Jede Ebene, in welcher zwei Linien in zwei Ebenen einer $\mathfrak{R}_3$ liegen, ist eine Tangentenebene der $\mathfrak{R}_3$. Wir sehen daher: Die Ebenen, welche zwei projective Ebenen in entsprechenden Geraden schneiden, umhüllen eine abwickelbare Fläche III. Kl.

10. B. Die Gleichungen entsprechender Punkte dreier projectiven Punktreihen, durch welche eine $\mathfrak{R}_3$ erzeugt wird, vereinfachen sich in bemerkens-

werther Weise, wenn man als Träger zweier Reihen zwei auf der Fläche $\mathfrak{R}_3$ liegende Gerade σ und τ und als Träger der dritten den Schnitt α der Ebenen wählt, welche $\mathfrak{R}_3$ längs σ und τ berühren. Wir bemerken, dass σ und τ die Cuspidalkante der Fläche berühren; die Berührungspunkte seien P_0 und P_3.

Der Punkt P_0 der Geraden σ ist der Schnitt von σ mit der Ebene von $\mathfrak{R}_3$, welche der durch σ gehenden unendlich nahe liegt; ihm entspricht daher auf α der Schnitt P_1 von α und σ, und auf τ der Schnitt P_2 von τ und α.

Die Ebene von $\mathfrak{R}_3$, welche der Ebene αP_3 unendlich nahe liegt, trifft σ in P_1, α in P_2 und τ in P_3, also entsprechen sich auch diese drei Punkte.

Die linearen Functionen P_0, P_1, P_2, P_3 lassen sich nun immer mit solchen Zahlen multipliciren, dass die Gleichungen entsprechender Punkte der drei Reihen P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3 die Form haben

$$P \equiv \mu_1 P_0 - \mu_2 P_1 = 0\,, \quad P' \equiv \mu_1 P_1 - \mu_2 P_2 = 0\,, \quad P'' \equiv \mu_1 P_2 - \mu_2 P_3 = 0\,.$$

Dividirt man durch μ_1 und setzt $\mu_2 : \mu_1 = 0$, so entstehen die Gleichungen

$$1. \quad P \equiv P_0 - \mu P_1 = 0\,, \quad P' \equiv P_1 - \mu P_2 = 0\,, \quad P'' \equiv P_2 \equiv \mu P_3 = 0\,.$$

Jede Ebene, deren Coordinaten diesen drei Gleichungen für irgend einen Werth der veränderlichen Zahl genügen, berührt die $\mathfrak{R}_3$. Man kann aus denselben u, v, w durch μ ausdrücken und erhält somit die Coordinaten jeder Ebene der $\mathfrak{R}_3$ als rationale Functionen eines Parameters μ; die Auflösungen des Systems 1. haben die Form

$$
\begin{aligned}
&u = (\alpha_0 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2 + \alpha_3\mu^3) : (\delta_0 + \delta_1\mu + \delta_2\mu^2 + \delta_3\mu^3)\,,\\
2.\quad &v = (\beta_0 + \beta_1\mu + \beta_2\mu^2 + \beta_3\mu^3) : (\delta_0 + \delta_1\mu + \delta_2\mu^2 + \delta_3\mu^3)\,,\\
&w = (\gamma_0 + \gamma_1\mu + \gamma_2\mu^2 + \gamma_3\mu^3) : (\delta_0 + \delta_1\mu + \delta_2\mu^2 + \delta_3\mu^3)\,.
\end{aligned}
$$

Setzt man die Werthe 2. in die Gleichung ein

$$ux + vy + wz - 1 = 0\,,$$

so erhält man nach Beseitigung des Nenners eine Gleichung von der Form

$$A_0 + \mu A_1 + \mu^2 A_2 + \mu^3 A_3 = 0\,,$$

worin A_0, A_1, A_2, A_3 lineare Functionen in Punktcoordinaten sind.

11. B. Ebenso, wie in No. 11, schliesst man umgekehrt: Alle Ebenen, deren Gleichungen aus

$$A_0 + \mu A_1 + \mu^2 A_2 + \mu^3 A_3 = 0$$

erhalten werden, indem man dem Parameter μ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ ertheilt, umhüllen eine abwickelbare Fläche III. Kl.

12. B. Die Eigenschaft, dass die Coordinaten jeder Ebene sich als rationale Functionen eines Parameters ausdrücken lassen, hat die abwickelbare Fläche III. Kl. mit der Geraden und dem Kegel II. O. gemein. Sind A_0, A_1, A_2 die Gleichungen dreier Ebenen, so geht jede Ebene, deren Gleichung von der Form ist

$$1. \quad A_0 + \mu A_1 = 0$$

durch die Gerade A_0A_1.

Jede Ebene, deren Gleichung die Form hat

$$2. \quad A_0 + \mu A_1 + \mu^2 A_2 = 0$$

geht durch den Schnittpunkt der Ebenen $A_0A_1A_2$. Die Gleichung der Spur von T auf der XY-Ebene entsteht, wenn man in 2. $z = 0$ setzt. Man erhält dann eine Gleichung von der Form

$$3. \quad B_0 + \mu B_1 + \mu^2 B_2 = 0\,,$$

worin B_0, B_1, B_2 lineare Functionen von x und y sind. Aus dieser Gleichung erhält man für die Coordinaten der Spur Ausdrücke der Form

$$u = \frac{\alpha_0 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2}{\gamma_0 + \gamma_1\mu + \gamma_2\mu^2}\,, \quad v = \frac{\beta_0 + \beta_1\mu + \beta_2\mu^2}{\gamma_0 + \gamma_1\mu + \gamma_2\mu^2}\,;$$

löst man diese Gleichungen nach μ und μ^2, so erhält man

4. $$\mu = P_1 : P_2\,, \quad \mu^2 = P_0 : P_2\,,$$
wobei P_0, P_1, P_2 lineare Functionen von u und v sind. Durch Division folgt aus 3.

5. $$\mu = P_0 : P_2\,,$$
und hieraus und aus der ersten Gleichung 3.
$$P_0 - \mu P_1 = 0\,, \quad P_1 - \mu P_2 = 0\,.$$

Die Geraden, welche der Gleichung 3. entspringen, sind daher die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projectiven Punktreihen auf $P_0 P_1$ und $P_1 P_2$; sie umhüllen den Kegelschnitt
$$P_0 P_2 - P_1^2 = 0\,.$$

Die Ebenen, deren Gleichungen unter der Form 2. enthalten sind, gehen durch einen Punkt und ihre Spuren auf der XY-Ebene umhüllen einen Kegelschnitt, also umhüllen die Ebenen selbst einen Kegel II. O.

13. B. Durch zwei Ebenen, welche die $\mathfrak{R}_3$ berühren, durch die Geraden σ und τ, in welchen sie die $\mathfrak{R}_3$ berühren, und durch die Punkte P_0 und P_3 der Cuspidalkante der $\mathfrak{R}_3$, welche auf σ und τ liegen, sind die Punkte $P_0 P_1 P_2 P_3$ (No. 10 B) gegeben. Ist nun noch eine Ebene C von $\mathfrak{R}_3$ gegeben, so sind die Punkte bekannt, in welchen die Geraden σ, α und τ von dieser Ebene geschnitten werden; die Gleichungen dieser Punkte seien

1. $$P_0 - a_1 P_1 = 0\,, \quad a_1 P_1 - a_2 P_2 = 0\,, \quad a_2 P_2 - a_3 P_3 = 0\,.$$

Die Gleichungen je dreier entsprechenden Punkte der drei Reihen $P_0 P_1$, $P_1 P_2$ und $P_2 P_3$ sind dann vollständig bestimmt, nämlich

2. $$P_0 - \mu a_1 P_1 = 0\,, \quad a_1 P_1 - \mu a_2 P_2 = 0\,, \quad a_2 P_2 - \mu a_3 P_3 = 0\,.$$

Dies ergiebt: Eine abwickelbare Fläche III. Kl. ist durch zwei berührende Ebenen A und B, durch die Geraden σ und τ, längs welcher sie die Fläche berühren, durch die Punkte P_0 und P_3 der Cuspidalkante, welche auf diesen Geraden liegen und durch eine dritte berührende Ebene eindeutig bestimmt.

Die Ebenen A, B, C gehören zu den Parameterwerthen 0, ∞, 1. Man kann daher diese drei Parameterwerthe drei beliebigen Ebenen der $\mathfrak{R}_3$ zuertheilen; der Parameter jeder andern Ebene ist dann eindeutig bestimmt.

14. B. Die Gleichung eines Punktes

1. $$\mathfrak{P}_1 \equiv P_0 - (\mu_1 + \mu_2) P_1 + \mu_1 \mu_2 P_2 = 0$$
kann man in zweifacher Weise anordnen

2. $$\mathfrak{P}_1 \equiv P_0 - \mu_1 P_1 - \mu_2 (P_1 - \mu_1 P_2) = 0\,,$$
3. $$\equiv P_0 - \mu_2 P_1 - \mu_1 (P_1 - \mu_2 P_2) = 0\,.$$

Aus 2. folgt, dass $\mathfrak{P}_1$ auf der Geraden liegt, welche die Schnittpunkte der Ebene μ_1 mit den Geraden σ und α verbindet; und aus 3., dass $\mathfrak{P}_1$ auch auf der Geraden liegt, welche die Schnittpunkte der Ebene μ_2 und der Geraden σ und α verbindet; folglich liegt $\mathfrak{P}_1$ auf den Ebenen μ_1 und μ_2. In gleicher Weise schliesst man, dass auch der Punkt
$$\mathfrak{P}_2 \equiv P_1 - (\mu_1 + \mu_2) P_2 + \mu_1 \mu_2 P_3 = 0$$
ein gemeinsamer Punkt der Ebenen μ_1 und μ_2 ist. Die Gleichungen d[er] Linie in den Ebenen μ_1, μ_2 der $\mathfrak{R}_3$ sind daher

4. $$P_0 - (\mu_1 + \mu_2) P_1 + \mu_1 \mu_2 P_2 = 0\,, \quad P_1 - (\mu_1 + \mu_2) P_2 + \mu_1 \mu_2 P_3 = $$

Sind μ_1 und μ_2 unendlich wenig von einander verschieden, so ist die Lin[ie] in den Ebenen $\mu_1 \mu_2$ die Gerade, längs welcher $\mathfrak{R}_3$ von μ_1 berührt wird. Folglic[h] sind die Gleichungen der Geraden, längs welcher $\mathfrak{R}_3$ von der Ebene μ berührt wi[rd]

5. $$P_0 - 2\mu P_1 + \mu^2 P_2 = 0\,, \quad P_1 - 2\mu P_2 + \mu^2 P_3 = 0\,.$$

15. B. Die Gleichung

1. $\mathfrak{P} \equiv P_0 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) P_1 + (\mu_2 \mu_3 + \mu_3 \mu_1 + \mu_1 \mu_2) P_2 - \mu_1 \mu_2 \mu_3 P_3 = 0$

lässt folgende Anordnungen zu

2. $\mathfrak{P} \equiv P_0 - (\mu_1 + \mu_2) P_1 + \mu_1 \mu_2 P_2 - \mu_3 [P_1 - (\mu_1 + \mu_2) P_2 + \mu_1 \mu_2 P_3] = 0,$

3. $\quad \equiv P_0 - (\mu_1 + \mu_3) P_1 + \mu_1 \mu_3 P_2 - \mu_2 [P_1 - (\mu_1 + \mu_3) P_2 + \mu_1 \mu_3 P_3] = 0,$

4. $\quad \equiv P_0 - (\mu_2 + \mu_3) P_1 + \mu_2 \mu_3 P_2 - \mu_1 [P_1 - (\mu_2 + \mu_3) P_2 + \mu_2 \mu_3 P_3] = 0.$

Aus denselben erkennt man, dass durch $\mathfrak{P}$ die drei Ebenen μ_1, μ_2, μ_3 der Fläche $\mathfrak{R}_3$ gehen.

Die Gleichung des Punktes, in welchem die auf der Ebene μ liegende Gerade der Fläche $\mathfrak{R}_3$ von der Ebene μ_1 geschnitten wird, folgt hiernach zu

$$P_0 - (2\mu + \mu_1) P_1 + (\mu^2 + 2\mu\mu_1) P_2 - \mu^2 \mu_1 P_3 = 0.$$

Ist μ_1 nur unendlich wenig von μ verschieden, so erhält man hieraus die Gleichung des auf der Ebene μ liegenden Punktes der Cuspidalkante der abwickelbaren Fläche III. Kl.

$$P_0 - 3\mu P_1 + 3\mu^2 P_2 - \mu_3 P_3 = 0.$$

Vergleichen wir dies mit No. 10, 4, so folgt: Die Cuspidalkante einer abwickelbaren Fläche III. Kl. ist eine Raumcurve III. O.

Die Raumcurve III. O. und die abwickelbare Fläche III. Kl. treten also immer vereint auf. Die Tangentenfläche jeder Raumcurve III. O. ist eine abwickelbare Fläche III. Kl., und die Cuspidalkante jeder abwickelbaren Fläche III. Kl. ist eine Raumcurve III. O.

---

16. Die Parameter λ der Punkte einer Raumcurve III. O., deren Schmiegungsebenen durch einen gegebenen Punkt P des Raumes gehen, werden erhalten, wenn man in der Gleichung der Schmiegungsebene des Punktes λ (No 15, 6)

1. $$T_0 - 3\lambda T_1 + 3\lambda^2 T_2 - \lambda^3 T_3 = 0$$

die Zahl λ so wählt, dass dieser Gleichung durch die Coordinaten des Punktes P genügt wird. Setzt man diese Coordinaten in 1. ein, so erhalten die linearen Functionen T_0, T_1, T_2, T_3 bestimmte Zahlenwerthe, und die gesuchten Werthe von λ sind die Wurzeln der cubischen Gleichung 1. Bezeichnet man diese Wurzeln mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, so ist

2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 T_2 : T_3, \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 3 T_1 : T_3, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = T_0 : T_3.$

Die Gleichung der Ebene der Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ist (No. 15, 1)

3. $T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) T_1 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) T_2 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 T_3 = 0.$

Setzt man die Werthe 2. in 3. ein, so wird 3. identisch erfüllt; daher folgt: Der Schnittpunkt der Schmiegungsebenen dreier Punkte einer Raumcurve III. O. liegt auf der Ebene dieser drei Punkte.

Bildet man den entsprechenden Satz für die abwickelbare Fläche III. Kl.: Die Ebene dreier Punkte der Cuspidalkante einer abwickelbaren Fläche III. O. geht mit den drei Ebenen dieser Punkte durch einen Punkt, — so erkennt man, dass derselbe mit dem vorigen Satze identisch ist.

Wenn die Gleichung 1. eine reale Wurzel λ_1 und zwei conjugirt complexe λ_2 und λ_3 hat, so geht durch P nur eine reale Osculationsebene von R_3; die beiden andern Osculationsebenen, sowie die Punkte der Curve, an denen diese liegen, sind conjugirt complex. Die Secante dieser Punkte ist real; die Ebenen

$$T_0 - (\lambda_2 + \lambda_3) T_1 + \lambda_2\lambda_3 T_2 = 0, \qquad T_1 - (\lambda_2 + \lambda_3) T_2 + \lambda_2\lambda_3 T_3 = 0,$$

deren Schnitt die Secante $\lambda_2\lambda_3$ ist, sind beide real, auch wenn λ_2 und λ_3 conjugirt complex sind.

Umgekehrt sieht man sofort: Wenn die Werthe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gegeben sind,

so bleibt der Punkt P, dessen Coordinaten den Gleichungen 2. genügen und durch dieselben eindeutig bestimmt werden, real, auch wenn zwei von den Werthen λ_1, λ_2, λ_3 conjugirt complex sind.

Jeder Ebene T ist also in Bezug auf eine Raumcurve III. O. ein auf ihr enthaltener Punkt P zugeordnet, umgekehrt jedem Punkte eine Ebene; in dem Punkte P schneiden sich die Osculationsebenen der auf der Ebene T liegenden Curvenpunkte; oder: auf der Ebene T liegen die Punkte, in welchen die Raumcurve von den drei durch P gehenden Oculationsebenen berührt wird.

Der Punkt P wird als Pol der Ebene T, die Ebene T als Polarebene des Punktes P in Bezug auf die R_3 bezeichnet.

17. A. Die Parameter λ_1 und λ_2 der Punkte einer R_3, welche dieselbe mit der durch einen gegebenen Punkt P des Raumes gehenden Secante der Curve gemein hat, lassen sich wie folgt bestimmen: Durch die Secante $\lambda_1 \lambda_2$ gehen (No. 14, 1) die beiden Ebenen

1. $T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2) T_1 + \lambda_1 \lambda_2 T_2 = 0, \quad T_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) T_2 + \lambda_1 \lambda_2 T_3 = 0.$

Diesen Gleichungen wird durch die Coordinaten von P genügt. Hat man diese Coordinaten in 1. eingesetzt, so sind in 1. nur noch die Zahlen λ_1 und λ_2 unbestimmt. Aus 1. folgt hierfür

2. $$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{T_0 T_2 - T_1^2}{T_1 T_3 - T_2^2}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{T_0 T_3 - T_1 T_2}{T_1 T_3 - T_2^2},$$

und nun lässt sich leicht die quadratische Gleichung aufstellen, deren Wurzeln die Parameter λ_1 und λ_2 sind.

Liegt P auf der Tangentenfläche von R_3, also auf der abwickelbaren Fläche III. Kl., welche R_3 zur Cuspidalkante hat, so ist $\lambda_1 = \lambda_2$, und man hat die beiden Gleichungen

$$_1^2 = \frac{T_0 T_2 - T_1^2}{T_1 T_3 - T_2^2}, \quad 2\lambda_1 = \frac{T_0 T_3 - T_1 T_2}{T_1 T_3 - T_2^2}.$$

Die ausreichende und nothwendige Bedingung für den Verein dieser beiden Gleichungen ist

3. $$4 (T_0 T_2 - T_1^2)(T_1 T_3 - T_2^2) - (T_0 T_3 - T_1 T_2)^2 = 0.$$

Wenn die Coordinaten eines Punktes dieser Gleichung genügen, so liegt der Punkt auf der Tangentenfläche von R_3; also ist 3. die Gleichung der Tangentenfläche der Raumcurve III. O.; dieselbe ist vom vierten Grade. Wir schliessen daher: Jede Gerade wird von vier Tangenten einer Raumcurve III. O. getroffen.

Die Ordnung der Tangentenfläche einer Raumcurve bezeichnet man als den Rang der Curve; eine Raumcurve III. O. ist daher vom vierten Range.

B. Ist T eine gegebene Ebene und sind μ_1 und μ_2 die Parameter der Ebenen einer Fläche $\mathfrak{R}_3$, welche sich auf T schneiden, so genügen die Coordinaten von T den beiden Gleichungen (No. 14 B, 3)

$$P_0 - (\mu_1 + \mu_2) P_1 + \mu_1 \mu_2 P_2 = 0, \quad P_1 - (\mu_1 + \mu_2) P_2 + \mu_1 \mu_2 P_3 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die unbekannten Parameterwerthe bestimmen; man erhält

$$\mu_1 \mu_2 = \frac{P_0 P_2 - P_1^2}{P_1 P_3 - P_2^2}, \quad \mu_1 + \mu_2 = \frac{P_0 P_3 - P_1 P_2}{P_1 P_3 - P_2^2}.$$

Enthält T eine auf $\mathfrak{R}_3$ gelegene Gerade (den Schnitt zweier auf einand[er] folgenden Ebenen von $\mathfrak{R}_3$), so ist $\mu_1 = \mu_2$, und man hat

$$\mu_1^2 = \frac{P_0 P_2 - P_1^2}{P_1 P_3 - P_2^2}, \quad 2\mu_1 = \frac{P_0 P_3 - P_1 P_2}{P_1 P_3 - P_2^2}.$$

Die Bedingung für den Verein dieser beiden Gleichungen ist die Gleichung der Fläche, die von den Ebenenbüscheln umhüllt wird, welche die Geraden der $\Re_3$ zu Trägern haben, nämlich

$$4(P_0P_2 - P_1^2)(P_1P_3 - P_2^2) - (P_0P_3 - P_1P_2)^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist vom vierten Grade, die durch sie dargestellte Fläche also von der vierten Klasse.

Durch eine gegebene Gerade gehen daher vier Ebenen dieser Fläche, und die Gerade wird folglich von vier Geraden der $\Re_3$ getroffen, ein Ergebniss, das mit dem in 17 A erhaltenen identisch ist.

18. Wir denken uns eine Raumcurve III. O. als Schnitt zweier Kegel II. O. K_1 und K_2. Legt man durch die Spitze von K_1 Gerade, die den Mantellinien von K_2 parallel sind, so erhält man einen Kegel K_2', der mit K_2 congruent ist, und mit K_1 die Mantelline gemein hat, welche die Spitzen von K_1 und K_2 verbindet. Die beiden Kegel K_1 und K_2' haben daher noch drei Mantellinien gemein, von denen wenigstens eine real ist. Folglich haben die beiden Kegel K_1 und K_2 drei Paar parallele Mantellinien, die Curve R_3 daher drei unendlich ferne Punkte, von denen wenigstens einer real ist.

Von einem dieser Punkte aus wird die Curve durch einen Kegel II. O. mit unendlich ferner Spitze projicirt; also lassen sich durch eine R_3 drei Cylinder II. O. legen, von denen wenigstens einer real ist.

Die Werthe des Parameters λ, welche den unendlich fernen Punkten zugehören, sind die Wurzeln der Gleichung (No. 10, 3)

$$\varphi_3 = 0.$$

Je nachdem diese Gleichung drei reale verschiedene Wurzeln, zwei gleiche und eine dritte von diesen verschiedene reale Wurzeln, oder drei gleiche reale Wurzeln, oder eine reale und zwei conjugirt complexe Wurzeln hat, besitzt die Curve drei getrennte reale, zwei vereinte und einen von diesen getrennten realen, oder drei vereinte reale, oder nur einen realen unendlich fernen Punkt. Die Tangenten der Curve, die sie in den unendlich fernen Punkten berühren, werden als Asymptoten der Curve bezeichnet. Giebt es drei reale getrennte unendlich ferne Punkte, so giebt es drei Asymptoten, die nicht unendlich fern sind; sind zwei unendlich ferne Punkte real und vereint, so hat die Curve eine unendlich ferne Tangente (unendlich ferne Asymptote), und ausserdem noch eine Asymptote, die nicht unendlich fern ist; sind drei reale unendlich ferne Punkte vereint, so ist die unendlich ferne Ebene Osculationsebene der Curve; ist nur ein realer unendlich ferner Punkt vorhanden, so hat die Curve nur eine reale Asymptote.

Hiernach zerfallen die Raumcurven III. O. in vier Gruppen von Curven, die ihren Gestaltsverhältnissen nach wesentliche Verschiedenheiten darbieten:

Cubische Hyperbel, mit drei realen Asymptoten;
cubische hyperbolische Parabel, mit einer realen Asymptote und einer unendlich fernen Tangente;
cubische Parabel, mit einer unendlich fernen Osculationsebene;
cubische Ellipse, mit einer realen und zwei imaginären Asymptoten.

19. Eine Raumcurve wird von einem Punkte P_0 aus durch einen Kegel projicirt.

Die beiden Punkte der Fläche II. O. $f = 0$, welche auf der Geraden P_0P liegen, theilen die Strecke P_0P in Verhältnissen μ, welche die Wurzeln der Gleichung sind

1. $$f_0 + 2\mu(f_{10}'x_1 + f_{20}'x_2 + f_{30}'x_3 + f_{40}'x_4) + \mu^2 \cdot f = 0.$$

Für die Punkte der Strecke $P_0 P$, die auf der Fläche II. O. $\varphi = 0$ liegen, erhält man

2. $$\varphi_0 + 2\mu(\varphi_{10}'x_1 + \varphi_{20}'x_2 + \varphi_{30}'x_3 + \varphi_{40}'x_4) + \mu^2 \cdot \varphi = 0.$$

Liegt nun P auf einem der Strahlen, durch welche die Punkte der Schnittcurve der Flächen f und φ von P_0 aus projicirt werden, so haben die Gleichungen 1. und 2. eine gemeinsame Wurzel, und diese Wurzel entspricht dem auf der Geraden $P_0 P$ liegenden Punkte der Raumcurve f, φ. Setzt man abkürzungsweise $f_{10}'x_1 + f_{20}'x_2 + f_{30}'x_3 + f_{40}'x_4 = F$, $\varphi_{10}'x_1 + \varphi_{20}'x_2 + \varphi_{30}'x_3 + \varphi_{40}'x_4 = \Phi$, so bestehen für eine gemeinsame Wurzel von 1. und 2. ausser 1. und 2. noch die Gleichungen, welche aus 1. und 2. durch Multiplication mit μ hervorgehen, so dass man den Verein von vier Gleichungen hat

$$\begin{aligned}
f_0 + 2F\cdot\mu + f\cdot\mu^2 \qquad\qquad &= 0,\\
f_0\cdot\mu + 2F\cdot\mu^2 + f\cdot\mu^3 &= 0,\\
\varphi_0 + 2\Phi\cdot\mu + \varphi\cdot\mu^2 \qquad\qquad &= 0,\\
\varphi_0\cdot\mu + 2\Phi\cdot\mu^2 + \varphi\cdot\mu^3 &= 0.
\end{aligned}$$

Aus dem Vereine dieser vier Gleichungen folgt das Verschwinden der Determinante

$$R = \begin{vmatrix} f_0 & F & f & \\ & f_0 & F & f \\ \varphi_0 & \Phi & \varphi & \\ & \varphi_0 & \Phi & \varphi \end{vmatrix} = 0.$$

Umgekehrt schliesst man leicht, dass wenn die Resultante R verschwindet, die Gleichungen 1. und 2. eine gemeinsame Wurzel haben. Denn multiplicirt man die Verticalreihen von R der Reihe nach mit 1, μ, μ^2, μ^3 und addirt dann die zweite, dritte und vierte Reihe zur ersten, so erhält man

$$R = \begin{vmatrix} G & F & f & f \\ G\mu & f_0 & F & f \\ H & \Phi & \varphi & \\ H\mu & \varphi_0 & \Phi & \varphi \end{vmatrix} = 0,$$

wobei G und H die linken Seiten der Gleichungen 1. und 2. bezeichnen. Nach den Gliedern der ersten Verticalreihe entwickelnd erhält man

3. $$R = A\cdot G + B\cdot H,$$

wo A und B lineare Functionen von μ sind.

Ist nun $R = 0$ und wählt man für μ eine Wurzel der Gleichung $G = 0$, so folgt aus 3. dass auch

$$B\cdot H = 0.$$

Da nun B vom ersten Grade ist, so folgt, dass für eine der beiden Wurzeln von $G = 0$ auch H verschwinden muss, dass also die Gleichungen $G = 0$ und $H = 0$ eine gemeinsame Wurzel haben.

Die Function R ist vom vierten Grade in Bezug auf x_1, x_2, x_3, x_4; sie lehrt daher: Die Schnittcurve zweier Flächen II. O. wird von einem beliebigen Punkte des Raumes aus durch einen Kegel IV. O. projicirt.

Wählt man P_0 auf der Schnittcurve, so ist $f_0 = \varphi_0 = 0$ und die Gleichungen 1. und 2. gehen nach Unterdrückung der selbstverständlichen gemeinsamen Wurzel $\mu = 0$ in die linearen Gleichungen über

$$2F + f\cdot\mu = 0, \quad 2\Phi + \varphi\cdot\mu = 0.$$

Projicirt der Strahl $P_0 P$ einen Punkt der Raumcurve F, φ, so ergeben diese Gleichungen denselben Werth für μ, also ist

6. $$F\varphi - \Phi f = 0.$$

Diese ist vom dritten Grade in Bezug auf x_1, x_2, x_3, x_4. Daher folgt: Eine Raumcurve IV. O. I. Sp. wird von jedem ihrer Punkte aus durch einen Kegel III. O. projicirt.

20. Haben die Flächen f und φ eine gemeinsame Gerade, so wird dieselbe von P_0 aus durch eine Ebene projicirt; diese Ebene bildet einen Theil des Kegels, der die Raumcurve (f, φ) von P aus projicirt. Eine Raumcurve III. O. wird von einem ausserhalb derselben gelegenen Punkte aus durch einen Kegel III. O. projicirt, und von einem auf ihr liegenden Punkte aus durch einen Kegel II. O.

Den letzten Theil dieses Satzes haben wir früher auf einem andern Wege gefunden.

Eine beliebige, P_0 nicht enthaltende Ebene T schneidet den Kegel Γ, welcher eine R_3 von P_0 aus projicirt, in einer ebenen Curve III. O. C_3. Jede durch P_0 gehende Ebene T_1 enthält drei Punkte von R_3, also drei Mantellinien von Γ, und die Spur von T_1 auf T enthält drei Punkte von C_3.

Jeder Punkt der C_3 erscheint als Centralprojection eines Punktes der R_3; hiervon macht nur der Punkt Δ von C_3 eine Ausnahme, der auf der durch P_0 gehenden Secante σ der R_3 liegt; Δ ist die Projection zweier Punkte der R_3, nämlich der beiden Schnittpunkte von σ und R_3. Jede durch σ gehende Ebene trifft R_3 nur noch in einem Punkte, jede durch Δ gehende Gerade der Ebene T trifft daher C_3 nur noch in einem weiteren Punkte.

Wir schliessen hieraus, dass Δ ein Doppelpunkt der Curve C_3 ist, und bezeichnen dementsprechend σ als Doppelkante des Kegels III. O. Γ. Die ebene Centralprojection einer Raumcurve III. O. ist daher eine Curve III. O. mit Doppelpunkt.

Wird R_3 von σ in zwei realen Punkten getroffen, so ist Δ ein Doppelpunkt im eigentlichen Sinne des Wortes, d. i. ein Punkt, durch welchen die Curve zweimal hindurchgeht, der Knotenpunkt einer Curvenschleife. Sind hingegen die Schnittpunkte von σ und R_3 conjugirt complex, so liegen in der Umgebung von Δ keine realen Punkte der Curve C_3 und der Doppelpunkt Δ tritt daher als isolirter Punkt der Curve auf.

21. Jede auf C_3 bezügliche ebene Figur kann man von P_0 aus projiciren und erhält so eine auf R_3 bezügliche Figur; aus jedem auf C_3 bezüglichen Satze kann man so einen analogen Satz über R_3 ableiten.

22. In Bezug auf abwickelbare Flächen IV. Kl. I. Sp. und III. Kl. erhält man folgende Sätze, deren Beweise denen in den vorhergehenden Nummern leicht nachgebildet werden können.

Die Ebenen der den beiden Flächen II. O. $f = 0$ und $\varphi = 0$ (in Ebenencoordinaten) umschriebenen abwickelbaren Fläche werden von einer beliebigen, diese Fläche nicht berührenden Ebene T_0 in den Tangenten der Grenzfläche IV Kl. geschnitten

$$\begin{vmatrix} f_0 & F & f & \\ & f_0 & F & f \\ \varphi_0 & \Phi & \varphi & \\ & \varphi_0 & \Phi & \varphi \end{vmatrix} = 0,$$

wobei

$$F = f_{10}'u_1 + f_{20}'u_2 + f_{30}'u_3 + f_{40}'u_4,$$
$$\Phi = \varphi_{10}'u_1 + \varphi_{20}'u_2 + \varphi_{30}'u_3 + \varphi_{40}'u_4.$$

Tangirt T_0 die abwickelbare Fläche, so ist die Grenzfläche von der III. Kl. und hat die Gleichung

$$F\varphi - \Phi f = 0 .$$

Eine abwickelbare Fläche III. Kl. wird von einer die Fläche nicht berührenden Ebene in einer Curve III. Kl. geschnitten; diese Curve hat eine Doppeltangente, d. i. eine Tangente, welche die Curve in zwei getrennten Punkten berührt, und durch deren Punkte (ausser der Doppeltangente selbst) nur eine Tangente der Curve geht.

Die Sätze über Curven III. Kl. mit einer Doppeltangente lassen sich daher auf die abwickelbaren Flächen III. Kl. übertragen*).

*) Ueber Raumcurven dritter Ordnung und abwickelbare Flächen dritter Klasse vergl. u. A.: v. Drach, Einleitung in die Theorie der cubischen Kegelschnitte; Schloemilch, Kahl und Cantor, Zeitschr. für Math. u. Phys. Jahrgang 12, Supplementbd. (1867).

Differentialrechnung,

bearbeitet von

Dr. Richard Heger,

Gymnasiallehrer u. a. o. Hon.-Professor am Kgl. Polytechnikum zu Dresden.

§ 1. Einleitung.

1. Wenn eine Grösse y von einer veränderlichen Grösse x abhängt, so dass verschiedene Werthe von x im Allgemeinen verschiedene Werthe von y verursachen, so bezeichnet man y als eine Function der Veränderlichen x. Da y sich mit x ändert, so ist auch y eine veränderliche Grösse; weil die Werthe von y von den Werthen der Grösse x abhängen, so bezeichnet man y als abhängige Veränderliche im Gegensatze zu der unabhängigen Veränderlichen x.

Wir beschränken uns bis auf Weiteres darauf, Functionen realer Variabeln zu betrachten.

Wenn man nur die Thatsache ausdrücken will, dass y eine Function von x ist, ohne die Art der Abhängigkeit anzugeben, so bedient man sich der Bezeichnung $y = f(x)$; verschiedene Functionen kann man durch Wahl eines andern Buchstabens oder durch Indices unterscheiden $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ . . .

Um den Werth anzudeuten, den die Function $f(x)$ für bestimmte Werthe von x annimmt, setzt man diese Werthe hinter das Functionszeichen an die Stelle von x; demnach sind $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, . . $f(\xi)$, $f(\xi)$, $f(a\xi + b)$ . . die Werthe, welche $f(x)$ annimmt, wenn man die Variable x durch die besonderen Werthe 0, 1, 2, ξ, 2ξ, $a\xi + b$ ersetzt.

2. Nimmt die Variable x um einen Betrag Δx*) zu, so wird y um einen positiven oder negativen Betrag zunehmen, den wir mit Δy bezeichnen wollen; dann hat man also

$$y = f(x), \quad y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Hieraus folgt durch Subtraction

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Wenn Δx mehr und mehr abnimmt, und der Grenze Null sich nähert, so nähert sich im Allgemeinen auch Δy der Grenze Null. Soweit dies der Fall ist, soweit also einem unendlich kleinen Zuwachse Δx der Veränderlichen ein unendlich kleiner Zuwachs Δy der Function entspricht, heisst y eine stetige Function von x.

*) Δx ist hier ein einheitliches Zeichen; die Verwechselung mit dem Produkte aus x und einem Faktor Δ ist nicht zu befürchten, da von einem solchen Faktor nicht die Rede ist.

Ist z. B. $f(x) = x^2$, so ist $f(x + \Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$, und daher

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2 .$$

Für alle endlichen Werthe von x wird dieser Ausdruck verschwindend klein, sobald Δx verschwindet; daher ist x^2 (und allgemein jede Potenz von x mit positivem Exponenten, wie man mit Hülfe des binomischen Satzes leicht nachweist) für alle Werthe der Variabeln eine stetige Function.

Ist ferner $f(x) = \sin x$*), so ist

$$f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x) = \sin x \cos\Delta x + \cos x \sin\Delta x .$$

Daher ist

$$\Delta y = \sin x (\cos\Delta x - 1) + \cos x \sin\Delta x .$$

Wird Δx verschwindend klein, so verschwinden $\cos\Delta x - 1$ und $\sin\Delta x$, also auch Δy. Hieraus folgt, dass $\sin x$ für alle realen Werthe von x eine stetige Function von x ist.

Anders verhält sich die Function

$$f(x) = \frac{1}{x - 2} .$$

Man erhält $f(x + \Delta x) = 1 : (x + \Delta x - 2)$ und daher

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x - 2} - \frac{1}{x - 2} = - \frac{\Delta x}{(x + \Delta x - 2)(x - 2)} .$$

Wenn Δx verschwindet, so geht der Nenner in den Werth $(x - 2)^2$ über. So lange x von 2 verschieden ist, ist dieser Nenner von Null verschieden; da nun der Zähler Δx verschwindet, so verschwindet auch Δy. Für alle von 2 verschiedenen Werthe von x ist also die Function $1 : (x - 2)$ stetig.

Für $x = 2$ werden aber, wenn Δx verschwindet, Zähler und Nenner von Δy zugleich Null; für einen Werth von x, der um einen verschwindenden Betrag kleiner als 2 ist, hat $1 : (x - 2)$ einen verschwindend kleinen negativen Nenner, ist also von unendlich grossem negativen Werthe; setzt man hingegen für x eine Zahl, die um verschwindend wenig grösser ist, als 2, so ist der Nenner von $1 : (x - 2)$ verschwindend klein und positiv, also hat $f(x)$ einen unendlich grossen positiven Werth. Die Function

$$y = \frac{1}{x - 2}$$

erleidet daher an der Stelle $x = 2$ eine Unterbrechung der Stetigkeit, indem für $x = 2$ die Function von $-\infty$ zu $+\infty$ überspringt.

Die Function $y = \tan g x$ wird an den Stellen $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \dots$ unstetig, denn an diesen Stellen springt y von $+\infty$ auf $-\infty$.

Die Function $y = (-a)^x$, wobei unter a eine positive Zahl verstanden werden soll, hat für $x = 0$ den Werth $y = 1$ und für $x = 1$ den Werth $y = -a$.

Bezeichnet n eine Primzahl (die wir uns beliebig gross denken können), und giebt man der Variabeln x der Reihe nach die Werthe

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \dots \frac{n-1}{n},$$

so erhält y der Reihe nach die Werthe

*) Unter x soll hier nicht ein Winkel, sondern der Arcus eines Winkels verstanden werden, d. i. der Bogen, der vom Scheitel eines Winkels aus zwischen den Schenkeln beschrieben ist und die Längeneinheit zum Halbmesser hat; ist φ der Winkel, dessen Arcus die Grösse x ist, so ist $x = \pi \cdot \varphi : 180$, wobei φ in Graden auszudrücken ist. Dasselbe gilt für die übrigen goniometrischen Functionen.

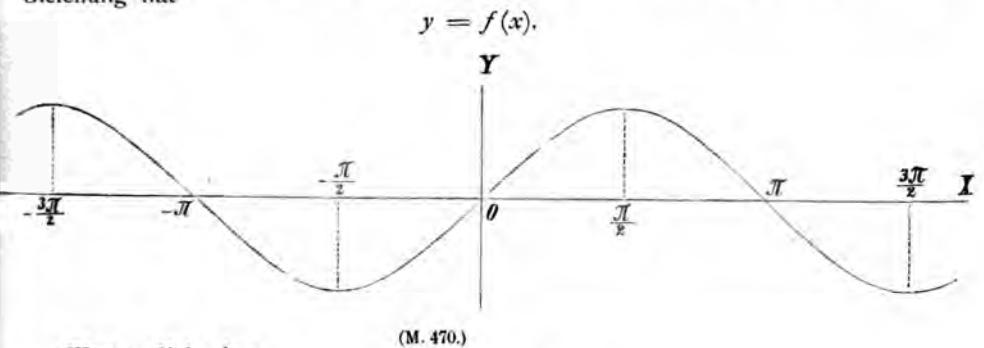
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{-a}, \quad f\left(\frac{2}{n}\right) = \sqrt[n]{(-a)^2}, \quad f\left(\frac{3}{n}\right) = \sqrt[n]{(-a)^3} \ldots$$

also, da der Wurzelexponent eine ungerade Zahl ist, abwechselnd positive und negative Werthe. Der Unterschied zweier auf einander folgenden Werthe von x ist $1:n$ und kann auf jedes Maas der Kleinheit herabgedrückt werden, sobald nur n hinlänglich gross angenommen wird. Hieraus folgt, dass die Function innerhalb des Intervalls $x = 0$ bis $x = +1$ unendlich oft von einem endlichen positiven Werthe zu einem endlichen negativen Werthe überspringt; Gleiches ergiebt sich für alle realen Werthe der Veränderlichen.

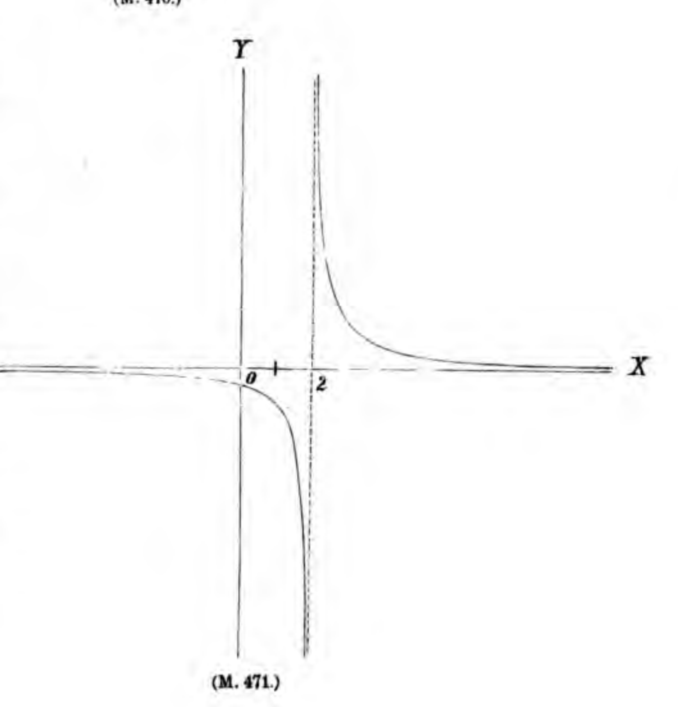
Wir beschränken uns im Folgenden auf solche Functionen, die nicht für unendlich viele, innerhalb eines endlichen Intervalls liegende Werthe der Variabeln Unterbrechungen der Stetigkeit erleiden.

3. Nimmt man x als Abscisse und y als Ordinate eines Punktes P in Bezug auf ein ebenes rechtwinkeliges Coordinatensystem, und durchläuft x die realen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, so beschreibt P eine bestimmte Curve, welche die Gleichung hat

$$y = f(x).$$



(M. 470.)



(M. 471.)

Wenn $f(x)$ eine stetige Function ist, so ist die zugehörige Curve durchaus zusammenhängend; so gehört z. B. die Gleichung $y = x^2$ einer Parabel an, deren Symmetrieachse die Y-Achse, deren Scheitel der Nullpunkt ist. Die Sinuscurve, d. i. die zu der Function

$$y = sin x$$

gehörige Curve ist in Fig. 470 dargestellt (zwischen den Abscissen $-\frac{3\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$).

Die Curve (Fig. 471)

$$y = \frac{1}{x-2}$$

ist bekanntlich eine gleichseitige Hyperbel, welche eine Asymptote parallel zur Y-Achse im Abstande 2 von derselben hat; an dieser Stelle $x = 2$ ist der Lauf der Curve unterbrochen.

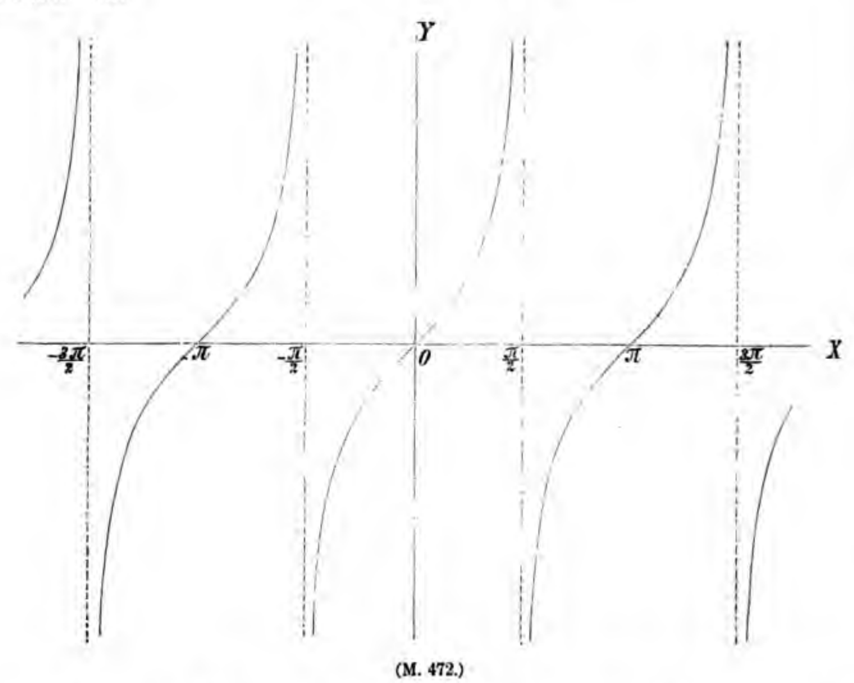
Die Curve (Fig. 472)

$$y = tang\, x$$

besteht aus unendlich vielen congruenten von einander getrennten Theilen, welche Parallelen zu der Y-Achse zu Asymptoten haben, von denen die Abscissenachse in den Punkten

$$\ldots - \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \ldots$$

getroffen wird.



(M. 472.)

4. Die Abhängigkeit einer Function y von der unabhängigen Veränderlichen x kann auch durch eine Gleichung allgemeiner Art zwischen x und y ausgedrückt werden. Wenn man diese Gleichung auf Null reducirt, so steht auf der linken Seite eine Grösse, welche x und y (neben gegebenen Zahlen) enthält, und die daher als eine Function dieser beiden Veränderlichen zu bezeichnen ist; man schreibt eine solche Gleichung symbolisch

1. $$F(x, y) = 0.$$

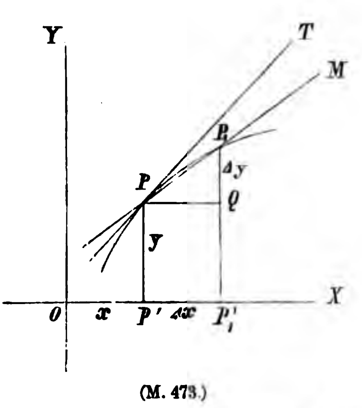
Gelingt es, diese Gleichung nach y aufzulösen, also aus ihr abzuleiten

2. $$y = f(x),$$

so ist man damit zu dem bisher betrachteten Falle zurückgekehrt. Gelingt dies aber nicht (oder wenigstens nicht durch eine endliche Anzahl von Operationen), so muss es bei dem Ausdrucke 1. bewenden. Im Falle 2. bezeichnet man y als explicite oder entwickelte Function, im Falle 1. als implicite oder unentwickelte Function der unabhängigen Variabeln x.

5. Ist P der Punkt, dessen Coordinaten x und $y = f(x)$ sind, und gehört P_1 zu den Coordinaten $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$, so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = tang\, QPP_1 .$$



(M. 473.)

Nimmt Δx zur Grenze Null ab und ist die Function $f(x)$ in der Nachbarschaft des Punktes P stetig, so nähert sich auch Δy der Grenze Null, und die Gerade PM dreht sich um den Punkt P; der Quotient $\Delta y : \Delta x$ nähert sich im Allgemeinen dabei einem bestimmten Grenzwerthe, und dieser Grenzwerth ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Abscissenachse mit derjenigen durch P gezogenen Geraden einschliesst, welche P mit einem unendlich nahe benachbarten Punkte der zur Function $y = f(x)$ gehörigen Curve verbindet Diese Gerade wird, wie aus der analytischen Geometrie bekannt ist, als die Tangente der Curve PP_1 im Punkte P bezeichnet; der Winkel der Abscissenachse mit der Tangente PT sei τ.

Der Grenzwerth des Quotienten

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = tang \tau$$

für ein verschwindendes Δx wird durch $f'(x)$ bezeichnet. Deutet man den Grenzwerth einer veränderlichen Grösse durch Vorsetzung der Buchstaben *lim**) an, und bezeichnet man einen verschwindend kleinen Zuwachs von x mit dx, den zugehörigen Zuwachs von y mit dy, so ist

$$\frac{dy}{dx} = lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Während Δx und Δy die endlichen Differenzen der Coordinaten der Punkte P_1 und P sind, haben wir in dx und dy die verschwindend kleinen Differenzen der Coordinaten des dem Punkte P unendlich nahen Curvenpunktes und des Punktes P vor uns; im Zusammenhange damit bezeichnet man dx und dy als das Differential von x, bez. von y, und demgemäss $dy : dx$ als den Differentialquotienten von y. Aus der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

leitet man die Gleichung ab

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Nachdem man den Grenzwerth

$$lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

bestimmt hat, liefert diese Gleichung das Differential von y als ein Vielfaches des Differentials der unabhängigen Variabeln x.

Die Differentialrechnung hat zunächst die Aufgabe, die Differentialquotienten der Functionen zu ermitteln; hieran reihen sich dann weitere Untersuchungen, sowie analytische und geometrische Anwendungen.

6. Ehe wir dazu übergehen können, die Differentialquotienten der Functionen aufzusuchen, haben wir einige Grenzwerthe zu bestimmen, um dadurch eine Grundlage für die folgenden Untersuchungen zu gewinnen.

---

*) *limes*, die Grenze.

A Bestimmung des Grenzwerthes von

$$\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$$

für ein ins Unendliche wachsendes ω.

Wir lassen zunächst ω die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchlaufen. Ist m eine solche, so haben wir

$$1.\quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\left(1+\frac{1}{m}-1\right)=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}.$$

Nach der bekannten Regel

$$a^{m+1}-b^{m+1}=(a-b)(a^{m}+a^{m-1}b+\ldots+ab^{m-1}+b^{m})$$

hat man ferner die Gleichung

$$2.\quad \begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}&=\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m}\right)\Bigg[\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m}\\&+\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)+\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m-2}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2}+\ldots\\&+\left(1+\frac{1}{m+1}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}+\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\Bigg].\end{aligned}$$

Ersetzt man in dem Polynom die Brüche $1:(m+1)$ überall durch $1:m$, so wird der Klammerinhalt vergrössert; jedes Glied des Polynoms wird durch diese Substitution zu $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$; man hat daher, wenn man den Klammerinhalt vorübergehend mit A bezeichnet

$$A<(m+1)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m},$$

oder, wenn ρ eine positive Grösse bezeichnet

$$A=(m+1)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}-\rho.$$

Hieraus folgt weiter

$$3.\quad \begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}&=-\frac{1}{m(m+1)}\left[(m+1)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}-\rho\right]\\&=-\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}+\frac{\rho}{m(m+1)}.\end{aligned}$$

Durch Addition von 1. und 3. ergiebt sich endlich

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=\frac{\rho}{m(m+1)}.$$

Wenn daher ω die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft, so wächst der Ausdruck

$$\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$$

unaufhörlich. Für $\omega=1000$ erhält man mit Hülfe siebenstelliger Logarithmen $(1{,}001)^{1000}=2{,}7171$, also ist

$$\lim\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}>2{,}7171.$$

Entwickelt man ferner $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ nach dem binomischen Satze, so erhält man

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}&=1+m\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{m^{2}}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{m^{3}}+\ldots\\&=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\ldots+\\&\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right).\end{aligned}$$

Ersetzt man jeden Klammerinhalt durch die Einheit, so wird der Ausdruck vergrössert und man erhält

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\ldots+\frac{1}{1\cdot2\ldots m}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7\cdot8}+\ldots+\frac{1}{7\ldots m}\right), \text{ also}$$

$$<\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{7^{m-6}}\right), \text{ d. i.}$$

$$<\frac{1}{720}\left(1-\frac{1}{7^{m-5}}\right):\left(1-\frac{1}{7}\right).$$

Geht man hier zur Grenze für ein unendlich wachsendes m über und beachtet, dass

$$lim\left(1-\frac{1}{7^{m-5}}\right)=1,$$

so erhält man schliesslich

$$lim\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega < 2+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{720}\cdot\frac{7}{6},$$

d. i. $< 2{,}7183$.

Wenn also ω die Reihe der ganzen Zahlen durchlaufend unendlich wächst, so nähert sich $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega$ einem Grenzwerthe, der zwischen 2,7171 und 2,7183 liegt. Dieser Grenzwerth wird mit e bezeichnet. Durch spätere Untersuchungen werden wir Mittel gewinnen, e bis zu jedem verlangten Genauigkeitsgrade mit leichter Mühe zu berechnen; wir werden dann finden, dass e bis auf 13 Zifferstellen genau den Werth hat

$$e = 2{,}718281828459\,.$$

Ist m keine ganze Zahl, sondern zwischen den ganzen Zahlen p und $p+1$ gelegen, so dass

$$m = p + r,$$

wo r einen echten Bruch bezeichnet, so ist offenbar

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^m > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{p+1}\right)^m.$$

Diese Ungleichung lässt die Schreibweise zu

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+r} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1-(1-r)}, \text{ oder}$$

$$\left[\left(1+\frac{1}{p}\right)^p\right]^{1+\frac{r}{p}} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left[\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1}\right]^{1-\frac{1-r}{p+1}}.$$

Wächst m unendlich, so wächst auch p unendlich und die Brüche $r:p$ und $(1-r):(p+1)$ convergiren gegen den Grenzwerth Null; die beiden äussersten Glieder convergiren daher gegen den Grenzwerth e, folglich auch das mittlere Glied.

Ist m eine negative Zahl, etwa $m = -n$, so hat man

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right).$$

Geht nun m zur Grenze $-\infty$, so wird $n = +\infty$; da nun dabei $1:(n-1)$ zur Grenze Null übergeht, so sieht man, dass auch für einen negativ unendlichen Werth von ω, — d. i. für jeden unendlichen Werth von ω die Gleichung gilt

$$4. \qquad lim\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega = e\,.$$

Setzt man $\omega = \frac{1}{\delta}$, so ist δ eine zur Grenze Null abnehmende positive oder negative Grösse, und man hat daher für ein verschwindendes δ

5. $$\lim (1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}} = e.$$

B. Ist θ eine bis zur Grenze Null abnehmende Grösse, so hat auch die Differenz

$$\delta = a^\theta - 1$$

die Null zur Grenze. Geht man in 5. zu den Logarithmen (für eine beliebige Basis) über, so erhält man

6. $$\lim \frac{\log(1 + \delta)}{\delta} = \log e.$$

Ersetzt man hier δ durch $a^\theta - 1$, so entsteht

$$\lim \frac{\log a^\theta}{a^\theta - 1} = \log e,$$

und hieraus ergiebt sich

7. $$\lim \frac{a^\theta - 1}{\theta} = \frac{\log a}{\log e} = \frac{1}{{}^a\log e}.$$

C. Ist a die Basis der Logarithmen, so hat man identisch

$$\frac{(1 + \delta)^\mu - 1}{\delta} \cdot = \frac{a^{\mu \log(1+\delta)} - 1}{\mu \log(1 + \delta)} \cdot \frac{\log(1 + \delta)}{\delta} \cdot \mu.$$

Geht δ zur Grenze Null, so convergirt auch $\log(1 + \delta)$ gegen die Grenze Null; daher folgt aus 6. u. 7.

$$\lim \frac{(1 + \delta)^\mu - 1}{\delta} = \frac{1}{{}^a\log e} \cdot {}^a\log e \cdot \mu, \quad \text{mithin}$$

8. $$\lim \frac{(1 + \delta)^\mu - 1}{\delta} = \mu.$$

D. Aus der Trigonometrie ist bekannt, dass für Bogen des ersten Quadranten

$$\sin\delta < \delta < \tang\delta.$$

Hieraus folgt weiter

$$\frac{1}{\sin\delta} > \frac{1}{\delta} > \frac{\cos\delta}{\sin\delta}; \quad \text{daher ist}$$

$$1 > \frac{\sin\delta}{\delta} > \cos\delta.$$

Geht δ zur Grenze Null über, so wird $\cos\delta = 1$; hieraus folgt der Grenzwerth

$$\lim \frac{\sin\delta}{\delta} = 1.$$

§ 2. Differentiation einfacher Functionen.

1. Ist a eine constante, also von x unabhängige Grösse, so erfährt sie durch Aenderung des x keinen Zuwachs und man hat daher

$$\frac{da}{dx} = 0,$$

wofür man auch schreibt

$$da = 0.$$

Der Differentialquotient einer Constanten ist Null.

2. Ist $y = a + x$, so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a + x + \Delta x - (a + x)}{\Delta x} = 1.$$

Daher ist auch

$$\frac{d(a+x)}{dx} = 1\,, \qquad d(a+x) = dx\,.$$

Für $y = a - x$ hat man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a - x - \Delta x - (a + x)}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1\,; \quad \text{daher ist}$$

$$\frac{d(a-x)}{dx} = -1\,, \qquad d(a-x) = -dx\,.$$

Ist ferner $y = ax$, so erhält man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x - \Delta x) - ax}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a\,.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{d(ax)}{dx} = a\,, \qquad d(ax) = a\,dx\,.$$

Bei der Bildung des Differentialquotienten von $a + x$, $a - x$ und ax ist ein Grenzübergang nicht nöthig, denn in allen drei Fällen ist der Differenzquotient constant, und daher gleich dem Differentialquotienten. Anders in den folgenden Fällen.

3. Für die Function $y = \frac{1}{x}$ ergiebt sich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}\right) : \Delta x = -\frac{1}{(x + \Delta x)x}\,.$$

Geht man zur Grenze über, so entsteht hieraus

$$\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2}\,, \qquad d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}\,.$$

4. Der Differentialquotient einer **Potenz** ergiebt sich folgendermaassen

$$\frac{d(x^m)}{dx} = lim\,\frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = x^{m-1} lim\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1\right] : \frac{\Delta x}{x}\,.$$

Da $\Delta x : x$ mit Δx verschwindet, so ist (§ 1, 6, C)

$$lim\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1\right] : \frac{\Delta x}{x} = m\,,$$

und daher schliesslich

$$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}\,, \qquad d(x^m) = mx^{m-1}dx\,.$$

Daher ist z. B.

$$d(x^2) = 2x\,dx\,, \quad d(x^3) = 3x^2\,dx\,, \quad d(x^4) = 4x^3\,dx\,, \ldots$$

$$d\left(\frac{1}{x^2}\right) = d(x^{-2}) = -2x^{-3}dx\,, \quad d\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{3}{x^4}dx\,, \quad d\left(\frac{1}{x^4}\right) = -\frac{1}{x^5}dx \ldots,$$

$$d\sqrt{x} = d\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}\,,$$

$$d\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}\,, \quad d\frac{1}{\sqrt{x}} = d\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{dx}{2\sqrt{x^3}}\,.$$

5. **Differentiation der Exponentialgrösse** a^x.

$$\frac{d(a^x)}{dx} = lim\,\frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x\,lim\,\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\,.$$

Nach § 1, No. 3, B. ist

$$lim\,\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{log\,a}{log\,e}\,,$$

d her folgt

$$\frac{d(a^x)}{dx} = \frac{log\,a}{log\,e} a^x .$$

Man hat die irrationale Zahl e als Basis eines Logarithmensystems gewählt und nennt diese Logarithmen die natürlichen Logarithmen; die Logarithmen im System mit der Grundzahl 10 heissen gegenüber den natürlichen die gemeinen Logarithmen; als Zeichen für den natürlichen Logarithmus gilt ein vor den Numerus gesetztes l, so dass also

$$la = {}^e log\,a , \quad le = 1 .$$

Hiernach hat man einfacher

$$\frac{d(a^x)}{dx} = la \cdot a^x , \qquad d(a^x) = la \cdot a^x\,dx .$$

Insbesondere ist

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x , \qquad d(e^x) = e^x\,dx .$$

6. Differentiation des Logarithmus.

$$\frac{d\,log\,x}{dx} = lim \frac{log(x + \Delta x) - log\,x}{\Delta x} = lim \frac{1}{\Delta x} log \frac{x + \Delta x}{x}$$

$$= lim\,log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\,lim\,log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} .$$

Nach § 2, No. 3, B hat man

$$lim\,log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = log\,e ,$$

und daher

$$\frac{d\,log\,x}{dx} = log\,e \cdot \frac{1}{x} , \quad d\,log\,x = log\,e \cdot \frac{dx}{x} .$$

Insbesondere folgt für den natürlichen Logarithmus

$$\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x} , \quad dlx = \frac{dx}{x} .$$

7. Differentiation von $sin\,x$.

$$\frac{d\,sin\,x}{dx} = lim \frac{sin(x + \Delta x) - sin\,x}{\Delta x .} .$$

Nach der bekannten goniometrischen Formel

$$sin\,\alpha - sin\,\beta = 2 cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\,sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

hat man

$$\frac{sin(x + \Delta x) - sin\,x}{\Delta x} = \frac{2 cos(x + \frac{1}{2}\Delta x)\,sin \frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \frac{cos(x + \frac{1}{2}\Delta x)\,sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} .$$

Wenn Δx sich der Grenze Null nähert, so nähern sich $cos(x + \frac{1}{2}\Delta x)$ und $sin\,\frac{1}{2}\Delta x : \frac{1}{2}\Delta x$ den Grenzen $cos\,x$ und 1 (§ 1, No. 3, D) und es ist daher

$$\frac{d\,sin\,x}{dx} = cos\,x , \quad d\,sin\,x = cos\,x \cdot dx .$$

8. Differentiation von $cos\,x$.

$$\frac{d\,cos\,x}{dx} = lim \frac{cos(x + \Delta x) - cos\,x}{\Delta x} .$$

Nach der Formel

$$cos\,\alpha - cos\,\beta = -\,2 sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\,sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

hat man

$$\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=-\frac{2\sin\frac{1}{2}(x+\Delta x)\cdot\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}=-\frac{\sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Geht Δx zur Grenze Null über, so erhält man hieraus

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x,\quad d\cos x=-\sin x\,dx.$$

9. Differentiation von $tang\,x$.

$$\frac{d\,tang\,x}{dx}=\lim\frac{tang\,(x+\Delta x)-tang\,x}{\Delta x}.$$

Man hat

$$tang\,\alpha-tang\,\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{tang(x+\Delta x)-tang\,x}{\Delta x}=\frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cos x}\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}.$$

Geht man zur Grenze über, so folgt

$$\frac{d\,tang\,x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x},\quad d\,tang\,x=\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

10. Differentiation von $\cot x$. Wendet man die Formel (No. 3.)

$$d\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{dz}{z^2}$$

auf den Fall $z=tang\,x$ an, so erhält man zunächst

$$d\left(\frac{1}{tang\,x}\right)=-\frac{d\,tang\,x}{tang^2\,x},\text{ also nach No. 9}$$

$$=-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Ersetzt man nun links $1:tang\,x$ durch $\cot x$, so folgt

$$d\cot x=-\frac{dx}{\sin^2 x},\quad \frac{d\cot x}{dx}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

11. Differentiation von $\sec x$. Man erhält

$$d\sec x=d\left(\frac{1}{\cos x}\right)=-\frac{d\cos x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x};\quad\text{folglich ist}$$

$$d\sec x=\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx,\quad \frac{d\sec x}{dx}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

12. Differentiation von $cosec\,x$. Hierfür ergiebt sich

$$d\,cosec\,x=d\left(\frac{1}{\sin x}\right)=-\frac{d\sin x}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x},\quad\text{also}$$

$$d\,cosec\,x=-\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x},\quad \frac{d\,cosec\,x}{dx}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

13. Differentiation $Arc\sin x$. Unter $Arc\sin x$ versteht man den Bogen dessen Sinus die Grösse x hat. Da der Sinus eines Bogens nicht kleiner als -1 und nicht grösser als $+1$ sein kann, so folgt, dass die Function $Arc\sin x$ nur eine Bedeutung hat, so lange x den Spielraum innehält*)

$$-1\leqq x\leqq+1.$$

Es giebt unzählige Bogen, die einen gegebenen Sinus haben; die Function

*) Später, bei der Einführung complexer Werthe der Functionen und complexer Variabeln wird die Definition von $Arc\sin x$ so erweitert werden, dass die Function für alle Werthe von x eine Bedeutung hat.

Arc sin x ist also eine unendlich vieldeutige Function. Einer der Bogen, deren Sinus gleich x ist, liegt zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$; diesen besonderen Bogen wollen wir mit *arc sin x* bezeichnen, so dass also

$$-\tfrac{1}{2}\pi \leqq arc\,sin\,x \leqq +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Die Function *arc sin x* ist eine eindeutige Function von x; aus ihr erhält man den innerhalb des zweiten oder dritten Quadranten enthaltenen Werth von *Arc sin x*

$$\pi - arc\,sin\,x\,,$$

und aus *arc sin x* und $\pi -$ *arc sin x* alle möglichen realen Werthe von *Arc sin x* durch Addition und Subtraction einer ganzen Anzahl von Peripherien, so dass

$$Arc\,sin\,x = \begin{cases} \quad arc\,sin\,x + 2k\pi\,, \\ \pi - arc\,sin\,x + 2k\pi\,, \end{cases}$$

wobei k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Aus der Formel (No. 7)

$$d\,sin\,\varphi = cos\,\varphi\,d\varphi$$

folgt

$$d\varphi = \frac{d\,sin\,\varphi}{cos\,\varphi}.$$

Setzt man hier $sin\,\varphi = x$, so ist $\varphi = Arc\,sin\,x$ und $cos\,\varphi = \sqrt{1 - sin^2\varphi}$ $= \sqrt{1 - x^2}$. Daher hat man

$$d\,Arc\,sin\,x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \frac{d\,Arc\,sin\,x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

14. Differentiation von *Arc cos x*. Unter *Arc cos x* versteht man den Bogen, dessen Cosinus gleich x ist. Es giebt unendlich viele Bogen, die denselben Cosinus haben, daher ist *Arc cos x* eine unendlich vieldeutige Function. Für jeden Werth von x, der zwischen den Grenzen liegt

$$+1 \leqq x \leqq -1$$

giebt es einen Bogen innerhalb der ersten Halbperipherie, dessen Cosinus gleich x ist; diesen eindeutig bestimmten Bogen wollen wir mit *arc cos x* bezeichnen, so dass also

$$0 \leqq arc\,cos\,x \leqq \pi.$$

Der innerhalb 0 und $-\pi$ gelegene Werth von *Arc cos x* folgt hieraus zu

$$-\,arc\,cos\,x\,,$$

denn entgegengesetzt gleiche Bogen haben denselben Cosinus. Aus diesen beiden, innerhalb einer Peripherie liegenden Werthen erhält man alle die unendlich vielen Werthe von *Arc cos x*

$$Arc\,cos\,x = \begin{cases} -\,arc\,cos\,x + 2k\pi\,, \\ \quad arc\,cos\,x + 2k\pi\,. \end{cases}$$

Von der Formel (No. 8) ausgehend

$$d\,cos\,\varphi = -\,sin\,\varphi\,d\varphi\,,$$

erhält man

$$d\varphi = -\frac{d\,cos\,\varphi}{sin\,\varphi}.$$

Setzt man $cos\,\varphi = x$, so wird $\varphi = Arc\,cos\,x$, $sin\,\varphi = \sqrt{1 - x^2}$ und man hat daher

$$d\,Arc\,cos\,x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \frac{d\,Arc\,cos\,x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Die Grösse $\sqrt{1-x^2}$ stellt in $Arc\,sin\,x$ und $Arc\,cos\,x$ den Cosinus, bez. den Sinus des differentiirten Bogens dar; hiernach ist das Vorzeichen der Wurzel in jedem Falle eindeutig bestimmt.

Hieraus folgt z. B., dass in den Fällen

$$d\,arc\,sin\,x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad d\,arc\,cos\,x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

der positive Werth der Wurzel zu nehmen ist.

15. Differentiation von $Arc\,tang\,x$. Unter $Arc\,tang\,x$ versteht man den Bogen, dessen Tangente gleich x ist. Für jeden realen Werth von x giebt es reale Werthe der Function $Arc\,tang\,x$, und zwar unendlich viele. Bezeichnet man mit $Arc\,tang\,x$ den zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ gelegenen Bogen, dessen Tangente gleich x ist, so dass also

$$-\tfrac{1}{2}\pi \leqq arc\,tang\,x \leqq +\tfrac{1}{2}\pi,$$

so findet man alle möglichen Werthe von $arc\,tang\,x$ aus

$$Arc\,tang\,x = arc\,tang\,x + k\pi.$$

Aus $d\,tang\,\varphi = \dfrac{d\varphi}{cos^2\varphi}$ findet man

$$d\varphi = cos^2\varphi \cdot d\,tang\,\varphi.$$

Setzt man nun $tang\,\varphi = x$, so ist $x = Arc\,tang\,\varphi$ und $cos^2\varphi = 1:(1+tang^2\varphi) = 1:(1+x^2)$. Daher hat man

$$d\,Arc\,tang\,x = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \frac{d\,Arc\,tang\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

§ 3. Differentiation zusammengesetzter und unentwickelter Functionen.

1. Differentiation einer Summe und einer Differenz. Sind u und v zwei Functionen von x, so ist

$$\frac{d(u \pm v)}{dx} = lim\,\frac{u + \Delta u \pm (v + \Delta v) - (u \pm v)}{\Delta x} = lim\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}\right).$$

Daher ist

$$\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}, \quad \text{oder} \quad d(u \pm v) = du \pm dv.$$

2. Differentiation eines Polynoms. Ist

$$y = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \ldots + a_n u_n,$$

und bedeuten $a_1, a_2 \ldots a_n$ constante Coefficienten, hingegen $u_1, u_2 \ldots u_n$ Functionen von x, so ist

$$\frac{dy}{dx} = lim\,\frac{a_1(u_1 + \Delta u_1) + \ldots + a_n(u_n + \Delta u_n) - (a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n)}{\Delta x}$$

$$= lim\left(a_1 \frac{\Delta u_1}{\Delta x} + a_2 \frac{\Delta u_2}{\Delta x} + \ldots + a_n \frac{\Delta u_n}{\Delta x}\right).$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{dy}{dx} = a_1 \frac{du_1}{dx} + a_2 \frac{du_2}{dx} + a_3 \frac{du_3}{dx} + \ldots + a_n \frac{du_n}{dx}.$$

Oder

$$d(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u \ldots + a_n u_n) = a_1 du_1 + a_2 du_2 + a_3 du_3 + \ldots + a_n du_n.$$

Hiernach ist z. B. (vergl. § 2, No. 4)

$$d(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n) = (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1})dx,$$

denn $d(1) = 0$, $dx = dx$, $dx^2 = 2x\,dx$, $dx^3 = 3x^2\,dx$ u. s. w.

3. Differentiation eines Produktes.

$$\frac{d(uv)}{dx} = lim\,\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv}{\Delta x} = lim\,\frac{v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\,\Delta v}{\Delta x}$$

$$= v\cdot lim\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\,lim\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + lim\,\frac{\Delta u\,\Delta v}{\Delta x}.$$

Unter der Voraussetzung, dass Δu und Δv mit Δx zugleich verschwinden, und dass entweder $\Delta u : \Delta x$ oder $\Delta v : \Delta x$ einen endlichen Grenzwerth hat, ist

$$lim\,\frac{\Delta u\,\Delta v}{\Delta x} = lim\,\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v = lim\,\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta u = 0,$$

als das Produkt einer endlichen und einer verschwindend kleinen Grösse. Hieraus folgt

$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}, \quad d(uv) = vdu + udv.$$

4. Um das Produkt $y = u_1 u_2 u_3 u_4 \ldots u_n$ zu differentiiren, kann man zunächst zu den Logarithmen übergehen

$$ly = lu_1 + lu_2 + lu_3 + \ldots + lu_n.$$

Differentiirt man beide Seiten dieser Gleichung durch wiederholte Anwendung der Formel $dlz = dz : z$, so erhält man

$$\frac{dy}{y} = \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \frac{du_3}{u_3} + \ldots + \frac{du_n}{u_n}.$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichung mit $y = u_1 u_2 \ldots u_n$, so ergiebt sich

$$d(u_1 u_2 u_3 \ldots u_n) = u_1 u_2 u_3 \ldots u_n \left(\frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \frac{du_3}{u_3} + \ldots + \frac{du_n}{u_n}\right),$$

oder

$$\frac{d(u_1 u_2 u_3 \ldots u_n)}{dx} = u_1 u_2 u_3 \ldots u_n \left(\frac{1}{u_1}\cdot\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{u_2}\cdot\frac{du_2}{dx} + \frac{1}{u_3}\cdot\frac{du_3}{dx} + \ldots + \frac{1}{u_n}\cdot\frac{du_n}{dx}\right).$$

5. In gleicher Weise findet man den Differentialquotienten des allgemeineren Produktes

$$y = u_1^\alpha \cdot u_2^\beta \cdot u_3^\gamma \ldots u_n^\nu,$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma \ldots \nu$ constante Exponenten sind. Man hat zunächst

$$ly = \alpha l u_1 + \beta l u_2 + \gamma l u_3 \ldots + \nu l u_n.$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{\beta}{u_2}\frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{\nu}{u_n}\frac{du_n}{dx},$$

und schliesslich

$$\frac{dy}{dx} = u_1^\alpha u_2^\beta u_3^\gamma \ldots u_n^\nu \left(\frac{\alpha}{u_1}\cdot\frac{du_1}{dx} + \frac{\beta}{u_2}\cdot\frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{\nu}{u_n}\cdot\frac{du_n}{dx}\right).$$

6. Differentiation eines Quotienten. Um $y = u : v$ zu differentiiren, kann man sich der vorigen Formel bedienen, indem man $u_1 = u$, $\alpha = 1$, $u_2 = v$, $\beta = -1$ setzt. Doch erhält man ebenso rasch unmittelbar aus

$$ly = lu - lv$$

die Gleichung

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}, \quad \text{also}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u}{v}\left(\frac{du}{u} - \frac{dv}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},$$

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{1}{v^2}\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right).$$

Hiernach ergiebt sich z. B.

$$d\,tang\,x = d\left(\frac{sin\,x}{cos\,x}\right) = \frac{cos\,x\,d\,sin\,x - sin\,x\,d\,cos\,x}{cos^2 x}$$

$$= \frac{cos\,x \cdot cos\,x\,dx - sin\,x \cdot (-\,sin\,x)\,dx}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}\,dx\,,$$

in Uebereinstimmung mit § 2, 9.

Als zweites Beispiel wählen wir

$$d\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = \frac{(1-x)\,d(1-x^n) - (1-x^n)\,d(1-x)}{(1-x)^2}.$$

Da nun $d(1-x^n) = -\,dx^n = -\,nx^{n-1}dx$, und $d(1-x) = -\,dx$, so ist

$$1.\quad d\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = \frac{-(1-x)\cdot nx^{n-1} + (1-x^n)}{(1-x)^2}\,dx = \frac{-\,nx^{n-1} + nx^n + 1 - x^n}{(1-x)^2}\,dx$$

$$= \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)\,x^n}{(1-x)^2}\,dx\,.$$

Da nun aber bekanntlich

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n,$$

so ist auch

$$2.\quad d\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

Vergleicht man 1. und 2., so findet man die Summenformel

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)\,x^n}{(1-x)^2};$$

dieses Resultat kann man leicht durch Ausrechnung des rechts stehenden Quotienten prüfen.

7. Differentiation der Function einer Function. Ist u eine Function von x, und y eine Function von u, so dass man hat

$$y = F(u)\,, \qquad u = f(x)\,,$$

so ist $y = F[f(x)]$ und daher

$$\frac{dy}{dx} = lim\,\frac{F[f(x+\Delta x)] - F[f(x)]}{\Delta x}.$$

Nun ist aber $f(x+\Delta x) = u + \Delta u$, daher

$$\frac{dy}{dx} = lim\,\frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta x}.$$

Hierfür kann man setzen

$$\frac{dy}{dx} = lim\,\frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Dies ergiebt als Regel zur Differentiation einer Function von einer Function

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Zur Anwendung berechnen wir den Differentialquotienten von $arc\,cot\,x$. Der Arcus, dessen Cotangente gleich x, hat eine Tangente vom Betrage $1:x$, also hat man

$$arc\,cot\,x = arc\,tang\,\frac{1}{x}\,.$$

Setzt man nun $1:x = u$, so kann man die vorige Formel verwenden, indem man $F(u)$ durch $arc\,tang\,u$ ersetzt; man erhält zunächst

$$\frac{d\,arc\,cot\,x}{dx} = \frac{d\,arc\,tang\,u}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\frac{d\,arc\,tang\,u}{du} = \frac{1}{1+u^2} = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad \frac{du}{dx} = d\frac{1}{x} : dx = -\frac{1}{x^2};$$

daher hat man schliesslich

$$\frac{d\,arc\,cot x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}, \quad d\,arc\,cot\,x = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

Sowie Cotangente und Tangente, so sind auch Secante und Cosinus, Cosecante und Sinus desselben Bogens reciprok; daher hat man

$$arc\,sec\,x = arc\,cos\frac{1}{x}, \quad arc\,cosc\,x = arc\,sin\frac{1}{x}.$$

Setzt man wieder $1 : x = u$, so ist

$$\frac{d\,arc\,sec x}{dx} = \frac{d\,arc\,cos u}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \quad \frac{d\,arc\,cosc\,x}{dx} = \frac{d\,arc\,sin u}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Setzt man hier die Werthe ein

$$\frac{d\,arc\,cos u}{du} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \frac{d\,arc\,sin u}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2},$$

so erhält man schliesslich

$$\frac{d\,arc\,sec x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad d\,arc\,sec\,x = \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d\,arc\,cosc\,x}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad d\,arc\,cosc\,x = -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

8. Das bisher Mitgetheilte wollen wir an einigen Beispielen einüben.

A. Um die Function $y = x^x$ zu differentiiren, nehmen wir die Logarithmen und erhalten

$$ly = x\,lx.$$

Die rechte Seite ist ein Produkt, und daher

$$dly = x\,dlx + lx\,dx, \quad \text{folglich}$$

$$\frac{dy}{y} = x \cdot \frac{dx}{x} + lx \cdot dx = (1 + lx)\,dx.$$

Hieraus ergiebt sich schliesslich

$$d(x^x) = x^x\,(1 + lx)\,dx.$$

B. Sind u und v Functionen von x, so bilde man, um u^v zu differentiiren

$$l(u^v) = v\,lu;$$

Daher hat man

$$d(u^v) = u^v\left(v \cdot \frac{du}{u} + lu \cdot dv\right).$$

C. Differential von $(a + bx^n)^p$.

Setzt man $a + bx^n = u$, so hat man zunächst

$$du^p = pu^{p-1}\,du.$$

Da nun $du = d(a + bx^n) = nbx^{n-1}\,dx$, so folgt schliesslich

$$d(a + bx^n)^p = pnb\,(a + bx^n)^{p-1}\,x^{n-1}\,dx.$$

D. Differential von $l\,(a + bx)$.

Setzt man $a + bx = u$, so hat man

$$dl\,(a + bx) = dlu = \frac{du}{u}.$$

Da nun $du = d\,(a + bx) = b\,dx$, so folgt

$$dl\,(a + bx) = \frac{b\,dx}{a + bx}.$$

E. Differential von $l\frac{1+x}{1-x}$. Man hat

$$dl\frac{1+x}{1-x} = dl(1+x) - dl(1-x) = \frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x}, \text{ daher}$$

$$dl\frac{1+x}{1-x} = \frac{2dx}{1-x^2}.$$

F. Differential von $l(x+\sqrt{1+x^2})$.

$$dl(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{d(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(dx+d\sqrt{1+x^2}).$$

Da nun $d\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x dx}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$, so ist

$$dx + d\sqrt{1+x^2} = \left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

Setzt man dies oben ein, so erhält man

$$dl(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

G. Differential von $\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}$.

$$d\left(\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}\right) = \frac{1}{a+bx^2}(\sqrt{a+bx^2}\cdot dx - x d\sqrt{a+bx^2});$$

nun ist $d\sqrt{a+bx^2} = \frac{bx\,dx}{\sqrt{a+bx^2}}$; folglich ist

$$\sqrt{a+bx^2}\cdot dx - x d\sqrt{a+bx^2} = \left(\sqrt{a+bx^2} - \frac{bx^2}{\sqrt{a+bx^2}}\right)dx = \frac{a dx}{\sqrt{a+bx^2}}.$$

Also folgt

$$d\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{a dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}}.$$

H. Differential von $xlx - x$.

$$d(xlx - x) = x\,dlx + lx\cdot dx - dx$$

$$= x\cdot\frac{dx}{x} + lx\,dx - dx; \text{ folglich ist}$$

$$d(xlx - x) = lx\cdot dx.$$

I. Differential von $l\sin x$ und $l\cos x$.

$$dl\sin x = \frac{d\sin x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x}dx, \text{ d. i.}$$

$$dl\sin x = \cot x\cdot dx.$$

$$dl\cos x = \frac{d\cos x}{\cos x} = -\operatorname{tang} x\,dx.$$

K. Differential von $l\operatorname{tang} x$.

$$dl\operatorname{tang} x = \frac{d\operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x} = \frac{dx}{\cos^2 x\operatorname{tang} x} = \frac{dx}{\sin x\cos x}, \text{ also}$$

$$dl\operatorname{tang} x = \frac{2dx}{\sin 2x}.$$

Setzt man $2x = u$, so ist $2dx = du$, und man erhält

$$dl\operatorname{tang}\frac{u}{2} = \frac{du}{\sin u}.$$

L. Differential von $l\cot x$.

Da $l\cot x = l(1 : \operatorname{tang} x) = -l\operatorname{tang} x$, so ist auch

$$dl\,cot\,x = -\frac{2\,dx}{sin\,2x}.$$

Setzt man $\frac{\pi}{2} - 2x = u$, so ist $du = -2dx$, $sin\,2x = cos\,u$, und $x = \frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}$; daher erhält man

$$dl\,cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) = \frac{du}{cos\,u}.$$

Da $cot\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = tang\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$, so kann man hierfür auch schreiben

$$dl\,tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) = \frac{du}{cos\,u}.$$

---

9. **Differentialquotient unentwickelter Functionen.**

Wird die Abhängigkeit der Grösse y von der unabhängigen Veränderlichen x durch eine Gleichung hergestellt

$$F(x, y) = 0,$$

und ist wieder $y + \Delta y$ der Werth der abhängigen Veränderlichen, welcher dem Werthe $x + \Delta x$ der unabhängigen entspricht, so ist auch

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Daher ist

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

Diese Gleichung kann man durch folgende ersetzen

$$\frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = 0,$$

in welche der Quotient $\Delta y : \Delta x$ passend eingeführt ist. Geht man zur Grenze für verschwindende Werthe von Δx und Δy über, so erhält man zunächst

$$1.\quad \frac{dy}{dx} \cdot lim\,\frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y)}{\Delta y} + lim\,\frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = 0.$$

Nach der ursprünglichen Definition des Differentialquotienten ist der erste Grenzwerth, wenn man zunächst nur Δy verschwinden lässt, der Differentialquotient der Function $F(x + \Delta x, y)$, wenn man in dieser Function bei dieser Differentiation nur y als Variable, x dagegen als Constante betrachtet. Um an diese Voraussetzung zu erinnern, wollen wir diesen Differentialquotienten durch den Buchstaben ∂ (statt d) auszeichnen, und haben daher

$$lim\,\frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y)}{\Delta y} = lim\,\frac{\partial F(x + \Delta x, y)}{\partial y}.$$

Lässt man nun auch Δx verschwinden, so erhält man

$$lim\,\frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}.$$

Der zweite Grenzwerth in 1. ist der Differentialquotient von $F(x, y)$, wenn man nur x als variabel betrachtet. Wir bezeichnen denselben mit

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y},$$

und erhalten daher schliesslich aus 1. die Gleichung

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0.$$

Diese Gleichung liefert den verlangten Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} : \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}.$$

Die Grössen

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

nennt man die partialen Differentialquotienten der Function $F(x, y)$ nach x bez. nach y.

A. Ist z. B. $F(x, y) = b^2x^2 \pm a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, so ist

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 2b^2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \pm 2a^2y, \quad \text{und daher} \quad \frac{dy}{dx} = \mp \frac{b^2x}{a^2y}.$$

B. Ist $F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, so ist

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 2Ax + 2By + 2D, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2Bx + 2Cy + 2E,$$

folglich $$\frac{dy}{dx} = -\frac{Ax + By + D}{Bx + Cy + E}.$$

C. Für $F(x, y) = y - x \sin y = 0$ ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\sin y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - x\cos y,$$

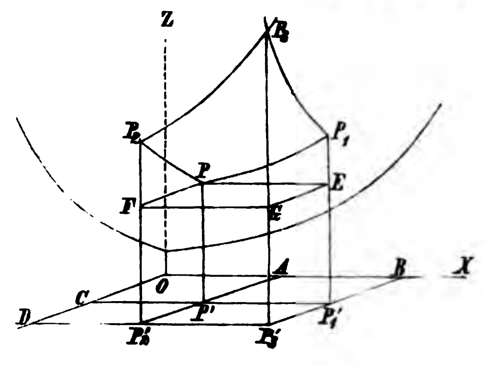
folglich $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{1 - x\cos y}.$$

D. Aus $F(x, y) = x^y - y^x$ folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yx^{y-1} - y^x ly, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^y lx - xy^{x-1}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^x ly - yx^{y-1}}{x^y lx - xy^{x-1}}.$$

§ 4. Differential einer Function mehrerer Variabeln.

1. Unter den Functionen mehrerer unabhängigen Variabeln sind die Functionen zweier Variabeln am leichtesten zugänglich, weil sie am leichtesten anschaulich gemacht werden können. Sind x, y zwei unabhängige Variable, und ist z die abhängige, so dass $z = f(x, y)$, so lehrt die analytische Geometrie des Raumes die Variabeln x und y als Coordinaten eines Punktes P' der horizontalen Ebene eines rechtwinkeligen Coordinatensystems zu betrachten, und z als die parallel der Z-Achse gemessene Ordinate eines zum Grundriss P' gehörenden Raumpunktes P. Durchlaufen nun x und y alle möglichen realen Werthe, so beschreibt P' die ganze Horizontalebene, und P beschreibt eine durch die Gleichung $z = f(x, y)$ charakterisirte Fläche, durch welche die Function $f(x, y)$ geometrisch dargestellt wird.



(M. 474.)

Es sei P ein Punkt der Fläche $z = f(x, y)$, und $OA = x$, $AP' = y$, $P'P = z$. Wächst x um $\Delta x = AB$, während y unverändert bleibt, so bewegt sich P' parallel der X-Achse bis zu P_1', und man hat

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{EP_1}{PE} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Der Grenzwerth dieses Differenzquotienten $\Delta z : \Delta x$, der unter der Voraussetzung gebildet wird, dass y dabei als constant gilt, ist der partiale Differentialquotient von z in Bezug auf x (oder kürzer »von z nach x«); er ist die

trigonometrische Tangente des Winkels, den die Tangente der Curve PP_1 im Punkte P mit der X-Achse bildet.

Aendert sich y um $\Delta y = CD$, während x constant bleibt, so beschreibt P eine Bahn auf der Fläche, die mit der YZ-Ebene parallel ist, und man hat, wenn man die jetzt eintretende Aenderung von z mit $\Delta_1 z$ bezeichnet.

$$\frac{\Delta_1 z}{\Delta y} = \frac{FP_2}{PF} = \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Der Grenzwerth ist der partiale Differentialquotient von z in Bezug auf y; er ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Tangente der Curve PP_2 in P mit der Y-Achse einschliesst.

Aendern sich beide Coordinaten x und y um Δx bez. Δy, so kommen P' und P nach P_3' und P_3. Nehmen nun Δx und Δy bis zur Grenze Null ab, so bewegt sich der zu $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ gehörige Punkt von P_3 nach P, der Weg, den er dabei auf der Fläche beschreibt, hängt davon ab, in welcher Weise Δx und Δy abnehmen, und ist unbestimmt, so lange über die Art der Abnahme von Δx und Δy nichts Näheres bekannt ist. Wenn z. B. zuerst Δy verschwindet, und dann Δx, so geht der Punkt von P_3 parallel zur YZ-Ebene nach P_1 und dann parallel der XZ-Ebene nach P; verschwindet zuerst Δx und dann Δy, so geht der Punkt von P_3 zunächst nach P_2 und dann nach P; nehmen Δx und Δy zugleich ab, so liegt der Weg des Punktes im Innern des Curvenvierecks $PP_1P_2P_3$.

Um einen Weg festzusetzen, auf welchem P_3 nach P gelangen soll, können wir den Weg vorschreiben, den die Horizontalprojection durchlaufen soll; dies geschieht, indem wir y als eine gegebene Function von x betrachten. Setzen wir $y = \varphi(x)$, so erscheint $z = f(x, y)$ als eine Function von x allein und es ist

$$\frac{dz}{dx} = lim \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Hierfür kann man wie in § 4, No. 9 setzen

$$lim \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

dies ergiebt

$$1. \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Durch Multiplication mit dx kann man dies ersetzen durch

$$2. \qquad dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot dy.$$

Man bezeichnet die Ausdrücke

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot dx \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

als die partialen Differentiale von z; es sind dies die unendlich kleinen Aenderungen, welche z erfährt, wenn nur x oder nur y sich um unendlich wenig ändern. Der Ausdruck dz, der die verschwindend kleine Aenderung von z angiebt, welche durch verschwindend kleine Aenderungen beider Variabeln erzeugt wird, heisst das totale Differential von z. Man erhält somit den Satz: Das totale Differential einer Function zweier Variabeln ist die Summe ihrer partialen Differentiale.

Der Sinn der Gleichung

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$

ist folgender: Je näher die Veränderungen Δx und Δy der Grenze Null kommen,

um so genauer stimmt die zugehörige Veränderung von z mit dem Ausdrucke überein

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y.$$

Die Grenzwerthe der Verhältnisse zusammengehöriger Veränderungen von x, y, z ergiebt die Proportion

$$dz : dx : dy = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) : dx : dy.$$

2. Ist y eine Function dreier unabhängigen Variabeln x_1, x_2, x_3, so kann man zunächst x_3 als Function von x_2 betrachten und nun nach dem Vorhergehenden das totale Differential von y finden. Richtet man dann die Formeln so ein, dass die Art des Zusammenhanges von x_2 und x_3 in denselben keinen Ausdruck findet, so gelten sie unabhängig von jeder Art dieses Zusammenhanges, gelten also ohne Rücksicht auf jede Abhängigkeit von x_1, x_2 und x_3 (was nichts anderes sagen will, als dass sie für jede mögliche Abhängigkeit Geltung haben).

Denken wir uns x_3 als Function von x_2, und demgemäss durch $\varphi(x_2)$ in f ersetzt, und bezeichnen das Resultat dieser Substitution mit (f), so ist

$$dy = \frac{\partial (f)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial (f)}{\partial x_2} dx_2.$$

Auf den partialen Differentialquotienten von y nach x_1 hat es keinen Einfluss, ob man sich x_3 mit x_2 verbunden denkt oder nicht, da bei dieser Differentiation beide Grössen als Constante betrachtet werden; daher ist

$$\frac{\partial (f)}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Für $\frac{\partial (f)}{\partial x_2}$ ergiebt sich durch Anwendung der Formel (No. 1, 1)

$$\frac{\partial (f)}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dx_2}.$$

Setzt man diesen Werth in 1. ein und beseitigt den Divisor dx_2, so erhält man

$$1. \quad df(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3.$$

Nimmt man an, die Formel

$$df(x_1, \ldots x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

sei für eine bestimmte Zahl n bewiesen, so gilt auch die Formel

$$2. \quad df(x_1 \ldots x_n, x_{n+1}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1}.$$

Denkt man sich bei einer Function von $(n + 1)$ Variabeln zunächst noch x_{n+1} abhängig von x_n und ersetzt dementsprechend x_{n+1} in der Function f durch x_n, so erhalte man hierdurch die Function (f). Man hat dann

$$3. \quad df = \frac{\partial (f)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial (f)}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial (f)}{\partial x_n} dx_n.$$

Für die partialen Differentiationen nach $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n-1}$ ist es gleichgültig, ob x_n und x_{n+1} abhängig von einander sind oder nicht; also kann man hier überall (f) durch f ersetzen. Für den letzten Differentialquotienten von (f) erhält man nach No. 1, 1

$$\frac{\partial (f)}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \cdot \frac{dx_{n+1}}{dx_n}.$$

Setzt man dies in 3. ein, so erhält man

4. $$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1}.$$

Gilt also die Formel für das totale Differential bei einer Function von n Variabeln, so gilt sie auch bei $n + 1$ Variabeln. Da sie nun bei drei Variabeln gilt, so gilt sie allgemein.

3. Ist y eine Function mehrerer Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$,

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

und sind diese wieder Functionen einer unabhängigen Variabeln t,

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \ldots$$

so hat man zunächst

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Nun ist weiter

$$dx_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} dt, \quad dx_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} dt, \quad dx_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} dt, \ldots.$$

Daher ist

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} \cdot dt + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{d\varphi_n}{dt} dt.$$

Dividirt man durch dt und ersetzt $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ durch $x_1, \ldots x_n$, so erhält man den gesuchten Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}.$$

4. Wenn n Variable $x_1, x_2, \ldots . x_n$ so von einander abhängig sind, dass eine gegebene Function derselben verschwindet

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = 0,$$

so müssen auch die endlichen oder verschwindend kleinen Veränderungen der Variabeln so beschaffen sein, dass die durch dieselben erzeugte Veränderung der Function f verschwindet. Für verschwindend kleine Aenderungen der Variabeln ergiebt sich hieraus die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Wenn von n Variabeln $(n - 1)$ von einander unabhängige Bedingungsgleichungen zu erfüllen sind

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots f_{n-1} = 0,$$

so kann man $(n - 1)$ dieser Variabeln als Functionen der $n$ten, oder alle n Variable als Functionen einer neu eingeführten Variabeln betrachten.

Die verschwindend kleinen Aenderungen der Variabeln, die mit den Gleichungen $f_1 = 0, f_2 = 0 \ldots$ sich vertragen, erfüllen die $(n-1)$ Gleichungen

1. $$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n = 0, \\
&\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n = 0, \\
&\frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_3}{\partial x_n} dx_n = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} dx_n = 0.
\end{aligned}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = f_{ik},$$

ergänzen das System von Elementen

2.
$$\begin{matrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \dots & f_{2n} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \dots & f_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1,1} & f_{n-1,2} & f_{n-1,3} & \dots & f_{n-1,n} \end{matrix}$$

durch Hinzufügung einer Zeile ganz willkürlicher Elemente $w_1, w_2, w_3, \dots w_n$ zu einem Systeme von n^2 Elementen, und bilden die Determinante S dieser Elemente, sowie die Coefficienten $R_1, R_2, R_3, \dots R_n$, welche die Elemente $w_1, w_2, w_3, \dots w_n$ in dieser Determinante haben; R_k ist die Determinante, deren Elemente aus 2. hervorgehen, wenn man die $k$te Colonne weglässt und die bleibenden geeignet ordnet. Unter diesen Voraussetzungen ergiebt sich für die Differentialverhältnisse die Proportion

3. $$dx_1 : dx_2 : dx_3 : \dots : dx_n = R_1 : R_2 : R_3 : \dots : R_n .$$

Setzt man für $dx_1, dx_2, dx_3 \dots dx_n$ die proportionalen Werthe $R_1, R_2 \dots R_n$ in die $i$te Gleichung des Systems 1. ein, so erhält man

$$f_{i1}R_1 + f_{i2}R_2 + f_{i3}R_3 + \dots + f_{in}R_n .$$

Dieser Ausdruck geht aus der Determinante S hervor, wenn man darin die Elemente $w_1, w_2, \dots w_n$ der Reihe nach durch $f_{i1}, f_{i2}, \dots f_{in}$ ersetzt, ist also eine Determinante, deren letzte Zeile mit der $i$ten identisch ist, und es ist daher

$$f_{i1}R_1 + f_{i2}R_2 + f_{i3}R_3 + \dots + f_{in}R_n = 0 .$$

Die der Proportion 3. genügenden $dx_1, dx_2, \dots dx_n$ erfüllen also in der That die Gleichungen 1.

5. Wenn die n Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ den n unabhängigen Bedingungsgleichungen genügen

1. $$f_1 = c_1, \quad f_2 = c_2, \quad f_3 = c_3, \dots f_n = c_n,$$

wobei die c_i gegebene Constante sind, so sind die x_i nicht mehr variabel, sondern diese n Gleichungen werden nur durch eine beschränkte Anzahl bestimmter Werthsysteme von $x_1, \dots x_n$, den Wurzeln des Systems 1., erfüllt. Da mit den Gleichungen 1. eine Variabilität der Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ nicht mehr verträglich ist, so sind die Gleichungen

1. $$\begin{aligned} f_{11}\,dx_1 + f_{12}\,dx_2 + \dots + f_{1n}\,dx_n &= 0, \\ f_{21}\,dx_1 + f_{22}\,dx_2 + \dots + f_{2n}\,dx_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ f_{n1}\,dx_1 + f_{n2}\,dx_2 + \dots + f_{nn}\,dx_n &= 0 \end{aligned}$$

nur durch die Werthe $dx_1 = dx_2 = dx_3 = \dots dx_n = 0$ zu befriedigen. Hieraus folgt, dass die Determinante

$$J = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Diese Determinante, deren Zeilen von den partialen Differentialquotienten der Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ gebildet werden, heisst die Functionaldeterminante der Functionen $f_1 \dots f_n$. Wir haben daher den Satz: Wenn durch die Gleichungen $f_1 = c_1, f_2 = c_2, \dots f_n = c_n$ die Grössen $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ bestimmt sind, so ist die Functional-

determinante der Functionen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ nicht identisch gleich Null.

Wenn die Functionaldeterminante J identisch (d. h. unabhängig von den Werthen der $x_1, x_2, \ldots x_n$) verschwindet, so sind die in Bezug auf die Unbestimmten $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ linearen Gleichungen 1. nicht unabhängig von einander; es ist entweder eine Gleichung eine Folge der übrigen, und dann kann man $(n-1)$ der Grössen $dx_1, dx_2, \ldots$ durch die $n$te ausdrücken, so dass alle n unbestimmt bleiben, aber ihre Verhältnisse bestimmt sind; oder zwei der Gleichungen 1. folgen aus den übrigen, und dann kann man $(n-2)$ der Grössen $dx_1 \ldots$ durch die übrigen beiden ausdrücken, u. s. w. In diesem Falle haben die Verhältnisse der die Gleichungen 1. befriedigenden Grössen bestimmte oder nicht völlig bestimmte Werthe; die Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ sind alsdann trotz der n Gleichungen $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$ noch variabel. Hieraus folgt weiter, dass in diesem Falle diese Gleichungen 1. die Grössen $x_1, \ldots x_n$ nicht völlig bestimmen, dass also zwischen den Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ eine oder mehr als eine Gleichungen bestehen, welche die Grössen $x_1, \ldots x_n$ nicht explicite enthalten, die also von der Form sind

$$F(f_1, f_2, f_3, \ldots f_n) = 0,$$

so dass in Folge dieser Gleichungen eine oder mehr als eine der Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ einen constanten Werth für alle diejenigen Werthsysteme der $x_1, x_2, \ldots x_n$ erhält, welche den übrigen Functionen f_i constante Werthe ertheilen.

Wir erhalten somit: Die ausreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass n Functionen $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ von n Variabeln $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ nicht unabhängig von einander sind, ist das identische Verschwinden ihrer Functionaldeterminante*)

$$J = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \ldots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \ldots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix} = 0, \qquad f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}.$$

6. Aus dem bisher Mitgetheilten ergiebt sich leicht, wie man das totale Differential einer unentwickelten Function mehrerer Variabeln zu bilden hat. Ist nämlich die Abhängigkeit der Grösse y von den unabhängigen Variabeln $x_1, \ldots x_n$ durch eine Gleichung gegeben

$$F(y, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = 0,$$

so folgt, wenn man der Reihe nach nur eine der Unabhängigen verändert, die andern aber unverändert lässt

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $dx_1, dx_2, dx_3, \ldots dx_n$ und addirt, so erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n\right) + \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Der Klammerinhalt ist das totale Differential der Function y; daher ist dasselbe aus der Gleichung bestimmt

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

*) Vergl. u. A. BALTZER, Theorie und Anwendung der Determinanten. 4. Auflage. Leipzig 1875, § 12.

7. Wir erläutern den Inhalt dieses Abschnitts an einigen Beispielen.

A. Ist $z = \alpha x^2 + \beta y^2$, so ist die zu dieser Gleichung gehörige Fläche ein elliptisches oder ein hyperbolisches Paraboloid, je nachdem α und β gleiche Zeichen haben oder nicht. Die partialen Differentialquotienten von z ergeben sich zu

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\alpha x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2\beta y,$$

also folgt das totale Differential

$$dz = 2\alpha x\,dx + 2\beta y\,dy.$$

B. Ist $z = f(x, y)$, und kommen x und y in f nur in der linearen Verbindung $\alpha x + \beta y + \gamma$ vor, so kann man, wenn man $\alpha x + \beta y + \gamma = u$ setzt, f zunächst als Function von u betrachten, und hat demnach

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hieraus folgt weiter

$$dz = \frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy, \quad \text{und mithin}$$

$$dz = \frac{df}{du}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right).$$

Der Klammerinhalt ist das totale Differential von u; daher folgt schliesslich

$$dz = \frac{df}{du}\,du.$$

In der That ist jede Veränderung von x und y nur eine Veränderung von u, und man hätte daher vorhersehen können, dass die dadurch bedingte Veränderung von z nach den Regeln für das Differential einer Function einer einzigen Variabeln (u) zu bilden ist. Ganz dasselbe gilt, wenn x und y in irgend einer andern, aber nur in einer Verbindung $\varphi(x, y)$ in der Function f auftreten.

C. Ist z als Function von x und y durch die Gleichung definirt

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) = 0$$

so hat man, wenn man die linke Seite mit f abkürzend bezeichnet

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d[(x^2 + y^2 + z^2)^2]}{d(x^2 + y^2 + z^2)}\cdot\frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)}{\partial x}$$

$$= 2(x^2 + y^2 + z^2)\cdot 2x - 2a^2x = 2x[2(x^2 + y^2 + z^2) - a^2].$$

In gleicher Weise ergeben sich

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y[2(x^2 + y^2 + z^2) - b^2], \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z[2(x^2 + y^2 + z^2) - c^2].$$

Daher hat man schliesslich zwischen den Differentialen dx, dy, dz die Gleichung

$$x(2r^2 - a^2)\,dx + y(2r^2 - b^2)\,dy + z(2r^2 - c^2)\,dz = 0,$$

wobei zur Abkürzung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ gesetzt worden ist.

8. Ist f eine Funktion von x, y, z, und ersetzt man diese Variabeln durch

$$\begin{aligned} u &= a\,x + b\,y + c\,z, \\ v &= a'x + b'y + c'z, \\ w &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned} \tag{1.}$$

so kann man das totale Differential von f durch u, v, w und du, dv, dw ausdrücken. Aus 1. folgt

$$\begin{aligned} du &= a\,dx + b\,dy + c\,dz, \\ dv &= a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz, \\ dw &= a''dx + b''dy + c''dz; \end{aligned} \tag{2.}$$

hieraus ergeben sich Auflösungen von der Form

$$dx = \alpha du + \alpha' dv + \alpha'' dw\,,$$
$$dy = \beta du + \beta' dv + \beta'' dw\,,$$
$$dz = \gamma du + \gamma' dv + \gamma'' dw\,.$$

Daher ist

$$3. \quad df = \left(\alpha\,\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\,\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\,\frac{\partial f}{\partial z}\right) du + \left(\alpha'\,\frac{\partial f}{\partial x} + \beta'\,\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma'\,\frac{\partial f}{\partial z}\right) dv + \left(\alpha''\,\frac{\partial f}{\partial x} + \beta''\,\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma''\,\frac{\partial f}{\partial z}\right) dw\,.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \alpha\,\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\,\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\,\frac{\partial f}{\partial z}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \alpha'\,\frac{\partial f}{\partial x} + \beta'\,\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma'\,\frac{\partial f}{\partial z}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial w} = \alpha''\,\frac{\partial f}{\partial x} + \beta''\,\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma''\,\frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

Die partialen Differentialquotienten werden auch ohne das totale Differential erhalten. Man hat z. B.

$$4. \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{du} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{du}\,,$$

wobei $dx : dy : dz : du$ durch Differentiation von 1. unter der Voraussetzung hervorgehen, dass dabei v und w unverändert bleiben; also hat man für $dx : dy : dz : du$ die Gleichungen

$$du = a\,dx + b\,dy + c\,dz\,,$$
$$0 = a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz\,,$$
$$0 = a''dx + b''dy + c''dz\,,$$

aus denen man die Grössen $dx : du$, $dy : du$, $dz : du$ berechnen und in 4. einsetzen kann.

9. Die halben partialen Differentialquotienten einer homogenen quadratischen Function dreier Variabeln

$$f \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

sind die homogenen linearen Functionen

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_1} \equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\,,$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2} \equiv a_{12}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_3\,,$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_3} \equiv a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3\,.$$

Die Ausdrücke haben wir in der analytischen Geometrie der Ebene (§ 13, No. 1) die abgeleiteten Functionen der Function f genannt und mit f_1, f_2, f_3 bezeichnet. Die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\xi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\xi_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\cdot\xi_3 = 0\,,$$

in welcher ξ_1, ξ_2, ξ_3 laufende Coordinaten sind, lernten wir als die Gleichung der Polaren des Punktes (x_1, x_2, x_3) in Bezug auf den Kegelschnitt $f = 0$ kennen.

Die Functionaldeterminante der drei homogenen quadratischen Functionen

$$f \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{33}x_3^2\,,$$
$$\varphi \equiv b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \ldots + b_{33}x_3^2\,,$$
$$\psi \equiv c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + \ldots + c_{33}x_3^2$$

ist

$$J = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, & a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3, & b_{12}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3, & b_{13}x_1 + b_{23}x_2 + b_{33}x_3 \\ c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, & c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, & c_{13}x_1 + c_{23}x_2 + c_{33}x_3 \end{vmatrix}.$$

Sie ist eine Function dritten Grades in Bezug auf die veränderlichen x_1, x, x_3.

Wenn die drei Functionen f, φ, ψ nicht von einander abhängen, so verschwindet J nicht identisch, sondern nur für bestimmte Werthe von x_1, x_2, x_3, also für bestimmte Punkte der Ebene; der Ort dieser Punkte ist die durch die Gleichung $J = 0$ definirte Curve dritter Ordnung. Für jeden Punkt dieser Curve gehen die drei Polaren in Bezug auf die Kegelschnitte $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ durch einen Punkt, denn die Gleichungen dieser Polaren für den Punkt x_1, x_2, x_3 sind

$$f_1\xi_1 + f_2\xi_2 + f_3\xi_3 = 0, \quad \varphi_1\xi_1 + \varphi_2\xi_2 + \varphi_3\xi_3 = 0, \quad \psi_1\xi_1 + \psi_2\xi_2 + \psi_3\xi_3 = 0;$$

das Verschwinden von J ist die Bedingung dafür, dass diese Geraden ein Büschel bilden; und umgekehrt, wenn die Polaren eines Punktes der Ebene in Bezug auf $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ein Büschel bilden, so verschwindet J für die Coordinaten dieses Punktes.

Wenn die Functionaldeterminante J identisch verschwindet, und nicht zwei von den drei Kegelschnitten identisch sind, so bilden die Polaren der drei Kegelschnitte für jeden Punkt der Ebene ein Büschel. Sind nun $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ reale oder complexe Werthe, welche den beiden Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ genügen, (die Coordinaten eines realen oder imaginären Schnittpunkts dieser beiden Kegelschnitte), und setzt man diese Werthe in f_1, f_2, f_3, φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2, ψ_3 ein, so ist (Anal. Geom. d. Eb. § 13, No. 2, 5)

$$f_1\mathfrak{x}_1 + f_2\mathfrak{x}_2 + f_3\mathfrak{x}_3 = \tfrac{1}{2} f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) = 0,$$
$$\varphi_1\mathfrak{x}_1 + \varphi_2\mathfrak{x}_2 + \varphi_3\mathfrak{x}_3 = \tfrac{1}{2} \varphi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) = 0.$$

Folglich geht auch die Polare von $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ in Bezug auf $\psi = 0$ durch $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$, so ist also auch

$$\psi_1\mathfrak{x}_1 + \psi_2\mathfrak{x}_2 + \psi_3\mathfrak{x}_3 = 0.$$

Da nun

$$\psi_1\mathfrak{x}_1 + \psi_2\mathfrak{x}_2 + \psi_0\mathfrak{x}_0 = \tfrac{1}{2} \psi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3),$$

so folgt, dass $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ der Gleichung $\psi = 0$ genügen. Der Kegelschnitt $\psi = 0$ geht daher durch die vier realen oder imaginären Schnittpunk'e der Kegelschnitte $f = 0$ und $\varphi = 0$; folglich (Anal. Geomet. d. Eb. § 14) bilden die drei Kegelschnitte ein Büschel, d. h. es giebt zwei von den Coordinaten unabhängige Zahlen λ und μ, durch welche die Identität hergestellt wird

$$\psi = \lambda f + \mu\varphi,$$

in Uebereinstimmung mit dem allgemeinen Satze in No. 5.

10. Wie bei homogenen quadratischen Functionen dreier Variabeln, so sind auch bei vier Variabeln die in der analytischen Geometrie des Raumes mehrfach verwendeten abgeleiteten Functionen die halben partialen Differentialquotienten der Function nach den Coordinaten. Ist

$$f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3$$
$$+ 2a_{24}x_2x_4 + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2,$$

so sind die abgeleiteten Functionen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{33}x_3 + a_{14}x_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1},$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2},$$
$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3},$$
$$a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_4}.$$

Multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3, x_4 und addirt, so erhält man die Identität

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}x_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4}x_4 = 2f.$$

Ebenso gilt für drei Variable

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}x_3 = 2f.$$

Diese beiden Formeln, von denen in der analytischen Geometrie mehrfach Gebrauch gemacht worden ist, können als besondere Fälle eines allgemeinen Satzes über homogene Functionen betrachtet werden.

Eine ganze algebraische Function n-ten Grades von p Variabeln ist eine Summe von Gliedern, deren jedes die Form hat

$$Ax_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \, . \, . \, x_l^\lambda,$$

worin A ein constanter Faktor ist, und die Exponenten Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, 3, ... n bedeuten, doch so, dass die Summe derselben den Grad n der Function nicht übersteigt. Die Function ist homogen, wenn die Summe der Exponenten in jedem Gliede dem Grade n der Function gleich ist, wenn also

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \, . \, . + \lambda = n.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$v = Ax_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \, . \, . \, . \, x_l^\lambda,$$

so erhält man

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \alpha \cdot Ax_1^{\alpha-1} x_2^\beta x_3^\gamma \, . \, . \, . \, x_l^\lambda, \quad \text{und daher} \quad \frac{\partial v}{\partial x_1}x_1 = \alpha v.$$

Ebenso ergeben sich

$$\frac{\partial v}{\partial x_2}x_2 = \beta v, \quad \frac{\partial v}{\partial x_3}x_3 = \gamma v, \, . \, . \, . \, . \, \frac{\partial v}{\partial x_l}x_l = \lambda v.$$

Hieraus erhält man durch Addition

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial v}{\partial x_3}x_3 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_l}x_l = (\alpha + \beta + \, . \, . + \lambda)v = nv.$$

Wendet man diese Formel auf eine homogene Function, d. i. auf eine Summe u von k solchen Gliedern v_1, v_2, v_3, ... v_k an

$$u = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_k,$$

und beachtet, dass

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_2}{\partial x_i} + \frac{\partial v_3}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial v_k}{\partial x_i},$$

so erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}x_2 + \, . \, . + \frac{\partial u}{\partial x_l}x_l = nv_1 + nv_2 + nv_3 + \, . \, . + nv_k$$
$$= n(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_k).$$

Hieraus folgt EULER's Fundamentalsatz über homogene Functionen:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}x_3 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_l}x_l = nu^{*}).$$

Die partialen Differentialquotienten von v sind vom Grade $n-1$, folglich sind für eine homogene Function $n$ten Grades die partialen Differentialquotienten homogene Functionen vom $(n-1)$ten Grade.

§ 5. Tangente, Normale und Tangentialpunkt ebener Curven.

1. Ist P ein Punkt einer Curve, welche die Gleichung hat

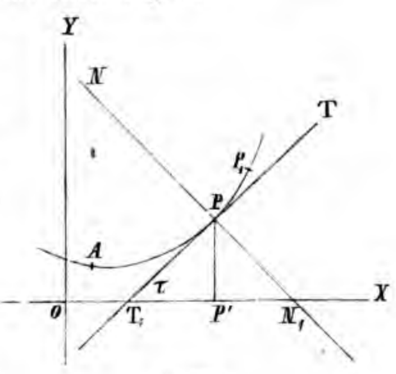
$$y = f(x)$$

und T die Tangente der Curve im Punkte P, so ergiebt sich der Winkel, den die Tangente und die X-Achse einschliessen, aus der in § 1, No. 5 gefundenen Gleichung

1. $$tang\,\tau = y',$$

wenn wir y' abkürzungsweise für den Differentialquotienten $dy:dx$ setzen. Aus 1. folgt weiter

2. $$cos\,\tau = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad sin\,\tau = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$



(M. 475.)

Unter der Länge des Curvenbogens b, der sich von einem gegebenen Anfangspunkte A bis zu dem veränderlichen Punkte P erstreckt, versteht man den Grenzwerth, gegen welchen der Perimeter eines dem Curvenbogen AP eingeschriebenen Polygons convergirt, wenn die Seiten des Polygons verschwindend klein werden und ihre Anzahl daher ins Unendliche wächst. Bezeichnet man die Bogenlänge durch s, so ist, wenn P_1 die Coordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ hat

$$\frac{ds}{dx} = lim\,\frac{PP_1}{\Delta x} = lim\,\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} = lim\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Hieraus folgt

3. $$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+y'^2}.$$

Statt dieser Formel schreibt man auch

4. $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Aus 2. und 3. gewinnt man die einfacheren Formeln

5. $$cos\,\tau = \frac{dx}{ds}, \quad sin\,\tau = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds}.$$

So lange $dy:dx$ positiv ist, wächst y mit x zugleich; so lange $dy:dx$ negativ ist, nimmt y ab, wenn x wächst. In denjenigen Punkten, für welche $dy:dx$ den Werth Null hat (in denen also die Tangente parallel der Abscissenachse ist) und dabei vom Positiven ins Negative übergeht, geht daher y vom Wachsthum zur Abnahme über und erreicht somit ein Maximum, d. i. einen Werth, der grösser als die Nachbarwerthe ist; in den Punkten, für welche $dy:dx$ verschwindet, und dabei vom Negativen zum Positiven übergeht, hat y ein Minimum, d. i. einen Werth, der kleiner ist, als die Nachbarwerthe. Die Maxima und Minima einer Function einer Variabeln gehören also zu den Werthen der Variabeln, für welche y' verschwindet**).

---

*) Vergl. BALTZER, Determinanten, § 13.

**) Weiteres hierüber folgt in § 13.

2. Die Coordinaten ξ, η des Punktes Π der Tangente PT, der von P um ρ absteht, sind

$$\xi = x + \rho \cos\tau = x + \rho \cdot \frac{dx}{ds},$$

$$\eta = y + \rho \sin\tau = y + \rho \cdot \frac{dy}{ds}.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen ρ, so erhält man die Gleichung der Tangente

$$\frac{\xi - x}{\eta - y} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'},$$

oder, anders geordnet

1. $$y'(\xi - x) - (\eta - y) = 0.$$

Hierin sind ξ, η die laufenden Coordinaten der Tangente, während x, y die gegebenen Coordinaten des Berührungspunktes sind.

Liegt die Curvengleichung in der Gestalt vor

$$f(x, y) = 0,$$

so ist (§ 3, No. 9)

$$y' = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y};$$

daher wird die Tangentengleichung

2. $$T \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) = 0.$$

Unter der Normalen der Curve im Punkte P versteht man die durch P gehende Normale zur Tangente im Punkte P. Da die Normale durch P geht, so ist ihre Gleichung von der Form

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) = 0;$$

und da sie mit T rechte Winkel bildet, so ist

$$A = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad B = -\frac{\partial f}{\partial x};$$

daher ist die Gleichung der Normalen

3. $$N \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (\xi - x) - \frac{\partial f}{\partial x}(\eta - y) = 0.$$

Ist die Curvengleichung $y = f(x)$, so hat man einfacher nach Division durch $\partial f : \partial y$

4. $$N \equiv \xi - x + y'(\eta - y) = 0.$$

3. Die Strecken $T_1 P$ und PN_1, die zwischen den Spuren der Tangente und Normale auf der Abscissenachse und dem Punkte P enthalten sind, bezeichnet man insbesondere als Länge der Tangente und Normale, oder kurz als Tangente und Normale; die Projectionen dieser Strecken $T_1 P'$ und $P'N_1$ heissen Subtangente und Subnormale. Aus den Gleichungen 1. und 4. folgen die Strecken OT_1 und ON_1 als die Abscissen für die Ordinate $\eta = 0$ zu

$$OT_1 = \frac{xy' - y}{y'}, \quad ON_1 = x + y'y.$$

Hieraus ergeben sich

1. $$\textit{Subtangente} = OP' - OT_1 = \frac{y}{y'},$$

2. $$\textit{Subnormale} = ON_1 - OP' = yy'.$$

Ferner ergeben sich aus den rechtwinkeligen Dreiecken $T_1 P'P$ und $PP'N_1$ die Formeln

3. $$\text{Tangente} = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2},$$

4. $$\text{Normale} = y\sqrt{1+y'^2}.$$

4. Wenn die Curve sich ins Unendliche erstreckt, so kann man nach den Tangenten fragen, welche die Curve in einem unendlich fernen Punkte berühren. Eine solche Tangente nennt man Asymptote der Curve. Lässt man in der Tangentengleichung 1.

$$\eta = y' \cdot \xi + (y - y'x)$$

die Abscisse x des Berührungspunkts ins Unendliche wachsen, so nähert sich y' einem im Allgemeinen (eindeutig oder mehrdeutig) bestimmten endlichen oder unendlich grossen Werthe; durch denselben ist der Winkel τ und mithin die Richtung der Asymptote (bez. der Asymptoten) gegeben. Der Ausdruck $y - y'x$ ist die Strecke, welche die Tangente von der Ordinatenachse abschneidet. Nähert sich diese Grösse bei unendlich wachsendem x einem endlichen realen Grenzwerthe, so ist hierdurch eine im Endlichen liegende Asymptote bestimmt; wird aber $y - y'x$ bei unendlich wachsendem x auch unendlich gross, so hat man eine unendlich ferne Asymptote, doch von bestimmter Richtung.

Nähert sich für ein unendlich wachsendes x die Ordinate y einem endlichen Grenzwerthe b, so ist die Gerade $y = b$ eine Asymptote der Curve; nähert sich für ein unendlich wachsendes y die Abscisse x einem endlichen Grenzwerthe a, so ist die Gerade $x = a$ eine Asymptote.

5. Wir wenden diese Entwicklungen zunächst auf die Kegelschnitte an. Nimmt man die Hauptachse zur Abscissenachse und einen Scheitel zum Nullpunkte, so ist, wie man sich leicht überzeugt, die Gleichung des Kegelschnitts

1. $$y^2 = 2px + qx^2.$$

Hierin ist p die Ordinate im Brennpunkte, und q ist $\varepsilon^2 - 1$, wenn ε die numerische Excentricität bezeichnet; für die Parabel ist $q = 0$. Durch Differentiation der Gleichung 1. erhält man sogleich die Subnormale

$$yy' = p + qx,$$

und hieraus weiter

$$y' = \frac{p + qx}{y}.$$

Die Gleichungen der Tangente und Normale sind daher

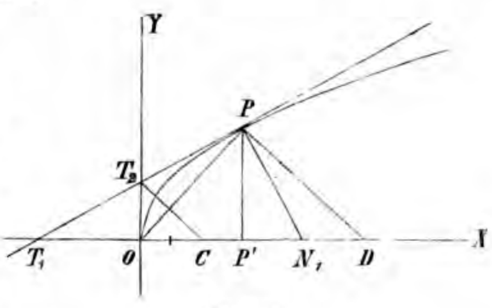
$$T \equiv (p + qx)(\xi - x) - y(\eta - y) = 0,$$
$$N \equiv y(\xi - x) + (p + qx)(\eta - y) = 0.$$

Die Tangentengleichung vereinfacht sich, wenn man berücksichtigt, dass zufolge der Gleichung des Kegelschnitts

$$-(p + qx)x + y^2 = px;$$

man erhält damit

$$T \equiv (p + qx)\xi - y\eta + px = 0.$$



(M. 476.)

Ist T_2 die Verticalspur der Tangente, so ist $OT_2 = px : y$. Macht man $OC = p$, so ist daher $OT_2 : OC = OP' : P'P$, mithin sind die Dreiecke T_2OC und $OP'P$ ähnlich, und folglich CT_2 normal zu OP. Hieraus ergiebt sich eine sehr einfache Tangentenconstruction. Man mache $OC = p$ und ziehe CT_2 normal zu OP, dann ist T_2P die Tangente in P.

Der oben gefundene Werth der Subnormale lässt sich auch schreiben

$$P'N_1 = \frac{y^2}{x} - p.$$

Macht man nun $N_1 D = p$, so ist

$$P'D = P'N_1 + N_1 D = \frac{y^2}{x},$$

$$OP' \cdot P'D = x \cdot \frac{y^2}{x} = P'P^2.$$

Daher ist PD normal zu OP. Macht man also PD normal zu OP und $N_1 D = p$, so ist PN_1 die Normale im Punkte P.

Für die Parabel ist $q = 0$ und daher einfacher $P'N_1 = p$. Die Subnormale der Parabel ist constant.

Um über die Asymptoten des Kegelschnitts Aufschluss zu erhalten, drücken wir y' und OT_2 durch x aus; wir erhalten:

$$y' = (p + qx) : \sqrt{2px + qx^2} = \left(\frac{p}{x} + q\right) : \sqrt{\frac{2p}{x} + q},$$

$$OT_2 = px : \sqrt{2px + qx^2} = p : \sqrt{\frac{2p}{x} + q}.$$

Geht man zur Grenze für ein unendlich wachsendes x über, so erhält man

$$\lim y' = q : \sqrt{q} = \sqrt{q}, \quad \lim OT_2 = p : \sqrt{q}.$$

In beiden Formeln hat $\sqrt{q}$ dasselbe Vorzeichen, da die Wurzeln in y' und OT_2 die Ordinate desselben Curvenpunktes sind; daher folgen zwei Asymptoten, deren Gleichungen sind

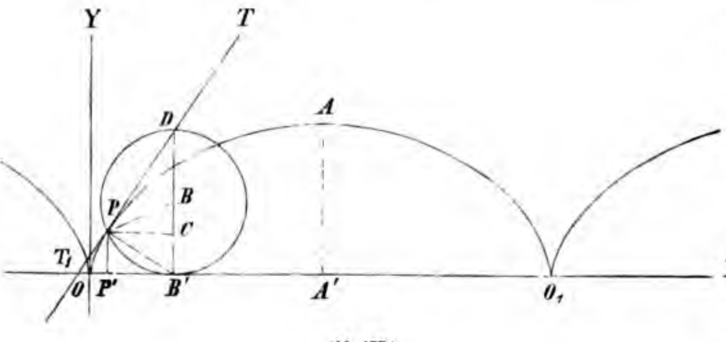
$$\eta = \sqrt{q} \cdot \xi + \frac{p}{\sqrt{q}}, \quad \eta = -\sqrt{q} \cdot \xi - \frac{p}{\sqrt{q}}.$$

Bei der Ellipse ist q negativ, und die Asymptoten sind conjugirt complex; bei der Hyperbel sind sie real; in beiden Fällen ist ihr Schnittpunkt das Centrum der Curve. Bei der Parabel sind sie unendlich fern und parallel der Symmetrieachse.

6. Die gemeine Cycloide. Als gemeine Cycloide bezeichnet man die Curve, welche von einem Punkte der Peripherie eines Kreises beschrieben wird, der auf einer Geraden rollt, ohne zu gleiten. Wir nehmen diese Gerade zur X-Achse. Rollt ein Kreis mit dem Radius a entlang derselben, so wird ein Punkt P dieses Kreises der Reihe nach mit unzählig vielen Punkten $O, O_1, O_2 \ldots$ der Abscissenachse zusammenfallen, und es ist

$$OO_1 = O_1 O_2 = O_2 O_3 = \ldots = 2a\pi.$$

Ferner sehen wir sofort, dass, wenn der Kreis auf der positiven Seite der X-Achse rollt, auch die Cycloide ganz auf der positiven Seite der X-Achse gelegen ist. Die grössten Ordinaten haben die Länge $2a$ und gehören zu den Punkten



(M. 477.)

der X-Achse, welche die Strecken OO_1, O_1O_2, O_2O_3 . . . halbiren; nehmen wir O zum Nullpunkte, so gehören sie zu den Abscissen . . . $-3a\pi$, $-a\pi$, $+a\pi$, $+3a\pi$ . . . oder allgemein zu $(2k+1)a\pi$, während für die Abscissen $2ka\pi$ die Ordinate verschwindet (wobei k eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet).

Ist B die Lage des Centrums des rollenden Kreises in dem Augenblicke, in welchem der die Cycloide beschreibende Punkt P die in der Figur bezeichnete Stelle erreicht hat, so folgt aus der Definition, dass der Kreisbogen PB' gleich der Strecke OB' ist. Bezeichnet man mit t den Arcus des Winkels PBB' (des Wälzungswinkels), so ist $PB' = OB' = at$ Ferner ist $x = OP' = OB' - PB\sin t$, $y = P'P = B'B - BP\cos t$, und daher

$$1. \quad \begin{aligned} x &= at - a\sin t = a(t - \sin t), \\ y &= a - a\cos t = a(1 - \cos t). \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die Differentiale

$$2. \quad \begin{aligned} dx &= a(1 - \cos t)\,dt = y\,dt, \\ dy &= a\sin t\,dt \quad = (at - x)\,dt. \end{aligned}$$

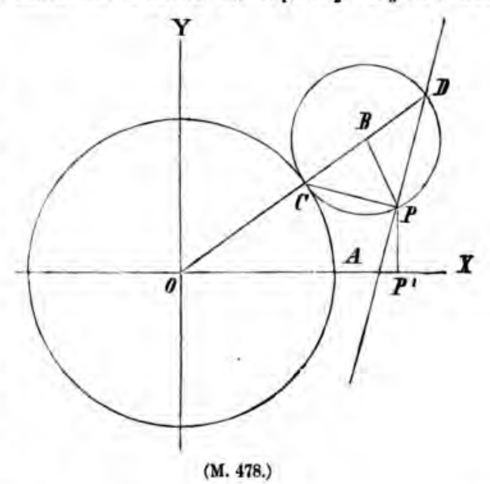
Aus 2. folgt der Differentialquotient

$$y' = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{at - x}{y}.$$

Dies ergiebt *Subnormale* $= yy' = a\sin t = at - x = P'B'$.

Folglich ist PB' die Normale, und daher PD die Tangente der Cycloide im Punkte P.

7. Die Epicycloide. Die Epicycloide wird von einem Punkte P eines Kreises beschrieben, der auf der Peripherie eines festen Kreises rollt, ohne zu gleiten. Der Punkt P kommt dabei unzählige Male auf Punkte A, A_1, A_2, A_3 . . . des festen Kreises; die zwischen zwei auf einander folgenden dieser Punkte liegenden Bogen des festen Kreises sind dem Umfange des rollenden Kreises gleich. Wir nehmen das Centrum des festen Kreises zum Nullpunkte, und legen die Abscissenachse durch A. Ist B die Lage des Centrums des rollenden Kreises, wenn P die in der Figur bezeichnete Lage erreicht hat, sind b und a die Radien des festen und des rollenden Kreises, und ist $arc\,COA = \varphi$, so ist der Kreisbogen CA gleich $b\varphi$, und ebenso gross ist nach der Definition der Kreisbogen CP; daher ist $arc\,PBC = b\varphi : a$. Die Abscisse und Ordinate von P ergeben sich durch Projection von OBP auf OX, bez. OY. Da nun BP mit der Abscissenachse den Winkel $(PB, x) = PBC + COA - 180°$ bildet, so ist



(M. 478.)

$$arc\,(PB, x) = \frac{b}{a}\varphi + \varphi - \pi = \frac{a+b}{a}\cdot\varphi - \pi.$$

Daher findet man

$$x = OB\cdot\cos\varphi + BP\cos\left(\frac{a+b}{a}\varphi - \pi\right),$$

$$y = OB \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + BP cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a+b}{a}\varphi + \pi\right).$$

Hieraus ergiebt sich schliesslich

$$1. \quad \begin{aligned} x &= (a+b)\,cos\varphi - a\,cos\frac{a+b}{a}\varphi, \\ y &= (a+b)\,sin\varphi - a\,sin\frac{a+b}{a}\varphi. \end{aligned}$$

Durch Differentiation erhält man

$$2. \quad \begin{aligned} dx &= (a+b)\left(-\,sin\varphi + sin\frac{a+b}{a}\varphi\right)d\varphi, \\ dy &= (a+b)\left(\quad cos\varphi - cos\frac{a+b}{a}\varphi\right)d\varphi. \end{aligned}$$

Hieraus folgt weiter

$$3. \quad \frac{dy}{dx} = \left(cos\varphi - cos\frac{a+b}{a}\varphi\right) : \left(sin\frac{a+b}{a}\varphi - sin\varphi\right).$$

Wendet man die goniometrische Formel an

$$\frac{cos\,\alpha - cos\,\beta}{sin\,\beta - sin\,\alpha} = tang\frac{\alpha+\beta}{2},$$

so erhält man

$$4. \quad \frac{dy}{dx} = tang\left(\varphi + \frac{b}{2a}\varphi\right).$$

Ist D der Gegenpunkt von C, so ist $arc\,PDB = \frac{1}{2} arc\,PBC = b\varphi : 2a$ und da $(PD, x) = PDB + COA$, so folgt

$$arc\,PD, x = \varphi + \frac{b}{2a}\varphi.$$

Vergleicht man dies mit 4., so ergiebt sich, dass PD die Tangente der Epicycloide in P und mithin PC die Normale ist.

8. Ist die Gleichung $F(x, y) = 0$ algebraisch vom $n$ten Grade, so sind die partialen Differentialquotienten $\partial F : \partial x$ und $\partial F : \partial y$ beide vom $(n-1)$ten Grade, oder einer von ihnen ist von einem noch niedrigeren Grade. Fragt man nach den Tangenten der Curve, die durch einen gegebenen Punkt Π der Ebene gehen, so hat man die Punkte der Curve aufzusuchen, welche der Gleichung genügen

$$1. \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0,$$

worin ξ und η die gegebenen Coordinaten des Punktes Π sind. Diese Gleichung ist in Bezug auf x, y vom $n$ten Grade.

Die Glieder der Function $F(x, y)$ wollen wir so gruppiren, dass zuerst alle Glieder $n$ten Grades, dann alle Glieder $(n-1)$ten Grades, dann alle $(n-2)$ten Grades u. s. w. kommen. Bezeichnet man die einzelnen Gruppen mit u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, ... , wobei der Index mit der Gradzahl übereinstimmt, so hat man

$$F(x, y) = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots$$

Die Grössen u_n, u_{n-1}, u_{n-2} sind nach der Voraussetzung homogene Functionen der Coordinaten; daher ist (§ 4, No. 10)

$$\frac{\partial u_k}{\partial x}x + \frac{\partial u_k}{\partial y}y = ku_k \quad \text{und mithin}$$

$$2. \quad \frac{\partial F}{\partial x}x + \frac{\partial F}{\partial y}y = nu_n + (n-1)\,u_{n-1} + (n-2)\,n_{n-2} + \ldots .$$

Die Gleichung 1. kann man ersetzen durch

$$\frac{\partial F}{\partial x}x + \frac{\partial F}{\partial y}y - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta\right) = 0.$$

Hieraus erhält man in Rücksicht auf 2.

$$n u_n + (n-1) u_{n-1} + (n-2) u_{n-2} + \dots - \frac{\partial F}{\partial x} \xi - \frac{\partial F}{\partial y} \eta = 0,$$

und nach Division mit n

3. $$\Phi \equiv u_n + \varphi = 0,$$

worin φ die Function $(n-1)$ten Grades bezeichnet

$$\varphi \equiv \frac{1}{n}\left((n-1) u_{n-1} + (n-2) u_{n-2} + \dots - \frac{\partial F}{\partial x} \xi - \frac{\partial F}{\partial y} \eta\right).$$

Wir wollen nun zeigen, welche geometrische Bedeutung es hat, wenn die Gleichungen zweier algebraischen Curven in Bezug auf die Glieder höchsten Grades übereinstimmen.

Ziehen wir durch den Nullpunkt Parallelen $y = tx$ zu den Asymptoten der Curve $F(x, y) = 0$, so treffen dieselben die Curve in einem unendlich fernen Punkte. Wir erhalten daher die zugehörigen Werthe des Richtungscoefficienten t, wenn wir y in der Gleichung der Curve durch tx ersetzen, dann diese Gleichung durch x^n dividiren und nachher zur Grenze für ein unendliches x übergehen. Durch die Substitution $y = tx$ erhält u_n in allen Gliedern den Faktor x^n, u_{n-1} den Faktor x^{n-1}, ... ; es ergiebt sich somit

$$F(x, tx) \equiv x^n (u_n) + x^{n-1} (u_{n-1}) + x^{n-2} (u_{n-2}) + \dots,$$

worin (u_n), (u_{n-1}), (u_{n-2}) .. Functionen von t sind vom Grade n, $(n-1)$, $(n-2)$ ..., welche aus u_n, u_{n-1} ... hervorgehen, wenn man x durch 1 und y durch t ersetzt. Entfernt man x^n durch Division, so entsteht

$$(u_n) + \frac{1}{x}(u_{n-1}) + \frac{1}{{}_2x}(u_{n-2}) + \dots = 0.$$

Wird x unendlich gross, so bleibt nur übrig

$$(u_n) = 0,$$

Diese Gleichung liefert n Werthe für t. Wir erhalten hieraus den Satz: Eine algebraische Curve $n$ten Grades hat n (reale oder complexe) Asymptoten; die Tangenten der Winkel, welche sie mit der Abscissenachse einschliessen, sind die Wurzeln der Gleichung $(u_n) = 0$.

Ferner folgt: Wenn die Gleichungen zweier algebraischen Curven in Bezug auf die Glieder höchsten Grades übereinstimmen, so haben sie parallele Asymptoten. Oder: Zwei Curven $n$ten Grades, deren Gleichungen in Bezug auf die Glieder höchsten Grades übereinstimmen, haben n unendlich ferne Schnittpunkte.

Die n unendlich fernen Schnittpunkte der Curven F und Φ sind nun im Allgemeinen nicht Punkte, deren Tangenten durch Π gehen; es bleiben daher als solche Punkte auf F, deren Tangenten durch Π gehen, nur die im Endlichen liegenden Schnittpunkte von F und Φ übrig. Da nun zwei Curven $n$ten Grades n^2 Schnittpunkte haben, so erhalten wir den Satz: Durch einen Punkt der Ebene gehen im Allgemeinen $n^2 - n \equiv n(n-1)$ Tangenten einer C rve $n$ter Ordnung. Diese Zahl kann sich, wie wir weiter sehen werden, b i besonderen Lagen des Punktes Π, sowie bei besonderer Beschaffenheit der C rve vermindern.

Bildet man die Differenz $F - \Phi$, so erhält man

$$F - \Phi \equiv \frac{1}{n}\left(u_{n-1} + 2u_{n-2} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta\right).$$

Die rechte Seite dieser Identität ist eine Function ψ vom $(n-1)$ten Grade. A e (endlich fernen) Schnittpunkte von F und Φ annulliren auch ψ. Wir haben

daher den Satz: Die Punkte einer Curve $n$ter Ordnung, deren Tangenten durch einen gegebenen Punkt gehen, liegen auf einer Curve $(n-1)$ter Ordnung.

Um die Normalen der Curve $F(x, y) = 0$ zu erhalten, die durch Π gehen, haben wir die Curvenpunkte aufzusuchen, die der Gleichung genügen

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\xi - x) - \frac{\partial F}{\partial x}(\eta - y) = 0.$$

Diese Gleichung ist vom $n$ten Grade; sie lehrt: Es giebt n^2 Normalen einer Curve $n$ter Ordnung, die durch einen gegebenen Punkt Π gehen; ihre Fusspunkte auf der Curve liegen auf einer vom Punkte Π abhängigen Curve $n$ter Ordnung.

9. Die Coordinaten u, v der Curventangente im Punkte P folgen aus der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0.$$

zu

$$1. \qquad u = \frac{\partial F}{\partial x} : \left(\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y\right), \quad v = \frac{\partial F}{\partial y} : \left(\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y\right).$$

Die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten, d. i. die Bedingungsgleichung dafür, dass u und v Coordinaten einer Tangente der Curve $F = 0$ sind, ist das Resultat der Elimination von x und y aus den drei Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \left(\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y\right) = u, \quad \frac{\partial F}{\partial y} : \left(\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y\right) = v, \quad F(x, y) = 0.$$

Ist $\varphi(u, v) = 0$ die Gleichung einer Curve $m$ter Klasse, also φ eine Function $m$ten Grades, so erhält man die Coordinaten der Tangenten von $\varphi = 0$, die durch den Punkt ξ, η gehen, als die Lösungen der beiden Gleichungen

$$\varphi(u, v) = 0, \quad \xi u + \eta v - 1 = 0,$$

deren zweite die Gleichung des Punktes Π ist. Die eine dieser Gleichungen ist vom $m$ten Grade, die andere ist linear; daher folgt: Durch jeden Punkt der Ebene gehen m Tangenten einer Curve $m$ter Klasse. Da nun durch jeden Punkt der Ebene im Allgemeinen $n(n-1)$ Tangenten einer Curve $n$ter Ordnung gehen, so folgt: Eine Curve $n$ter Ordnung ist im Allgemeinen von der $n(n-1)$ Klasse. Nur für $n = 2$ ist $n(n-1) = n$; die Curven 3ter, 4ter, 5ter Ordnung sind im Allgemeinen 6ter, 12ter, 20ter Klasse u. w. s.

10. Die Curve, welche von den Normalen einer gegebenen Curve umhüllt wird, heisst die Evolute dieser Curve. Die Coordinaten der Normalen im Curvenpunkte P ergeben sich aus der Gleichung der Normalen zu

$$1. \qquad u = \frac{\partial F}{\partial y} : \left(\frac{\partial F}{\partial y} x - \frac{\partial F}{\partial x} y\right), \quad v = -\frac{\partial F}{\partial x} : \left(\frac{\partial F}{\partial y} x - \frac{\partial F}{\partial x} y\right).$$

Die Gleichung der Evolute in Liniencoordinaten ergiebt sich also, wenn man aus der Curvengleichung $F(x, y) = 0$ und aus den Gleichungen 1. die Coordinaten x, y eliminirt. Da durch jeden Punkt der Ebene n^2 Normalen einer algebraischen Curve $n$ter Ordnung gehen, so folgt: Die Evolute einer Curve $n$ter Ordnung ist im Allgemeinen von der Klasse n^2.

11. Als Beispiele wählen wir die Evolute der Ellipse und der gemeinen Cycloide.

Aus der Ellipsengleichung $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2b^2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2a^2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y}x - \frac{\partial F}{\partial x}y = 2(a^2 - b^2)xy.$$

Daher ist $u = \dfrac{a^2}{c^2x}, \quad v = -\dfrac{b^2}{c^2y}.$

Hieraus folgt $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{c^2u}, \quad \dfrac{y}{b} = -\dfrac{b}{c^2v}.$

Quadrirt man diese Werthe und addirt, so erhält man schliesslich die Evolutengleichung in der Form

$$\frac{a^2}{u^2} + \frac{b^2}{v^2} = c^4.$$

Beseitigt man die Nenner, so erkennt man, dass sie vom vierten Grade ist, in Uebereinstimmung mit No. 10.

Für die **Cycloide** haben wir die Formeln im vorigen Abschnitte so umzugestalten, dass sie dem Falle entsprechen, wenn x und y als Functionen einer Variabeln t gegeben sind. Nehmen wir die Normalengleichung zunächst in der Form No. 2, 4 und ersetzen y' durch $\dfrac{dy}{dt} : \dfrac{dx}{dt}$, so erhalten wir

$$\frac{dx}{dt}(\xi - x) + \frac{dy}{dt}(\eta - y) = 0.$$

Es ist daher

$$u = \frac{dx}{dt} : \left(\frac{dx}{dt}x + \frac{dy}{dt}y\right), \qquad v = \frac{dy}{dt} : \left(\frac{dx}{dt}x + \frac{dy}{dt}y\right),$$

und man erhält somit u und v durch t ausgedrückt. Die Evolutengleichung ist die Resultante dieser Gleichungen in Bezug auf t.

Aus den Formeln in No. 6 ergiebt sich für die Cycloide

$$\frac{dx}{dt}x + \frac{dy}{dt}y = xy + aty - xy = aty,$$

und daher

1. $$u = \frac{1}{at}, \quad v = \frac{\sin t}{at(1 - \cos t)} = \frac{1}{at \operatorname{tang} \frac{1}{2}t}.$$

Die Gleichung der Evolute folgt hieraus zu

2. $$u - v \operatorname{tang} \frac{1}{2au} = 0, \quad \text{oder} \quad 2au \cdot \operatorname{arc tang} \frac{u}{v} = 1.$$

Aus der Gleichung der **Cycloidentangente**

$$\frac{dy}{dt}(\xi - x) - \frac{dx}{dt}(\eta - y) = 0$$

folgen die Coordinaten der Tangente

$$u = \frac{dy}{dt} : \left(\frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y\right), \qquad v = -\frac{dx}{dt} : \left(\frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y\right).$$

Da nun

$$\frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y = a^2(t\sin t - \sin^2 t - 1 + 2\cos t - \cos^2 t),$$
$$= a^2(t\sin t - 2 + 2\cos t),$$

so ergiebt sich

$$u = \frac{\sin t}{aM}, \quad v = \frac{\cos t - 1}{aM}, \quad M = t\sin t - 2 + 2\cos t.$$

Verschiebt man die Coordinatenachsen und wählt den Scheitel A zum neuen Nullpunkte, so erhält man die Coordinaten U und V der Tangente im neuen Systeme aus u und v durch die Formeln (Anal. Geom. der Ebene § 9, No. 6, 3)

$$U = \frac{u}{1 - \alpha u - \beta v}, \quad V = \frac{v}{1 - \alpha u - \beta v},$$

wobei α und β die Coordinaten des neuen Nullpunkts sind, also

$$\alpha = a\pi, \quad \beta = 2a.$$

Da nun

$$1 - a\pi u - 2av = [M - \pi \sin t - 2(\cos t - 1)] = (t - \pi)\sin t : M,$$

so erhält man

$$U = \frac{1}{a(t - \pi)}, \quad V = \frac{\cos t - 1}{a(t - \pi)\sin t} = -\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} t}{a(t - \pi)}.$$

Setzt man $t - \pi = T$, so ist $\operatorname{tang} \frac{1}{2} t = -\cot \frac{1}{2} T$, und man erhält

$$U = \frac{1}{aT}, \quad V = \frac{1}{a T \operatorname{tang} \frac{1}{2} T}.$$

Vergleicht man diese Formeln mit 1., so erkennt man, dass die Evolute der Cycloide mit der Cycloide congruent ist und nur gegen dieselbe parallel verschoben erscheint, und zwar um $-a\pi$ in der Richtung der Abscissenachse und um $-2a$ in der Richtung der Ordinatenachse.

12. **Fusspunktcurven.** Unter der Fusspunktcurve einer gegebenen Curve in Bezug auf einen gegebenen Punkt (Pol) versteht man den Ort der Normalprojectionen des Pols auf die Tangenten der gegebenen Curve. Wir legen die Coordinatenachsen durch den Pol, und es sei

$$f(u, v) = 0$$

die Gleichung der gegebenen Curve in Liniencoordinaten. Der Normalabstand ρ der Geraden u, v vom Nullpunkte ist bekanntlich

$$\rho = 1 : \sqrt{u^2 + v^2};$$

für den Winkel, den ρ mit der X-Achse einschliesst, hat man

$$\cos\varphi = u\rho, \quad \sin\varphi = v\rho.$$

Der Endpunkt von ρ ist ein Punkt der Fusspunktcurve; seine Coordinaten sind

$$\xi = \rho\cos\varphi = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad \eta = \rho\sin\varphi = \frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Hieraus folgt umgekehrt

$$u = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad v = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung $f(u, v) = 0$ ein, so erhält man die Bedingung, die ein Punkt Π erfüllen muss, wenn durch Π eine Tangente der Curve normal zu $O\Pi$ gezogen werden kann, d. i. die verlangte Gleichung der Fusspunktcurve; wir haben somit für dieselbe

$$1. \qquad f\left(\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}\right) = 0.$$

So ist z. B. die Gleichung der Ellipse, bezogen auf die Hauptachsen,

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0.$$

Daher hat der Ort der Normalprojectionen des Ellipsencentrums auf die Ellipsentangenten die Gleichung

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - (\xi^2 + \eta^2)^2 = 0.$$

Einen Punkt der gegebenen Curve und den auf der Tangente in P gelegenen Punkt der Fusspunktcurve wollen wir als verbundene Punkte beider Curven bezeichnen. Die Tangente der Fusspunktcurve in einem Punkte Π derselben lässt sich von dem verbundenen Punkte P der gegebenen Curve aus in einfacher Weise construiren. Ist nämlich $y = F(x)$ die Gleichung der gegebenen

Curve in Punktcoordinaten, so genügen die Coordinaten der verbundenen Punkte P und Π der Tangentengleichung

2. $$y'(\xi - x) - (\eta - y) = 0$$

sowie der Gleichung der durch O gehenden Normalen zur Tangente

3. $$\xi + y'\eta = 0.$$

Eliminirt man y' aus 2. und 3., so erhält man

$$\xi(\xi - x) + \eta(\eta - y) = 0, \quad \text{oder}$$

4. $$\xi^2 + \eta^2 = \xi x + \eta y.$$

Durch Differentiation erhält man hieraus

$$2\xi d\xi + 2\eta d\eta = \xi dx + x d\xi + \eta dy + y d\eta.$$

Da nun aus 3. folgt $\xi dx + \eta dy = 0$, so giebt die vorige Gleichung

$$2\xi d\xi + 2\eta d\eta = x d\xi + y d\eta.$$

Hieraus folgt

5. $$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi - \frac{x}{2}}{\eta - \frac{y}{2}}.$$

Ist Q die Mitte von OP, so ist

$$tang(\Pi Q, x) = \left(\eta - \frac{y}{2}\right) : \left(\xi - \frac{x}{2}\right).$$

Vergleicht man dies mit 5., so erkennt man, dass die Tangente T' der Fusspunktcurve normal zu ΠQ ist.

13. Parallelcurven. Trägt man auf den Normalen einer Curve von der Curve aus nach derselben Seite hin eine gegebene Strecke ab, so bilden die Endpunkte eine neue Curve, die als Parallelcurve der gegebenen Curve bezeichnet wird.

(M.479.)

Der Winkel λ, den die Normale der Curve $F(x, y) = 0$ im Punkte x, y mit der Abscissenachse bildet, ergiebt sich aus

1. $$cos\,\lambda = -\frac{dy}{ds} = -\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}}, \qquad sin\,\lambda = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Hierbei ist in beiden Formeln derselbe Werth der Wurzel zu nehmen.

Die Coordinaten ξ, η des Punktes Π, den man erhält, wenn man von der Normalen die Strecke l abschneidet, sind daher

2. $$\xi = x - l \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \qquad \eta = y + l \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Die Gleichung der Parallelcurve ergiebt sich, indem man aus den Gleichungen 2. und der Gleichung $F(x, y) = 0$ die Coordinaten x, y eliminirt. Um die Tangente der Parallelcurve im Punkte Π zu erhalten, schreiben wir die Gleichungen 2.

$$\xi = x + l\,cos\,\lambda, \qquad \eta = y + l\,sin\,\lambda$$

und differenziren; wir erhalten

$$d\xi = dx - l\,sin\,\lambda\,d\lambda, \qquad d\eta = dy + l\,cos\,\lambda\,d\lambda.$$

Hieraus folgt weiter

$$cos\,\lambda\,d\xi + sin\,\lambda\,d\eta = cos\,\lambda\,dx + sin\,\lambda\,dy.$$

Aus 1. ergiebt sich $cos\,\lambda\,dx + sin\,\lambda\,dy = 0$; daher ist

$$cos\,\lambda\,d\xi + sin\,\lambda\,d\eta = 0,$$

folglich
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx}.$$

Die Tangente der Parallelcurve im Punkte Π ist parallel der Tangente der gegebenen Curve im entsprechenden Punkte P.

Man kann daher die Parallelcurve einer gegebenen Curve auch als die Curve definiren, die von den Geraden umhüllt wird, welche den Tangenten der gegebenen Curve parallel sind und von ihnen einen gegebenen Abstand (l) haben.

14. Confocale Kegelschnitte. Alle Kegelschnitte, deren Gleichungen aus

1. $$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} - 1 = 0, \quad a^2 > b^2$$

hervorgehen, wenn man μ alle realen Werthe ertheilt, haben dieselben Brennpunkte; denn es ist
$$a^2 + \mu - (b^2 + \mu) = a^2 - b^2.$$

Man bezeichnet sie daher als confocale Kegelschnitte.

Die Gleichung des Kegelschnitts 1. in Liniencoordinaten ist

2. $$(a^2+\mu)u^2 + (b^2+\mu)v^2 - 1 = 0, \quad \text{oder}$$
$$a^2u^2 + b^2u^2 - 1 + \mu(u^2+v^2) = 0.$$

Die linke Seite der Gleichung ist linear aus den quadratischen Functionen $a^2u^2 + b^2u^2 - 1$ und $u^2 + v^2$ zusammengesetzt; die Gesammtheit aller confocalen Kegelschnitte mit gegebenen Brennpunkten bilden daher eine Kegelschnittschaar.

Setzt man in 2. nach einander $\mu = -b^2$, $\mu = -a^2$, so erhält man zwei besondere Kegelschnitte der Schaar

3. $(a^2 - b^2)u^2 - 1 = 0$, 4. $(b^2 - a^2)v^2 - 1 = 0$.

Aus 3. folgt $u = \pm 1 : c$; dieser Kegelschnitt zerfällt daher in die beiden Brennpunkte.

Aus 4. ergiebt sich $v^2 = -1 : c^2$. Dieser Gleichung entsprechen zwei imaginäre Punkte auf der Ordinatenachse; man bezeichnet dieselben als die imaginären Brennpunkte.

Die Kegelschnitte der Schaar, welche durch einen gegebenen Punkt Π der Ebene gehen, erhält man, indem man μ aus der Gleichung bestimmt

5. $$\frac{\xi^2}{a^2+\mu} + \frac{\eta^2}{b^2+\mu} - 1 = 0.$$

Beseitigt man die Nenner, so folgt
$$\xi^2(b^2+\mu) + \eta^2(a^2+\mu) - (a^2+\mu)(b^2+\mu) = 0.$$

Ersetzt man in dieser quadratischen Gleichung μ der Reihe nach durch $-a^2$, $-b^2$, $+\infty$, so erhält die linke Seite die Werthe
$$\xi^2(b^2-a^2), \quad \eta^2(a^2-b^2), \quad -\infty.$$

Der erste Werth ist negativ, der zweite positiv, und man sieht daher, dass die Gleichung 6. immer zwei reale Wurzeln hat, deren eine μ_1 zwischen $-a^2$ und $-b^2$ liegt, während die andere μ_0 grösser als $-b^2$ ist. Für μ_0 wird der Kegelschnitt 1. eine Ellipse, für μ_1 eine Hyperbel. Durch jeden Punkt der Ebene gehen daher zwei Kegelschnitte einer confocalen Schaar; der eine ist eine Ellipse, der andere eine Hyperbel.

Aus den beiden Gleichungen
$$\frac{\xi^2}{a^2+\mu_0} + \frac{\eta^2}{b^2+\mu_0} - 1 = 0, \quad \frac{\xi^2}{a^2+\mu_1} + \frac{\eta^2}{b^2+\mu_1} - 1 = 0$$
folgt durch Subtraction und nachherige Division durch den von Null verschiedenen Faktor $\mu_0 - \mu_1$ die Gleichung

6. $$\frac{\xi^2}{(a^2+\mu_0)(a^2+\mu_1)} + \frac{\eta^2}{(b^2+\mu_0)(b^2+\mu_1)} = 0\,.$$

Bilden die durch Π gelegten Tangenten der beiden durch Π gehenden Kegelschnitte der Schaar mit der Abscissenachse die Winkel φ_0 und φ_1, so ist

$$tang\,\varphi_0 = -\frac{\xi(b^2+\mu_0)}{\eta(a^2+\mu_0)}, \quad tang\,\varphi_1 = -\frac{\xi(b^2+\mu_1)}{\eta(a^2+\mu_1)}.$$

Daher hat man

$$tang\,\varphi_0\, tang\,\varphi_1 = \frac{\xi^2(b^2+\mu_0)(b^2+\mu_0)}{\eta^2(a^2+\mu_0)(a^2+\mu_1)},$$

also mit Rücksicht auf 6.

7. $$tang\,\varphi_0\, tang\,\varphi_1 = -1\,.$$

Dies ergiebt: Je zwei Kegelschnitte einer confocalen Schaar schneiden sich unter rechten Winkeln, wenn man unter dem Winkel, unter dem sich zwei Curven schneiden, den Winkel ihrer Tangenten im Schnittpunkte versteht. Zugleich sieht man, dass immer nur zwei ungleichartige Curven der Schaar sich in realen Punkten schneiden, nicht aber zwei confocale Ellipsen oder zwei confocale Hyperbeln.

15. Wir fragen nach den Curven $\eta = \varphi(x)$, die für dieselbe Abscisse x gleiche oder entgegengesetzt gleiche Subnormale oder Subtangente haben, wie eine gegebene Curve $y = f(x)$.

Sollen die Subnormalen gleich oder entgegengesetzt gleich sein, so hat man die Beziehung

1. $$\eta\frac{d\eta}{dx} = \pm\, y\frac{dy}{dx},$$

aus welcher folgt

2. $$2\eta\frac{d\eta}{dx} \mp 2y\frac{dy}{dx} = 0\,.$$

Nun ist $2\eta\dfrac{d\eta}{dx} = \dfrac{d(\eta^2)}{dx}$, $2y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d(y^2)}{dx}$; daher folgt aus 2.

3. $$\frac{d(\eta^2 \mp y^2)}{dx} = 0\,.$$

Hieraus schliesst man, dass $\eta^2 \mp y^2$ von x unabhängig, also gleich einer Constanten A ist. Man erhält daher die Gleichung der gesuchten Curve in der Form

4. $$\eta^2 = f(x)^2 + A, \quad \text{bez.} \quad \eta^2 = -f(x)^2 + A\,.$$

Da A in beiden Fällen unbestimmt bleibt, so giebt es für beide Aufgaben unendlich viele Lösungen.

Die Forderung, dass die Curve $\eta = \varphi(x)$ für alle Punkte gleiche oder entgegengesetzt gleiche Subtangenten haben soll, wie die gegebene, führt auf die Beziehung

$$\frac{1}{\eta}\cdot\frac{d\eta}{dx} = \pm\,\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Hieraus schliesst man

$$\frac{dl\eta}{dx} \mp \frac{dly}{dx} = \frac{d(l\eta \mp ly)}{dx} = 0\,;$$

daher ist $l\eta \mp ly$ von x unabhängig; bezeichnet man diesen Werth mit lA, so erhält man

$$l\eta \mp ly = lA\,.$$

Hieraus folgen, je nachdem das obere oder untere Zeichen gilt, die beiden Gleichungen

5. $$\eta = Af(x), \quad \text{bez.} \quad \eta = \frac{A}{f(x)}.$$

Hat man Tangente und Normale eines Punktes der Curve $y = f(x)$, so erhält man ohne Weiteres auch die Tangente und Normale des zu derselben Abscisse gehörenden Punkts einer der abgeleiteten Curven 4., 5.

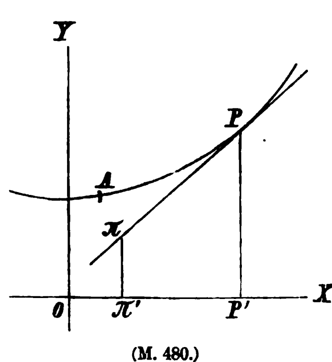
Ist z. B. $f = bx : a$, also die gegebene Curve eine durch den Nullpunkt gehende Gerade, so sind

$$\eta^2 = \left(\frac{b}{a}x\right)^2 - b^2 \quad \text{und} \quad \eta^2 = -\left(\frac{b}{a}x\right)^2 + b^2$$

die Gleichungen einer Hyperbel und einer Ellipse mit den Halbachsen a und b.

Die Subnormale eines Hyperbelpunktes ist gleich der Subnormale des zugehörigen Asymptotenpunktes, und die Subnormale eines Ellipsenpunktes ist entgegengesetzt gleich der Subnormale des zugehörigen Punkts der Geraden $y = bx : a$.*)

16. Unter der Evolvente einer gegebenen Curve versteht man die Curve, die von einem Punkte einer Tangente der gegebenen Curve beschrieben wird, wenn diese Tangente sich entlang der Curve fortbewegt, ohne zu gleiten. Bei einer bestimmten Lage der beweglichen Tangente fällt der die Evolvente beschreibende Punkt mit einem Punkte der gegebenen Curve zusammen; dieser Punkt sei A. Berührt die Tangente in P und ist Π der Punkt, welcher die Evolvente beschreibt, so ist nach der Definition ΠP gleich dem Curvenbogen AP. Bezeichnet man diesen Bogen mit s und den Winkel (T, x) wieder mit τ, so sind die Coordinaten von Π



(M. 480.)

$$\xi = x - s\cos\tau, \quad \eta = y - s\sin\tau.$$

Durch Differentiation ergiebt sich hieraus

$$d\xi = dx - \cos\tau \cdot ds + s \cdot \sin\tau \cdot d\tau,$$
$$d\eta = dy - \sin\tau \cdot ds - s \cdot \cos\tau \cdot d\tau.$$

Hieraus folgt weiter

$$\cos\tau \cdot d\xi + \sin\tau \cdot d\eta = \cos\tau dx + \sin\tau \cdot dy - ds.$$

Da nun $dx = ds\cos\tau$, $dy = ds \cdot \sin\tau$, so folgt

$$\cos\tau \cdot d\xi + \sin\tau d\eta = 0, \quad \text{also}$$
$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\cot\tau.$$

Die Tangente der Evolvente in Π ist daher normal zu T, die Normale der Evolvente fällt mit T zusammen.

Hiernach ist die gegebene Curve die Evolute ihrer Evolvente. Zu einer gegebenen Curve gehören unzählige Evolventen, die den unendlich vielen verschiedenen Lagen des Punktes Π auf der beweglichen Tangente entsprechen; alle diese Evolventen sind Parallelcurven.

---

17. Formeln für Polarcoordinaten. Ist die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten

$$f(r, \varphi) = 0,$$

so hat man für das Differentialverhältniss $dr : d\varphi$ die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi = 0.$$

Die Polarcoordinaten eines Punktes P und die rechtwinkeligen in Bezug auf ein System, welches mit dem polaren den Nullpunkt gemein hat, und dessen

*) HERMITE, Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, Paris 1873. I. Th. pag. 169.

Abscissenachse die Nulllinie des polaren ist, hängen bekanntlich durch die Formeln zusammen

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Nach der Regel für das Differential eines Produkts findet man hieraus

1. $$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi,$$

2. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi} = \frac{r'\,tang\varphi + r}{r' - r\,tang\varphi},$$

wobei r' für den Differentialquotienten $dr : d\varphi$ gesetzt worden ist. Ersetzt man $dy : dx$ durch $tang\,\tau$, so erhält man aus 2.

3. $$r' = \frac{r(1 + tang\,\tau\, tang\,\varphi)}{tang\,\tau - tang\,\varphi} = \frac{r}{tang(\tau - \varphi)}.$$

Bezeichnet man mit σ den Winkel (r, T), so ist $\sigma = \tau - \varphi$, und man erhält daher

4. $$tang\,\sigma = \frac{r}{r'}.$$

Durchschneidet man die Tangente T und die Normale N der Curve mit einer Geraden, die durch den Nullpunkt normal zu r gelegt ist, so erhält man zwei Abschnitte MO und OS, welche die Namen Polarsubnormale und Polarsubtangente führen. Man hat $MO = OP\cot\sigma$, $OS = OP\,tang\,\sigma$ und daher

5. $$Polarsubnorm. = r', \quad Polarsubtang. = \frac{r^2}{r'}.$$

(M. 481.)

Für das Bogendifferential gewinnt man aus 1. durch Quadriren und Addiren

6. $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + (r\,d\varphi)^2} = \sqrt{r^2 + r'^2}\cdot d\varphi.$$

18. Wir wenden diese Formeln zunächst auf die Kegelschnitte an. Nimmt man einen Brennpunkt F zum Pol und die grosse Achse als Nulllinie, und rechnet sie noch dem nächsten Scheitel positiv, so ist die Polargleichung für alle drei Arten von Kegelschnitten

1. $$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$r' = \frac{p\,\varepsilon\sin\varphi}{(1 + \varepsilon\cos\varphi)^2} = \frac{r^2\,\varepsilon\sin\varphi}{p}.$$

Daher ist die

$$Polarsubtangente = \frac{r^2}{r'} = \frac{p}{\varepsilon\sin\varphi}.$$

Dies ergiebt

$$\sin\varphi\cdot Polarsubtangente = \frac{p}{\varepsilon}.$$

Die linke Seite ist offenbar die Projection der Polarsubtangente auf die uptachse; die rechte Seite ist der Abstand des Brennpunktes von der zunächst legenen Directrix. Wir haben daher den Satz: Nimmt man einen Brenninkt zum Pol, so reicht für alle Punkte des Kegelschnitts die Polarbtangente bis zu der dem Pole zunächst liegenden Directrix. Dieser tz lehrt eine sehr einfache Tangentenconstruction. Man kann aus ihm ersehen, ss die Tangenten in den Endpunkten der Brennpunktscoordinate sich mit einer rectrix auf der Hauptachse schneiden.

19. Die Archimedische Spirale ist die Curve, welche die Gleichung hat

$$r = a\varphi.$$

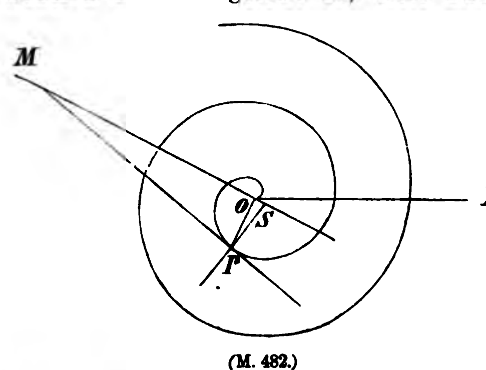
Zu einer Amplitude φ_0 gehört der Radius $r_0 = a\varphi_0$. Wächst die Amplitude um 2π, so kommt der Radius wieder auf r_0 zu liegen, hat aber die Länge

$$r_1 = a(\varphi_0 + 2\pi) = r_0 + 2\pi a.$$

Lässt man φ wiederholt um 2π wachsen, so erkennt man, dass auf jeder durch den Nullpunkt gehenden Geraden unzählig viele Spiralenpunkte liegen, denen die Radien zugehören

$$\ldots r_0 - 4d,\ r_0 - 3d,\ r_0 - 2d,\ r_0 - d,\ r_0,\ r_0 + d,\ r_0 + 2d,\ r_0 + 3d,\ r_0 + 4d, \ldots,$$

wobei d für $2a\pi$ gesetzt ist; diese Strecke wird als Windungsbreite der Spirale bezeichnet. In Fig. 13 ist der Theil einer Archimedischen Spirale aufgezeichnet, der den Amplituden $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{9}{2}\pi$ entspricht, also $2\frac{1}{4}$ Windungen enthält. Die Windungen, welche zu $\varphi = 0$ bis $\varphi = -\frac{9}{2}\pi$ gehören, bilden eine Figur, die mit der gegebenen gegen eine durch O gehende Normale zur Nulllinie symmetrisch liegt.



(M. 482.)

Aus der Gleichung der Spirale folgt

$$r' = a,$$

daher der Satz: Die Polarsubnormale der Archimedischen Spirale ist constant. Hieraus folgt, wie man die Normale und Tangente in jedem Punkte der Spirale in sehr einfacher Weise construirt.

20. Die hyperbolische Spirale hat die Gleichung

$$1. \qquad r = \frac{a}{\varphi}.$$

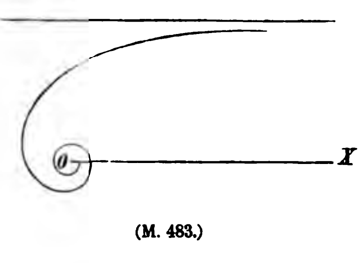
Dem Werthe $\varphi = 0$ gehört der Radius $r = \pm\infty$ zu. Die Ordinate eines Spiralenpunktes ist $y = r\sin\varphi$, also zufolge 1.

$$y = a\frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

Verschwindet φ, so erhält man

$$\lim y = a \lim \frac{\sin\varphi}{\varphi} = a.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die beiden nach entgegengesetzten Seiten der Nulllinie sich erstreckenden unendlichen Aeste der Spirale eine gemeinschaftliche Asymptote haben, die parallel zur Nulllinie und von ihr um die Strecke a entfernt ist. Wächst φ von 0 bis $+\infty$, so erhält, wenn a positiv vorausgesetzt wird, r positive Werthe, die stetig abnehmen und gegen die Grenze Null convergiren; die Spirale nähert sich also in unendlich vielen Windungen dem Nullpunkte; man bezeichnet aus diesem Grunde den Nullpunkt als den asymptotischen Punkt der Spirale. Die beiden Theile der Spirale, welche positiven und negativen Werthen von φ zugehören, sind congruent und liegen, wie bei der Archimedischen Spirale, symmetrisch gegen die durch



(M. 483.)

O gehende Normale zur Nulllinie. In Figur 14 ist der Theil einer hyperbolischen Spirale aufgezeichnet, der den Amplitudengrenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = 4\pi$ entspricht, also zwei volle Windungen. Aus der Gleichung der Spirale folgt

$$r' = -\frac{a}{\varphi^2} = -\frac{r^2}{a}.$$

Folglich ist die *Polarsubtangente* $= \frac{r^2}{r'} = -a$.

Die Polarsubtangente der hyperbolischen Spirale ist also constant. Dies ergiebt die Construction der Tangente und Normale in einem gegebenen Punkte der Curve.

21. Die logarithmische Spirale hat die Gleichung

1. $$r = e^{\alpha\varphi}.$$

Wir setzen α positiv voraus und beschränken uns auf die aus der Gleichung folgenden positiven Werthe von r. Für $\varphi = 0$ wird $r = 1$; wächst φ von 0 bis $+\infty$, so wächst auch r bis $+\infty$; nimmt φ bis $-\infty$ ab, so convergirt r gegen den Grenzwerth Null; der Nullpunkt ist also auch diesmal ein asymptotischer Punkt der Spirale. Die Gleichung 1. ergiebt

$$r' = \alpha e^{\alpha\varphi} = \alpha r,$$

daher ist

$$tang\,\sigma = \frac{r}{r'} = \frac{1}{\alpha}.$$

Der Winkel zwischen dem Radius vector eines Punktes der logarithmischen Spirale und der Tangente in diesem Punkte ist constant.

22. Wenn bei zwei Curven $r = f(\varphi)$ und $R = F(\varphi)$ die Tangenten in den Punkten, welche zu derselben Amplitude φ gehören, denselben Winkel mit dem Radius vector bilden, so hat man die Gleichung

1. $$\frac{R'}{R} = \frac{r'}{r},$$

für welche man setzen kann

$$\frac{dlR}{d\varphi} = \frac{dlr}{d\varphi}.$$

Hieraus schliesst man

$$\frac{d(lR - lr)}{d\varphi} = 0, \quad \text{und daher}$$

2. $$lR - lr = lA, \quad \text{oder einfacher}$$

3. $$R = Ar,$$

wobei A eine Constante bedeutet. Zwei solche Curven, die zu gleicher Amplitude Radien von constantem Verhältniss haben, sind ähnliche Curven, und der Nullpunkt ist ihr Aehnlichkeitspunkt.

Verlangt man für gleiche φ entgegengesetzt gleiche Werthe von σ, so ändert die linke Seite in 1. ihr Zeichen. Man erhält in Folge dessen statt 2. die Gleichung

$$lR + lr = lA,$$

und daher den Zusammenhang

4. $$Rr = A.$$

Curven, die dieser Bedingung genügen, werden als reciproke Curven bezeichnet.

Verlangt man für denselben Werth von φ gleiche Polarsubtangenten, so hat man der Gleichung zu genügen

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi},$$

aus welcher man schliesst

$$\frac{d(R-r)}{d\varphi} = 0, \quad \text{folglich}$$

$$R = r + A.$$

Eine Curve, die aus einer gegebenen dadurch hervorgeht, dass man alle Radien um gleiche Strecken (A) verlängert oder verkürzt, heisst eine Conchoide der gegebenen Curve. Ist C_1 eine Conchoide von C, so ist auch C eine Conchoide von C_1.

---

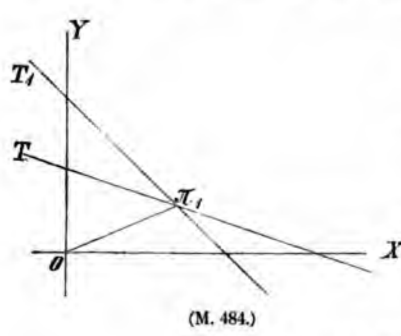
23. Die Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten sei

$$f(u, v) = 0,$$

und es sei die Gerade T mit den Coordinaten u, v eine Tangente der Curve. Aendern sich u um Δu und v um Δv gemäss der Gleichung

$$f(u + \Delta u, \ v + \Delta v) = 0,$$

so wird die Curve auch von der Geraden T_1 berührt, deren Coordinaten $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ sind. Die Coordinaten des Schnittpunkts Π_1 der beiden Geraden T und T_1 folgen aus den beiden Gleichungen



(M. 484.)

$$\xi_1 u + \eta_1 v - 1 = 0,$$

$$\xi_1 (u + \Delta u) + \eta_1 (v + \Delta v) - 1 = 0.$$

Durch Subtraction erhält man hieraus

$$\xi_1 \Delta u + \eta_1 \Delta v = 0, \quad \frac{\eta_1}{\xi_1} = -\frac{\Delta u}{\Delta v}.$$

Nimmt nun Δu und damit im Allgemeinen auch Δv bis zur Grenze Null ab, so nähert sich der Schnittpunkt Π_1 und mit ihm die Gerade $O\Pi_1$ einer bestimmten Grenzlage; diese Grenzlage Π des Punktes Π_1 ist der Berührungspunkt der Geraden T und der Curve $f(u, v) = 0$. Werden der Arcus des Winkels $O\Pi$, x mit ρ und die Coordinaten von Π mit ξ, η bezeichnet, so ist

$$tang\,\rho = \frac{\eta}{\xi} = -\lim \frac{\Delta u}{\Delta v}, \quad \text{und daher}$$

$$1. \qquad tang\,\rho = -\frac{du}{dv} = \frac{\partial f}{\partial v} : \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Hieraus folgen weiter die Formeln

$$2. \qquad \xi = \frac{dv}{udv - vdu}, \quad \eta = -\frac{du}{udv - vdu},$$

oder

$$\xi = \frac{\partial f}{\partial u} : \left(\frac{\partial f}{\partial u} u + \frac{\partial f}{\partial v} v\right), \quad \eta = \frac{\partial f}{\partial u} : \left(\frac{\partial f}{\partial u} u + \frac{\partial f}{\partial v} v\right),$$

Aus diesen Werthen ergiebt sich die Gleichung des auf der Tangente T gelegenen Berührungspunktes Π, wenn mit $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ hierbei die laufenden Coordinaten bezeichnet werden,

$$\frac{dv}{udv - vdu} \cdot \mathfrak{u} - \frac{du}{udv - vdu} \cdot \mathfrak{v} - 1 = 0,$$

oder, wenn man die Nenner beseitigt und besser ordnet,

$$3. \qquad \frac{dv}{du}(\mathfrak{u} - u) - (\mathfrak{v} - v) = 0, \quad \text{bez.}$$

4. $$\Pi = \frac{\partial f}{\partial u}(\mathfrak{u} - u) + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathfrak{v} - v) = 0.$$

24. Die Frage nach der Anzahl der Punkte der Curve $f(u, v) = 0$, die auf einer gegebenen Geraden $\mathfrak{T}$ der Ebene liegen, führt uns auf Betrachtungen, die den in No. 8 durchgeführten dual entsprechen.

Die auf $\mathfrak{T}$ liegenden Berührungspunkte liegen auf den Tangenten der gegebenen Curve, welche der Gleichung genügen

$$\frac{\partial f}{\partial u}\mathfrak{u} + \frac{\partial f}{\partial v}\mathfrak{v} - \left(\frac{\partial f}{\partial u}u + \frac{\partial f}{\partial v}v\right) = 0.$$

Durch Zeichenwechsel folgt hieraus

1. $$\frac{\partial f}{\partial u}u + \frac{\partial f}{\partial v}v - \left(\frac{\partial f}{\partial u}\mathfrak{u} + \frac{\partial f}{\partial v}\mathfrak{v}\right) = 0.$$

Dies ist eine Gleichung $n$ten Grades. Die Tangenten der Curve $f = 0$, deren Berührungspunkte auf $\mathfrak{T}$ liegen, sind daher zugleich Tangenten der Curve 1. Die Glieder der Function f lassen sich so gruppiren, dass f als Summe von homogenen Functionen $n$ten, $(n-1)$ten, $(n-2)$ten u. s. w. Grades erscheint; bezeichnet man diese Gruppen der Reihe nach mit φ_n, φ_{n-1}, $\varphi_{n-2}, \ldots$, so hat man

$$f = \varphi_n + \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} + \ldots.$$

Nach dem EULER'schen Satze ist

$$\frac{\partial f}{\partial u}u + \frac{\partial f}{\partial v}v = n\varphi_n + (n-1)\varphi_{n-1} + (n-2)\varphi_{n-2} + \ldots$$

Führt man dies in 1. ein und dividirt durch n, so erhält man

2. $$F = \varphi_n + \frac{1}{n}\left[(n-1)\varphi_{n-1} + (n-2)\varphi_{n-2} + \ldots - \left(\frac{\partial f}{\partial u}\mathfrak{u} + \frac{\partial f}{\partial v}\mathfrak{v}\right)\right] = 0.$$

Der Klammerinhalt ist vom $(n-1)$ten Grade; folglich stimmen die Gleichungen $f = 0$ und $F = 0$ in Bezug auf die Glieder n-ten Grades überein.

Die geometrische Bedeutung dieses Umstandes lässt sich leicht erkennen. Setzt man $v = tu$ in die Gleichung $f = 0$, so enthalten die Functionen φ_n, φ_{n-1}, $\varphi_{n-2} \ldots$ der Reihe nach die Faktoren u^n, u^{n-1}, $u^{n-2} \ldots$; nach Absonderung derselben bleiben Functionen desselben Grades in Bezug auf t übrig. Bezeichnet man dieselben durch (φ_n), (φ_{n-1}), ..., so erhält man

$$f(u, tu) = u^n(\varphi_n) + u^{n-1}(\varphi_{n-1}) + u^{n-2}(\varphi_{n-2}) + \ldots$$

Die Division durch u^n ergiebt

4. $$(\varphi_n) + \frac{1}{u}(\varphi_{n-1}) + \frac{1}{u^2}(\varphi_{n-2}) + \ldots = 0.$$

Für jede Curventangente, die durch den Nullpunkt geht, ist $u = \infty$; führt man dies in 4. ein, so bleibt zur Bestimmung von t die Gleichung

5. $$(\varphi_n) = 0.$$

Die Grösse t ist die Tangente des Winkels, den eine Normale zu u, v mit der Abscissenachse einschliesst. Die Gleichung 5. bestimmt daher die Richtungen der durch den Nullpunkt gehenden realen oder complexen Tangenten der Curve $f = 0$. Hieraus erkennt man: Wenn zwei Functionen von Liniencoordinaten f und F in Bezug auf die Glieder höchster Potenz übereinstimmen, so fallen die durch den Nullpunkt gehenden Tangenten der Curven $f = 0$ und $F = 0$ zusammen.

Die durch den Nullpunkt gehenden gemeinsamen Tangenten der Curven

$$f = 0 \quad \text{und} \quad F = 0$$

enthalten im Allgemeinen keine auf der beliebig gegebenen Geraden $\mathfrak{T}$ gelegenen Berührungspunkte; also sind von den n^2 gemeinsamen Tangenten von $f = 0$

und $F = 0$ diese n durch den Nullpunkt gehenden abzuziehen. Hieraus folgt: Eine Gerade enthält im Allgemeinen $n(n-1)$ Punkte einer algebraischen Curve $n$ter Klasse; oder: eine Curve $n$ter Klasse ist im Allgemeinen von der $(n-1)$ten Ordnung.

Wenn die Curven $f = 0$ und $F = 0$ in Folge der besonderen Beschaffenheit von f noch weitere besondere Beziehungen zeigen, so kann die Ordnungszahl sich vermindern. Nur für $n = 2$ stimmt die Ordnungszahl mit der Klassenzahl überein. Curven 3ter, 4ter, 5ter ... Klasse sind im Allgemeinen von der 6ten, 12ten, 20ten ... Ordnung.

Die Gleichung der Curve $f(u, v) = 0$ in Punktcoordinaten ergiebt sich durch Elimination von u und v aus den drei Gleichungen

$$x = \frac{dv}{udv - vdu}, \quad y = -\frac{dv}{udv - vdu}, \quad f(u, v) = 0.$$

25. Als Beispiel wählen wir die Ellipsenevolute (No. 11)

1. $$f \equiv a^2v^2 + b^2u^2 - c^4u^2v^2 = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2b^2u - 2c^4v^2u = 2(b^2 - c^4v^2)u,$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = 2a^2v - 2c^4u^2v = 2(a^2 - c^4u^2)v.$$

Zieht man aus 1. die Werthe

$$b^2 - c^4v^2 = -\frac{a^2v^2}{u^2}, \quad a^2 - c^4u^2 = -\frac{b^2u^2}{v^2},$$

so erhält man

2. $$\frac{\partial f}{\partial u} = -2\frac{a^2v^2}{u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -2\frac{b^2u^2}{v}.$$

Die Gleichung des auf der Tangente u, v gelegenen Berührungspunkts der Evolute ergiebt sich daher zu

3. $$\Pi \equiv a^2v^3(\mathfrak{u} - u) + b^2u^3(\mathfrak{v} - v) = 0.$$

Ferner ergiebt sich

$$\frac{\partial f}{\partial u}u + \frac{\partial f}{\partial v}v = -2(a^2v^2 + b^2u^2) = -2c^4u^2v^2;$$

daher folgen die Coordinaten des Punktes Π

4. $$\xi = -\frac{a^2}{c^4u^3}, \quad \eta = -\frac{b^2}{c^4v^3}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{u^2} = \frac{c^{\frac{8}{3}}\xi^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}, \quad \frac{1}{v^2} = \frac{c^{\frac{8}{3}}\eta^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung 1., so erhält man die Gleichung der Evolute in Punktcoordinaten

5. $$a^{\frac{2}{3}}\xi^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

Cubirt man beide Seiten der Gleichung und beachtet, dass

$$(r+s)^3 = r^3 + s^3 + 3rs(r+s),$$

so ergiebt sich

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\xi^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{4}{3}} = c^4;$$

hieraus folgt die Evolutengleichung in rationaler Form

$$(c^4 - a^2\xi^2 - b^2\eta^2)^3 = 27a^2b^2c^4\xi^2\eta^2.$$

Diese Gleichung ist vom sechsten Grade, während im Allgemeinen die Gleichung einer Curve 4ter Kl. von der 12ten Ordnung ist.

---

26. Wir schliessen hieran noch die Ableitung der **Gleichung der Tangente und des Tangentialpunkts** für **homogene Punkt- und Liniencoordinaten.**

Die Coordinaten der Geraden, welche die Curve $n$ter Ordnung

1. $$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

im Punkte P berührt, seien u_1, u_2, u_3. Dann ist zunächst

2. $$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 .$$

Sind ferner ξ_1, ξ_2, ξ_3 die laufenden Coordinaten der Tangentenpunkte, so ist auch

3. $$u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0 .$$

Die Tangente verbindet den Punkt P der Curve mit dem nächst benachbarten Punkte derselben, dessen Coordinaten sind

$$x_1 + dx_1 , \quad x_2 + dx_2 , \quad x_3 + dx_3 ;$$

daher gilt auch die Gleichung

$$u_1(x_1 + dx_1) + u_2(x_2 + dx_2) + u_3(x_3 + dx_3) = 0 .$$

Wenn man von derselben 2. subtrahirt, so bleibt

4. $$u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 = 0 .$$

Aus den drei Gleichungen 3., 2. und 4. gewinnt man die gesuchte Tangentengleichung, indem man u_1, u_2, u_3 eliminirt; man erhält sie zunächst in der Form

5. $$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Aus der Curvengleichung folgt durch Differentiation für die Differentiale der Coordinaten die Gleichung

6. $$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 = 0 ,$$

wobei $$\frac{1}{n} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i .$$

Da ferner nach dem EULER'schen Satze

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 = f ,$$

und der Punkt P auf der Curve liegt, so ist

7. $$f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 = 0 .$$

Aus den Gleichungen 6. und 7. kann man f_1 und f_2 durch f_3 ausdrücken; man erhält die Proportion

8. $$f_1 : f_2 : f_3 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ dx_3 & dx_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ dx_1 & dx_2 \end{vmatrix} .$$

Entwickelt man die Determinante 5. nach den Gliedern der ersten Zeile, so erhält man

9. $$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} \cdot \xi_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ dx_3 & dx_1 \end{vmatrix} \cdot \xi_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ dx_1 & dx_2 \end{vmatrix} \cdot \xi_3 = 0 .$$

Ersetzt man nun die Coefficienten in 9. durch die proportionalen Werthe f_1, f_2, f_3, so erhält man die **Gleichung der Tangente** in der endgültigen Form

$$T \equiv f_1 \cdot \xi_1 + f_2 \cdot \xi_2 + f_3 \cdot \xi_3 = 0 .$$

Die dual entsprechenden Betrachtungen führen zur Gleichung des Punktes P, welchem die Curve $n$ter Klasse

$$F(u_1, u_2, u_3) = 0$$

n der Tangente u_1, u_2, u_3 berührt wird. Sind nämlich x_1, x_2, x_3 die Coornaten von P, so ist die Gleichung von P

$$P \equiv x_1 \mathfrak{u}_1 + x_2 \mathfrak{u}_2 + x_3 \mathfrak{u}_3 = 0 .$$

Da P der gemeinsame Punkt der Geraden u_1, u_2, u_3 und $u_1 + du_1$, $+ du_2$, $u_3 + du_3$ ist, so gelten die Gleichungen

11.
$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0,$$
$$x_1(u_1 + du_1) + x_2(u_2 + du_2) + x_3(u_3 + du_3) = 0,$$
aus denen durch Subtraction hervorgeht

12.
$$x_1 du_1 + x_2 du_2 + x_3 du_3 = 0.$$

Eliminirt man x_1, x_2, x_3 aus 10., 11., 12., so erhält man die gesuchte Gleichung zunächst in der Form

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{u}_1 & \mathfrak{u}_2 & \mathfrak{u}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ du_1 & du_2 & du_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt

13.
$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ du_2 & du_3 \end{vmatrix} \cdot \mathfrak{u}_1 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ du_3 & du_1 \end{vmatrix} \cdot \mathfrak{u}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ du_1 & du_2 \end{vmatrix} \cdot \mathfrak{u}_3 = 0.$$

Nun gelten die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} F_1 \cdot u_1 + F_2 \cdot u_2 + F_3 \cdot u_3 &= 0, \\ F_1 \cdot du_1 + F_2 \cdot du_2 + F_3 \cdot du_3 &= 0, \end{aligned} \quad F_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_i},$$

deren erste mit $F = 0$ identisch ist, während die andere durch Differentiation dieser Gleichung entsteht. Hieraus erhält man

14.
$$F_1 : F_2 : F_3 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ du_2 & du_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ du_3 & du_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ du_1 & du_2 \end{vmatrix}.$$

Aus 13. und 14. folgt die gesuchte Gleichung des Tangentialpunktes

$$P = F_1 \cdot \mathfrak{u}_1 + F_2 \cdot \mathfrak{u}_2 + F_3 \cdot \mathfrak{u}_3 = 0.$$

§ 6. Tangentenebene und Tangentialpunkt von Flächen; Tangente und Normalebene von Raumcurven; Gerade auf abwickelbaren Flächen.

1. Legt man eine Gerade durch einen Punkt P der Fläche $f(x, y, z) = 0$, sowie durch den Punkt P_1 der Fläche, dessen Coordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ sind, so gilt für die Richtungscosinus dieser Geraden (d. i. für die Cosinus ihrer Winkel mit den Coordinatenachsen) die Proportion

1.
$$\cos\varphi : \cos\psi : \cos\chi = \Delta x : \Delta y : \Delta z.$$

Convergiren Δx und Δy, und damit auch im Allgemeinen Δz gegen den Grenzwerth Null, so wird die Gerade zu einer Tangente der Fläche. Für die Richtungscosinus einer Tangente ist also

2.
$$\cos\varphi : \cos\psi : \cos\chi = dx : dy : dz.$$

Durch Differentiation der Flächengleichung folgt

3.
$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

Führt man hier aus 2. für die Differentiale dx, dy, dz die proportionalen Werthe $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$ ein, so erhält man

4.
$$\frac{\partial f}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\psi + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\chi = 0.$$

Die Geraden, die durch einen gegebenen Punkt gehen, und deren Richtungscosinus durch eine Gleichung verbunden sind (ausser der selbstverständlichen Gleichung $\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1$), sind die Mantellinien einer Kegelfläche, deren Spitze der gegebene Punkt ist. Die Gleichung dieser Kegelfläche wird erhalten, wenn man in 4. die Coordinaten ξ, η, ζ eines Punkts einer dieser Geraden (d. i. also eines Punkts der von den Geraden beschriebenen Kegelfläche) durch die Formeln einführt

5. $$\cos\varphi = \frac{\xi - x}{\rho}, \quad \cos\psi = \frac{\eta - y}{\rho}, \quad \cos\chi = \frac{\zeta - z}{\rho},$$

wobei

$$\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 .$$

Führt man diese Substitution aus, und beseitigt den Divisor ρ, so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) = 0 .$$

Diese Gleichung ist linear in Bezug auf ξ, η, ζ. Sie lehrt: Alle Geraden, die eine Fläche in einem gegebenen Punkte P berühren, sind auf einer Ebene enthalten. Diese Ebene wird aus diesem Grunde als die Tangentenebene, der Punkt P als ihr Berührungspunkt bezeichnet.

Die Gleichung der Tangentenebene der Fläche $f(x, y, z) = 0$ im Punkte P ist daher

6. $$T \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) = 0 .$$

Die Gerade, welche durch P normal zu T gelegt wird, heisst die Normale der Fläche im Punkte P. Die Winkel der Normalen mit den Coordinatenachsen sind

7. $$\cos\varphi = \frac{\partial f}{\partial x} : N, \quad \cos\psi = \frac{\partial f}{\partial y} : N, \quad \cos\chi = \frac{\partial f}{\partial z} : N,$$

wobei $$N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} .$$

Die Gleichungen der Normalen sind

8. $$\frac{\xi - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial f}{\partial z}} .$$

Ist die Gleichung der Fläche in der Form gegeben

$$z = F(x, y),$$

so kann man dieselbe durch die Anordnung

$$F(x, y) - z = 0$$

in die Form $f(x, y, z) = 0$ bringen. Man hat dann

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -1 .$$

Daher wird die Gleichung der Tangentenebene

9. $$T \equiv \frac{\partial z}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0 ;$$

die Gleichungen der Normale sind

10. $$\frac{\xi - x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -(\zeta - z) ;$$

ihre Winkel mit den Achsen folgen aus

11. $$\cos\varphi = \frac{\partial z}{\partial x} : N_1, \quad \cos\psi = \frac{\partial z}{\partial y} : N_1, \quad \cos\chi = -\frac{1}{N_1},$$

$$N_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} .$$

Die Coordinaten der Tangentenebene folgen aus 6.

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} : M, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y} : M, \quad w = \frac{\partial f}{\partial z} : M,$$

$$M \equiv \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz .$$

Eliminirt man x, y, z aus diesen Gleichungen und aus der Flächengleichung

$$f(x, y, z) = 0,$$

so erhält man die Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten.

2. Unter einer Cylinderfläche versteht man eine Fläche, welche von einer Geraden beschrieben wird, die einer gegebenen Richtung parallel bleibt. Die Bewegung der Geraden kann in verschiedener Weise bestimmt werden; dadurch, dass sie entlang der Schnittcurve zweier Oberflächen gleitet; oder dadurch, dass sie beständig eine gegebene Fläche berührt; oder dadurch, dass in den Gleichungen der erzeugenden Geraden ausser den Coordinaten eine unbestimmte, veränderliche Grösse vorkommt, durch deren Werthveränderungen die Ortsveränderungen der Geraden bedingt werden u. s. w.

Hat man die Cylindergleichung erhalten, und bestimmt man hierauf die Schnittcurve des Cylinders mit einer Ebene E, die den Mantellinien nicht parallel ist, so erhält man eine Curve C, den Ort der Spuren der Mantellinien auf der Ebene E; man kann nun offenbar den Cylinder als die Bahn der Geraden definiren, die einer gegebenen Richtung parallel sind und die ebene Curve C treffen. Insbesondere kann man die XY-Ebene als Schnittebene wählen und somit den Cylinder durch die Richtung seiner Mantellinien und seine Horizontalspur definiren.

Wir machen zunächst von dieser Bestimmungsweise Gebrauch. Es sei $f(\xi, \eta) = 0$ die Gleichung der Horizontalspur und φ, ψ, χ seien die Winkel der Mantellinien mit den Achsen. Ist P ein Punkt der Mantellinie, die durch den Punkt Π der Curve $f(\xi, \eta) = 0$ geht, so ist

$$\frac{x-\xi}{\cos\alpha} = \frac{y-\eta}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}.$$

Hieraus folgen die Werthe

$$1. \qquad \xi = x - \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}z, \qquad \eta = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}z.$$

Substituirt man diese Werthe in f, so erhält man die Cylindergleichung

$$2. \qquad f\left(x - \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}z, \quad y - \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}z\right) = 0.$$

Sind die Mantellinien mit der Z-Achse parallel, so ist

$$\cos\alpha = \cos\beta = 0,$$

und die Gleichung wird einfach

$$f(x, y) = 0.$$

Sind zwei Oberflächen $f(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$ gegeben, entlang deren Schnittcurve die Gerade gleiten soll, und ist Π ein Punkt dieser Schnittcurve, so erhält man die Cylindergleichung, indem man die Coordinaten ξ, η, ζ des Punktes Π aus den vier Gleichungen eliminirt.

$$\frac{x-\xi}{\cos\alpha} = \frac{y-\eta}{\cos\beta} = \frac{z-\zeta}{\cos\gamma}, \qquad f(\xi, \eta, \zeta) = 0, \qquad F(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Sollen die Mantellinien Tangenten der Fläche $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ sein, so muss für die Coordinaten der Berührungspunkte die Gleichung erfüllt sein

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\cos\gamma = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer bestimmten Oberfläche, die von der Fläche f und von den Winkeln α, β, γ abhängt. Die Schnittpunkte dieser Fläche mit der Fläche f sind die Berührungspunkte der Mantellinien; damit ist dieser Fall auf den vorhergehenden zurückgeführt. Man hat diesmal ξ, η, ζ aus den Gleichungen zu eliminiren

$$\frac{x-\xi}{\cos\alpha} = \frac{y-\eta}{\cos\beta} = \frac{z-\zeta}{\cos\gamma},$$

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial \xi}\cos\gamma = 0.$$

Wir bestimmen nun die Gleichung der Tangentenebene eines Cylinders, und gehen dabei von Gleichung 2. aus; die partialen Differentialquotienten von f ergeben sich wie folgt:

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi}\cdot\frac{d\xi}{dx} = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta}\cdot\frac{d\eta}{dy} = \frac{\partial f}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi}\cdot\frac{d\xi}{dz} + \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta}\cdot\frac{d\eta}{dz} = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

Die Gleichung der Tangentenebene ist daher, wenn die laufenden Coordinaten mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnet werden

$$3. \quad T = \frac{\partial f}{\partial \xi}(\mathfrak{x} - x) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(\mathfrak{y} - y) - \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)(\mathfrak{z} - z) = 0\,^{*)}.$$

Sind φ, ψ, χ die Winkel, welche die Normale von T mit den Achsen einschliesst, so ist

$$\cos\varphi : \cos\psi : \cos\chi = \frac{\partial f}{\partial \xi} : \frac{\partial f}{\partial \eta} : -\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta}\right).$$

Hieraus erkennt man, dass

$$\cos\varphi\cos\alpha + \cos\psi\cos\beta + \cos\chi\cos\gamma = 0.$$

Dies zeigt, dass die Ebene T die Richtung α, β, γ enthält; wir erhalten somit den Satz: Jede Tangentenebene eines Cylinders berührt den Cylinder längs einer Mantellinie, so dass jeder Punkt dieser Mantellinie ein Berührungspunkt ist.

3. Unter einer Kegelfläche versteht man eine Fläche, welche von einer Geraden beschrieben wird, die durch einen festen Punkt geht; dieser Punkt heisst die Spitze des Kegels. Man kann die Bewegung der Geraden in derselben Weise näher definiren, wie bei der Erzeugung des Cylinders.

Ist $f(\xi, \eta) = 0$ die Gleichung der Horizontalspur des Kegels (vorausgesetzt, dass die Spitze S nicht auf der XY-Ebene liegt) und sind a, b, c die Coordinaten der Spitze, so sind die Gleichungen der Geraden ΠS

$$1. \quad \frac{x-a}{a-\xi} = \frac{y-b}{b-\eta} = \frac{z-c}{c};$$

jeder dieser Quotienten ist dem Verhältniss $PS : S\Pi$ gleich. Aus den Gleichungen 1. ergiebt sich

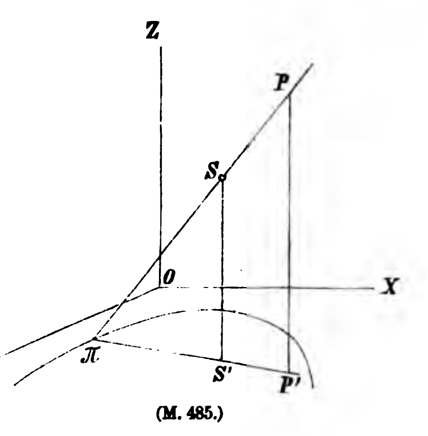
$$a - \xi = \frac{c(x-a)}{z-c}, \quad b - \eta = \frac{c(y-b)}{z-c},$$

und hieraus folgt weiter

$$\xi = \frac{az - cx}{z-c}, \quad \eta = \frac{bz - cy}{z-c}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung der Horizontalspur ein, so erhält man die Gleichung der Kegelfläche

$$2. \quad f\left(\frac{az - cx}{z-c}, \frac{bz - cy}{z-c}\right) = 0.$$



(M. 485.)

*) In den Differentialquotienten von $f(\xi, \eta)$ sind ξ, η durch die Werthe 1. zu ersetzen.

Verlegt man den Nullpunkt in die Kegelspitze, und nimmt die neuen Achsen den alten parallel, so gelten für die neuen Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Formeln

$$x - a = \mathfrak{x}, \quad y - b = \mathfrak{y}, \quad z - c = \mathfrak{z},$$

$$az - cx = a\mathfrak{z} - c\mathfrak{x}, \quad bz - cy = b\mathfrak{z} - c\mathfrak{y}.$$

Die Kegelgleichung wird daher

3. $$f\left(\frac{a\mathfrak{z} - c\mathfrak{x}}{\mathfrak{z}}, \frac{b\mathfrak{z} - c\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}}\right) = 0.$$

Hier ist nun $f(\mathfrak{x} + a, \ \mathfrak{y} + b) = 0$ die Gleichung des Querschnitts der Kegelfläche mit einer Ebene, die parallel zur XY-Ebene ist und von ihr den Abstand $z = -c$ hat. Setzt man $a = b = 0$, und vertauscht $(-c)$ gegen $(+c)$, so wird die Kegelgleichung einfacher

4. $$f\left(\frac{cx}{z}, \frac{cy}{z}\right) = 0.$$

Ist f eine algebraische Function $n$ten Grades, so wird die Kegelgleichung 3. nach Beseitigung der Nenner eine homogene Gleichung $n$ten Grades.

Wird verlangt, dass die Mantellinien des Kegels die Schnittlinie zweier Flächen $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$, $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ treffen, so hat man ξ, η, ζ aus den Gleichungen zu eliminiren

$$\frac{x-a}{a-\xi} = \frac{y-b}{b-\eta} = \frac{z-c}{c-\zeta}, \quad f(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad F(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Verlangt man den Kegel, dessen Mantellinien die Fläche $f(\xi, \eta, \zeta)$ berühren, so gelten für die Coordinaten eines Punkts einer Mantellinie und ihres Berührungspunkts zunächst wieder die Gleichungen

5. $$\frac{x-a}{a-\xi} = \frac{y-b}{b-\eta} = \frac{z-c}{c-\zeta}, \quad f(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Gerade ΠS mit den Achsen bildet, sind proportional den Differenzen $a - \xi$, $b - \eta$, $c - \zeta$; ist ΠS Tangente der Fläche f im Punkte Π, so gilt daher die Gleichung

6. $$\frac{\partial f}{\partial \xi}(a - \xi) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(b - \eta) + \frac{\partial f}{\partial \zeta}(c - \zeta) = 0.$$

Durch Elimination von ξ, η, ζ aus 5. und 6. ergiebt sich die gesuchte Kegelgleichung.

Ist f eine algebraische Function $n$ten Grades, so ist die Gleichung 6. ebenfalls vom n-ten Grade; sie kann aber durch eine Function $(n - 1)$ten Grades ersetzt werden. Ordnet man nämlich die Function f nach dem Grade der einzelnen Glieder, so erscheint f als Summe von homogenen Functionen vom Grade n, $(n - 1)$, $(n - 2)$ . . . . .

$$f = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots.$$

Nach dem Euler'schen Satze ist nun

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta}\eta + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\zeta = nu_n + (n-1)u_{n-1} + (n-2)u_{n-2} + \ldots$$

Setzt man dies in 6. ein, wechselt die Zeichen und dividirt durch n, so erhält man

$$F = u_n + \frac{1}{n}\left[(n-1)u_{n-1} + (n-2)u_{n-2} + \ldots - \frac{\partial f}{\partial \xi}a - \frac{\partial f}{\partial \eta}b - \frac{\partial f}{\partial \zeta}c\right].$$

Die Differenz $f - F$ ergiebt sich daher zu

$$f - F = \frac{1}{n}u_{n-1} + \frac{2}{n}u_{n-2} + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}a + \frac{\partial f}{\partial \eta}b + \frac{\partial f}{\partial \zeta}c\right) = \varphi_{n-1}$$

wo nun φ_{n-1} eine Function $(n - 1)$ten Grades ist. Alle nicht unendlich fernen

Punkte, welche die Gleichungen $f = 0$ und $F = 0$ befriedigen, erfüllen auch die Gleichung $\varphi_{n-1} = 0$. Die Punkte, in welchen eine Fläche $n$ter Ordnung von einem umschriebenen Kegel berührt wird, liegen daher auf einer bestimmten Fläche $(n-1)$ter Ordnung $\varphi_{n-1} = 0$.

Um die Tangentenebenen einer Fläche f zu erhalten, die durch eine gegebene Gerade gehen, hat man von zwei Punkten dieser Geraden aus Tangentenkegel K_1 und K_2 der Fläche zu umschreiben; die Tangentenebenen der Punkte, in welchen die Berührungscurven des Kegels K_1 bez. K_2 und der Fläche f sich schneiden, sind die verlangten. Da nun diese Berührungscurven auf der Fläche f durch zwei Flächen φ und Φ vom $(n-1)$ten Grade ausgeschnitten werden, so sind die Schnittpunkte dieser Curven die gemeinsamen Punkte der drei Flächen f, φ und Φ; die Anzahl dieser Schnittpunkte ist gleich dem Produkte der Gradzahlen der drei Functionen f, φ, Φ, also gleich

$$n(n-1)^2 .$$

Die Anzahl der durch eine Gerade gehenden Tangentenebenen ist gleich der Klassenzahl der Fläche, d. i. gleich dem Grade ihrer Gleichung in Ebenencoordinaten. Wir finden daher: Eine Fläche $n$ter Ordnung ist im Allgemeinen von der Klasse $n(n-1)^2$. Nur für $n = 2$ ist im Allgemeinen die Klassenzahl gleich der Ordnungszahl. Flächen 3ter, 4ter, 5ter . . . Ordnung sind im Allgemeinen von der 12ten, 36ten, 80ten Klasse.

Von der Kegelgleichung 2. ausgehend, erhält man

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = -\frac{c}{z-c} \cdot \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{d\eta}{dy} = -\frac{c}{z-c} \cdot \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dz} + \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{d\eta}{dz} = \frac{c(x-a)}{(z-c)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{c(y-b)}{(z-c)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} .$$

Die Gleichung der Tangentialebene des Kegels im Punkte P ergiebt sich daher, wenn mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die laufenden Coordinaten bezeichnet werden,

$$T = \frac{\partial f}{\partial \xi}(\mathfrak{x} - x) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(\mathfrak{y} - y) - \left(\frac{x-a}{z-c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{y-b}{z-c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta}\right)(\mathfrak{z} - z) = 0^{*)} .$$

Sind φ, ψ, χ die Winkel der Normalen mit den Achsen, so ist demnach

$$\cos\varphi : \cos\psi : \cos\chi = \frac{\partial f}{\partial \xi} : \frac{\partial f}{\partial \eta} : -\left(\frac{x-a}{z-c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{y-b}{z-c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta}\right).$$

Für die Richtungswinkel λ, μ, ν der Mantellinie PS gilt

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = (x-a) : (y-b) : (z-c) .$$

Aus beiden Proportionen folgt

$$\cos\varphi \cos\lambda + \cos\psi \cos\mu + \cos\chi \cos\nu = 0 .$$

Dies lehrt: Jede Tangentenebene eines Kegels berührt den Kegel entlang einer Mantellinie.

Da hiernach die Tangentenebene jedes Kegelpunktes P durch die Spitze geht, so folgt, dass man die Tangentenebene in P auch als die Grenzlage der Ebenen betrachten kann, die durch die Mantellinie SP und durch eine zweite Mantellinie SP_1 gehen, wenn der Winkel SP, SP_1 gegen den Grenzwerth Null convergirt. Hieraus folgt weiter, dass die Tangentenebene des Punktes P zugleich Tangentenebene für alle Punkte der Mantellinie SP ist.

---

*) Hier gilt dieselbe Bemerkung wie zu Gleichung 3. der vorigen Nummer.

4. Die Cylinderflächen und die Kegelflächen gehören unter den allgemeineren Begriff der **Regelflächen**. Unter einer Regelfläche versteht man eine Fläche, die durch Bewegung einer Geraden erzeugt wird. Die Bewegung der Geraden kann in verschiedener Weise definirt werden: man kann verlangen, dass die Gerade immer drei gegebene (ebene oder unebene) Curven trifft; oder dass sie zwei gegebene Curven trifft und eine gegebene Fläche berührt; oder dass sie eine gegebene Curve trifft und zwei gegebene Flächen berührt u. s. w.

Sind $z = mx + n$ und $y = Mx + N$ die Gleichungen einer erzeugenden Geraden der Fläche, so müssen m, n, M, N veränderlich sein; und zwar können es nur Functionen einer Variabeln sein; denn angenommen, sie enthielten zwei Variable, so könnte man die Variabeln so bestimmen, dass die Gleichungen der Geraden durch die Coordinaten x_0, y_0, z_0 irgend eines Raumpunktes erfüllt würden, es würde also dann jeder Raumpunkt der Fläche angehören, im Widerspruche mit dem Begriffe einer Fläche. Sei σ eine Veränderliche, so haben die Gleichungen einer erzeugenden Geraden einer Regelfläche daher die Form

$$1. \qquad z = g(\sigma)\cdot x + h(\sigma), \quad y = G(\sigma)\cdot x + H(\sigma),$$

worin g, h, G, H Functionszeichen sind. Durch diese Gleichungen sind die Coordinaten jedes Flächenpunktes von zwei unabhängigen Variabeln x und σ abhängig gemacht. Die Flächengleichung wird aus 1. durch Elimination von σ gewonnen.

Um die Gleichung der Tangentenebene im Punkte P zu erhalten, haben wir die partialen Differentialquotienten $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ zu bilden. Im ersten Falle haben wir x und σ so zu ändern, dass nur z sich ändert, y aber ungeändert bleibt; im zweiten Falle ändern sich y und σ, während x ungeändert bleibt. Unter der ersten Voraussetzung gehen aus 1. die beiden Gleichungen hervor

$$2. \qquad dz = g\,dx + (g'x + h')\,d\sigma,$$

$$3. \qquad 0 = G\,dx + (G'x + H')\,d\sigma,$$

wobei g', h', G', H' die Grössen $dg : d\sigma$ ..... bezeichnen. Aus 3. folgt

$$d\sigma = -\frac{G}{G'x + H'}\,dx.$$

Setzt man dies in 2. ein, so erhält man

$$4. \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(gG' - Gg')\,x + (gH' - Gh')}{G'x + H'}.$$

Unter der andern Voraussetzung folgt aus 1.

$$dz = (g'x + h')\,d\sigma, \quad dy = (G'x + H')\,d\sigma$$

und hieraus durch Division

$$5. \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{g'x + h'}{G'x + H'}.$$

Führt man diese Werthe 4. und 5. in die Gleichung der Tangentenebene ein, so erhält man nach Beseitigung der Nenner für die **Tangentenebene einer Regelfläche**

$$T \equiv [(gG' - Gg')x + gH' - Gh'](\xi - x) + (g'x + h')(\eta - y) - (G'x + H')(\zeta - z) = 0.$$

Für die Richtungscosinus der Normalen folgt hieraus

$$\cos\varphi : \cos\psi : \cos\chi = [(gG' - Gg')\,x + gH' - Gh'] : (g'x + h') : -(G'x + H').$$

Für die Winkel λ, μ, ν der erzeugenden Geraden 1. und der Achsen ist

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = 1 : G : g.$$

Aus diesen Proportionen folgt die Gleichung

$$\cos\varphi\cos\lambda + \cos\psi\cos\mu + \cos\chi\cos\nu = 0.$$

Dieselbe lehrt: **Jede Tangentenebene einer Regelfläche enthält die durch den Berührungspunkt gehende erzeugende Gerade.**

Bleibt in der Gleichung $T = 0$ die Variable σ ungeändert, während x geändert wird, so verschiebt sich der Berührungspunkt entlang einer erzeugenden Geraden; dabei ändert sich die Function T; dies ergiebt: **Wenn der Berührungspunkt auf einer erzeugenden Geraden fortschreitet, so dreht sich seine Tangentenebene um diese Gerade.**

Zwischen der Reihe der auf einer erzeugenden Geraden liegenden Punkte und dem zugehörigen Büschel von Tangentenebenen besteht ein sehr einfacher Zusammenhang. Um diesen zu erkennen, wählen wir das Coordinatensystem so, dass die erzeugende Gerade, die wir in Betracht ziehen wollen, als X-Achse genommen wird, den Nullpunkt wählen wir beliebig auf dieser Geraden; zur XY-Ebene nehmen wir die Tangentenebene des Nullpunktes. Für die X-Achse ist $y = z = 0$; für den dieser Geraden der Fläche zugehörigen Werth von σ müssen daher die Functionen g, h, G, H verschwinden. Die Gleichung der Tangentenebene in einem Punkte der X-Achse ergiebt sich hiernach zu

$$T \equiv (g'x + h')\,\eta - (G'x + H')\,\zeta = 0.$$

Der Punkt $x = 0$ hat nach der Voraussetzung die Tangentenebene $\zeta = 0$, folglich ist $h' = 0$, und die Gleichung von T wird noch einfacher

6. $$T \equiv g'x \cdot \eta - (G'x + H')\,\zeta = 0.$$

Ist φ der Winkel dieser Ebene mit der Y-Achse und bezeichnet man mit t die von der XY-Ebene aus gemessene Strecke, welche T von einer Geraden abschneidet, die zur Z-Achse parallel ist und von der X-Achse um die Längeneinheit absteht, so ist $tang\varphi = t$. Nun folgt aus der Gleichung 6.

$$tang\varphi = \frac{\zeta}{\eta} = \frac{g'x}{G'x + H'};$$

daher ergiebt sich, wenn man t für $tang\varphi$ einführt und den Nenner beseitigt, für t und x die Gleichung

$$G'xt - g'x + H't = 0.$$

Diese Gleichung lehrt (Analyt. Geom. der Ebene § 6, No. 15), dass die von dem Büschel der Tangentenebenen auf der Geraden a erzeugte Punktreihe mit der Reihe der Berührungspunkte projectiv ist; hieraus ergiebt sich: **Die Punktreihe auf einer erzeugenden Geraden einer Regelfläche ist mit dem Büschel der zugehörigen Tangentenebenen projectiv,** und zwar entspricht jedem Punkte die Tangentenebene in diesem Punkte. In der analytischen Geometrie des Raumes ist dieser Satz für die Regelflächen zweiten Grades bewiesen worden.

5. Es sei $f(u, v, w) = 0$ die **Gleichung einer Fläche in Ebenencoordinaten** und T und T_1 mit den Coordinaten u, v, w und $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $w + \Delta w$ seien zwei Tangentenebenen der Fläche. Durch die Schnittlinie der Ebenen

$$T \equiv ux + vy + wz - 1 = 0,$$
$$T_1 \equiv (u + \Delta u)\,x + (v + \Delta v)\,y + (w + \Delta w)\,z - 1 = 0$$

ht die Ebene

$$T' \equiv T_1 - T \equiv \Delta u \cdot x + \Delta v \cdot y + \Delta w \cdot z = 0;$$

ese Ebene enthält den Nullpunkt, und ihre Stellungswinkel folgen aus

$$cos\alpha' : cos\beta' : cos\gamma' = \Delta u : \Delta v : \Delta w.$$

Geht man zur Grenze für verschwindende Δu, Δv und Δw über, so nähert h T' einer bestimmten Grenzlage T; die Gleichung dieser Grenzlage ist

1. $$\mathrm{T} \equiv du \cdot x + dv \cdot y + dw \cdot z = 0,$$
für die Richtungswinkel ihrer Normalen hat man
$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = du : dv : dw.$$

Auf einer Tangentialebene T liegen unendlich viele Tangenten der Fläche f; dieselben werden auf T durch alle die unzähligen Ebenen T ausgeschnitten, die man erhält, wenn man die Verhältnisse $du : dv : dw$ in jeder mit der Gleichung der Fläche verträglichen Weise abändert, mithin so, dass sie der Gleichung genügen, die sich durch Differentiation von f ergiebt

2. $$\frac{\partial f}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot dw = 0.$$

Vergleicht man 1. und 2., so erkennt man, dass jede Ebene T die Gerade γ enthält, deren Punkte der Proportion genügen

3. $$x : y : z = \frac{\partial f}{\partial u} : \frac{\partial f}{\partial v} : \frac{\partial f}{\partial w}.$$

Die Ebenen T bilden daher ein Büschel, dessen Träger durch den Nullpunkt geht und durch 3. bestimmt ist. Hieraus folgt: Alle Tangenten der Fläche $f(u, v, w) = 0$, die auf einer Tangentialebene liegen, gehen durch einen Punkt, nämlich durch den Schnittpunkt der Geraden γ mit der Ebene T. Dieser Punkt ist der Berührungspunkt der Ebene T und der Fläche f.

Sind x, y, z die Coordinaten desselben und $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ die Coordinaten irgend einer durch ihn gehenden Ebene, so hat man die Gleichungen
$$x\mathfrak{u} + y\mathfrak{v} + z\mathfrak{w} - 1 = 0,$$
$$xu + yv + zw - 1 = 0.$$
Aus ihnen folgt
$$x(\mathfrak{u} - u) + y(\mathfrak{v} - v) + z(\mathfrak{w} - w) = 0.$$
In Rücksicht auf 3. folgt hieraus die Gleichung des Berührungspunktes der Ebene T

4. $$\frac{\partial f}{\partial u}(\mathfrak{u} - u) + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathfrak{v} - v) + \frac{\partial f}{\partial w}(\mathfrak{w} - w) = 0.$$

Ist die Gleichung der Fläche in der Form gegeben
$$w = f(u, v),$$
so erhält man die Gleichung des Berührungspunktes in der Form

5. $$P \equiv \frac{\partial w}{\partial u}(\mathfrak{u} - u) + \frac{\partial w}{\partial v}(\mathfrak{v} - v) - (\mathfrak{w} - w) = 0.$$

6. Das Ebenengebilde, welches von Ebenenbüscheln gebildet wird, deren Träger auf einer Ebene A liegen und eine Curve C dieser Ebene umhüllen, heisst eine Grenzfläche. Unter den Ebenengebilden nehmen die Grenzflächen dieselbe Stellung ein, wie unter den Punktgebilden die Kegelflächen. Sind α, β, γ die Coordinaten der Ebene A und ist

1. $$f(U, V) = 0$$

die Gleichung der Horizontalprojection von C, so gehört nach der Definition jede Ebene T zur Grenzfläche, welche durch eine Schnittlinie der Ebene A mit einer Verticalebene T geht, die der Gleichung 1. genügt. Die Coordinaten U, V dieser Ebene folgen aus den Coordinaten von A und T durch die Formeln
$$U = \frac{\lambda u + \mu\alpha}{\lambda + \mu}, \quad V = \frac{\lambda v + \mu\beta}{\lambda + \mu}, \quad 0 = \frac{\lambda w + \mu\gamma}{\lambda + \mu}.$$
Aus der letzten folgt
$$\lambda : \mu = -\gamma : w;$$
daher ist

2. $$U = \frac{\alpha w - \gamma u}{w - \gamma}, \quad V = \frac{\beta w - \gamma v}{w - \gamma}.$$

Führt man diese Werthe in 1. ein, so erhält man die Gleichung der Grenzfläche

3. $$f\left(\frac{\alpha w - \gamma u}{w - \gamma}, \frac{\beta w - \gamma v}{w - \gamma}\right) = 0.$$

Wie man sieht, geht diese Gleichung aus der Kegelgleichung No. 3, 2 hervor, wenn man überall die Punktcoordinaten durch Ebenencoordinaten ersetzt.

Um die Gleichung des Punktes $\mathfrak{P}$ zu erhalten, in welchem die Grenzfläche von der Ebene T derselben berührt wird, bilden wir

$$\frac{\partial f(u, v, w)}{\partial u} = \frac{\partial f(U, V)}{\partial U} \cdot \frac{dU}{du} = -\frac{\gamma}{w - \gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial U},$$

$$\frac{\partial f(u, v, w)}{\partial v} = \frac{\partial f(U, V)}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dv} = -\frac{\gamma}{w - \gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial V},$$

$$\frac{\partial f(u, v, w)}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial U} \cdot \frac{dU}{dw} + \frac{\partial f}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dw} = \frac{\gamma(u - \alpha)}{(w - \gamma)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial U} + \frac{\gamma(v - \beta)}{(w - \gamma)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial V}.$$

Die Gleichung des Tangentialpunktes einer Grenzfläche ist daher, wenn die laufenden Coordinaten mit $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ bezeichnet werden

4. $$P \equiv \frac{\partial f}{\partial U}(\mathfrak{u} - u) + \frac{\partial f}{\partial V}(\mathfrak{v} - v) - \left(\frac{u - \alpha}{w - \gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial U} + \frac{v - \beta}{w - \gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial V}\right)(\mathfrak{w} - w) = 0.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ durch α, β, γ, so wird sie identisch; daher folgt: Die Punkte der Grenzfläche liegen auf der Ebene A. Diese Ebene wird als die Hauptebene der Grenzfläche bezeichnet.

Setzt man in 4. $\mathfrak{w} = 0$, so erhält man die Gleichung der Horizontalprojection von P

$$P' \equiv \frac{\partial f}{\partial U}(\mathfrak{u} - u) + \frac{\partial f}{\partial V}(\mathfrak{v} - v) + \left(\frac{u - \alpha}{w - \gamma}\frac{\partial f}{\partial U} + \frac{v - \beta}{w - \gamma}\frac{\partial f}{\partial V}\right) w = 0.$$

Hieraus erlangt man durch einfache Reduction

$$P' \equiv \frac{\partial f}{\partial U}\left(\mathfrak{u} - \frac{\alpha w - \gamma u}{w - \gamma}\right) + \frac{\partial f}{\partial V}\left(\mathfrak{v} - \frac{\beta w - \gamma v}{w - \gamma}\right) = 0,$$

und dies kann man nach den Formeln 2. ersetzen durch

$$\frac{\partial f}{\partial U}(\mathfrak{u} - U) + \frac{\partial f}{\partial V}(\mathfrak{v} - V) = 0.$$

Der Berührungspunkt P der Ebene T hat also als Grundriss einen Punkt der Curve $f(U, V) = 0$; folglich ist P ein Punkt der Curve C. Die Curve C enthält daher die Punkte der Grenzfläche.

Hieraus erkennt man weiter, dass jeder Punkt von C der Berührungspunkt eines Büschels von Ebenen der Grenzfläche ist — sowie beim Kegel die Tangentenebene in einem Punkte des Kegels zugleich Tangentenebene in allen Punkten einer geradlinigen Punktreihe, nämlich der durch den Punkt gehenden Mantellinie ist.

7. Unter einer Regelfläche unter den Ebenengebilden versteht man eine Fläche, die von den Ebenen eines Ebenenbüschels umhüllt wird, dessen Träger sich im Raume bewegt. In No. 4 haben wir die Regelflächen unter den Punktgebilden definirt und nachgewiesen, dass die Tangentenebenen Ebenenbüschel bilden, deren Träger die erzeugenden Geraden der Regelfläche sind; dies zeigt, dass die Regelflächen unter den Punktgebilden auch Regelflächen unter den Ebenengebilden sind. Im Verlaufe der jetzt anzustellenden Betrachtung wird sich zeigen, dass bei einer Regelfläche unter den Ebenengebilden die

Berührungspunkte der Ebenen eines Büschels den Träger dieses Büschels erfüllen; damit wird dann erwiesen sein, dass die Definitionen der Regelfläche für Punkt- und für Ebenengebilde dieselben Objecte umfassen, so dass man von Regelflächen schlechthin sprechen kann.

Ein Ebenenbüschel ist durch die Gleichungen zweier Spurpunkte des Trägers bestimmt, die wir in der Form annehmen wollen

1. $$v = Gu + H, \quad w = gu + h.$$

Soll das Ebenenbüschel beweglich sein, ohne doch jede mögliche Ebene des Raumes enthalten zu können, so müssen G, H, g, h Functionen einer Variabeln σ sein. Zur Bestimmung des partialen Differentialquotienten $\partial w : \partial u$ haben wir die beiden Gleichungen (vergl. No. 4)

$$0 = Gdu + (G'u + H')d\sigma, \quad dw = gdu + (g'u + h')d\sigma,$$

aus ihnen ergiebt sich

2. $$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{(gG' - Gg')u + gH' - Gh'}{G'u + H'}.$$

Der partiale Differentialquotient $\partial w : \partial v$ folgt aus

$$dv = G'u + H', \quad dw = g'u + h',$$

zu

3. $$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{g'u + h'}{G'u + H'}.$$

Daher erhält man für die Gleichung des Berührungspunktes der Ebene T

4. $$P \equiv [(gG' - Gg')u + gH' - Gh'](\mathfrak{u} - u) + (g'u + h')(\mathfrak{v} - v) \\ - (G'u + H')(\mathfrak{w} - w) = 0.$$

Hier kann man noch v und w nach den Formeln 1. durch u und σ ausdrücken. Lässt man σ ungeändert und ändert nur u, so erhält man aus 4. die Berührungspunkte aller Ebenen des Büschels, dessen Träger dem angenommenen Werthe von σ zugehört; man sieht, dass dabei im Allgemeinen die Coefficienten der Gleichung wesentliche Aenderungen erleiden und schliesst daher: Die Berührungspunkte der Ebenen eines Büschels wechseln im Allgemeinen von Ebene zu Ebene.

Führt man denselben Werth σ in 1. ein, so erkennt man leicht, dass jede diesem Werthe zugehörige Gruppe von Ebenencoordinaten der Gleichung $P = 0$ genügt; denn ist U, V, W eine solche Gruppe, so ist

$$V = GU + H, \quad W = gU + h.$$

Für die Ebene T ist ebenfalls

$$v = Gu + H, \quad w = gu + h,$$

und daher

$$V - v = G(U - u), \quad W - w = g(U - u).$$

Setzt man dies in 4. für $\mathfrak{v} - v$ und $\mathfrak{w} - w$, so wird 4. identisch.

Da hiernach jede dem Büschel σ angehörige Ebene den Punkt P enthält, so folgt: Die Berührungspunkte der Ebenen eines Büschels sind auf dem Träger des Büschels enthalten. Hiermit ist die anfangs ausgesprochene Behauptung erwiesen.

8. Eine Raumcurve ist durch zwei Flächen bestimmt, die sie enthalten und als deren vollständiger oder theilweiser Durchschnitt sie erscheint. Die Gleichungen dieser Flächen seien

1. $$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0.$$

Verbindet man einen Punkt P der Curve mit einem andern Punkte P_1 derselben, dessen Coordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ sind, so bildet die

Gerade PP_1 mit den Achsen X, Y, Z Winkel, deren Cosinus die Verhältnisse haben $\Delta x : \Delta y : \Delta z$. Convergirt Δx gegen die Grenze Null, so wird PP_1 zur Tangente der Raumcurve im Punkte P.

Sind φ, ψ, χ die Richtungswinkel der Tangente, so hat man also

2. $$\cos\varphi : \cos\psi : \cos\chi = dx : dy : dz .$$

Durch Differentiation der Gleichungen 1. folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0 ,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0 .$$

Hieraus erhält man (vergl. § 4, No. 4)

3. $$dx : dy : dz = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\right) : \left(\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial z}\right) : \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\right).$$

Die Gleichungen der Tangente sind daher

4. $$\frac{\xi - x}{\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}} .$$

Eliminirt man aus 1. und 4. die Coordinaten x, y, z, so erhält man eine Gleichung, welche die Coordinaten ξ, η, ζ erfüllen, wenn Π auf einer Tangente der Raumcurve liegt; das Eliminationsresultat ist daher die Gleichung der von den Tangenten der Raumcurve beschriebenen Fläche.

Eliminirt man aus 1. einmal z und dann y, so erhält man die Gleichungen der Horizontal- und der Verticalprojection der Curve; bringt man dieselben in die Form

$$y = \varphi(x) , \quad z = \Phi(x) ,$$

so ist

$$dy = \varphi'(x)\,dx , \quad dz = \Phi'(x)\,dx .$$

Daher werden die Gleichungen der Tangente

5. $$\xi - x = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'} .$$

Die Richtungscosinus sind

6. $$\cos\varphi = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}, \quad \cos\psi = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}, \quad \cos\chi = \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} .$$

Der Ausdruck $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ ist der Grenzwerth von $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ und ist daher der Grenzwerth der Sehne PP_1 für ein verschwindendes Δx; dieser Grenzwerth ist (§ 5, No. 1) das Differential ds des Curvenbogens; man hat also

7. $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 ,$$

und kann 6. ersetzen durch

8. $$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\psi = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\chi = \frac{dz}{ds} .$$

Die Ebene, welche durch P normal zur Curventangente gelegt wird, heisst Normalebene der Curve im Punkte P. Die Gleichung der Normalebene ergiebt sich aus

$$\cos\varphi\cdot(\xi - x) + \cos\psi\cdot(\eta - y) + \cos\chi\cdot(\zeta - z) = 0 ,$$

wenn man $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$ durch die proportionalen Werthe dx, dy, dz ersetzt

$$N \equiv dx\cdot(\xi - x) + dy\cdot(\eta - y) + dz\cdot(\zeta - z) = 0 .$$

Sind die Gleichungen der Projectionen gegeben, so hat man

9. $$N \equiv (\xi - x) + y'(\eta - y) + z'(\zeta - z) = 0 ;$$

in Anschluss an die Gleichungen 1. ist

$$10. \qquad N = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial x} & (\xi - x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial y} & (\eta - y) \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial z} & (\zeta - z) \end{vmatrix} = 0 .$$

Die Coordinaten der Normalebene ergeben sich aus 9. zu

$$11. \quad u = \frac{1}{x + y'y + z'z}, \quad v = \frac{y'}{x + y'y + z'z}, \quad w = \frac{z'}{x + y'y + z'z}.$$

Wenn man aus diesen Gleichungen und aus den Gleichungen

$$y = \varphi(x), \quad z = \Phi(x)$$

die Coordinaten x, y, z eliminirt, so erhält man zwei Bedingungsgleichungen für u, v, w; diese werden von den Normalebenen der Curve erfüllt, sie sind mithin die Gleichungen der von den Normalebenen der gegebenen Raumcurve umhüllten abwickelbaren Fläche.

9. Eine abwickelbare Fläche ist eine Fläche, deren Berührungsebenen zwei Bedingungsgleichungen genügen. Sind

$$1. \qquad f(u, v, w) = 0, \quad F(u, v, w) = 0$$

zwei solche Gleichungen, so erscheint die abwickelbare Fläche umhüllt von den gemeinsamen Tangentenebenen der Flächen $f = 0$ und $F = 0$. Eliminirt man aus 1. einmal w und dann v, so erhält man zwei Gleichungen, die eine zwischen u und v, die andere zwischen u und w; wir wollen sie uns in der Form denken

$$2. \qquad v = \varphi(u), \quad w = \Phi(u).$$

Es sind dies die Gleichungen der horizontalen und der verticalen Spur der abwickelbaren Fläche; durch diese ist die Fläche ebenfalls bestimmt.

Die Coordinaten der Ebenen T und T_1 mögen den Gleichungen 1. genügen, es mögen also T und T_1 Tangentenebenen der abwickelbaren Fläche sein. Ist $\mathfrak{T}$ irgend eine die Gerade TT_1 enthaltende Ebene, so ergeben sich die Coordinaten von $\mathfrak{T}$ aus den Coordinaten von T und T_1 zu

$$\mathfrak{u} = \lambda u + \mu u_1, \quad \mathfrak{v} = \lambda v + \mu v_1, \quad \mathfrak{w} = \lambda w + \mu w_1, \quad \lambda + \mu = 1.$$

Hieraus gewinnt man

$$\mathfrak{u} - u = \lambda u + \mu u_1 - u = \mu(u_1 - u),$$
$$\mathfrak{v} - v = \mu(v_1 - v), \quad \mathfrak{w} - w = \mu(w_1 - w).$$

Hieraus folgt, dass die Coordinaten jeder die Gerade TT_1 enthaltenden Ebene den beiden Gleichungen genügen

$$3. \qquad \frac{\mathfrak{u} - u}{u_1 - u} = \frac{\mathfrak{v} - v}{v_1 - v} = \frac{\mathfrak{w} - w}{w_1 - w},$$

und umgekehrt. Diese Gleichungen sind als die Gleichungen der Geraden in Plancoordinaten zu bezeichnen.

Setzt man $u_1 = u + \Delta u$, $v_1 = v + \Delta v$, $w_1 = w + \Delta w$, so gehen sie über in

$$4. \qquad \frac{\mathfrak{u} - u}{\Delta u} = \frac{\mathfrak{v} - v}{\Delta v} = \frac{\mathfrak{w} - w}{\Delta w}.$$

Nähert sich Δu dem Grenzwerthe Null, so nähern sich im Allgemeinen auch Δv und Δw demselben Grenzwerthe. Die Gerade TT_1 nähert sich dabei im Allgemeinen einer bestimmten Grenzlage $\mathfrak{G}$, entlang welcher die Ebene T die abwickelbare Fläche berührt. Die Gleichungen dieser Geraden $\mathfrak{G}$ sind daher

5. $$\frac{\mathfrak{u}-u}{du}=\frac{\mathfrak{v}-v}{dv}=\frac{\mathfrak{w}-w}{dw}.$$

Hierbei bestimmen sich du, dv, dw durch die aus 1. fliessenden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\frac{\partial f}{\partial w}dw=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv+\frac{\partial F}{\partial w}dw=0,$$

aus welchen folgt

6. $$du:dv:dw=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w}\\ \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial w}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial f}{\partial u}\\ \frac{\partial F}{\partial w} & \frac{\partial F}{\partial u}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

Oder man zieht aus 2. die Werthe v' und w' und hat dann die Gleichungen von $\mathfrak{G}$

7. $$\mathfrak{u}-u=\frac{\mathfrak{v}-v}{v'}=\frac{\mathfrak{w}-w}{w'}.$$

Eliminirt man u, v, w aus den beiden Gleichungen 7. und aus den Gleichungen

$$f(u,v,w)=0, \quad F(u,v,w)=0,$$

so erhält man in Plancoordinaten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Gleichung der von den Geraden $\mathfrak{G}$ der abwickelbaren Fläche berührten Rückkehrkante der Fläche.

9. Wir wenden die entwickelten Formeln auf die Schraubenlinie und die Schraubenregelfläche an.

Eine Schraubenlinie wird von einem Punkte beschrieben, der sich auf der Oberfläche eines Rotationscylinders von einem bestimmten Normalschnitte und einer bestimmten Mantellinie ausgehend so bewegt, dass sein Abstand von diesem Normalschnitte proportional dem Bogen ist, den seine Projection auf den Normalschnitt immer in derselben Richtung zurückgelegt hat. Wird die Cylinderachse zur Z-Achse genommen, die X-Achse durch einen Punkt der Schraubenlinie gelegt und die Schraubenlinie so beschrieben, dass sich die Drehung in der Richtung von der positiven X-Achse nach der positiven Y-Achse mit einer Fortschreitung in der Richtung der positiven Z-Achse verbindet, so ist nach der Definition $z=k\varphi$, wo k eine positive Constante und φ den Arcus des Winkels bedeutet, den der Radius vector der Horizontalprojection mit der X-Achse bildet. Ersetzt man φ durch $\varphi+2\pi$, so geht man von einem Punkte P der Schraubenlinie zu dem auf derselben Mantellinie zunächst darüber liegenden Punkte; die Z-Ordinate desselben ist $k\varphi+k\cdot 2\pi$. Der Unterschied beider ist die Ganghöhe der Schraubenlinie; bezeichnet man diese mit h, so ist

$$h=2\pi k.$$

Da nun $y=x\,tang\,\varphi$, so folgt eine Gleichung der Schraubenlinie zu

1. $$z=k\,Arc\,tang\frac{y}{x};$$

e andere ist die Cylindergleichung

2. $$x^2+y^2-a^2=0,$$

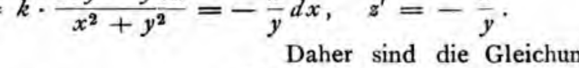
enn a den Radius des Cylinders bezeichnet.

In Fig. 486 sind zwei Gänge einer Schraubenlinie im Aufriss aufgezeichnet.

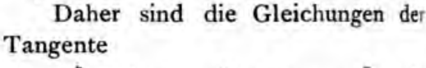
Durch Differentiation folgt aus 2. und 1.

$$xdx+ydy=0, \quad \text{folglich} \quad y'=-\frac{x}{y},$$

$$dz = k \cdot \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = -\frac{k}{y}\,dx\,, \quad z' = -\frac{k}{y}\,.$$



Daher sind die Gleichungen der Tangente



3. $$\frac{\xi - x}{y} = -\frac{\eta - y}{x} = -\frac{\zeta - z}{k}\,.$$

Der Grundriss der Tangente hat hiernach die Gleichung

$$\xi x + \eta y = a^2\,,$$

er berührt daher den Normalschnitt des Cylinders, wie aus geometrischen Gründen auch sofort erhellt. Sind ξ, η die Coordinaten der Horizontalspur der Tangente, so folgt aus 3. für $\zeta = 0$

$$\xi - x = \frac{z}{k}y\,, \quad \eta - y = -\frac{z}{k}x\,,$$

und daher weiter

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \frac{z^2}{k^2}(x^2 + y^2)\,.$$

Ersetzt man z und $x^2 + y^2$ durch $k\varphi$ und a^2, und bezeichnet die Spur der Tangente mit T_1, so erhält man $P'T_1 = a\varphi$, d. i. = Kreisbogen $P'A$.

Hieraus folgt: Die Spuren der Tangenten der Schraubenlinie auf einer Ebene normal zur Achse liegen auf einer Kreisevolvente.

Der Winkel χ der Tangente mit der Schraubenachse ergiebt sich aus 3. zu

(M. 486.)

4. $$\cos\chi = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + k^2}} = \frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2}}\,, \quad \tan\chi = \frac{a}{k}\,.$$

Die Tangenten der Schraubenlinie sind also gegen die Achse gleich geneigt. Die Gleichung der Normalebene ist

$$y(\xi - x) - x(\eta - y) - k(\zeta - z) = 0\,, \quad \text{d. i.}$$

5. $$N \equiv y\xi - x\eta - k(\zeta - z) = 0\,.$$

Die Coordinaten von N sind daher

$$u = -\frac{y}{kz}\,, \quad v = \frac{x}{kz}\,, \quad w = \frac{1}{z}\,.$$

Hieraus folgt weiter

$$\frac{u}{w} = -\frac{y}{k}\,, \quad \frac{v}{w} = \frac{x}{k}\,, \quad \frac{u}{v} = -\frac{y}{x}\,.$$

Daher erhält man für die von den Normalebenen umhüllte abwickelbare Fläche die Gleichungen

6. $$\frac{u^2 + v^2}{w^2} = \frac{a^2}{k^2}\,, \quad kw\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{u}{v} + 1 = 0\,.$$

Die letzte Gleichung entsteht, wenn man in $w = 1 : z$ die Coordinate z durch $k\,\mathrm{Arc\,tang}\,(y : x)$, und hierin $y : x$ durch $-u : v$ ersetzt.

Im vorliegenden Falle erhalten wir über die auf dieser Fläche gelegenen Geraden am einfachsten dadurch Aufschluss, dass wir die Gleichungen zweier

benachbarten Normalebenen der Schraubenlinie bilden. Die durch den Punkt $x+dx,\ y+dy,\ z+dz$ gehende Normalebene hat die Gleichung

$$N_1 \equiv (y+dy)\xi - (x+dx)\eta - k(\zeta - z - dz) = 0\,.$$

Durch die gesuchte Gerade NN_1 geht auch die Ebene

$$M \equiv N_1 - N \equiv dy\cdot\xi - dx\cdot\eta + kdz = 0\,.$$

Setzt man die obigen Werthe von y' und z' ein, so erhält man die Gleichung dieser Ebene

$$M \equiv x\xi + y\eta + k^2 = 0\,.$$

M ist daher normal zu OP', und schneidet von der Verlängerung von OP' die constante Strecke $OQ' = k^2 : \sqrt{x^2+y^2} = k^2 : a$ ab.

Zieht man durch P die Gerade PQ parallel und gleich $P'Q'$, so enthält N die Gerade PQ; folglich enthält die Gerade NN_1 den Punkt Q. Bewegt sich P entlang der Schraubenlinie, so beschreibt Q eine Schraubenlinie von derselben Ganghöhe; bezeichnet χ_1 den Winkel der Tangente dieser Schraubenlinie mit OZ, so ist

$$\cos\chi_1 = k : \sqrt{k^2 + \frac{k^2}{a^2}} = \frac{a}{\sqrt{k^2+a^2}}\,.$$

Hieraus folgt, dass $\cos\chi_1 = \sin\chi$, dass also die Tangente der von Q beschriebenen Schraubenlinie mit NN_1 zusammenfällt. Wir haben somit den Satz: Die Cuspidalkante der von den Normalebenen einer Schraubenlinie umhüllten abwickelbaren Fläche ist eine coaxiale Schraubenlinie von derselben Ganghöhe.

Wenn eine Gerade normal zu einer andern Geraden sich so bewegt, dass sie diese Gerade und eine Schraubenlinie schneidet, welche die letztere Gerade zur Achse hat, so nennt man die von der bewegten Geraden beschriebene Fläche eine axiale normale Schraubenregelfläche. In Bezug auf das soeben benutzte Coordinatensystem ist die Gleichung dieser Fläche

$$7.\qquad z = k\,Arc\,tang\frac{y}{x}\,,$$

so dass die beiden Gleichungen der Schraubenlinie 1. und 2. dieselbe als Durchschnitt dieser Schraubenfläche und eines Rotationscylinders erscheinen lassen. Aus 7. folgt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -k\frac{y}{x^2+y^2}\,,\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = k\cdot\frac{x}{x^2+y^2}\,;$$

mithin ist die Gleichung der Tangentenebene

$$ky(\xi - x) - kx(\eta - y) + (x^2+y^2)(\zeta - z) = 0\,,\quad \text{oder}$$

$$8.\qquad T \equiv ky\xi - kx\eta + (x^2+y^2)(\zeta - z) = 0\,.$$

Diese Ebene enthält die Gerade, deren Gleichungen sind

$$\zeta = z,\quad y\xi - x\eta = 0,$$

d. i. die durch den Berührungspunkt P gehende erzeugende Gerade der Schraubenfläche. Der Abschnitt von T auf der X-Achse ergiebt sich aus 8. für $\eta = \zeta = 0$ zu

$$\xi = \frac{x^2+y^2}{ky}z.$$

Ist ρ der Abstand des Berührungspunktes von der Z-Achse, und φ der Winkel (ρ, x), so ist $x^2 + y^2 = \rho^2$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = k\varphi$, und es folgt daher

$$\xi = \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cdot\rho.$$

Bewegt sich P entlang einer erzeugenden Geraden, so bleibt φ ungeändert. Da man jede erzeugende Gerade zur X-Achse wählen kann, so ergiebt sich der

Satz: Die erzeugenden Geraden der axialen normalen Schraubenregelfläche werden von den den Punkten einer Erzeugenden zugehörigen Tangentenebenen in Punktreihen geschnitten, die der Reihe der Berührungspunkte ähnlich sind; das Verhältniss entsprechender Strecken ist von der Ganghöhe unabhängig.

Wenn eine Gerade G sich um eine Achse so bewegt, dass ihr Winkel α mit dieser Achse und ihr kürzester Abstand b von ihr unverändert bleiben, und die gemeinsame Normale der Achse und der Geraden G eine normale axiale Schraubenfläche erzeugt, so beschreibt die Gerade G eine Schraubenregelfläche allgemeinster Art.

Ist $b = 0$ und $\alpha = 90°$, so beschreibt G eine normale axiale Schraube; ist $b = 0$ und $\alpha \gtrless 90°$, so bezeichnet man die erzeugte Fläche als schräge axiale Schraube; zur Unterscheidung hiervon hat man die Schraubenregelflächen, für welche b von Null verschieden ist, als geschränkte Schrauben bezeichnet.

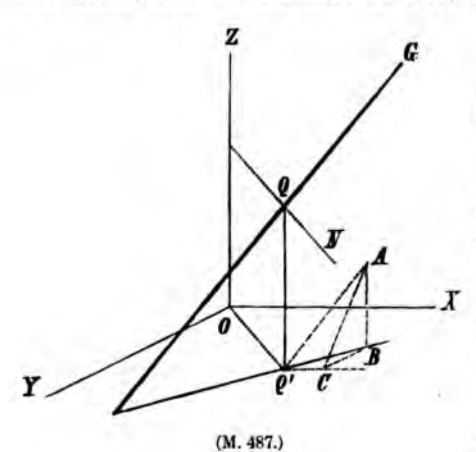
Verfügt man über das Coordinatensystem in Bezug auf die von b erzeugte Schraubenfläche so wie vorhin, wendet dieselben Bezeichnungen an, und betrachtet die Gerade G in der Lage, in welcher b und OX den Winkel φ einschliessen, so hat der Grundriss von G die Gleichung

$$\cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y - b = 0, \quad \text{oder}$$

9. $$y = -\cot\varphi \cdot x + \frac{b}{\sin\varphi}.$$

Es sei Q' der Grundriss von Q; man ziehe durch Q' Parallelen zu G und OX, mache $Q'A = 1$ und bestimme die Projectionen B und C von A auf die XY-Ebene, bez. die Parallele zu OX; dann ist

$$Q'B = \sin\alpha,$$
$$Q'C = Q'B\sin\varphi = \sin\alpha\sin\varphi.$$



(M. 487.)

Nun ist aber $Q'C = \cos(G, x)$; daher hat man

$$\cos(G, x) = \sin\alpha\sin\varphi.$$

Die Coordinaten von Q sind $x_0 = b\cos\varphi$ und $z_0 = k\varphi$; daher ist die Gleichung der Projection von G auf die XZ-Ebene

$$\frac{z - k\varphi}{\cos\alpha} = \frac{x - b\cos\varphi}{\sin\alpha\sin\varphi},$$

woraus sich ergiebt

$$z = \frac{\cot\alpha}{\sin\varphi}x - b\cot\alpha\cot\varphi + k\varphi.$$

Im Vergleich mit den Bezeichnungen in No. 4 ist also jetzt

$$G = -\cot\varphi, \quad H = \frac{b}{\sin\varphi}, \quad g = \frac{\cot\alpha}{\sin\varphi}, \quad h = -b\cot\alpha\cot\varphi + k\varphi,$$

$$G' = \frac{1}{\sin^2\varphi}, \quad H' = -\frac{b\cos\varphi}{\sin^2\varphi}, \quad g' = -\frac{\cot\alpha\cos\varphi}{\sin^2\varphi}, \quad h' = \frac{b\cot\alpha}{\sin^2\varphi} + k.$$

Folglich ist die Gleichung der Tangentenebene im Punkte x, y, z

10. $$T = \left(\frac{\cot\alpha}{\sin\varphi}x + k\cot\varphi\right)(\xi - x) - \left(\frac{\cot\alpha\cos\varphi}{\sin^2\varphi}x - \frac{b\cot\alpha}{\sin^2\varphi} - k\right)(\eta - y)$$
$$- \left(\frac{1}{\sin^2\varphi}x - \frac{b\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right)(\zeta - z) = 0.$$

Um die Construction der Tangentenebene in einem Punkte P der Geraden

G zu erledigen, genügt es, die Spur derselben auf der durch Q gehenden Normalebene zur Achse anzugeben; und es reicht aus, dabei eine die Gleichung 10. vereinfachende besondere Lage von G vorauszusetzen.

Wir wählen dazu die Lage $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Ist $QP = r$, so ist dann

$$x = r \sin\alpha, \quad y = b, \quad z = k\frac{\pi}{2} + r\cos\alpha.$$

Die Gleichung von T wird unter diesen Voraussetzungen

$$r\cos\alpha\,(\xi - r\sin\alpha) + (b\cot\alpha + k)(\eta - b) - r\sin\alpha\left(\zeta - k\frac{\pi}{2} - r\cos\alpha\right) = 0.$$

Die Gleichung der Spur dieser Ebene auf der durch Q gehenden Horizontalebene erhält man durch die Substitution $\zeta = k\frac{\pi}{2}$; es entsteht

11. $$r\cos\alpha\,\xi + (b\cot\alpha + k)(\eta - b) = 0.$$

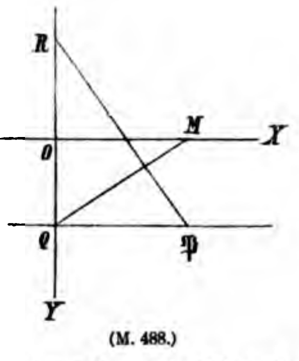
Diese Gerade schneidet von der X-Achse die Strecke ab

$$m = \frac{b(b\cot\alpha + k)}{r\cos\alpha} = \frac{b(b + k\tang\alpha)}{r\sin\alpha} = \frac{b(b + k\tang\alpha)}{x}.$$

Ist $Q\mathfrak{P} = x$, und macht man $OR = k\tang\alpha$, $QM \perp R\mathfrak{P}$, so ist

$$OQ : OM = Q\mathfrak{P} : QR,$$

mithin ist $OM = m$, und daher QM die gesuchte Spur der Tangentenebene auf der durch Q gehenden Horizontalebene.



(M. 488.)

Die Gleichung 11. liefert nur dann ein von r unabhängiges Resultat, wenn

$$b\cot\alpha + k = 0, \quad \tang\alpha = -\frac{b}{k},$$

d. i. wenn die Gerade G die von Q beschriebene Schraubenlinie berührt. Da in diesem Falle die Tangentenebene die Fläche entlang der ganzen Geraden G tangirt, so folgt, dass alsdann die Schraubenfläche abwickelbar ist.

10. Zu den Entwicklungen dieses Abschnittes fügen wir noch folgende Beispiele.

A. Die Gleichung der Fusspunktfläche einer Fläche f, d. i. des Ortes der Fusspunkte der Lothe, die von einem gegebenen Punkte A (Pol) auf die Tangentenebenen von f gefällt werden, wird erhalten, indem man die Gleichung der Fläche f in Ebenencoordinaten für A als Nullpunkt bildet, und in derselben u, v, w durch die Quotienten ersetzt

$$\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Die Fusspunktfläche von $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$ für den Nullpunkt als I ist

$$\frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b} + \frac{\zeta^2}{c} - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = 0.$$

Die Fusspunktfläche einer Regelfläche wird durch Bewegung eines veränder-l en Kreises beschrieben.

B. Eine Rotationsfläche entsteht durch Rotation einer Linie um eine ı ıse. Alle ebenen Schnitte einer Rotationsfläche normal zur Achse sind Kreise (rallelkreise), welche die Spuren der Achse auf der Schnittebene zu

Centren haben; die ebenen Schnitte, welche die Achse enthalten, sind congruent und heissen **Meridiane**; die Fläche kann durch Rotation eines Meridians erzeugt werden. Wird die Rotationsachse zur Z-Achse gewählt und hat ein Meridian in Bezug auf die Z-Achse und eine durch den Nullpunkt gehende X-Achse die Gleichung $f(z, x) = 0$, so ist die Gleichung der Rotationsfläche

$$f(z, \sqrt{x^2 + y^2}) = 0.$$

Die Normale einer Rotationsfläche schneidet die Achse; die Normalen sowie die Tangentenebenen der Punkte desselben Parallelkreises gehen je durch denselben Punkt der Achse.

C. Eine Fläche, deren Radienvectoren reciprok den auf derselben Geraden liegenden Radien einer gegebenen Fläche f sind, heisst die **Reciprokalfläche** der Fläche f (in Bezug auf den Nullpunkt als Pol). Aus der Gleichung $f(x, y, z) = 0$ folgt die Gleichung der Reciprokalfläche zu

$$f\left(\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\right) = 0,$$

wobei P und Π auf demselben Radius liegen.

Bildet man

$$f_\xi = \frac{\partial f}{\partial \xi} = f_x \frac{\partial x}{\partial \xi} + f_y \frac{\partial y}{\partial \xi} + f_z \frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \text{u. s. w.}$$

so erkennt man, dass

$$f_\xi \cdot X + f_\eta \cdot Y + f_\zeta \cdot Z = r^2 (f_x \cdot X + f_y \cdot Y + f_z \cdot Z) \\ - 2r^2 (f_x \cdot x + f_y \cdot y + f_z \cdot z)(\xi X + \eta Y + \zeta Z).$$

Die Tangentenebenen zweier Reciprokalflächen in entsprechenden Punkten schneiden daher eine Normalebene des Radius dieser Punkte in parallelen Geraden.

Ferner ist $f_\xi{}^2 + f_\eta{}^2 + f_\zeta{}^2 = \frac{1}{\rho^4}(f_x{}^2 + f_y{}^2 + f_z{}^2)$. Hieraus findet man, dass die Normalebene des Radius zweier zusammengehöriger Punkte mit den Tangentenebenen in diesen Punkten entgegengesetzt gleiche Winkel einschliesst.

Die Reciprokalfläche der Fusspunktfläche eines Ellipsoids E — beide Male für das Centrum als Pol — ist ein coaxiales Ellipsoid, dessen Achsen den gleichgerichteten Achsen von E reciprok sind.

§ 7. Höhere Differentialquotienten.

1. Mit Rücksicht auf weitere Differentiationen wird der Differentialquotient einer Function y einer Variabeln als der **erste Differentialquotient** von y bezeichnet.

Unter dem zweiten Differentialquotienten von y versteht man den Differentialquotienten des ersten Differentialquotienten; unter dem dritten Differentialquotienten versteht man den Differentialquotienten des zweiten Differentialquotienten u. s. w., allgemein unter dem $n$ten Differentialquotienten den Differentialquotienten des $(n-1)$ten Differentialquotienten. Aus dieser Definition folgt sofort, dass der $n$te Differentialquotient des $m$ten Differentialquotienten von y gleich ist dem $(n+m)$ten Differentialquotienten von y. Den 2ten, 3ten, 4ten, . . . $n$ten Differentialquotienten von y bezeichnet man mit y'', y''', y'''', . . . $y^{(n)}$; man hat daher

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dy'}{dx}, \quad y''' = \frac{dy''}{dx}, \ldots y^n = \frac{dy^{(n-1)}}{dx},$$

$$(y^{(n)})^{(m)} = y^{(n+m)}.$$

$$dy = y'dx, \quad dy' = y''dx, \quad dy'' = y'''dx \ldots\ldots$$

Wenn man beide Seiten der Gleichung

$$dy = y'dx$$

differenzirt und dabei dx als constanten Faktor ansieht, so erhält man

$$d(dy) = dy' \cdot dx;$$

in Folge der Gleichung $dy' = y''dx$ entsteht hieraus

$$d(dy) = y''dx^2.$$

Statt des unbequemen Zeichens $d(dy)$ setzt man das kürzere d^2y,*) wobei ausdrücklich zu bemerken ist, dass dieses Zeichen die Voraussetzung enthält, dass bei der zweiten Differentiation der von der ersten herrührende Faktor dx als constant betrachtet werden soll. Unter dieser Voraussetzung hat man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''.$$

Diese Darstellungsweise lässt sich auf beliebig hohe Differentialquotienten ausdehnen. Versteht man unter d^ny den Ausdruck, den man erhält, wenn man y differenzirt, das Resultat wieder differenzirt und diese Differentiationen so oft wiederholt, bis man im Ganzen n ausgeführt hat, und bei allen diesen Differentiationen dx als constanten Faktor behandelt, so ist

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}.$$

Denn nimmt man an, diese Formel gelte für einen bestimmten Werth von n, so hat man zunächst nach der Voraussetzung

$$d^ny = y^{(n)}dx^n;$$

durch Differentiation ergiebt sich hieraus, wenn dabei dx als constant gilt

$$d(d^ny) = dy^{(n)} \cdot dx^n.$$

Wenn man hierin $dy^{(n)} = y^{(n+1)}dx$ substituirt, und $d(d^ny)$ durch $d^{n+1}y$ ersetzt, so ergiebt sich

$$d^{n+1}y = y^{(n+1)}dx^{n+1}, \quad \text{also} \quad \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = y^{(n+1)}.$$

Da nun die Formel für $n = 2$ erwiesen ist, so gilt sie auch für $n = 3, 4, 5 \ldots$ überhaupt für jeden Werth von n.

Diese Bezeichnung höherer Differentialquotienten einer Veränderlichen wird am häufigsten angewendet.

2. Höhere Differentialquotienten einer Potenz. Durch successive Differentiation erhält man leicht

$$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2(x^m)}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}, \quad \frac{d^3(x^m)}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^k(x^m)}{dx^k} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)x^{m-k}.$$

Ist m eine positive ganze Zahl, so kommt man endlich auf

$$\frac{d^m(x^m)}{dx^m} = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Da der $m$te Differentialquotient von x unabhängig ist, so folgt, dass der $(m+1)$te, sowie alle höheren verschwinden.

3. Höhere Differentialquotienten des Logarithmus.

Aus $\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x}$ folgt $\frac{d^nlx}{dx^n} = \frac{d^{n-1}(x^{-1})}{dx^{n-1}}$, also hat man durch Anwendung des in No. 2 Gefundenen

---

*) Die hochgestellte 2 hinter dem Zeichen d ist hier ein Wiederholungszeichen; Verwechselung mit einem Potenzexponenten ist nicht zu befürchten.

$$\frac{d^n lx}{dx^n} = (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, x^{-n}.$$

4. Höhere Differentialquotienten der Exponentialgrösse.

Da $\frac{de^x}{dx} = e^x$, so folgt

$$\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x.$$

Die Exponentialgrösse e^x hat also die Eigenschaft, dass jeder ihrer Differentialquotienten der Function gleich ist.

5. Höhere Differentialquotienten von $sin\,x$ und $cos\,x$. Man hat

$$\frac{d\,sin\,x}{dx} = cos\,x, \qquad \frac{d\,cos\,x}{dx} = -\,sin\,x, \quad \text{und daher}$$

$$\frac{d^2 sin\,x}{dx^2} = -\,sin\,x, \qquad \frac{d^2 cos\,x}{dx^2} = -\,cos\,x,$$

$$\frac{d^3 sin\,x}{dx^3} = -\,cos\,x, \qquad \frac{d^3 cos\,x}{dx^3} = sin\,x,$$

$$\frac{d^4 sin\,x}{dx^4} = sin\,x. \qquad \frac{d^4 cos\,x}{dx^4} = cos\,x.$$

Somit ist man beim vierten Differentialquotienten wieder zur ursprünglichen Function zurückgekehrt. Man erkennt hieraus folgende Regel: Um den $n$ten Differentialquotienten von $sin\,x$ und $cos\,x$ zu erhalten, dividire man n durch 4; je nachdem der Divisionsrest ρ die Werthe hat

$$\rho = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 0,$$

ist

$$\frac{d^n sin\,x}{dx^n} = cos\,x, \quad -\,sin\,x, \quad -\,cos\,x, \quad sin\,x,$$

$$\frac{d^n cos\,x}{dx^n} = -\,sin\,x, \quad -\,cos\,x, \quad sin\,x, \quad cos\,x.$$

Man kann diese Regel in die Formeln zusammenfassen

$$\frac{d^n sin\,x}{dx^n} = sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi + x\right), \qquad \frac{d^n cos\,x}{dx^n} = cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi + x\right).$$

6. Höhere Differentialquotienten von $tang\,x$.

Man hat zunächst

$$\frac{d\,tang\,x}{dx} = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tang^2 x.$$

Daher ist weiter

$$\frac{d^2 tang\,x}{dx^2} = 2\,tang\,x\,(1 + tang^2 x) = 2\,tang\,x + 2\,tang^3 x,$$

$$\frac{d^3 tang\,x}{dx^3} = (2 + 2 \cdot 3\,tang^2 x)(1 + tang^2 x) = 2 + 8\,tang^2 x + 6\,tang^4 x,$$

$$\frac{d^4 tang\,x}{dx^5} = (8 \cdot 2\,tang\,x + 6 \cdot 4\,tang^3 x)(1 + tang^2 x)$$

$$= 16\,tang\,x + 40\,tang^3 x + 24\,tang^5 x,$$

$$\frac{d^5 tang\,x}{dx^5} = (16 + 40 \cdot 3\,tang^2 x + 24 \cdot 5\,tang^4 x)(1 + tang^2 x)$$

$$= 16 + 136\,tang^2 x + 240\,tang^4 x + 120\,tang^6 x.$$

Auf diesem Wege kann man beliebig weit vorwärts gehen; freilich erhält man keinen Aufschluss über das Bildungsgesetz der Zahlenfaktoren, und findet einen höheren Differentialquotienten der Tangente nur, nachdem man alle niederen nach einander berechnet hat.

In Bezug auf die höheren Differentialquotienten der cyklometrischen Functionen verweisen wir auf spätere Entwicklungen.

7. Wir wollen nun zeigen, wie man den $n$ten Differentialquotienten eines Produktes uv zweier Functionen von x aus den Differentialquotienten von u und v berechnet. Durch wiederholte Differentiation hat man zunächst

$$\frac{duv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d^2uv}{dx^2} = u\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2}v,$$

$$\frac{d^3uv}{dx^3} = u\frac{d^3v}{dx^3} + 3\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2v}{dx^2} + 3\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{d^3u}{dx^3}\cdot v,$$

$$\frac{d^4uv}{dx^4} = u\frac{d^4v}{dx^4} + 4\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^3v}{dx^3} + 6\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^2v}{dx^2} + 4\frac{d^3u}{dx^3}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{d^4u}{dx^4}\cdot v.$$

Diese Entwicklungen entsprechen der allgemeinen Formel

$$1.\quad \frac{d^nuv}{dx^n} = u\frac{d^nv}{dx^n} + \binom{n}{1}\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \binom{n}{3}\frac{d^3u}{dx^3}\cdot\frac{d^{n-3}v}{dx^{n-3}} + \ldots,$$

wobei
$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}.$$

Um die unbeschränkte Gültigkeit derselben nachzuweisen, nehmen wir an, sie gelte für einen bestimmten Werth von n und entwickeln daraus den nächst höheren Differentialquotienten; wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}uv}{dx^{n+1}} &= \left(u\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + \frac{du}{dx}\frac{d^nv}{dx^n}\right) + \binom{n}{1}\left(\frac{du}{dx}\frac{d^nv}{dx^n} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}\right) \\ &+ \binom{n}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \frac{d^3u}{dx^3}\cdot\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}}\right) + \ldots\ldots \\ &= u\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + \left[1 + \binom{n}{1}\right]\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^nv}{dx^n} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right]\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} \\ &+ \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\right]\frac{d^3u}{dx^3}\cdot\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \left[\binom{n}{3} + \binom{n}{4}\right]\frac{d^4u}{dx^4}\cdot\frac{d^{n-3}v}{dx^{n-3}} + \ldots\end{aligned}$$

Da nun bekanntlich

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

so hat man

$$\frac{d^{n+1}uv}{dx^{n+1}} = u\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + \binom{n+1}{1}\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^nv}{dx^n} + \binom{n+1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \ldots$$

Gilt also die Formel 1. für einen bestimmten Werth von n, so gilt sie auch für den nächst höheren; da sie bereits für $n = 2, 3, 4$ erwiesen ist, so folgt, dass sie für jeden Werth von n gültig ist.

8. Wir wenden dies an, um den $n$ten Differentialquotienten von $arc\,tang\,x$, $arc\,sin\,x$ und $(arc\,sin\,x)^2$ für den besonderen Werth $x = 0$ zu erhalten.

A. Aus der Gleichung

$$\frac{d\,arc\,tang\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

folgt

$$(1+x^2)\frac{d\,arc\,tang\,x}{dx} - 1 = 0.$$

Bildet man den $(n-1)$ten Differentialquotienten der linken Seite, so erhält man

$$(1+x^2)\frac{d^n arc\,tang\,x}{dx^n} + 2(n-1)x\cdot\frac{d^{n-1}arc\,tang\,x}{dx^{n-1}} + (n-1)(n-2)\frac{d^{n-2}arc\,tang\,x}{dx^{n-2}} = 0.$$

Daher hat man die Gleichung

$$\frac{d^n \, arc \, tang x}{dx^n} = -\frac{n-1}{1+x^2}\left[2x\frac{d^{n-1} arc \, tang x}{dx^{n-1}} + (n-2)\frac{d^{n-2} arc \, tang x}{dx^{n-2}}\right].$$

Wenn man den Werth, den ein Differentialquotient für $x = 0$ hat, durch

$$\left(\frac{d^n \, arc \, tang x}{dx^n}\right)_0$$

bezeichnet, so findet man

$$\left(\frac{d^n \, arc \, tang x}{dx^n}\right)_0 = -(n-1)(n-2)\left(\frac{d^{n-2} arc \, tang x}{dx^{n-2}}\right)_0.$$

Da nun

$$\left(\frac{d \, arc \, tang x}{dx}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{d^2 \, arc \, tang x}{dx^2}\right)_0 = 0,$$

so folgt, dass der $n$te Differentialquotient von $arc \, tang x$ für ein gerades n und für $x = 0$ verschwindet, während für ein ungerades n

$$\left(\frac{d^n \, arc \, tang x}{dx^n}\right)_0 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1).$$

B. Aus der Formel

$$\frac{d \, arc \, sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

folgt zunächst

$$\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{d \, arc \, sin x}{dx} = 1.$$

Hieraus ergiebt sich durch erneute Differentiation

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{d \, arc \, sin x}{dx} + \sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2 \, arc \, sin x}{dx^2} = 0,$$

und mithin

$$(1-x^2)\frac{d^2 \, arc \, sin x}{dx^2} - x\frac{d \, arc \, sin x}{dx} = 0.$$

Differenzirt man diese Gleichung $(n-2)$mal, so erhält man

$$(1-x^2)\frac{d^n \, arc \, sin x}{dx^n} - 2(n-2)x\frac{d^{n-1} arc \, sin x}{dx^{n-1}} - (n-2)(n-3)\frac{d^{n-2} arc \, sin x}{dx^{n-2}}$$
$$- x\frac{d^{n-1} arc \, sin x}{dx^{n-1}} - (n-2)\frac{d^{n-2} arc \, sin x}{dx^{n-2}} = 0,$$

oder zusammengerechnet

$$(1-x^2)\frac{d^n \, arc \, sin x}{dx^n} - (2n-3)x\frac{d^{n-1} arc \, sin x}{dx^{n-1}} - (n-2)^2\frac{d^{n-2} arc \, sin x}{dx^{n-2}} = 0.$$

Diese Gleichung lehrt, wie man den $n$ten Differentialquotienten von $arc sin x$ aus den beiden nächst niederen ableitet. Für $x = 0$ hat man insbesondere

$$\left(\frac{d^n \, arc \, sin x}{dx^n}\right)_0 = (n-2)^2\,\frac{d^{n-2} arc \, sin x}{dx^{n-2}}.$$

Da nun bekanntlich

$$\left(\frac{d \, arc \, sin x}{dx}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{d^2 \, arc \, sin x}{dx^2}\right)_0 = 0,$$

so folgt, dass der $n$te Differentialquotient von $arc \, sin x$ für $x = 0$ und für ein gerades n verschwindet, während man für ein ungerades hat

$$\left(\frac{d^n \, arc \, sin x}{dx^n}\right)_0 = 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \ldots (n-2)^2.$$

C. Setzt man $u = (arc \, sin x)^2$, so ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{2u}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{du}{dx} = 2u,$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{du}{dx} + \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} = 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{folglich}$$

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - x\frac{du}{dx} = 2.$$

Wird hiervon der $(n-2)$te Differentialquotient gebildet, so erhält man

$$(1-x^2)\frac{d^nu}{dx^n} - 2(n-2)x\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} - (n-2)(n-3)\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} - x\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} - (n-2)\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} = 0.$$

Hieraus folgt zur Berechnung von $d^nu : dx^n$ aus den vorhergehenden Differentialquotienten

$$\frac{d^nu}{dx^n} = \frac{1}{1-x^2}\left[(2n-3)\,x\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + (n-2)^2\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}\right].$$

Insbesondere erhält man

$$\left(\frac{d^n(arc\,sin\,x)^2}{dx^n}\right)_0 = (n-2)^2\left(\frac{d^{n-2}(arc\,sin\,x)^2}{dx^{n-2}}\right)_0.$$

Da nun, wie aus den ersten Formeln leicht sich ergiebt

$$\left(\frac{d(arc\,sin\,x)^2}{dx}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{d^2(arc\,sin\,x)^2}{dx^2}\right)_0 = 2,$$

so folgt, dass der $n$te Differentialquotient von $(arc\,sin\,x)^2$ für $x = 0$ und für jedes ungerade n verschwindet, während für jedes gerade n, das grösser als 2 ist, die Formel gilt

$$\left(\frac{d^n(arc\,sin\,x)^2}{dx^n}\right)_0 = 2\cdot 2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\ldots(n-2)^2.$$

9. **Höhere Differentialquotienten einer Function von einer Function.**

Ist $y = F(u)$ und $u = \varphi(x)$, so erhält man durch wiederholte Differentiation zunächst

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF}{du}u',$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dF}{du}u'' + \frac{d^2F}{du^2}\cdot u'^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dF}{du}u''' + 3\frac{d^2F}{du^2}u'u'' + \frac{d^3F}{du^3}u'^3,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{dF}{du}u'''' + \frac{d^2F}{du^2}(4u'u''' + 3u''^2) + 6\frac{d^3F}{du^3}u'^2u'' + \frac{d^4F}{du^4}u'^4.$$

Hiernach übersieht man, dass allgemein

$$1.\qquad \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{dF}{du}\cdot X_1 + \frac{d^2F}{du^2}X_2 + \frac{d^3F}{du^3}X_3 + \ldots + \frac{d^nF}{du^n}X_n,$$

worin die X_k Functionen von x sind, die nicht von der besonderen Art der Function F abhängen. Man kann daher diese X_k ermitteln, indem man in Formel 1. die Function F specialisirt. Setzt man $F(u) = u^n$, so erhält man

$$\frac{d(u^n)}{dx^n} = nu^{n-1}X_1 + n(n-1)u^{n-2}X_2 + n(n-1)(n-2)u^{n-3}X_3 + \ldots,$$

wofür wir setzen wollen

$$2.\qquad \frac{d(u^n)}{dx^n} = \binom{n}{1}u^{n-1}U_1 + \binom{n}{2}u^{n-2}U_2 + \binom{n}{3}u^{n-3}U_3 + \ldots + U_n,$$

so dass nun U_1, U_2, U_3 .. zu bestimmen sind. Um die links angedeutete Differentiation auszuführen, bemerken wir zunächst, dass, wenn z und t von einander unabhängig sind, und $z + t = w$ gesetzt wird, die Gleichung gilt

$$\frac{d^n\psi(w)}{d^nw} = \frac{d^n\psi(z+t)}{dt^n}.$$

Setzt man für w einen besonderen Werth W, so ist es gleichgültig, ob man

erst $\psi(w)$ nach w $n$mal differenzirt und dann w durch W ersetzt, oder ob man $\psi(W)$ in Bezug auf W differenzirt. Wählt man insbesondere $W = z$, also $t = 0$, so erhält man

3. $$\frac{d^n \psi(z)}{dz^n} = \left[\frac{d^n \psi(z+t)}{dt^n}\right]_0,$$

wobei rechts durch die angehängte Null ausgedrückt werden soll, dass man nach geschehener Differentiation $t = 0$ zu setzen hat. Insbesondere ist also

4. $$\frac{d^n(u^n)}{dx^n} = \left[\frac{d^n[\varphi(x+t)]^n}{dt^n}\right]_0.$$

Rechts benutzen wir die Identität

$$\varphi(x+t) \equiv u + \varphi(x+t) - \varphi(x) = u + \Phi,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$\Phi \equiv \varphi(x+t) - \varphi(x).$$

Hiernach ergiebt sich

$$[\varphi(x+t)]^n = u^n + \binom{n}{1} u^{n-1}\Phi + \binom{n}{2} u^{n-2}\Phi^2 + \ldots + \Phi^n,$$

und daher durch Differentiation nach t

$$\frac{d^n[\varphi(x+t)]^n}{dt^n} = \binom{n}{1} u^{n-1}\frac{d^n\Phi}{dt^n} + \binom{n}{2} u^{n-2}\frac{d^n\Phi^2}{dt^n} + \ldots + \frac{d^n\Phi^n}{dt^n}.$$

Daher ist in Rücksicht auf 3.

5. $$\frac{d^n u^n}{dx^n} = \binom{n}{1} u^{n-1}\left(\frac{d^n\Phi}{dt^n}\right)_0 + \binom{n}{2} u^{n-2}\left(\frac{d^n\Phi^2}{dt^n}\right)_0 + \binom{n}{3} u^{n-3}\left(\frac{d^n\Phi^3}{dt^n}\right)_0 + \ldots$$

Vergleicht man dies mit 2. und setzt für Φ den Werth zurück, so erhält man für die gesuchte Function U_k den Werth

6. $$U_k = \left[\frac{d^n[\varphi(x+t) - \varphi(x)]^k}{dt^n}\right]_0.$$

Entwickelt man rechts nach dem binomischen Satze, und beachtet, dass nach 3.

$$\left(\frac{d^n \varphi(x+t)^r}{dt^n}\right)_0 = \frac{d^n \varphi(x)^r}{dx^n},$$

so erhält man

7. $$U_k = \frac{d^n u^k}{dx^n} - \binom{k}{1} u \cdot \frac{d^n u^{k-1}}{dx^n} + \binom{k}{2} u^2 \frac{d^n u^{k-2}}{dx^n} - \ldots \pm \binom{k}{k-1} u^{k-1}\frac{d^n u}{dx^n}.$$

Insbesondere erhält man aus 6. oder 7.

$$U_1 = \frac{d^n u}{dx^n}, \quad U_2 = \frac{d^n u^2}{dx^n} - 2u\frac{d^n u}{dx^n}, \quad U_3 = \frac{d^n u^3}{dx^n} - 3u\frac{d^n u^2}{dx^n} + 3u^2\frac{d^n u}{dx^n},$$

$$U_4 = \frac{d^n u^4}{dx^n} - 4u\frac{d_n u^3}{dx^n} + 6u^2\frac{d^n u^2}{dx^n} - 4u^3\frac{d^n u}{dx^n}.$$

Die ursprünglich gestellte Aufgabe ist hiernach auf die einfachere zurückgeführt: Die $n$ten Differentialquotienten der Potenzen von u von der ersten bis zur $n$ten zu bestimmen; mit Hülfe dieser Werthe gewinnt man die Functionen U_k*) und hat schliesslich (1)

8. $$\frac{d^n y}{dx^n} = U_1\frac{dF(u)}{du} + \frac{U_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^2F(u)}{du^2} + \frac{U_3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{d^3F(u)}{du^3} + \ldots + \frac{U_n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot\frac{d^nF(u)}{du^n}.$$

Betreffs der Anwendungen dieser Formel begnügen wir uns hier mit einem Beispiele.

Für $u = x^2$ hat man

$$\varphi(x+t) - \varphi(x) = t(2x+t),$$

und daher

---

*) HOPPE, Theorie der independenten Darstellung der höhern Differentialquotienten, Leipzig 1845. SCHLÖMILCH, Compendium der höhern Analysis. 3. Aufl. Braunschweig. Bd. 2, pag. 1.

$$U_k = \left[\frac{d^n t^k (2x+t)^k}{dx^n}\right]_0 .$$

Wendet man rechts die Regel für den Differentialquotient eines Produkts an (No. 7), so verschwinden durch die Substitution $t = 0$ die ersten k Glieder, weil sie eine Potenz von t zum Faktor haben, und es bleibt nur das $(k+1)$te Glied. Man erhält

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\,..\,k} U_k = \binom{n}{k}\frac{d^{n-k}(2x+t)^k}{dx^{n-k}} = \binom{n}{k}\cdot\binom{k}{n-k}(n-k)!\,(2x)^{2k-n} .$$

Auch dieses verschwindet, sobald $k < \frac{n}{2}$. Der Zahlenfaktor ergiebt

$$\binom{n}{k}\binom{k}{n-k}(n-k)! = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2k-n)} .$$

Folglich ist der gesuchte Differentialquotient, wenn man die Reihenfolge der Glieder in 8. umkehrt

$$\frac{d^n F(x^2)}{dx^n} = (2x)^n \frac{d^n F(u)}{du^n} + \frac{n(n-1)}{1}\cdot(2x)^{n-2}\frac{d^{n-1}F(u)}{du^{n-1}}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}(2x)^{n-4}\frac{d^{n-2}F(u)}{du^{n-2}}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}(2x)^{n-6}\frac{d^{n-3}F(u)}{du^{n-2}} + \ldots .$$

Setzt man insbesondere $F(x^2) = \frac{1}{1+x^2}$, so hat man

$$\frac{d^m F(u)}{du^m} = d^m\left(\frac{1}{1+u}\right) : du^m = d^m(1+u)^{-1} : d(1+u)^m = (-1)^m m!\,(1+u)^{-m-1} .$$

Beachtet man ferner, dass

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{d\, arc\, tang\, x}{dx} ,$$

so folgt schliesslich

$$\frac{d^{n+1} arc\, tang\, x}{dx^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{1+x^2}\left\{\frac{(2x)^n}{(1+x^2)^n} - \binom{n-1}{1}\frac{(2x)^{n-2}}{(1+x^2)^{n-1}} + \binom{n-2}{2}\frac{(2x)^{n-4}}{(1+x^2)^{n-2}}\right.$$
$$\left. - \binom{n-3}{3}\frac{(2x)^{n-6}}{(1+x^2)^{n-3}} + \binom{n-4}{4}\frac{(2x)^{n-8}}{(1+x^2)^{n-4}} - \ldots\right\} .$$

10. Die Entwicklungen des vorigen Abschnitts lassen sich noch unter einem anderen Gesichtspunkte betrachten.

In Gleichung 8. ist in einer Function F die unabhängige Veränderliche u durch eine neue Unabhängige x gemäss der Gleichung $u = \varphi(x)$ ersetzt, und die Gleichung lehrt, die Differentialquotienten von $y = F[\varphi(x)]$ in Bezug auf die neue Unabhängige x aus den Differentialquotienten von $F(u)$ in Bezug auf u und aus den Differentialquotienten von $u = \varphi(x)$ in Bezug auf x zu finden. Stellt man die Gleichungen 8. für $n = 1, 2, 3 \ldots n$ auf, so erhält man n Gleichungen, welche die Grössen

$$\frac{dF(u)}{du}, \frac{d^2 F(u)}{du^2}, \frac{d^3 F(u)}{du^3}, \frac{d^4 F(u)}{du^4}, \ldots \frac{d^n F(u)}{du^n}$$

linear enthalten. Aus diesen Gleichungen kann man diese Grössen berechnen, und erhält sie dann ausgedrückt durch die Differentialquotienten von F in Bezug auf die neue Unabhängige x und durch die Differentialquotienten von $\varphi(x)$.

Die Auflösungen des genannten Systems sind somit die zur Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen nöthigen Formeln.

Wir müssen es uns versagen, diese Formeln in aller Allgemeinheit zu entwickeln und begnügen uns, die ersten vier Differentialquotienten anzugeben*).

*) Wegen der vollständigen Formeln vergl. SCHLÖMILCH, Compendium, Bd. 2, pag. 16.

Man erhält durch successive Auflösung der ersten Formeln des vorigen Abschnitts, wenn man $F[\varphi(x)]$ mit y bezeichnet

$$\frac{dF(u)}{du} = \frac{y'}{u'},$$

$$\frac{d^2F(u)}{du^2} = \frac{u'y'' - u''y'}{u'^3},$$

$$\frac{d^3F(u)}{du^3} = \frac{u'^2y''' + 3u'u''y'' - (u'u''' - 3u''^2)y'}{u'^5},$$

$$\frac{d^4F(u)}{du^4} = \frac{1}{u'^7}[u'^3y'''' - 6u'^2u''y''' - (4u'^2u''' + 21u''^2u')y'' - (u'^2u'''' - 10u'u''u''' + 15u''^3)y'] .$$

---

11. Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen. Ist z eine Function mehrerer Variabeln $x, y \dots$

$$z = f(x, y \dots),$$

und bildet man den partialen Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

und hiervon den partialen Differentialquotienten nach einer andern Variabeln y,

$$\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) : \partial y,$$

so wird das Resultat mit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

bezeichnet, so dass man die definirende Formel hat

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\ ^{*)}.$$

Allgemeiner definirt man

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma\dots} z}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial t^\gamma\dots} = \dots \frac{\partial^\gamma}{dt^\gamma}\cdot\frac{\partial^\beta}{dy^\beta}\cdot\frac{\partial^\alpha z}{\partial x^\alpha}.$$

Für diese höheren partialen Differentialquotienten gilt der Satz: Es ist gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Differentiationen vorgenommen werden. Wir beweisen dies zunächst für zwei partiale Differentiationen. Man hat

$$\frac{\partial z}{\partial x} = lim\frac{f(x+\Delta x, y, \dots) - f(x, y, \dots)}{\Delta x}, \quad \text{und daher}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = lim\left[\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, \dots) - f(x, y+\Delta y, \dots)}{\Delta x} - \frac{f(x+\Delta x, y, \dots) - f(x, y, \dots)}{\Delta x}\right] : \Delta y,$$

wobei sich das Zeichen lim in der letzten Formel auf das Verschwinden von Δy und Δx bezieht. Hieraus folgt weiter

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = lim\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, \dots) - f(x, y+\Delta y, \dots) - f(x+\Delta x, y\dots) + f(x, y, \dots)}{\Delta x\,\Delta y}.$$

In gleicher Weise ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = lim\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, \dots) - f(x+\Delta x, y\dots) - f(x, y+\Delta y, \dots) + f(x, y, \dots)}{\Delta y\,\Delta x}.$$

---

*) Um typographisch unbequeme Formen zu vermeiden, schreibt man

$$\frac{\partial}{\partial x}U \text{ für } \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}U \text{ für } \frac{d^2 U}{\partial x\,dy} \quad \text{u. s. w.}$$

Aus der Identität dieser Ausdrücke folgt

1. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Ist z eine Function von n Veränderlichen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, so hat man

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \ldots \partial x_n} = \frac{\partial^i}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial x_{i+1} \partial x_{i+2}} \frac{\partial^{n-i-2} z}{\partial x_{i+3} \ldots \partial x_n}$$

und daher nach 3.

$$= \frac{\partial^i}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial x_{i+2} \partial x_{i+1}} \frac{\partial^{n-i-2} z}{\partial x_{i+3} \ldots \partial x_n}$$

$$= \frac{\partial^n z}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_i \partial x_{i+2} \partial x_{i+1} \partial x_{i+3} \ldots \partial x_n}.$$

Man kann daher bei n Differentiationen irgend zwei auf einander folgende vertauschen. Da nun durch wiederholte Vertauschung benachbarter Elemente aus einer Reihe von Elementen jede Permutation derselben hervorgebracht werden kann, so folgt die allgemeine Geltung des behaupteten Satzes.

12. Ist y eine Function dreier Grössen u, v, w, die ihrerseits wieder Functionen einer Variabeln x sind,

$$y = f(u, v, w),$$
$$u = \varphi_1(x), \quad v = \varphi_2(x), \quad w = \varphi_3(x),$$

so hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot u' + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot v' + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot w',$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial u} u'' + \frac{\partial f}{\partial v} v'' + \frac{\partial f}{\partial w} w'' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} u' + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} v' + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} w'\right) u'$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} u' + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} v' + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} w'\right) v' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} u' + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} v' + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} w'\right) w'$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u} u'' + \frac{\partial f}{\partial v} v'' + \frac{\partial f}{\partial w} w''$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} u'^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot u' v' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} u' w' + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} v'^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} v' w' + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} w'^2.$$

Indem man auf jedes Glied dieses Ausdruckes die Regel für die Differentiation eines Produktes anwendet und die Glieder des Resultates geeignet ordnet und zusammenrechnet, gewinnt man weiter den dritten und höhere Differentialquotienten; man wird auch die Formel leicht auf Fälle ausdehnen, wo y als Function von mehr als drei Grössen erscheint, die Functionen derselben Unabhängigen x sind.

13. Ist z eine Function zweier unabhängigen Veränderlichen x und y, so ist das totale Differential von z

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Dies ist der verschwindend kleine Zuwachs, den z erhält, wenn x und y um die verschwindend kleinen Beträge dx und dy wachsen; dx und dy sind unabhängig von einander, sowie unabhängig von x und y. Somit ist dz eine Function von x und y und zwar sind dieselben nur in $\partial z : \partial x$ und in $\partial z : \partial y$ enthalten.

Das totale Differential von dz bezeichnet man als das zweite totale Differential $d^2 z$; das totale Differential von $d^2 z$ als das dritte totale Differential $d^3 z$ u. s. w., und setzt dabei voraus, dass bei allen diesen Differentiationen dx und dy unverändert dieselben bleiben. Man hat hiernach

$$1. \quad \begin{aligned} d^2z &= \frac{\partial dz}{\partial x}dx + \frac{\partial dz}{\partial y}dy, \\ d^3z &= \frac{\partial d^2z}{\partial x}dx + \frac{\partial d^2z}{\partial y}dy, \\ d^4z &= \frac{\partial d^3z}{\partial x}dx + \frac{\partial d^3z}{\partial y}dy, \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Setzt man der Reihe nach rechts die Werthe für dz, d^2z, d^3z . . ein, so erhält man zunächst

$$d^2z = dx\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) + dy\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right).$$

Führt man die angedeuteten Differentiationen der Klammerausdrücke aus, so erhält man formal ganz dasselbe, als wenn man die Klammern mit den davorstehenden Faktoren multiplicirt hätte, wenn man nur dabei dx, dy, ∂x, ∂y, wie sich von selbst versteht, als einfache Faktoren behandelt. Daher ist d^2z formal darzustellen durch

$$2. \quad d^2z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right).$$

Man schreibt in einer sofort verständlichen Symbolik

$$dx\cdot\frac{\partial U}{\partial x} + dy\frac{\partial U}{\partial y} = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)U.$$

Wendet man dies an, so erhält d^2z die einfache symbolische Darstellung

$$3. \quad d^2z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z.$$

Hier hat man die zweite Potenz des Klammerinhalts nach den gewöhnlichen Regeln auszurechnen und dann im Zähler jedes Gliedes hinter ∂^2 das Zeichen z zu stellen, so dass man also erhält

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Verwendet man den Werth 3. zur Bildung von

$$d^3z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)d^2z,$$

so erhält man

$$d^3z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dx\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z.$$

Das Resultat der neu hinzutretenden Differentiation, die durch den vorderen Klammerausdruck symbolisch dargestellt ist, ist formal identisch mit einer Multiplication durch diesen Klammerinhalt, und man erhält daher

$$d^3z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 z.$$

So fortschliessend, erlangt man die allgemeine Formel

$$4. \quad d^nz = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z.$$

Für das höhere totale Differential einer Function von mehreren unabhängigen Variabeln

$$z = f(x_1, x_2, x_3 \, . \, . \, x_r)$$

erhält man in gleicher Weise ohne Schwierigkeit

$$5. \quad d^nz = \left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \, . \, . + dx_r\frac{\partial}{\partial x_r}\right)^n z.$$

14. Höhere Differentialquotienten einer unentwickelten Function.

Wir beschränken uns hier auf den einfachsten Fall, dass der Zusammenhang einer Function y mit der unabhängigen Variabeln x durch die Gleichung gegeben ist

$$1. \quad f(x, y) = 0.$$

Den ersten Differentialquotienten von y gewinnt man aus der Gleichung

$$2. \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Denken wir uns aus den Gleichungen 1. und 2. y eliminirt, so erhalten wir y' als Function von x allein; führen wir diesen Werth in 2. ein, so wird 2. identisch erfüllt. Differenzirt man 2. unter der Voraussetzung, dass y' durch x allein ausgedrückt ist, so entsteht die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y'\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot y' + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot y'^2\right) = 0,$$

oder besser

$$3. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'' = 0.$$

Setzt man hier den Werth $y' = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$ ein, so erhält man

$$4. \quad y'' = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right] : \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3.$$

Indem man noch rechts y durch x ausdrückt, erhält man y'' als Function von x allein.

Für den dritten Differentialquotienten von y erhält man durch Differentiation von 3. die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \cdot y'\right) + \left(2\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} y' + 2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} y'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot y''\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} y'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y' y'' + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} y'^3\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial y} y''' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y' y''\right) = 0,$$

oder kürzer

$$5. \quad \begin{aligned} &\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} y' + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \cdot y'^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} y'^3 \\ &+ 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y'' + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y' y'' + \frac{\partial f}{\partial y} y''' = 0. \end{aligned}$$

So fortfahrend, erlangt man n Gleichungen, welche die partialen Differentialquotienten von f mit den n Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} \cdots \frac{d^n y}{dx^n}$$

verknüpfen, aus denen man dieselben durch successive Elimination gewinnt.

§ 8. Krümmung ebener Curven.

1. Wenn zwei Curven, die in Bezug auf rechtwinkelige Coordinaten die Gleichungen haben $y = f(x)$ und $y = F(x)$, einen gemeinsamen Punkt P enthalten, und wenn in diesem Punkte auch die Differentialquotienten

$$f', \ f'', \ f''', \ldots f^{(n)}$$

der Reihe nach den Differentialquotienten gleich sind

$$F', \ F'', \ F''', \ldots F^{(n)},$$

so sagt man: Die beiden Curven haben in diesem Punkte P eine Berührung $n$ter Ordnung. Aus dieser Definition folgt sofort: Wenn zwei Curven C_1 und C_2 mit einer Curve C_3 in demselben Punkte P eine Berührung $n$ter

Ordnung haben, so haben C_1 und C_2 in P unter sich eine Berührung von $n$ter oder höherer Ordnung.

Wir zeigen zunächst, dass die Eigenschaft zweier Curven, in einem Punkte eine Berührung $n$ter Ordnung zu haben, vom Coordinatensysteme nicht abhängt.

Geht man vom ursprünglichen Systeme x, y zu neuen irgend wie definirten Coordinaten u, v über, und sind die neuen mit den alten durch die Gleichungen verbunden

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \Phi(x, y),$$

so erhält man durch Differentiation

$$dv = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y'\right) dx, \quad du = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'\right) dx,$$

und hieraus durch Division

$$v' = \frac{dv}{du} = \Phi_1(x, y, y').$$

Weiter erhält man

$$dv' = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y'} \cdot y''\right) dx;$$

Dividirt man durch du, so entsteht ein Resultat von der Form

$$v'' = \Phi_2(x, y, y', y'').$$

So weiter schliessend, erkennt man, dass

$$\frac{d^n v}{du^n} = \Phi_n(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}),$$

dass also die ersten n Differentialquotienten von v in Bezug auf u Functionen von x, y und den ersten n Differentialquotienten von y in Bezug auf x sind; in Bezug auf $y', y'' \ldots$ sind diese Functionen algebraisch rational. Wenn daher für einen gemeinsamen Punkt zweier Curven die ersten n Differentialquotienten $y, y', y'', y''' \ldots y^{(n)}$ dieselben Werthe haben, so haben auch für diesen Punkt die Differentialquotienten $v', v'', v''' \ldots v^{(n)}$ dieselben Werthe.

2. Eine Gerade, die den Punkt x, y einer Curve $y = f(x)$ enthält, hat eine Gleichung von der Form

$$\eta - y = m(\xi - x).$$

Hieraus folgt

$$\frac{d\eta}{d\xi} = m.$$

Für die Curve ist im Punkte x, y

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

die Gerade hat mit der Curve in P eine Berührung erster Ordnung, wenn $m = f'(x)$; die Gleichung der Geraden, welche in P mit der Curve eine Berührung erster Ordnung hat, ist daher

$$\eta - y - f'(x)(\xi - x) = 0.$$

Da dies die Gleichung der Curventangente im Punkte P ist, so folgt: Die Tangente einer Curve hat mit der Curve eine Berührung erster Ordnung.

Der erste Differentialquotient y' einer Geraden ist für alle Punkte constant; mithin verschwinden der zweite und alle höheren Differentialquotienten. Wir sehen daher: Wenn für einen Punkt P_1 einer Curve der zweite Differentialquotient y'' verschwindet, so hat die Curve mit der Tangente in P eine Berührung zweiter Ordnung. Die Curvenpunkte, für welche y'' verschwindet, y''' aber nicht verschwindet, heissen Wendepunkte (oder Inflexionspunkte), die

Tangenten in diesen Punkten heissen Wendetangenten. Verschwindet ausser dem zweiten noch der dritte Differentialquotient, so heisst der Punkt ein stationärer Punkt, die Curve und die Tangente in diesem Punkte haben eine Berührung dritter Ordnung. Für die Sinuscurve ist

$$y = sin x, \quad y' = cos x, \quad y'' = -sin x = -y.$$

Daher sieht man, dass die Durchschnittspunkte der Curve mit der Abscissenachse Wendepunkte sind.

Die Gleichung der Fusspunktcurve der Ellipse für den Mittelpunkt der Ellipse als Pol ist bekanntlich (§ 5, No. 12)

1. $$a^2x^2 + b^2y^2 - (x^2 + y^2)^2 = 0.$$

Hieraus folgt durch Differentiation

2. $$a^2x + b^2yy' - 2(x^2 + y^2)(x + yy') = 0,$$

3. $$a^2 + b^2y'^2 + b^2yy'' - 2(x^2 + y^2)(1 + y'^2 + yy'') - 4(x + yy')^2 = 0.$$

Aus 2. ergiebt sich

4. $$y' = -\frac{(a^2 - 2r^2)x}{(b^2 - 2r^2)y}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Aus 3. ergiebt sich, dass y'' unter der Bedingung verschwindet

5. $$4(x + yy')^2 + 2r^2(1 + y'^2) - (a^2 + b^2y'^2) = 0.$$

Aus 4. erhält man

$$x + yy' = \frac{x(b^2 - a^2)}{b^2 - 2r^2},$$

$$2r^2(1 + y'^2) - (a^2 + b^2y'^2) = 2r^2 - a^2 + (2r^2 - b^2)y'^2$$

$$= \frac{(2r^2 - a^2)}{(2r^2 - b^2)y^2}[(2r^2 - b^2)y^2 + (2r^2 - a^2)x^2] = \frac{2r^2 - a^2}{(2r^2 - b^2)y^2} \cdot r^4.$$

Die Gleichung 5. liefert daher nach Beseitigung der Nenner

6. $$4x^2y^2(a^2 - b^2)^2 + (2r^2 - a^2)(2r^2 - b^2)r^4 = 0.$$

Führt man die zweite Multiplication aus und beachtet, dass

$$4r^4 - 2r^2a^2 - 2r^2b^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2) - 2r^2a^2 - 2r^2b^2 = 2(a^2 - b^2)(x^2 - y^2),$$

so erhält man aus 6.

$$2(a^2 - b^2)[2x^2y^2(a^2 - b^2) + r^4(x^2 - y^2)] + a^2b^2r^4 = 0.$$

Ersetzt man in der Klammer r^4 durch $a^2x^2 + b^2y^2$, und führt die Multiplicationen aus, so erkennt man, dass der Klammerinhalt $r^2(a^2x^2 - b^2y^2)$ ergiebt; daher findet man schliesslich für die Wendepunkte

7. $$a^2x^2 - b^2y^2 = -\frac{a^2b^2}{2(a^2 - b^2)} \cdot r^2.$$

Aus 1. und 7. erhält man

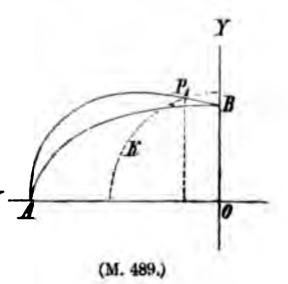
8. $$x^2 = \frac{1}{2a^2}\left(r^2 - \frac{a^2b^2}{2(a^2 - b^2)}\right)r^2, \quad y^2 = \frac{1}{2b^2}\left(r^2 + \frac{a^2b^2}{2(a^2 - b^2)}\right)r^2.$$

Durch Addition dieser beiden Werthe ergiebt sich

$$r^2 = \frac{3a^2b^2}{2(a^2 + b^2)}, \quad x^2 = \frac{3a^2b^4(a^2 - 2b^2)}{4(a^4 - b^4)(a^2 + b^2)},$$

$$y^2 = \frac{3a^4b^2(2a^2 - b^2)}{4(a^4 - b^4)(a^2 + b^2)}.$$

Reale Wendepunkte existiren also nur, wenn $b^2 < \frac{1}{2}a^2$. In Figur 489 ist K der Kreis mit dem Halbmesser $ab\sqrt{3} : \sqrt{2(a^2 + b^2)}$; die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, in welchen er die Fusspunktcurve durchschneidet, sind die Wendepunkte.



(M. 489.)

3. Die Wendepunkte der Curve $f(x, y) = 0$ sind die Schnittpunkte mit der Curve

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 0 .$$

Die Wendepunkte einer Curve können aus der Gleichung in homogenen Coordinaten durch die Bemerkung gewonnen werden, dass im Wendepunkte benachbarte Normalen parallel sind und benachbarte Tangenten zusammenfallen.

Aendert man x_1, x_2, x_3 um unendlich wenig, so geht die Tangente

$$T \equiv f_1\xi_1 + f_2\xi_2 + f_3\xi_3 = 0, \quad \text{wobei } f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

über in

$$\begin{aligned} T_1 \equiv T &+ (f_{11}dx_1 + f_{12}dx_2 + f_{13}dx_3)\xi_1 \\ &+ (f_{12}dx_1 + f_{22}dx_2 + f_{23}dx_3)\xi_2 \\ &+ (f_{13}dx_1 + f_{23}dx_2 + f_{33}dx_3)\xi_3 = 0 . \end{aligned}$$

Beide sind identisch, wenn für $i = 1, 2, 3$ und ein noch unbestimmtes μ

$$f_{i1}dx_1 + f_{i2}dx_2 + f_{i3}dx_3 = \mu f_i .$$

Nimmt man hierzu noch

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 = 0 ,$$

so erhält man für die Coordinaten der Wendepunkte die Bedingungsgleichung

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & f_2 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Multiplicirt man die ersten drei Colonnen der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3 addirt sie zu der mit $-(n-1)$ multiplicirten letzten und beachtet, dass nach dem EULER'schen Satze

$$f_{i1}x_1 + f_{i2}x_2 + f_{i3}x_3 - (n-1)f_i \equiv 0 ,$$

so geht die Bedingung über in

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

Diese Gleichung ist vom Grade $3(n-2)$; hieraus folgt, dass ein eigentlicher Kegelschnitt keinen, eine cubische Curve 9, eine biquadratische 24, eine Curve $n$ten Grades $3n(n-2)$ reale oder imaginäre Wendepunkte hat.

4. Die Gleichung einer Curve dritter Ordnung, welche die Ecken A_2, A_3 des Coordinatendreiecks zu Wendepunkten und die Seiten A_2A_3 und A_3A_1 zu Wendetangenten hat, ist von der Form

$$ax_1^3 + x_2x_3(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0 .$$

Der Schnittpunkt B von $x_1 = 0$ mit $b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ ist der dritte Schnittpunkt der Curve mit der X_1-Achse.

Die Wendepunkte sind die Schnittpunkte der Curve mit

$$ax_1[12b_2b_3x_2x_3 - b_1x_1^2 - 3(b_1x_1 + 2b_2x_2 + 2b_3x_3)^2] = 0 .$$

Dies zeigt, dass auch B ein Wendepunkt ist, dass also bei einer Curve III. O. jede Verbindungsgerade zweier Wendepunkte noch durch einen dritten geht (Anal. Geom. d. Ebene, § 15, No. 5).

Die Lemniscate hat die Gleichung

$$f(x, y) \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0 .$$

Man findet, wenn man $x^2 + y^2 = r^2$ setzt,

$$\frac{\partial f}{x} = 4x(r^2 - a^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y(r^2 + a^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(r^2 - a^2 + 2x^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4(r^2 + a^2 + 2y^2).$$

Für Wendepunkte hat man daher

$$(r^4 - a^4)[r^4 - a^2(x^2 - y^2)] + 8a^4 x^2 y^2 = 0.$$

In Rücksicht auf die Gleichung der Lemniscate erhält man hieraus zunächst

$$[2(x^2 - y^2) - a^2](x^2 - y^2) + 8x^2y^2 = 0,$$

und schliesslich $\qquad (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = 0.$

Der Nullpunkt ist der einzige reale Punkt dieser Curve.

5. Der Krümmungskreis. Unter dem Krümmungskreise einer Curve $y = f(x)$ in einem Punkte P derselben versteht man den Kreis, der durch diesen Punkt der Curve geht, und in diesem Punkte mit der Curve eine Berührung zweiter Ordnung hat. Hierdurch ist dieser Kreis eindeutig bestimmt, denn er hat drei verschiedene Bedingungen zu erfüllen. Das Centrum des Krümmungskreises nennt man den Krümmungsmittelpunkt der Curve, den Radius desselben den Krümmungshalbmesser; der reciproke Werth des Krümmungshalbmessers wird als die Krümmung der Curve (im Punkte P) bezeichnet.

Da die Curve und ihr Krümmungskreis in P denselben Werth des ersten Differentialquotienten haben, so folgt, dass sie in P eine gemeinsame Tangente haben; hieraus erkennt man: Der Krümmungsmittelpunkt einer Curve für einen gegebenen Punkt derselben liegt auf der diesem Punkte zugehörigen Normalen der Curve. Sind ξ, η die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes, und ist ρ der Krümmungshalbmesser, so ist die Gleichung des Krümmungskreises

1. $$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \rho^2.$$

Durch zweimalige Differentiation ergiebt sich

2. $$x - \xi + (y - \eta)y' = 0,$$

3. $$1 + y'^2 + (y - \eta)y'' = 0.$$

Ersetzt man in diesen Gleichungen x, y, y', y'' durch die Werthe, welche diese Grössen für die Curve $y = f(x)$ im Punkte P haben, so enthalten sie nur noch die Unbekannten ξ, η, ρ; man erhält für dieselben zunächst aus 3.

4. $$y - \eta = -(1 + y'^2) : y'',$$

und mit Hülfe dessen aus 2.

5. $$x - \xi = (1 + y'^2)\, y' : y''.$$

Durch Substitution von 4. und 5. in 1. folgt für den Krümmungshalbmesser

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Ferner ergeben sich aus 4. und 5. die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$\xi = x - \frac{(1 + y'^2)y'}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Um zu entscheiden, auf welcher Seite der Tangente der Krümmungsmittelpunkt liegt, setzen wir die Coordinaten ξ und η desselben in die linke Seite der Tangentengleichung ein; wir erhalten, indem wir von 4. und 5. Gebrauch machen

$$T = y'(\xi - x) - (\eta - y) = -y'\frac{(1 + y'^2)y'}{y''} - \frac{1 + y'^2}{y''} = -\frac{(1 + y'^2)^2}{y''}.$$

Substituirt man dagegen in T die Coordinaten $\xi = x$ und $\eta = 0$ der Projection P' des Punktes P auf die Abscissenachse, so entsteht $T = y$.

Rechnet man die Normale in der Richtung nach der Abscissenachse positiv,

und bezeichnet den Krümmungsmittelpunkt mit M, so hat folglich die Strecke PM das entgegengesetzte Vorzeichen wie das Produkt yy''. Für Curven, die nur positive Ordinaten haben, liegt somit M auf dem nach der Abscissenachse gerichteten Theile der Normalen oder nicht, je nachdem y'' negativ oder positiv ist.

Die Gleichung der Normale in P ist, wenn die laufenden Coordinaten mit ξ, η bezeichnet werden

6. $$N = \xi - x + y'(\eta - y) = 0.$$

Die Normale des Punktes P_1 mit den Coordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ hat daher die Gleichung

7. $$N_1 = \xi - (x + \Delta x) + (y' + \Delta y')(\eta - y - \Delta y) = 0.$$

Der Schnittpunkt beider Normalen genügt 6. und 7., also auch der durch Subtraction sich ergebenden Gleichung

8. $$\Delta x + y'\Delta y + y\Delta y' + \Delta y'\Delta y - \eta\Delta y' = 0.$$

Dividirt man durch Δx und geht dann zur Grenze für ein verschwindendes Δx über, so erhält man eine Gleichung, welche mit 6. die Grenzlage bestimmt, der sich der Schnittpunkt der Normalen N und N_1 nähert, wenn P_1 unendlich nahe an P rückt. Man erhält

9. $$1 + y'^2 + yy'' - \eta y'' = 0.$$

Die Gleichungen 6. und 9. stimmen mit den Gleichungen 2. und 5. überein. Wir sehen daher: Der Krümmungsmittelpunkt in P ist die Grenze, welche sich der Schnittpunkte der Normalen in P und der Normalen in P_1 nähert, wenn P_1 unendlich nahe an P rückt; oder kürzer: Der Krümmungsmittelpunkt ist der Schnittpunkt unendlich nahe benachbarter Normalen. Hieraus ergiebt sich sofort: Die Evolute einer Curve ist der Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte.

Ferner ist ersichtlich: Der Krümmungshalbmesser eines Wendepunktes ist unendlich gross, die Krümmung im Wendepunkte ist Null.

Für den Krümmungshalbmesser ergiebt sich noch eine sehr bemerkenswerthe Formel, wenn man den Arcus des Winkels zwischen der Curventangente und der Abscissenachse einführt. Bekanntlich ist $\tau = arc\,tang\,y'$, folglich ist

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2}.$$

Da nun $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$, wobei s den Curvenbogen bezeichnet, so erhält man für ρ

$$\rho = \frac{ds}{d\tau}.$$

Ist Δs ein endlicher Curvenbogen und $\Delta\tau$ der Arcus des Winkels, den die Tangenten in den Endpunkten dieses Bogens einschliessen, so ist daher

$$\rho = lim\,\frac{\Delta s}{\Delta\tau};$$

der Krümmungsradius ist also der Grenzwerth, dem sich der Quotient aus einem Curvenbogen und aus dem Arcus des von den Tangenten in den Endpunkten dieses Bogens eingeschlossenen Winkels nähert, wenn der Bogen verschwindend klein wird.

Bezeichnet σ den Winkel zwischen dem Radius vector des Punktes P und der Tangente in P (§ 5, No. 17), φ den Polarwinkel von P, so ist bekanntlich

$$\tau = \sigma + \varphi,$$

und daher

$$\rho = \frac{ds}{d\sigma + d\varphi} = \frac{ds}{d\varphi} : \left(\frac{d\sigma}{d\varphi} + 1\right).$$

Da nun $\sigma = arc\,tang(r : r')$, so folgt

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} arc\,tang \frac{r}{r'} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 - r'^2},$$

mithin ist

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} + 1 = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}.$$

Da ferner $ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$, so folgt für Polarcoordinaten

10. $$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Es verdient schliesslich noch bemerkt zu werden, dass man aus 8. für ρ in rechtwinkeligen Coordinaten noch die constructiv verwerthbare Formel gewinnt

11. $$\rho = \frac{N^3}{y^3 y''},$$

wenn N die Normale in P bezeichnet.

6. Aus der Kegelschnittsgleichung $r = p : (1 + \varepsilon\cos\varphi)$ folgt (§ 5, No. 18)

$$r' = \frac{\varepsilon r^2 \sin\varphi}{p},$$

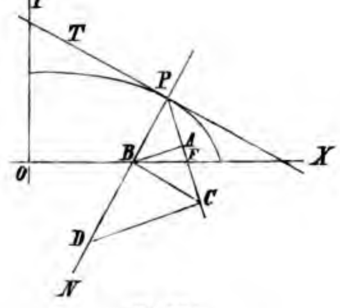
$$r'' = \frac{\varepsilon}{p}(2rr'\sin\varphi + r^2\cos\varphi) = \frac{\varepsilon r}{p}\left(\frac{2\varepsilon\sin^2\varphi}{p} + \frac{p\cos\varphi}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\right),$$

Daher ist

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = r^2\left(1 - \frac{\varepsilon\cos\varphi}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\right) = \frac{r^3}{p}.$$

Für den Krümmungshalbmesser findet man somit

$$\rho = \left(\frac{ds}{r\,d\varphi}\right)^3 \cdot p.$$



(M. 490.)

Da nun allgemein aus $ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$ und $tang\,\sigma = r : r'$ folgt

$$\frac{ds}{r\,d\varphi} = \frac{1}{\sin\sigma},$$

so hat man schliesslich

$$\rho = \frac{p}{\sin^3\sigma}.$$

Aus dem Dreiecke FPB folgt

$$PB = r\sin\varphi : \sin(\varphi - 90^\circ + \sigma)$$
$$= r\sin\varphi : (\sin\varphi\sin\sigma - \cos\varphi\cos\sigma).$$

Da nun

$$\cos\sigma : \sin\sigma : 1 = r' : r : \sqrt{r'^2 + r^2} = \varepsilon r\sin\varphi : p : \sqrt{\varepsilon^2 r^2 \sin^2\varphi + p^2},$$

so ergiebt sich die Normale

$$PB = \frac{r\sqrt{\varepsilon^2 r^2\sin^2\varphi + p^2}}{p - \varepsilon r\cos\varphi} = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 \sin^2\varphi + p^2} = \frac{p}{\sin\sigma}.$$

Macht man daher $PA = p$ und $AB \perp FP$, so ist PB die Normale; macht man ferner $BC \perp PN$ und $CD \perp FP$, so ist D der zu P gehörige Krümmungsmittelpunkt.

Für die Cycloide (§ 5, No. 6) ist

$$y' = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \cot\frac{t}{2},$$

$$y'' = -\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}t} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{1}{2}t}.$$

Das Bogendifferential ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2a \sin \tfrac{1}{2}t\, dt, \quad \text{also} \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}t}.$$

Daher folgt für den Krümmungshalbmesser

$$\rho = -4a \sin \tfrac{1}{2}t.$$

Für die Normale ergiebt sich

$$N = y\frac{ds}{dx} = 2a \sin \tfrac{1}{2}t,$$

folglich ist der Krümmungshalbmesser doppelt so lang wie die Normale. Da y'' immer negativ und y positiv ist, so liegt der Krümmungsmittelpunkt auf dem nach der Abscissenachse gerichteten Theile der Normalen.

7. Für die archimedische Spirale $r = a\varphi$ ist der Krümmungshalbmesser

$$\rho = (r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} : (r^2 + 2a^2);$$

er ist leicht zu construiren.

Der Krümmungshalbmesser der logarithmischen Spirale

$$r = e^{a\varphi}$$

hat zum Radius das constante Verhältniss $\sqrt{1 + a^2}$; die Dreiecke, welche den Nullpunkt, einen Spiralenpunkt und den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt zu Ecken haben, sind einander ähnlich; die Evolute kommt daher mit der Spirale durch Drehung um den Nullpunkt zur Deckung.

Für die Kettenlinie $y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ ist der Krümmungshalbmesser gleich der Normalen.

Die Polargleichung der Lemniscate ist $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. Hieraus folgt $r^4 + r^2 r'^2 = a^4$, $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 3(r^2 + r'^2)$, und daher

$$\rho = \frac{a^2}{3r}.$$

§ 9. Osculationsebene, Krümmung, Torsion und osculirende Kugel an Raumcurven.

1. Eine Ebene, die durch einen Punkt P einer Raumcurve C geht, hat eine Gleichung von der Form

$$1. \qquad a(\xi - x) + b(\eta - y) + c(\zeta - z) = 0.$$

Denken wir uns auf dieser Ebene durch P eine Curve Γ gezogen und die Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes dieser Curve als Functionen einer Variabeln t, so erfüllen diese Functionen die Gleichung 1.; ihre ersten und zweiten Differentialquotienten erfüllen daher die Gleichungen

$$2. \qquad a\frac{d\xi}{dt} + b\frac{d\eta}{dt} + c\frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

$$3. \qquad a\frac{d^2\xi}{dt^2} + b\frac{d^2\eta}{dt^2} + c\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0.$$

Denkt man sich die Coordinaten der Punkte von C ebenfalls als Functionen der unabhängigen Veränderlichen t, und verlangt, dass im Punkte P die ersten Differentialquotienten der Coordinaten für C und Γ dieselben Verhältnisse haben, so muss die Gleichung 2. erfüllt sein, wenn man die Differentialquotienten von ξ, η, ζ durch die von x, y, z ersetzt. Dadurch erhält man

$$4. \qquad a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt} = 0.$$

Hierin sind a, b, c unbestimmt. Da die Differentialquotienten von x, y, z

proportional der Cosinus der Winkel sind, welche die Curventangente in P mit den Coordinatenachsen bildet, so schliesst man aus 4.: Die Ebenen der Plancurven, welche durch einen Punkt P einer Raumcurve gehen, und in diesem Punkte mit der Raumcurve in Bezug auf die ersten Differentialquotienten der Coordinaten übereinstimmen, bilden das Ebenenbüschel, dessen Träger die Tangente der Raumcurve in P ist.

Unter allen diesen Ebenen kann man diejenige aussuchen, auf welcher Curven liegen, die mit der Raumcurve C auch in Bezug auf die Verhältnisse der zweiten Differentialquotienten der Coordinaten für P übereinstimmen. Dann muss auch die Gleichung 3. erfüllt werden, wenn man in derselben die zweiten Differentialquotienten von ξ, η, ζ durch die von x, y, z ersetzt; man erhält somit für a, b, c die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} a(\xi-x)+b(\eta-y)+c(\zeta-z)&=0,\\ ax'+by'+cz'&=0,\\ ax''+by''+cz''&=0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Gleichung der gesuchten Ebene

$$5.\qquad \Omega \equiv \begin{vmatrix} \xi-x & \eta-y & \zeta-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Ebene wird als die Osculationsebene der Curve C im Punkte P bezeichnet.

2. Die Normalebene von C im Punkte P hat die Gleichung

$$1.\qquad N \equiv (\xi-x)\,x' + (\eta-y)\,y' + (\zeta-z)\,z' = 0;$$

die Gleichung der Normalebene N_1 im Punkte $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ ist

$$2.\ N_1 \equiv (\xi-x-\Delta x)(x'+\Delta x') + (\eta-y-\Delta y)(y'+\Delta y') + (\zeta-z-\Delta z)(z'+\Delta z') = 0.$$

Die Punkte, welche auf der Schnittgeraden beider Ebenen enthalten sind, erfüllen daher die Gleichung, welche durch Subtraction aus N_1 und N und Division durch Δt folgt

$$3.\ (\xi-x)\frac{\Delta x'}{\Delta t} + (\eta-y)\frac{\Delta y'}{\Delta t} + (\zeta-z)\frac{\Delta z'}{\Delta t} - \frac{\Delta x}{\Delta t}(x'+\Delta x') - \frac{\Delta y}{\Delta t}(y'+\Delta y') - \frac{\Delta z}{\Delta t}(z'+\Delta z') = 0$$

Wir können nun die Grenzlage bestimmen, der sich die Schnittgerade NN_1 nähert, wenn der Bogen PP_1 verschwindet. Bei diesem Grenzübergange geht 3. in die Gleichung über

$$4.\qquad R \equiv (\xi-x)\,x'' + (\eta-y)\,y'' + (\zeta-z)\,z'' - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 0;$$

die durch diese Gleichung dargestellte Ebene R schneidet die Ebene N in der gesuchten Geraden. Die Cosinus der Stellungswinkel der Ebenen N und R sind proportional zu x', y', z' bez. zu x'', y'', z''. Eine Ebene, die durch P geht, und zu der Geraden N, R normal ist, hat daher eine Gleichung

$$a(\xi-x) + b(\eta-y) + c(\zeta-z) = 0,$$

deren Constante den Bedingungen genügen

$$\begin{aligned} ax' + by' + cz' &= 0,\\ ax'' + by'' + cz'' &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung dieser Ebene ist hiernach

$$\begin{vmatrix} \xi-x & \eta-y & \zeta-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Vergleicht man dies mit dem Ergebnisse des vorigen Abschnitts, so folgt:

Die Osculationsebene einer Raumcurve in einem Punkte P derselben ist normal zu der Geraden, in welcher die Normalebene der Curve in P von der nächstfolgenden Normalebene geschnitten wird.

3. Für die Schnittcurve der Cylinder

$$y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = c^2$$

ist, wenn man y als unabhängige Variable ansieht,

$$xx' = -y, \quad zz' = -y, \quad xx'' = -\frac{c^2}{x^2}, \quad zz'' = -\frac{a^2}{z^2},$$

und daher die Gleichung der Osculationsebene

$$-\frac{x^3}{c^2(a^2-c^2)}\cdot\xi + \frac{y^3}{a^2c^2}\cdot\eta + \frac{z^3}{a^2(a^2-c^2)}\cdot\zeta - 1 = 0.$$

Man erhält sie graphisch, indem man $a^2c^2 : y^3$ herstellt und bemerkt, dass ihre Spuren die Spuren der Curventangente enthalten.

Aus den Gleichungen eines sphärischen Kegelschnitts

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

folgt, wenn man z als Unabhängige betrachtet und

$$m = -\frac{a^2(b^2+c^2)}{c^2(a^2-b^2)}, \quad n = \frac{b^2(a^2+c^2)}{c^2(a^2-b^2)} \text{ setzt:}$$

$$xx' = mz, \quad yy' = nz, \quad xx'' = m - x'^2, \quad yy'' = n - y'^2.$$

Multiplicirt man die Reihen in der Determinante Ω mit x, y, z und dann die zweite Zeile mit z, so erhält man nach einfachen Reductionen für die Osculationsebene

$$\begin{vmatrix} x\xi - a^2r^2:(a^2-b^2), & y\eta + b^2r^2:(a^2-b^2), & z\zeta \\ m & n & 1 \\ a^2m:x^2 & -a^2n:y^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies giebt zunächst

$$b^4(a^2+c^2)x^3\cdot\xi - a^4(b^2+c^2)y^3\cdot\eta + \frac{a^2b^2(a^2+c^2)(b^2+c^2)}{c^2(a^2-b^2)}(b^2x^2 + a^2y^2)z\cdot\zeta$$
$$-\frac{a^2b^2r^2}{a^2-b^2}[b^2(a^2+c^2)x^2 + a^2(b^2+c^2)y^2] = 0,$$

und schliesslich

$$\frac{a^2+c^2}{a^4}x^3\cdot\xi - \frac{b^2+c^2}{b^4}y^3\cdot\eta + \frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}{c^4(a^2-b^2)}z^3\cdot\zeta - \frac{2r^4}{a^2-b^2} = 0.$$

4. Alle Curven, die durch P gehen, und für P in Bezug auf x', y', z', x'', y'', z'' übereinstimmen, haben dieselbe Tangente in P, dieselbe Normalebene, dieselbe Schnittgerade benachbarter Normalebenen und dieselbe Osculationsebene. Die ebenen unter diesen Curven liegen auf der Osculationsebene und haben folglich die Projection M des Punktes P auf die Schnittlinie benachbarter Normalebenen zum gemeinschaftlichen Krümmungsmittelpunkte. Daher bezeichnet man M als Krümmungsmittelpunkt dieser Raumcurven im Punkte P, PM als Krümmungshalbmesser, und den um M durch P geschlagenen Kreis als Krümmungskreis der Curve.

Die Coordinaten ξ, η, ζ des Krümmungsmittelpunkts genügen den Gleichungen No. 2, 1 und 4, sowie der Gleichung der Osculationsebene, sie sind also die Lösungen des Systems

$$(\xi - x)x' + (\eta - y)y' + (\zeta - z)z' = 0,$$
$$(\xi - x)x'' + (\eta - y)y'' + (\zeta - z)z'' = s'^2,$$
$$(\xi - x)X + (\eta - y)Y + (\zeta - z)Z = 0,$$

wenn man X, Y, Z abkürzungsweise setzt für

$$X = y'z'' - z'y'', \quad Y = z'x'' - x'z'', \quad Z = x'y'' - y'x''.$$

Hieraus folgt

$$1.\quad \begin{aligned} \xi &= x + \frac{Yz' - Zy'}{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot s'^2 , \\ \eta &= y + \frac{Zx' - Xz'}{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot s'^2 , \\ \zeta &= z + \frac{Xy' - Yx'}{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot s'^2 . \end{aligned}$$

Der Krümmungshalbmesser ρ ergiebt sich zu

$$\rho = \frac{\sqrt{(Yz' - Zy')^2 + (Zx' - Xz')^2 + (Xy' - Yx')^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot s'^2 .$$

Der Radicand ist, wie man leicht erkennt, identisch mit

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (Xx' + Yy' + Zz')^2 .$$

Zufolge der Werthe von X, Y, Z verschwindet der Subtrahend identisch; man erhält daher für den Krümmungshalbmesser einfacher

$$2.\quad \rho = s'^3 : \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} .$$

Ferner findet man leicht

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \equiv (x''^2 + y'' + z''^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 .$$

Da nun $\quad x'x'' + y'y'' + z'z'' = \frac{1}{2} \frac{d(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{dt} = s's''$,

so ist

$$3.\quad \rho = \frac{s'^2}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}} .$$

Für die Cosinus der Richtungswinkel φ, ψ, χ des Krümmungshalbmessers hat man

$$4.\quad \cos\varphi = (Yz' - Zy') : M, \quad \cos\psi = (Zx' - Xz') : M, \quad \cos\chi = (Xy' - Yx') : M,$$

wobei

$$M = s' \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} .$$

Nimmt man s zur unabhängigen Veränderlichen, so ist $s' = 1$, $s'' = 0$ und daher

$$5.\quad \rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2 x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right)^2}} .$$

Ferner ist, wie man sofort erkennt

$$\begin{aligned} Yz' - Zy' &\equiv x''(s'^2 - x'^2) - x'(s's'' - x'x'') \equiv s'(x''s' - x's'') , \\ Zx' - Xz' &\equiv s'(y''s' - y's''), \qquad Xy' - Yx' \equiv s'(z''s' - z's''), \end{aligned}$$

und daher

$$Yz' - Zy' = s'^3 \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{s'}\right), \quad Zx' - Xz' = s'^3 \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{s'}\right), \quad Xy' - Xy' = s'^3 \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{z'}{s'}\right) .$$

Demnach kann man die Formeln 1. durch die folgenden ersetzen

$$6.\quad \begin{aligned} \xi - x &= \frac{\rho^2}{s'} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{s'}\right), \\ \eta - y &= \frac{\rho^2}{s'} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{s'}\right), \\ \zeta - z &= \frac{\rho^2}{s'} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{z'}{s'}\right) . \end{aligned}$$

Ist s die unabhängige Veränderliche, so vereinfachen sich diese Formeln zu

$$7.\quad \begin{aligned} &\xi - x = \rho^2 \frac{d^2 x}{ds^2}, \quad \eta - y = \rho^2 \frac{d^2 y}{ds^2}, \quad \zeta - z = \rho^2 \frac{d^2 z}{ds^2}, \\ &\cos\varphi = \rho \frac{d^2 x}{ds^2}, \quad \cos\psi = \rho \frac{d^2 y}{ds^2}, \quad \cos\chi = \rho \frac{d^2 z}{ds^2} . \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Werthe, welche x', y', z' für den Punkt $x + \Delta x$, $y + \Delta y$,

$z + \Delta z$ annehmen (s als unabhängige Variable verwendet), mit $x' + \Delta x'$, $y' + \Delta y'$, $z' + \Delta z'$, so sind x', y', z' bez. $x' + \Delta x'$, $y' + \Delta y'$, $z' + \Delta z'$ die Richtungscosinus der Curventangenten in P und P'; daher hat man

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$
$$(x' + \Delta x')^2 + (y' + \Delta y')^2 + (z' + \Delta z')^2 = 1.$$

Hieraus folgt

$$8. \qquad -2(x'\Delta x' + y'\Delta y' + z'\Delta z') = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2.$$

Ist $\Delta\tau$ der Arcus des Winkels der Curventangente in P und P', so ist

$$\cos\Delta\tau = x'(x' + \Delta x') + y'(y' + \Delta y') + z'(z' + \Delta z'),$$
$$= 1 + x'\Delta x' + y'\Delta y' + z'\Delta z';$$

folglich ist

$$2\sin\tfrac{1}{2}\Delta\tau = \sqrt{2(1 - \cos\Delta\tau)} = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2}.$$

Ersetzt man dies durch

$$2\,\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\tau}{\Delta\tau}\cdot\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x'}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y'}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z'}{\Delta s}\right)^2}$$

und geht zur Grenze für ein verschwindendes Δs über, so erhält man

$$9. \qquad \frac{d\tau}{ds} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Mit Hülfe dieses Ausdrucks gewinnt man für den Krümmungshalbmesser

$$10. \qquad \rho = \frac{ds}{d\tau},$$

der Form und der geometrischen Bedeutung nach übereinstimmend mit dem Krümmungshalbmesser ebener Curven.

Bezeichnet man Δs einen Curvenbogen und $\Delta\tau$ den Arcus des Winkels der Tangenten in den Endpunkten dieses Bogens, so wird der Quotient $\Delta\tau : \Delta s$ als die mittlere Krümmung des Bogens Δs bezeichnet; die Krümmung eines verschwindend kleinen Bogens ist das Reciprocum des Krümmungshalbmessers.

Die Normale der Curve, die in der Osculationsebene enthalten ist, auf welcher also der Krümmungsmittelpunkt liegt, wird als Hauptnormale bezeichnet. Sind α, β, γ bez. φ, ψ, χ die Richtungswinkel der Tangente bez. der Hauptnormale, so hat man auf Grund der Formeln 6.

$$11. \quad \cos\varphi = \frac{\rho}{s'}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{s'}\right), \quad \cos\psi = \frac{\rho}{s'}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{s'}\right), \quad \cos\chi = \frac{\rho}{s'}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{z'}{s'}\right).$$

Da nun

$$\cos\alpha = \frac{x'}{s'}, \quad \cos\beta = \frac{y'}{s'}, \quad \cos\gamma = \frac{z'}{s'}, \quad \rho = \frac{ds}{d\tau},$$

so erhält man

$$12. \qquad \cos\varphi = \frac{d\cos\alpha}{d\tau}, \quad \cos\psi = \frac{d\cos\beta}{d\tau}, \quad \cos\chi = \frac{d\cos\gamma}{d\tau}.$$

5. Plancurven haben in allen Punkten dieselbe Osculationsebene, nämlich die Ebene der Curve.

Bezeichnet $\Delta\omega$ den Arcus des Winkels der Osculationsebenen einer unebenen Curve in den Enden des Bogens Δs, so kann man sagen, dass die Curve um so stärker von einer ebenen Curve abweicht, je grösser das Verhältniss $\Delta\omega : \Delta s$ ist. Man bezeichnet diesen Quotienten als die mittlere Torsion des Curvenbogens Δs. Der Grenzwerth

$$\lim\frac{\Delta\omega}{\Delta s} = \frac{d\omega}{ds}$$

heisst dem entsprechend die Torsion der Curve im Punkte P; die recipro[illegible]

Torsion heisst der **Torsionshalbmesser**; wird derselbe mit ρ_1 bezeichnet, so hat man

$$1.\qquad \rho_1 = \frac{ds}{d\omega}.$$

Sind λ, μ, ν die Stellungswinkel der Osculationsebene Ω, so ist, wie sich aus der Gleichung von Ω sofort ergiebt,

$$2.\qquad \begin{gathered} cos\lambda = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad cos\mu = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \\ cos\nu = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \end{gathered}$$

oder, wenn s die unabhängige Variable ist,

$$3.\qquad cos\lambda = \rho X, \quad cos\mu = \rho Y, \quad cos\nu = \rho Z.$$

Haben die entsprechenden Cosinus der Osculationsebene im Endpunkte des Bogens Δs die Werthe $cos\lambda + \Delta cos\lambda$, $cos\mu + \Delta cos\mu$, $cos\nu + \Delta cos\nu$, so hat man die Gleichungen

$$4.\qquad 1 = cos^2\lambda + cos^2\mu + cos^2\nu,$$

$$5.\qquad 1 = (cos\lambda + \Delta cos\lambda)^2 + (cos\mu + \Delta cos\mu)^2 + (cos\nu + \Delta cos\nu)^2,$$

$$6.\qquad cos\Delta\omega = cos\lambda(cos\lambda + \Delta cos\lambda) + cos\mu(cos\mu + \Delta cos\mu) + cos\nu(cos\nu + \Delta cos\nu\Delta\nu).$$

Addirt man 4. und 5. und subtrahirt davon das Doppelte von 6., so erhält man

$$2(1 - cos\Delta\omega) = (\Delta cos\lambda)^2 + (\Delta cos\mu)^2 + (\Delta cos\nu)^2,$$

mithin ist

$$2\,\frac{sin\frac{1}{2}\Delta\omega}{\Delta\omega}\cdot\frac{\Delta\omega}{\Delta s} = \sqrt{\left(\frac{\Delta cos\lambda}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta cos\mu}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta cos\nu}{\Delta s}\right)^2}.$$

Der Uebergang zur Grenze liefert schliesslich

$$7.\qquad \frac{d\omega}{ds} = \sqrt{\left(\frac{dcos\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dcos\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dcos\nu}{ds}\right)^2}.$$

Hieraus folgt der **Torsionshalbmesser**

$$8.\qquad \rho_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dcos\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dcos\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dcos\nu}{ds}\right)^2}}.$$

Aus 7. folgt

$$9.\qquad d\omega = \sqrt{(dcos\lambda)^2 + (dcos\mu)^2 + (dcos\nu)^2}.$$

Es giebt daher eine Gerade, deren Winkel φ_1, ψ_1, χ_1 mit den Achsen den Gleichungen entspringen

$$10.\qquad dcos\lambda = cos\varphi_1\, d\omega, \quad dcos\mu = cos\psi_1\, d\omega, \quad dcos\nu = cos\chi_1\, d\omega.$$

Da nun aus

$$cos^2\lambda + cos^2\mu + cos^2\nu = 1$$

durch Differentiation hervorgeht

$$cos\lambda\, dcos\lambda + cos\mu\, dcos\mu + cos\nu\, dcos\nu = 0,$$

so folgt in Rücksicht auf 10. für φ_1, ψ_1, χ_1 die Gleichung

$$11.\qquad cos\lambda\, cos\varphi_1 + cos\mu\, cos\psi_1 + cos\nu\, cos\chi_1 = 0.$$

Ferner ist bekanntlich

$$cos\lambda\, cos\alpha + cos\mu\, cos\beta + cos\nu\, cos\gamma = 0;$$

daher ist auch

$$cos\lambda\, dcos\alpha + cos\mu\, dcos\beta + cos\nu\, dcos\gamma + cos\alpha\, dcos\lambda + cos\beta\, dcos\mu + cos\gamma\, dcos\nu = 0.$$

Führt man für $dcos\alpha$, $dcos\beta$, $dcos\gamma$ die Werthe aus No. 4, 12 ein, sowie für $dcos\lambda$, $dcos\mu$, $dcos\nu$ die Werthe 10., so erhält man

$$(cos\lambda\, cos\varphi + cos\mu\, cos\psi + cos\nu\, cos\chi)\, d\tau + (cos\alpha\, cos\varphi_1 + cos\beta\, cos\psi_1 + cos\gamma\, cos\chi_1)\, d\omega = 0.$$

Der Inhalt der ersten Klammer verschwindet, da die Hauptnormale in der Osculationsebene liegt; daher folgt

12. $$\cos\alpha\cos\varphi_1 + \cos\beta\cos\psi_1 + \cos\gamma\cos\chi_1 = 0 .$$

Aus 11. und 12. folgt, dass die durch P unter den Winkeln φ_1, ψ_1, χ_1 gelegte Gerade in die Osculationsebene fällt und normal zur Tangente ist; folglich ist

$$\varphi_1 = \varphi, \quad \psi_1 = \psi, \quad \chi_1 = \chi,$$

und wir haben somit die Formeln

13. $$d\cos\lambda = \cos\varphi\, d\omega, \quad d\cos\mu = \cos\psi\, d\omega, \quad d\cos\nu = \cos\chi\, d\omega .$$

Ferner folgt aus

$$\cos^2\alpha + \cos^2\lambda + \cos^2\varphi = 1$$

durch Differentiation

$$\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\lambda\, d\cos\lambda + \cos\varphi\, d\cos\varphi = 0 .$$

In Rücksicht auf 12. und No. 4, 13 und durch Uebertragung auf ψ und χ folgt hieraus

14. $$\begin{aligned} d\cos\varphi &= -\cos\alpha\, d\tau - \cos\lambda\, d\omega, \\ d\cos\psi &= -\cos\beta\, d\tau - \cos\mu\, d\omega, \\ d\cos\chi &= -\cos\gamma\, d\tau - \cos\nu\, d\omega . \end{aligned}$$

6. Es giebt eine eindeutig bestimmte Kugel, auf der sich Curven ziehen lassen, die mit einer Raumcurve einen Punkt P, sowie in diesem Punkte die ersten, zweiten und dritten Differentialquotienten der Coordinaten, in Bezug auf dieselbe unabhängige Variable, gemein haben. Sind nämlich ξ, η, ζ die Coordinaten des Centrums und ist R der Radius dieser Kugel, so ist ihre Gleichung

1. $$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = R^2 .$$

Die ersten Differentialquotienten der Coordinaten der Punkte dieser Kugel genügen daher der Gleichung

2. $$(\xi - x)x' + (\eta - y)y' + (\zeta - z)z' = 0 .$$

Für die zweiten und dritten Differentialquotienten folgt hieraus weiter

3. $$(\xi - x)x'' + (\eta - y)y'' + (\zeta - z)z'' - s'^2 = 0,$$

4. $$(\xi - x)x''' + (\eta - y)y''' + (\zeta - z)z''' - 3s's'' = 0 .$$

Substituirt man nun hier für $x', y', z', \; x'', y'', z'', \; x''', y''', z''' \; s', s's''$ die für die gegebene Curve geltenden Werthe, so enthalten die Gleichungen 1., 2., 3., 4. nur noch die Unbekannten ξ, η, ζ, R und genügen zu deren Bestimmung. Bezeichnet man mit Δ_{ik} die zum $k$ten Gliede der $i$ten Zeile von

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

gehörige Subdeterminante zweiten Grades, so ergiebt die Auflösung von 2., 3. und 4.

5. $$\begin{aligned} \xi - x &= \frac{s'}{\Delta}(s'\Delta_{21} + 3s''\Delta_{31}), \\ \eta - y &= \frac{s'}{\Delta}(s'\Delta_{22} + 3s''\Delta_{32}), \\ \zeta - z &= \frac{s'}{\Delta}(s'\Delta_{23} + 3s''\Delta_{33}). \end{aligned}$$

Man erhält einfachere Formeln, wenn man s als unabhängige Variable einführt. Unter dieser Voraussetzung gehen die Gleichungen 2. und 3. über in (vergl. No. 4, 11)

6. $$(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta + (\zeta - z)\cos\gamma = 0,$$

7. $$(\xi - x)\cos\varphi + (\eta - y)\cos\psi + (\zeta - z)\cos\chi = \rho .$$

Statt der Gleichung 4. kann man nun die Gleichung verwenden, die aus 7. durch Differentiation nach s hervorgeht

8. $(\xi-x)d\cos\varphi + (\eta-y)d\cos\psi + (\zeta-z)d\cos\chi - (\cos\varphi\, dx+\cos\psi\, dy+\cos\chi\, dz) = d\rho$.

Da die Tangente zur Richtung φ, ψ, χ normal ist, so ist

$$\cos\varphi\, dx + \cos\psi\, dy + \cos\chi\, dz = 0 .$$

Setzt man ferner die Werthe aus No. 5, 14 ein, so erhält man in Rücksicht auf 6. die Gleichung

9. $$(\xi - x)\cos\lambda + (\eta - y)\cos\mu + (\zeta - z)\cos\nu = -\frac{d\rho}{d\omega}.$$

Multiplicirt man 6., 7., 9. zuerst der Reihe nach mit $\cos\alpha$, $\cos\varphi$, $\cos\lambda$, dann mit $\cos\beta$, $\cos\psi$, $\cos\mu$, hierauf mit $\cos\gamma$, $\cos\chi$, $\cos\nu$ und addirt jedesmal, so erhält man

10. $$\begin{aligned} \xi - x &= \rho\cos\varphi - \frac{d\rho}{d\omega}\cdot\cos\lambda, \\ \eta - y &= \rho\cos\psi - \frac{d\rho}{d\omega}\cdot\cos\mu, \\ \zeta - z &= \rho\cos\chi - \frac{d\rho}{d\omega}\cdot\cos\nu. \end{aligned}$$

Hierin kann man für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$, ρ, $d\omega$ die Werthe No. 5, 2 oder 3, No. 4, 4 oder 7, No. 4, 2 oder 5, No. 5, 9 setzen.

Quadrirt man diese Werthe und addirt, so erhält man für den Radius der Kugel

11. $$R^2 = \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2;$$

Diese Kugel, deren Mittelpunkt und Halbmesser sich aus 10. und 11. bestimmen, heisst die osculirende Kugel der Curve im Punkte P.

Die Gleichungen 2. und 3. lehren, dass der Mittelpunkt der osculirenden Kugel auf der Schnittlinie benachbarter Normalebenen gelegen ist.

Der Abstand des Centrums der osculirenden Kugel von der Osculationsebene hat nach 12. den Betrag

$$\frac{d\rho}{d\omega}.$$

Hieraus erkennt man: Der Krümmungskreis einer Curve in einem Punkte derselben ist der Schnitt der osculirenden Kugel mit der Osculationsebene.

Für Curven von constantem Krümmungshalbmesser liegt das Centrum der osculirenden Kugel auf der Osculationsebene und der Krümmungskreis ist somit ein grösster Kreis der osculirenden Kugel

7. Als Beispiel betrachten wir die Schraubenlinie. Unter denselben Voraussetzungen wie in § 6, No. 9 sind die Gleichungen der Schraubenlinie

$$z = k\varphi, \quad x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi.$$

Jedes Bogenelement ds ist gegen die Horizontalebene um den constanten Winkel geneigt, den die Tangente mit der Horizontalebene bildet; der Cosinus dieses Winkels ist $a : \sqrt{a^2 + k^2}$; daher ist der von der Horizontalebene bis zum Punkte P sich erstreckende Bogen s der Schraubenlinie gleich der Horizontalprojection von s, dividirt durch diesen Cosinus. Mithin haben wir

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + k^2}}{a}\cdot a\varphi = \sqrt{a^2 + k^2}\cdot\varphi.$$

Setzen wir zur Abkürzung $n = 1 : \sqrt{a^2 + k^2}$, so ist daher

1. $$z = kns, \quad x = a\cos ns, \quad y = a\sin ns.$$

Hieraus folgen die Differentialquotienten

2. $$\frac{dx}{ds} = -an\,sin\,ns\,, \quad \frac{dy}{ds} = an\,cos\,ns\,, \quad \frac{dz}{ds} = kn\,,$$

3. $$\frac{d^2x}{ds^2} = -an^2\,cos\,ns\,, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -an^2\,sin\,ns\,, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0\,.$$

Hieraus ergeben sich für X, Y, Z die Werthe

4. $$X = akn^3\,sin\,ns\,, \quad Y = -akn^3\,cos\,ns\,, \quad Z = a^2n^3\,.$$

Die Gleichung der Osculationsebene ist daher

$$\Omega = sin\,ns\,(\xi - x) - cos\,ns\,(\eta - y) + \frac{a}{k}(\zeta - z) = 0\,.$$

Setzt man für x, y, z die Werthe 1., so erhält man

5. $$\Omega = sin\,ns \cdot \xi - cos\,ns \cdot \eta + \frac{a}{k}(\zeta - kns) = 0\,.$$

Setzt man hier $\zeta = z$, so erhält man

$$sin\,ns \cdot \xi - cos\,ns \cdot \eta = 0\,,$$

d. i. die Gleichung des Grundrisses des durch P gehenden Cylinderhalbmessers. Dies ergiebt: Die Osculationsebene der Schraubenlinie in P enthält den durch P gehenden Halbmesser des Schraubencylinders, und ist daher gegen die Schraubenachse unter demselben Winkel geneigt, wie die Schraubentangente. Die Hauptnormale ist normal zur Achse.

Für den Krümmungshalbmesser ergiebt sich

6. $$\rho = \frac{1}{an^2} = \frac{a^2 + k^2}{a}\,.$$

Der Krümmungshalbmesser ist also für alle Punkte der Schraubenlinie constant; die Krümmungsmittelpunkte liegen auf einer Schraubenlinie von derselben Achse und Ganghöhe.

Die Stellungswinkel der Osculationsebene folgen aus

7. $$cos\,\lambda = kn\,sin\,ns\,, \quad cos\,\mu = -kn\,cos\,ns\,, \quad cos\,\nu = an\,.$$

Hieraus folgt für den Torsionshalbmesser

8. $$\rho_1 = \frac{1}{kn^2} = \frac{a^2 + k^2}{k}\,.$$

8. In jedem Punkte P einer Raumcurve C lässt sich eine osculirende Schraubenlinie construiren, d. i. eine Schraubenlinie, welche durch P geht, und in P die Tangente, die Osculationsebene, sowie den Krümmungshalbmesser und den Torsionshalbmesser mit der Curve C gemein hat. Sind ρ und ρ_1 Krümmungs- und Torsionshalbmesser von C im Punkte P, so bestimmen sich die Constanten a und k der osculirenden Schraubenlinie aus

$$\frac{a^2 + k^2}{a} = \rho \quad \text{und} \quad \frac{a^2 + k^2}{k} = \rho_1\,;$$

man erhält

1. $$a = \frac{\rho\rho_1^2}{\rho^2 + \rho_1^2}\,, \quad k = \frac{\rho^2\rho_1}{\rho^2 + \rho_1^2}\,.$$

Die Schraubenachse trifft die Hauptnormale, schneidet von ihr eine Strecke $PA = a$ ab, und ihre Projection auf die Osculationsebene ist die durch A gehende Parallele zur Curventangente; der Winkel γ der Schraubenachse und der Osculationsebene bestimmt sich aus

2. $$cos\,\gamma = \frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2}}\,.$$

Durch diese Angaben ist die osculirende Schraubenlinie vollständig und eindeutig bestimmt.

§ 10. Krümmung von Flächen*).

1. Bei den vorhergehenden Untersuchungen haben wir eine Raumcurve nicht durch zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten charakterisirt, sondern wir haben mit wesentlichem Vortheile die Coordinaten eines Curvenpunktes als Functionen einer unabhängigen Variabeln t betrachtet.

In gleicher Weise ist es bei den folgenden Untersuchungen über Flächen vortheilhaft, eine Fläche nicht durch eine Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

zu charakterisiren, sondern x, y, z als Functionen zweier unabhängigen Veränderlichen u, v

$$1. \qquad x = F_1(u, v), \quad y = F_2(u, v), \quad z = F_3(u, v)$$

zu betrachten. Eliminirt man aus den Gleichungen 1. u und v, so erhält man eine Gleichung zwischen x, y, z, also die Gleichung der Fläche in der gewöhnlichen Form.

So wird z. B. ein Ellipsoid, dessen Achsen in die Coordinatenachsen fallen, durch die Gleichungen dargestellt

$$x = a\cos u \cos v, \quad y = b\cos u \sin v, \quad z = c\sin u;$$

denn aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{x}{a} = \cos u \cos v, \quad \frac{y}{b} = \cos u \sin v, \quad \frac{z}{c} = \sin u,$$

und daher, wenn man quadrirt und addirt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Für die axiale normale Schraubenregelfläche hat man

$$x = v\cos u, \quad y = v\sin u, \quad z = ku.$$

2. Ertheilt man der Veränderlichen v einen besonderen Werth v_0, so stellen die Gleichungen

$$x = F_1(u, v_0), \quad y = F_2(u, v_0), \quad z = F_3(u, v_0)$$

eine Curve dar, die auf der Fläche liegt. Aendert man nun v_0, so ändert sich Lage und Gestalt dieser Curve, und durchläuft v_0 die ganze Zahlenreihe, so beschreibt die Curve die ganze Fläche. Ferner wird durch die Gleichungen

$$x = F_1(u_0, v), \quad y = F_2(u_0, v), \quad z = F_3(u_0, v),$$

wo u_0 einen besonderen Werth bezeichnet, eine Raumcurve anderer Art dargestellt, die auch auf der Fläche liegt. Durchläuft u_0 die ganze Zahlenreihe, so wechselt diese Curve continuirlich Gestalt und Lage und beschreibt ebenfalls die ganze Fläche.

Somit wird die Fläche von zwei Schaaren von Curven bedeckt, und jeder Punkt der Fläche erscheint als Schnittpunkt einer Curve der einen Schaar mit einer Curve der andern. Wir bezeichnen u und v als die Parameter der Flächenpunkte, und die Curven auf der Fläche, welche die Punkte enthalten, für welche v bez. u constant ist, als Parameterlinien; letztere charakterisiren wir kurzweg durch die Bedingungen $v = v_0$, bez. $u = u_0$.

Wählt man x und y selbst zu unabhängigen Veränderlichen, setzt man also $x = u$, $y = v$, so ist durch die Bedingung $v = v_0$ eine Ebene normal zur Y-Achse dargestellt; die Parameterlinien $v = v_0$ sind also die Querschnitte der

*) Dieser Abschnitt ist im Anschlusse an HOPPE, Principien der Flächentheorie, Leipzig 1876, § 1 bis 9 u. ff. bearbeitet.

Fläche parallel zur XZ-Ebene; die Parameterlinien $u = u_0$ sind die Querschnitte der Fläche parallel der YZ-Ebene. In der analytischen Geometrie des Raumes haben wir diese Curven benutzt, um uns eine Anschauung der zu einer gegebenen Gleichung gehörigen Fläche II. O. zu verschaffen.

3. Bewegt sich ein Punkt P um unendlich wenig entlang der Fläche in übrigens beliebiger Richtung, so erhalten u und v unendlich kleine Veränderungen du und dv von unbestimmtem Verhältnisse. Die zugehörigen Aenderuugen von x, y, z ergeben sich durch Differentiation zu

$$1.\quad dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv; \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Das vom Punkte P bei dieser Bewegung zurückgelegte Bogenelement ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Führt man hier die Werthe 1. ein, so erhält man

$$2.\quad ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

wobei e, f, g die Ausdrücke bezeichnen

$$3.\quad \begin{aligned} e &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ f &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ g &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}$$

Diese Grössen e, f, g werden in der Flächentheorie als die Fundamentalgrössen I. Ordnung bezeichnet. Sie sind von der Lage des Punktes P abhängig, hängen aber nicht von dem Verhältnisse $\partial v : \partial u$, also nicht von der Richtung ab, welche das Curvenelement ds hat.

Sind α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Tangente einer auf der Fläche durch P gehenden Curve in P mit den Achsen bildet, so ist

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Setzt man hier die Werthe aus 1. und 2. ein, und bezeichnet das Verhältniss $dv : du$ mit k, so erhält man

$$4.\quad \alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial u} + k\frac{\partial x}{\partial v}\right) : N, \quad \beta = \left(\frac{\partial y}{\partial u} + k\frac{\partial y}{\partial v}\right) : N, \quad \gamma = \left(\frac{\partial z}{\partial u} + k\frac{\partial z}{\partial v}\right) : N,$$

wobei

$$N = \sqrt{e^2 + 2fk + gk^2}.$$

Für eine andere durch P auf der Fläche gezogene Curve haben $dv : du$ und α, β, γ andere Werthe k', α', β', γ'. Der Winkel ϑ, unter dem sich die Curven in P schneiden, bestimmt sich aus

$$\cos\vartheta = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$

mit Hülfe der Werthe 1. und der entsprechenden Werthe für α', β', γ' zu

$$5.\quad \cos\vartheta = \frac{e + f(k + k') + gkk'}{\sqrt{(e + 2fk + gk^2)(e + 2fk' + gk'^2)}}.$$

Die den Verhältnissen k und k' zugehörigen Curvenelemente sind daher normal zu einander, wenn

$$6.\quad e + f(k + k') + gkk' = 0.$$

4. Ist Π ein Punkt der Tangente einer durch P gehenden Curve auf der Fläche, und $P\Pi = R$, so gelten die Gleichungen

$$\xi - x = R\frac{dx}{ds}, \quad \eta - y = R\frac{dy}{ds}, \quad \zeta - z = R\frac{dz}{ds}.$$

Führt man hier die Werthe für dx, dy, dz ein, und eliminirt dann du und dv, so erhält man

$$1. \qquad T = \begin{vmatrix} \xi - x & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \eta - y & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \zeta - z & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Bedingungsgleichung dafür, dass Π einer Tangente der Fläche im Punkte P angehört, ist also die Gleichung der Tangentenebene.

Sind p, q, r die Cosinus der Winkel der Normalen mit den Coordinatenachsen, und t ein noch unbestimmter Faktor, so hat man aus 1.

$$2. \qquad pt = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad qt = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad rt = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Quadrirt man diese Gleichungen und addirt, so ergiebt sich für die Grösse t die Gleichung

$$3. \qquad t^2 = eg - f^2,$$

wodurch nun p, q, r vollständig bestimmt sind. Da die Normale eines Flächenpunktes mit jeder in diesem Punkte berührenden Flächentangente rechte Winkel bildet, so ist für jede Verschiebung dx, dy, dz des Punktes P entlang der Fläche

$$4. \qquad p\,dx + q\,dy + r\,dz = 0;$$

führt man die Werthe für dx, dy, dz ein, so folgen in Rücksicht auf die Unabhängigkeit von du und dv aus 4. die beiden Gleichungen

$$5. \qquad p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u} + r\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

$$6. \qquad p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v} + r\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

5. Differenzirt man die vorigen Gleichungen nach u und v, so erhält man die vier Gleichungen

$$1. \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} + E = 0, \\ &\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} + F = 0, \\ &\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + F = 0, \\ &\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} + G = 0, \end{aligned}$$

wobei durch E, F, G die Grössen bezeichnet werden

$$2. \qquad \begin{aligned} E &= p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + q\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + r\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \\ F &= p\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + q\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + r\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}, \\ G &= p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + q\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + r\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

Diese Grössen sind bei der Untersuchung der Krümmungen der durch einen Punkt der Fläche gehenden Curven der Fläche von Bedeutung und werden als die Fundamentalgrössen II. Ordnung bezeichnet.

Multiplicirt man die erste der Gleichungen 1. mit du^2, die zweite und dritte mit $dudv$, die dritte mit dv^2 und addirt, so erhält man

3. $$dp\,dx + dq\,dy + dr\,dz + E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0,$$
wobei wie immer dp, dq, dr die vollständigen Differentiale
$$dp = \frac{\partial p}{\partial u}du + \frac{\partial p}{\partial v}dv, \quad \text{u. s. w.}$$
bezeichnen. Differenzirt man No. 4, 4 nach dem Winkel zweier Tangenten einer auf der Fläche liegenden Curve, so erhält man

4. $$\frac{d}{d\tau}\frac{dx}{ds} + q\frac{d}{d\tau}\frac{dy}{ds} + r\frac{d}{d\tau}\frac{dz}{ds} + \frac{dp}{d\tau}\frac{dx}{ds} + \frac{dp}{d\tau}\frac{dy}{ds} + \frac{dr}{d\tau}\frac{dz}{ds} = 0.$$

Dividirt man 3. durch $d\tau\,ds$, und subtrahirt dann 4., so ergiebt sich die Gleichung

5. $$p\frac{d}{d\tau}\frac{dx}{ds} + q\frac{d}{d\tau}\frac{dy}{ds} + r\frac{d}{d\tau}\frac{dr}{ds} = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{d\tau\,ds}.$$

Die Grössen $\frac{d}{d\tau}\frac{dx}{ds}$, $\frac{d}{d\tau}\frac{dy}{ds}$, $\frac{d}{d\tau}\frac{dz}{ds}$ sind (§ 9, No. 4, 12) die Cosinus der Winkel, welche die Hauptnormale von s in P mit den Achsen bildet; die linke Seite ist daher der Cosinus des Winkels zwischen dieser Hauptnormalen und der Flächennormalen. Bezeichnen wir denselben durch θ, und den Krümmungsradius der Curve s in P mit ρ', so folgt aus 5.

6. $$\frac{1}{\rho'}\cos\theta = \frac{d\tau}{ds}\cdot\cos\theta = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2}.$$

Die rechte Seite hängt nur von der Lage des Punktes P und von dem Verhältniss $dv:du$ ab, hat also unverändert denselben Werth für alle Curven s der Fläche, welche in P eine gemeinsame Tangente haben.

Eine auf der Fläche liegende ebene Curve, deren Ebene die Flächennormale in P enthält, wird als ein Normalschnitt der Fläche im Punkte P bezeichnet. Der Krümmungsradius ρ des Normalschnittes, der die zu dem Verhältnisse $du:dv$ gehörige Flächentangente berührt, ergiebt sich aus 6. für $\theta = 0$. Daher ist
$$\rho' = \rho\cos\theta.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz: Der Krümmungsradius einer Curve s der Fläche in P ist gleich dem Krümmungsradius des durch die Tangente von s in P geführten Normalschnitts multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels der Ebene dieses Normalschnitts und der Hauptnormalen von s.

6. Durch Ausrechnung der linken und rechten Seite überzeugt man sich leicht von der Identität

1. $$(e + 2fk + gk^2)(E + 2Fk' + Gk'^2) + (e + 2fk' + gk'^2)(E + 2Fk + Gk^2)$$
$$= 2[e + f(k+k') + gkk'][E + F(k+k') + Gkk'] + (eG - 2fF + gE)(k-k')^2.$$

Sind e, f, g die Fundamentalgrössen I. O. und k, k' die Werthe von $dv:du$ für zwei in P sich rechtwinkelig schneidende Curven der Fläche, so ist
$$e + f(k + k') + gkk' = 0;$$
die Identität 1. liefert in diesem Falle
$$(e + 2fk + gk^2)(E + 2Fk' + Gk'^2) + (e + 2fk' + gk'^2)(E + 2Fk + G'^2)$$
$$= (eG - 2fF + gE)(k - k')^2.$$

Hierin sind E, F, G noch ganz beliebige Grössen; ersetzt man E, F, G durch e, f, g, so erhält man

2. $$(e + 2fk + gk^2)(e + 2fk' + gk'^2) = t^2(k - k')^2.$$

Aus dieser Gleichung und der vorigen ergiebt sich
$$\frac{E + 2Fk + Gk^2}{e + 2fk + gk^2} + \frac{E + 2Fk' + Gk'^2}{e + 2fk' + gk'^2} = \frac{eG - 2fF + gE}{t^2}.$$

Sind nun E, F, G die Fundamentalgrössen II. O., so sind die Quotienten der linken Seite die reciproken Krümmungsradien der beiden Normalschnitte in den auf einander senkrechten Richtungen k und k'; bezeichnet man diese Radien mit ρ und ρ', so ist daher

$$3. \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{eG - 2fF + gE}{t^2}.$$

Die rechte Seite hängt nur von der Lage des Punktes P ab, ist dagegen unabhängig von k oder k'. Dies ergiebt: Für jeden Punkt der Fläche ist die Summe der Krümmungen zweier sich rechtwinkelig schneidenden Normalschnitte constant.

7. Die Krümmung eines Normalschnitts

$$\frac{1}{\rho} = \frac{E + 2Fk + Gk^2}{e + 2fk + gk^2}$$

ist nur dann von k unabhängig, wenn

$$1. \qquad \frac{E}{e} = \frac{F}{f} = \frac{G}{g};$$

der gemeinsame Werth dieser Quotienten giebt dann zugleich die Krümmung an. Durch Auflösung der beiden Gleichungen 1. werden einzelne Punkte der Fläche erhalten, die die Eigenschaft haben, dass alle Normalschnitte in diesen Punkten gleiche Krümmung besitzen. Diese Punkte heissen sphärische Punkte oder Nabelpunkte. In besonderen Fällen treten auch Nabellinien auf, deren Punkte sämmtlich Nabelpunkte sind.

8. Dreht sich die Normalebene in einem Punkte der Fläche, der nicht Nabelpunkt ist, um die Flächennormale, so ändert sich $1:\rho$ und kehrt nach Vollendung der Drehung zum Ausgangswerthe zurück. Daher muss dabei $1:\rho$ wenigstens einmal einen Maximalwerth und einmal einen Minimalwerth erlangt haben. Die Richtungen k, welche diesen eminenten Werthen entsprechen, werden erhalten, wenn man $1:\rho$ nach der Variabeln k differenzirt und die Werthe von k bestimmt, für welche dieser Differentialquotient verschwindet. Man erhält

$$1. \qquad \frac{d}{dk}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{N}\begin{vmatrix} F + Gk & E + 2Fk + Gk^2 \\ f + gk & e + 2fk + gk^2 \end{vmatrix},$$
$$= -\frac{1}{N}\left\{\begin{vmatrix} E & F \\ e & f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} G & E \\ g & e \end{vmatrix} k + \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} k^2\right\},$$

wobei
$$N = \tfrac{1}{2}(e + 2fk + gk^2)^2.$$

Die gesuchten Werthe von k sind daher die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$2. \qquad \begin{vmatrix} E & F \\ e & f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} G & E \\ g & e \end{vmatrix} k + \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} k^2 = 0.$$

Da wir uns überzeugt haben, dass ein Maximalwerth und ein Minimalwerth der Krümmung existiren, so folgt, dass diese Gleichung stets zwei verschiedene reale Wurzeln hat. Die beiden Normalschnitte, die durch diese Gleichung bestimmt sind, heissen die Hauptnormalschnitte, ihre Krümmungen die Hauptkrümmungen, ihre Ebenen die Hauptnormalebenen, ihre Tangenten die Hauptkrümmungstangenten, und deren Richtungen die Hauptkrümmungsrichtungen.

Sind k_1 und k_2 die Wurzeln von 2., so ist

$$3. \qquad mk_1k_2 = \begin{vmatrix} E & F \\ e & f \end{vmatrix}, \quad m(k_1 + k_2) = \begin{vmatrix} G & E \\ g & e \end{vmatrix}, \quad \text{wobei } m = \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt

4. $$e + f(k_1 + k_2) + g k_1 k_2 = 0;$$
dies ergiebt den Satz: Die Hauptkrümmungsrichtungen sind normal zu einander. Sind ρ_1 und ρ_2 die Hauptkrümmungsradien, so folgt (No. 6, 3)

5. $$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{eG - 2fF + gE}{t^2}.$$

Ersetzt man in No. 6, 2 k und k' durch k_1 und k_2, so ergiebt sich

6. $$(e + 2fk_1 + gk_1^2)(e + 2fk_2 + gk_2^2) = t^2 (k_1 - k_2)^2.$$

Aus 3. folgt ferner für die Hauptkrümmungsrichtungen die Gleichung

7. $$E + F(k_1 + k_2) + G k_1 k_2 = 0.$$

Setzt man nun in No. 6, 1

$$k = k_1, \quad k' = k_2, \quad e = E, \quad f = F, \quad g = G,$$

und versteht unter E, F, G Hauptgrössen zweiter Ordnung eines Punktes P und unter k_1 und k_2 die für die Hauptkrümmungsrichtungen geltenden Werthe von $dv : du$, so sind 6. und 7. erfüllt und die Identität No. 6, 1 liefert

8. $$(E + 2Fk_1 + Gk_1^2)(E + 2Fk_2 + Gk_2^2) = (GE - F^2)(k_1 - k_2)^2.$$

Dividirt man 8. durch 6., so erhält man

9. $$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{EG - F^2}{t^2}.$$

Aus 5. und 9. erkennt man, dass die Hauptkrümmungen die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind

10. $$t^2 \cdot \frac{1}{\rho^2} - (G - 2fF + gE) \cdot \frac{1}{\rho} + EG - F^2 = 0.$$

Um zu entscheiden, welche Wurzel dieser Gleichung zu k_1, welche zu k_2 gehört, bilden wir die Differenz

$$\Delta = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2},$$

und erhalten

$$\Delta = \frac{F + 2Fk_1 + Gk^2}{e + 2fk_1 + gk_1^2} - \frac{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}{e + 2fk_2 + gk_2^2}.$$

Hieraus folgt nach Beseitigung der Nenner in Rücksicht auf 6

$$\Delta (k_1 - k_2)^2 t^2 = \begin{vmatrix} E + 2Fk_1 + Gk_1^2 & E + 2Fk_2 + Gk_2^2 \\ e + 2fk_1 + gk_1^2 & e + 2fk_2 + gk_2^2 \end{vmatrix}$$
$$= (k_1 - k_2) \left\{ -2 \begin{vmatrix} E & F \\ e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G & E \\ g & e \end{vmatrix} (k_1 + k_2) - 2 \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} k_1 k_2 \right\}.$$

Führt man rechts für die Determinanten die Werthe 3. ein, so erkennt man, dass der Klammerinhalt

$$\begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} (k_1 - k_2)^2$$

beträgt, und erhält hieraus für die gesuchte Differenz

11. $$\Delta = \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} \frac{k_1 - k_2}{t^2}.$$

Ist k_1 die kleinere der beiden Grössen k_1 und k_2, so ist daher ρ_1 der kleinere oder der grössere Hauptkrümmungshalbmesser, je nachdem

$$Fg - Gf \gtrless 0.$$

9. Bezeichnet ϑ den Winkel zwischen der Tangentenrichtung k und der Haupttangentenrichtung k_1, so ist $90° - \vartheta$ der Winkel zwischen den Richtungen k und k_2; die Formel No. 3, 5 liefert

$$\cos^2\vartheta = \frac{[e + f(k + k_1) + gkk_1]^2}{(e + 2fk + gk^2)(e + 2fk_1 + gk_1^2)}, \quad \sin^2\vartheta = \frac{[e + f(k + k_2) + gkk_2]^2}{(e + 2fk + gk^2)(e + 2fk_2 + gk_2^2)}.$$

Für die Krümmung $1 : \rho$ des die Richtung k enthaltenden Normalschnitts und für die Hauptkrümmungen folgt aus No. 4, 6

$$\frac{1}{\rho} = \frac{E + 2Fk + Gk^2}{e + 2fk + gk^2}, \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{E + 2Fk_1 + Gk_1^2}{e + 2fk_1 + gk_1^2}, \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}{e + 2fk_2 + gk_2^2}.$$

In Folge der Gleichungen

$$e + f(k_1 + k_2) + gk_1 k_2 = 0, \quad E + F(k_1 + k_2) + Gk_1 k_2 = 0$$

hat man die Reductionen

$$\begin{aligned}
e + f(k + k_1) + gkk_1 &= (f + gk_1)(k - k_2), \\
e + f(k + k_2) = gkk_2 &= (f + gk_2)(k - k_1), \\
e + 2fk_1 + gk_1^2 &= (f + gk_1)(k_1 - k_2), \\
e + 2fk_2 + gk_2^2 &= (f + gk_2)(k_2 - k_1), \\
E + 2Fk_1 + Gk_1^2 &= (F + Gk_1)(k_1 - k_2), \\
E + 2Fk_2 + Gk_2^2 &= (F + Gk_2)(k_2 - k_1).
\end{aligned}$$

Hiernach erhält man

$$cos^2 \vartheta = \frac{f + gk_1}{e + 2fk + gk^2} \cdot \frac{(k - k_2)^2}{k_1 - k_2}, \quad sin^2 \vartheta = \frac{f + gk_2}{e + 2fk + gk^2} \cdot \frac{(k - k_1)^2}{k_2 - k_1},$$

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{F + Gk_1}{f + gk_1}, \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{F + Gk_2}{f + gk_2};$$

daher ist

$$\begin{aligned}
\frac{cos^2 \vartheta}{\rho_1} + \frac{sin^2 \vartheta}{\rho_2} &= \frac{(F + Gk_1)(k - k_2)^2 - (F + Gk_2)(k - k_1)^2}{(e^2 + 2fk + gk^2)(k_1 - k_2)} \\
&= \frac{2Fk + Gk^2 - F(k_1 + k_2) - Gk_1 k_2}{(e + 2fk + gk^2)}.
\end{aligned}$$

Addirt man zum Zähler $E + F(k_1 + k_2) + Gk_1 k_2 = 0$, so erhält man schliesslich

$$\frac{cos^2 \vartheta}{\rho_1} + \frac{sin^2 \vartheta}{\rho_2} = \frac{E + 2Fk + Gk^2}{e + 2fk + gk^2};$$

also ist

$$\frac{1}{\rho} = \frac{cos^2 \vartheta}{\rho_1} + \frac{sin^2 \vartheta}{\rho_2}.$$

Diese Formel lehrt die Krümmung eines Normalschnitts N aus den Hauptkrümmungen und aus den Winkeln zwischen N und den Hauptkrümmungsrichtungen finden.

10. Rechnet man das Bogenelement einer Raumcurve positiv, so hat der Krümmungshalbmesser

$$\rho = \frac{ds}{d\tau}$$

einen positiven oder negativen Werth, je nachdem $d\tau$ positiv oder negativ ist. Die Tangenten in den Endpunkten des Curvenelements ds bilden zwei spitze verschwindend kleine Winkel vom Arcus $d\tau$ und zwei stumpfe Winkel, in deren einem das Bogenelement ds enthalten ist. Da der Krümmungsmittelpunkt auf dem Schnitt der Normalebenen in den Enden von ds liegt, so folgt, dass derselbe mit ds auf derselben Seite der Tangente liegt. Die Tangenten aller Normalschnitte in einem Punkte einer Fläche sind in der Tangentenebene vereint. Haben nun die Hauptkrümmungen $1 : \rho_1$ und $1 : \rho_2$ entgegengesetzte Zeichen, so folgt, dass die Curvenelemente ds_1 und ds_2 der Hauptnormalschnitte und daher auch die Hauptkrümmungscentra auf entgegengesetzten Seiten der Tangentenebene liegen. Die Gleichung

$$\frac{cos^2 \vartheta}{\rho_1} + \frac{sin^2 \vartheta}{\rho_2} = 0,$$

deren Lösungen sind

1. $$\tang\vartheta = \pm\sqrt{-\rho_2 : \rho_1},$$
bestimmt dann zwei Normalschnitte von der Krümmung Null, und für diese ist im Allgemeinen P ein Wendepunkt. In diesen beiden Normalschnitten tritt, wenn wir uns die Normalebene um die Normale in einer Richtung gedreht denken, der Uebergang von positiver zu negativer Krümmung ein; in den Tangenten dieser beiden Normalschnitte durchdringt die Fläche in der Umgebung von P die Tangentenebene.

Bei einem einschaligen Hyperboloide und bei einem hyperbolischen Paraboloide sind diese Normalschnitte, in welchen das Vorzeichen der Krümmung wechselt, die beiden Geraden der Fläche, welche durch den Flächenpunkt P gehen. Die Hauptkrümmungsrichtungen einer Regelfläche zweiten Grades halbiren daher in jedem Punkte der Fläche die Winkel der durch diesen Punkt gehenden Geraden der Fläche.

Haben dagegen beide Hauptkrümmungen dasselbe Zeichen, so haben gemäss der Formel
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\vartheta}{\rho_1} + \frac{\sin^2\vartheta}{\rho_2}$$
alle Normalschnitte Krümmungen desselben Zeichens; alle von P aus gehenden Curvenelemente liegen daher auf derselben Seite der Tangentenebene; in der Umgebung von P hat die Fläche ausser P keinen Punkt mit der Tangentenebene gemein, und liegt ganz auf einer Seite der Tangentenebene. Dieses Verhalten zeigen die nicht geradlinigen Flächen zweiten Grades in allen ihren Punkten.

11. Eine abwickelbare Fläche ist der Ort der Tangenten ihrer Rückkehrkante (Cuspidalcurve); man kann daher die Coordinaten der Punkte einer solchen Fläche darstellen, indem man von den Gleichungen ihrer Rückkehrkante ausgeht. Sind dieselben
$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u),$$
so sind die Gleichungen der Tangente dieser Curve im Punkte P
$$\frac{\xi - f_1}{f_1'} = \frac{\eta - f_2}{f_2'} = \frac{\zeta - f_1}{f_3'}.$$

Bezeichnet man den gemeinsamen variabeln Werth dieser Quotienten mit v, so erhält man die Coordinaten ξ, η, ζ irgend eines Punktes einer Tangente, d. i. also irgend eines Punktes der von diesen Tangenten beschriebenen Fläche durch die zwei Variabeln u, v ausgedrückt

1. $$\xi = vf_1' + f_1, \quad \eta = vf_2' + f_2, \quad \zeta = vf_3' + f_3.$$

Hieraus ergeben sich die Werthe
$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = vf_1'' + f_1', \quad \frac{\partial\eta}{\partial u} = vf_2'' + f_2', \quad \frac{\partial\zeta}{\partial u} = vf_3'' + f_3',$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial v} = f_1', \quad \frac{\partial\eta}{\partial v} = f_2', \quad \frac{\partial\zeta}{\partial v} = f_3'.$$

Mithin ist

2. $$p : q : r = \begin{vmatrix} f_2'' & f_2' \\ f_3'' & f_3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_3'' & f_3' \\ f_1'' & f_1' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_1'' & f_1' \\ f_2'' & f_2' \end{vmatrix}.$$

Ferner hat man
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} = vf_1''' + f_1'', \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} = vf_2''' + f_2'', \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2} = vf_3''' + f_3'',$$

3. $$\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v} = f_1'', \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial u\partial v} = f_2'', \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial u\partial v} = f_3'',$$
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} = \frac{\partial^2\eta}{\partial v^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} = 0.$$

Aus 2. und 3. folgt

4. $$EG - F^2 = 0,$$

während $eg - f^2$ von Null verschieden ist. Daher schliessen wir (No. 8, 9): In jedem Punkte einer abwickelbaren Fläche ist eine Hauptkrümmung gleich Null; die Gerade, längs welcher die abwickelbare Fläche von der Tangentenebene berührt wird, ist also ein Hauptnormalschnitt, und enthält die minimale Krümmung; der zu dieser Geraden senkrechte Normalschnitt enthält die maximale Krümmung. Die beiden Richtungen, in welchen im Allgemeinen ein Wechsel des Vorzeichens der Krümmung statt hat, fallen hier in eine, nämlich in die Berührungsgerade zusammen.

Wählt man x und y selbst zu unabhängigen Variabeln, so ist

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

und daher

$$p = -\frac{\partial z}{\partial x} : N, \quad q = -\frac{\partial z}{\partial y} : N, \quad r = 1 : N,$$

$$N = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

folglich

$$E = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{N}, \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{1}{N}, \quad G = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{1}{N}.$$

5. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

Wir werden später in der Integralrechnung nachweisen, dass jede Fläche abwickelbar ist, sobald sie in allen ihren Punkten der Gleichung 5. genügt.

12. Die Coordinaten der Punkte einer normalen axialen Schraubenfläche werden durch die Gleichungen dargestellt

$$x = v \cos u, \quad y = v \sin u, \quad z = mu.$$

Aus denselben folgen die Werthe

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -y, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = x, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = m,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \cos u, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \sin u, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -x, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = -y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -\sin u, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \cos u, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

Die Fundamentalgrössen erster Ordnung sind

$$e = v^2 + m^2, \quad f = 0, \quad g = 1,$$

Das Bogenelement folgt hieraus zu

$$ds = \sqrt{v^2 + m^2} \cdot du.$$

Ferner ist

$$t^2 = v^2 + m^2.$$

Die Grössen p, q, r folgen aus

$$pt = -m \sin u, \quad qt = m \cos u, \quad rt = -v.$$

Ferner folgt

$$E = 0, \quad F = \frac{m}{\sqrt{v^2 + m^2}}, \quad G = 0.$$

Die quadratische Gleichung zur Bestimmung der Hauptkrümmungen ist daher

$$\frac{v^2 + m^2}{\rho^2} - \frac{m^2}{v^2 + m^2} = 0;$$

sie liefert für ρ_1 und ρ_2 die beiden Werthe

$$\pm \frac{v^2 + m^2}{m}.$$

Die Hauptkrümmungen sind also dem absoluten Betrage nach gleich der Torsion der durch den Punkt auf der Schraubenfläche construirbaren coaxialen Schraubenlinie.

Die Gleichung zur Bestimmung der Hauptkrümmungsrichtungen wird

$$-(v^2 + m^2) + k^2 = 0$$

und liefert $\quad k = \pm \sqrt{v^2 + m^2}.$

Der positive Werth von k gehört zum positiven Hauptkrümmungsradius.

Für den Winkel der auf der Fläche liegenden Geraden $z = mu$, welche einen Normalschnitt von der Krümmung Null enthält, und der Hauptkrümmungsrichtung k_1 erhält man aus No. 10, 1

$$tang \vartheta = 1, \quad \vartheta = \frac{\pi}{4}.$$

Die Krümmungsrichtungen durchschneiden also die Geraden der Fläche unter dem constanten Winkel von 45°.

13. Die Coordinaten der Punkte der centralen Fläche zweiten Grades

$$1. \qquad f = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$$

können durch die Parameter u, v ausgedrückt werden, die den Gleichungen genügen

$$\frac{x^2}{a+u} + \frac{y^2}{b+u} + \frac{z^2}{c+u} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a+v} + \frac{y^2}{b+v} + \frac{z^2}{c+v} - 1 = 0.$$

Die Parameterlinien sind die Schnitte von f mit confocalen Flächen. Die dem Punkte P zugehörigen Parameter sind die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^2}{a+w} + \frac{y^2}{b+w} + \frac{z^2}{c+w} = 1.$$

In Rücksicht auf $f = 0$ findet man

$$x^2 + y^2 + z^2 = u + v + a + b + c,$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = (u + v + a + b + c)(a + b + c) + uv - ab - ac - bc.$$

Hieraus und aus 1. folgen die Coordinaten

$$x^2 = \frac{a(c-b)}{d}(u+a)(v+a),$$

$$y^2 = \frac{b(a-c)}{d}(u+b)(v+b), \quad \text{wobei } d = (b-c)(a-c)(b-a),$$

$$z^2 = \frac{c(b-a)}{d}(u+c)(v+c);$$

daher ist

$$2\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{x}{u+a}, \quad 2\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{y}{u+b}, \quad 2\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{z}{u+c},$$

$$2\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{x}{v+a}, \quad 2\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{y}{v+b}, \quad 2\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{z}{v+c},$$

$$e = \frac{u(u-v)}{4U}, \quad f = 0, \quad g = \frac{v(v-u)}{4V},$$

wobei $U = (u+a)(u+b)(u+c)$, $\quad V = (v+a)(v+b)(v+c)$.

Ferner findet sich

$$pt = \frac{dx^2yz(u-v)}{aUV}, \quad qt = \frac{dxy^2z(u-v)}{bUV}, \quad rt = \frac{dxyz^2(u-v)}{cUV}$$

$$t = dxyz\frac{u-v}{4UV}\sqrt{\frac{uv}{abc}},$$

$$p = \frac{x}{a}\sqrt{\frac{abc}{uv}}, \quad q = \frac{y}{b}\sqrt{\frac{abc}{uv}}, \quad r = \frac{z}{c}\sqrt{\frac{abc}{uv}}.$$

Weiter ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\frac{x}{(u+a)^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = -\frac{y}{(u+b)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = -\frac{z}{(u+c)^2},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{a(c-b)}{4d}\cdot\frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \frac{b(a-c)}{4d}\cdot\frac{1}{y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{c(b-a)}{4d}\cdot\frac{1}{z},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\frac{x}{(v+a)^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = -\frac{y}{(v+b)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = -\frac{z}{(v+c)^2},$$

$$E = \frac{v-u}{4U}\sqrt{\frac{abc}{uv}}, \quad F = 0, \quad G = \frac{u-v}{4V}\sqrt{\frac{abc}{uv}}.$$

Für die Hauptkrümmungsrichtungen ist $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$, sie fallen daher mit den Tangenten der Parameterlinien zusammen; diese letzteren werden aus diesem Grunde als die **Krümmungslinien** von f bezeichnet. Die Hauptkrümmungen sind

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{u}\sqrt{\frac{abc}{uv}}, \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{v}\sqrt{\frac{abc}{uv}}.$$

14. Für Rotationsflächen, deren Achse in die Z-Achse fällt, nehmen wir den Radius eines Parallelkreises und den Arcus des Winkels, den er mit der XZ-Ebene bildet, zu Parametern u und v; dann sind die Gleichungen

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = \varphi(u).$$

Daher erhält man

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \sin v; \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \varphi';$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -u\sin v; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u\cos v; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \varphi'';$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -\sin v; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \cos v; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0;$$

$$\frac{\partial^1 x}{\partial v_2} = -u\cos v; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = -u\sin v; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0;$$

$$e = 1 + \varphi'^2; \quad f = 0; \quad g = u^2; \quad t = u\sqrt{1+\varphi'^2};$$

$$p = -\frac{\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\cdot\cos v; \quad q = -\frac{\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\cdot\sin v; \quad r = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2}};$$

$$E = \frac{\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}}; \quad F = 0; \quad G = -\frac{\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\cdot u.$$

Die Hauptkrümmungsrichtungen fallen in den Meridian und den Parallelkreis; die Hauptkrümmungen sind

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{1}{\rho_2} = -\frac{\varphi'}{(1+\varphi'^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{u}.$$

§ 11. Einhüllende Curven und Flächen.

1. Wenn die Gleichung einer ebenen Curve eine unbestimmte Grösse (Parameter) α enthält, so ändern sich im Allgemeinen Lage und Gestalt der Curve, wenn man dem Parameter α nach einander verschiedene Werthe ertheilt. Giebt man α einen kleinen Zuwachs $\Delta\alpha$, so geht die Curve $f(x, y, \alpha) = 0$ in die neue Curve $f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0$ über. Beide Curven haben reale oder complexe Schnittpunkte; wir fassen einen derselben P_1 ins Auge. Verschwindet $\Delta\alpha$, so nähert sich P_1 im Allgemeinen einer bestimmten Grenzlage P.

2. Ist die Curvengleichung auf α reducirt,

$$\varphi(x, y) = \alpha$$

und φ eine eindeutige Function von x und y, so haben zwei Curven, die zu verschiedenen Werthen von α gehören, keinen im Endlichen liegenden Schnittpunkt. Denn die Gleichungen

$$\varphi(x, y) = \alpha,$$
$$\varphi(x, y) = \alpha + \Delta\alpha,$$

sind für endliche Werthe von x und y nicht vereinbar.

3. Wenn φ eine mehrdeutige Function ist, so besteht die Curve $\varphi(x, y) =$ [illegible] aus zwei oder mehreren Abschnitten, welche den verschiedenen Werthsystemen [illegible] φ entsprechen. Die Curve z. B.

$$x + \sqrt{x^2 - y^2} = \alpha$$

ist eine Parabel mit dem Parameter α. Die beiden Abschnitte gehören den Gleichungen zu

$$x + \sqrt{x^2 - y^2} = \alpha, \quad x - \sqrt{x^2 - y^2} = \alpha,$$

wobei die Wurzel in beiden Gleichungen positiv zu nehmen ist. Diese Abschnitte werden durch die Punkte getrennt, für welche $x^2 - y^2 = 0$; die Coordinaten dieser Punkte sind

$$x = \alpha, \quad y = \pm\alpha.$$

4. Sind $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ die verschiedenen Werthe der $n$deutigen Function [illegible] so besteht die Curve $\varphi = \alpha$ aus den Abschnitten

$$\varphi_1 = \alpha, \quad \varphi_2 = \alpha, \ldots \varphi_n = \alpha.$$

Die Theile zweier Curven

$$\varphi_i = \alpha, \quad \varphi_i = \alpha + \Delta\alpha$$

haben keinen endlichen Schnittpunkt; ein Schnittpunkt der beiden Curven

$$\varphi = \alpha \quad \text{und} \quad \varphi = \alpha + \Delta\alpha$$

kann daher nur zwei Abschnitten φ_i und φ_k mit verschiedenem Index zugehören. Wir betrachten den Schnittpunkt der Abschnitte

$$\varphi_i = \alpha, \quad \varphi_k = \alpha + \Delta\alpha.$$

Nähert sich $\Delta\alpha$ der Grenze Null, so erhalten φ_i und φ_k denselben Werth [illegible] Bezeichnen wir die Grenzpunkte zweier Abschnitte einer Curve als Verzweigungspunkte der Curve (womit keineswegs gesagt sein soll, dass in diesen Punkten verschiedene Curvenzweige in auffälliger Weise zusammenlaufen), so ergiebt sich hieraus: Die Grenzlagen für die Schnittpunkte der Curven $\varphi = \alpha$ und

$\varphi = \alpha + \Delta\alpha$ für ein verschwindendes $\Delta\alpha$ sind die Verzweigungspunkte der Curve $\varphi = \alpha$.

Die Bahn, welche die Verzweigungspunkte der Curve $\varphi = \alpha$ beschreiben, wenn α sich willkürlich ändert, nennen wir die Verzweigungscurve des Curvensystems $\varphi = \alpha$.

5. Ist φ eine $n$deutige Function, so geben wir der Gleichung der Curve die Gestalt

$$1.\qquad f(x, y, \alpha) \equiv (\varphi_1 - \alpha)(\varphi_2 - \alpha) \ldots (\varphi_n - \alpha) = 0,$$

worin sämmtliche Coefficienten der Potenzen von α eindeutige Functionen sind. Die Bedingung dafür, dass zwei von den φ_i zusammenfallen, ist

$$2.\qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Denn man hat sofort

$$3.\qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = -\frac{f}{\varphi_1 - \alpha} - \frac{f}{\varphi_2 - \alpha} - \frac{f}{\varphi_3 - \alpha} - \ldots - \frac{f}{\varphi_n - \alpha}.$$

Die Function f verschwindet, wenn man für α einen der Werthe $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ setzt. Für $\alpha = \varphi_i$ verschwinden alle Glieder der rechten Seite von 3., mit Ausnahme des Gliedes $f : (\varphi_i - \alpha)$, weil alle genannten den Faktor $(\varphi_i - \alpha)$ haben. Soll nun für irgend einen Werth von φ_i die rechte Seite von 3. verschwinden, so muss das Glied $f : (\varphi_i - \alpha)$ den Faktor $(\varphi_i - \alpha)$, also f den Faktor $(\varphi_i - \alpha)^2$ enthalten, w. z. b. w.

6. Ohne Rücksicht darauf, ob die Function $f(x, y, \alpha)$ algebraisch für α ist, oder nicht, ergiebt sich die Gleichung der Verzweigungscurve in folgender Weise; wir machen dabei die ausdrückliche Voraussetzung, dass x, y und α in f nur in eindeutigen Verbindungen vorkommen.

Der Schnittpunkt der Curven

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0$$

befriedigt auch die Gleichung

$$\frac{f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0.$$

Geht man hierin zur Grenze für ein verschwindendes $\Delta\alpha$ über, so erhält man: Ist $f(x, y, \alpha)$ eine eindeutige Function von x, y, und α, so wird die Gleichung der Verzweigungscurve des Curvensystems $f(x, y, \alpha) = 0$ durch Elimination von α aus den beiden Gleichungen gewonnen

$$f(x, y, \alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

7. Die Richtung der Tangente in einem Punkte der Verzweigungscurve wird erhalten, indem man

$$1.\qquad f(x, y, \alpha) = 0$$

unter der Voraussetzung differenzirt, dass darin α eine durch die Gleichung

$$2.\qquad \frac{\partial f(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

definirte Function von x und y ist. Hiernach ergiebt sich

$$3.\qquad y' = -\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right).$$

In Folge der Gleichung 2. reducirt sich dieser Werth auf

$$4.\qquad y' = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y},$$

ausser in dem Falle, wenn die beiden Bedingungen erfüllt sind

$$5.\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Der letztere Fall ist durchaus kein seltener Ausnahmefall. Wir werden später, bei Gelegenheit der Differentialgleichungen, leicht herzustellende Gruppen von Curven kennen lernen, bei welchen die Gleichungen 5. für alle Punkte der Verzweigungscurve erfüllt sind.

Die Gleichungen 5. sagen aus, dass die Curve $f(x, y, \alpha) = 0$ einen Doppelpunkt hat (Differentialr. § 15); die Verzweigungscurve erscheint daher als die Curve, welche die Doppelpunkte des Curvensystems $f(x, y, \alpha) = 0$ enthält.

Durch Differentiation der Curvengleichung No. 5, 1 nach x und y ergiebt sich

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f}{\varphi_1 - \alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{f}{\varphi_2 - \alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f}{\varphi_1 - \alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{f}{\varphi_2 - \alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \dots$$

Für einen Punkt der Verzweigungscurve verschwinden sämmtliche Quotienten $f : (\varphi_i - \alpha)$; wenn nun keiner der Differentialquotienten $\partial \varphi_i : \partial x$, $\partial \varphi_i : \partial y$ unendlich gross ist, so tritt der Fall ein

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Wenn die Gleichungen 5. nicht bestehen, so fällt nach 4. die Tangente der Verzweigungscurve in einem Punkte P derselben mit der Tangente der durch P gehenden Curve $f(x, y, \alpha) = 0$ zusammen, die Verzweigungscurve wird daher in jedem ihrer Punkte von einer Curve des Systems berührt. Aus diesem Grunde bezeichnet man die Verzweigungscurve als die Einhüllende des Curvensystems

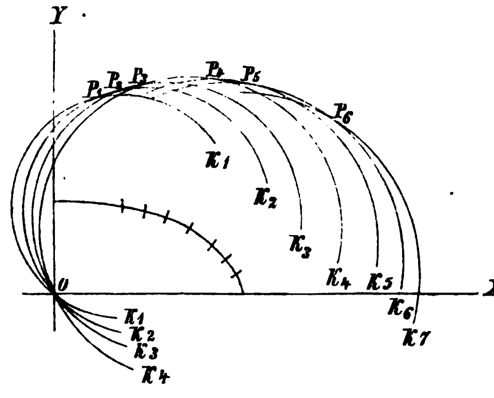
$$f(x, y, \alpha) = 0.$$

8. Beispiele. A. Ist

$$1. \qquad f = x^2 + y^2 - 2a\cos\alpha \cdot x - 2b\sin\alpha \cdot y = 0,$$

so besteht das Curvensystem aus Kreisen, die den Nullpunkt enthalten und deren Centra auf dem Perimeter einer Ellipse mit den Halbachsen a und b liegen. Man erhält

$$2. \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 2a\sin\alpha \cdot x - 2b\cos\alpha \cdot y = 0.$$



(M. 491.)

Die Gleichungen 1. und 2. ergeben

$$3. \qquad \cos\alpha = \frac{(x^2 + y^2)\,ax}{2(a^2x^2 + b^2y^2)}, \qquad \sin\alpha = \frac{(x^2 + y^2)\,by}{2(a^2x^2 + b^2y^2)}.$$

Quadrirt man, addirt, und beseitigt den Nenner, so folgt

$$4a^2x^2 + 4b^2y^2 - (x^2 + y^2)^2 = 0.$$

Dies ist die Fusspunktcurve der Ellipse mit den Halbachsen $2a$ und $2b$. Aus 1. folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x - 2a\cos\alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y - 2b\sin\alpha;$$

wenn man die Werthe 3. einsetzt, so erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(b^2 - a^2)\,xy^2}{a^2x^2 + b^2y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(a^2 - b^2)\,x^2y}{a^2x^2 + b^2y^2}.$$

Diese Werthe verschwinden nur für den isolirten Punkt der Fusspunktcurve

$$x = y = 0\,.$$

B. Für die Sinuscurven

4. $$f \equiv y + m\alpha - sin(x + n\alpha) = 0$$

hat man

5. $$\frac{\partial f}{\partial \alpha} \equiv m - n\,cos(x + n\alpha) = 0\,.$$

Hieraus folgt

$$x + n\alpha = Arc\,cos\,\frac{m}{n}\,,$$

und wenn man dies in f einsetzt

6. $$ny + m\left(Arc\,cos\,\frac{m}{n} - x\right) = \sqrt{n^2 - m^2}\,.$$

Diese Gleichung stellt eine Schaar gleichweit von einander entfernter paralleler Geraden dar.

C. Die Gleichung

$$f \equiv x^2 - 2\alpha y - \alpha^2 - b = 0$$

ergiebt für veränderliche α ein System von Parabeln, welche die Y-Achse zur Symmetrieachse haben. Reducirt man auf α, so ergiebt sich

$$y + \sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = \alpha\,.$$

Hieraus folgt die Gleichung der Einhüllenden

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0\,.$$

D. Die Gleichung der Einhüllenden des Systems von Geraden

$$f \equiv 2x + 3\alpha y + \alpha^3 = 0$$

ist die Bedingung für das Zusammenfallen zweier Wurzeln dieser cubischen Gleichung; die Einhüllende ist daher die semicubische Parabel

$$x^2 + y^3 = 0\,.$$

E. Bei den Untersuchungen über Differentialgleichungen werden wir dem Curvensysteme begegnen

7. $$(\varphi_1 - \alpha)(\varphi_2 - \alpha) = 0\,,$$

wobei φ die zweiwerthige Function bezeichnet

$$\varphi \equiv l(\sqrt{x^2 - xy} - y + 2x) - \frac{2}{\sqrt{3}}\,Arc\,tang\,\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{1 - \frac{y}{x}} + 1\right).$$

Die Verzweigungscurve ist

$$x - y = 0\,.$$

Ferner ergiebt sich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2 - xy} + 2x}{x(2x - y + \sqrt{x^2 - xy})}\,, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{2x - y + \sqrt{x^2 - xy}}\,.$$

Diese beiden Differentialquotienten sind für die Punkte der Verzweigungscurve nicht unendlich gross; folglich hat die Curve 7. in ihrem Schnittpunkte mit der Verzweigungscurve einen Doppelpunkt, die Verzweigungscurve kann nicht als die Einhüllende des gegebenen Curvensystems bezeichnet werden.

F. Wenn in der Gleichung 7.

$$\varphi \equiv f + \sqrt{\psi}\,,$$

wobei f und ψ ganze rationale Functionen von x und y sein mögen, so ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2\sqrt{\psi}}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}\,,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2\sqrt{\psi}}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}\,.$$

Die Verzweigungscurve ist

$$\psi = 0\,.$$

Für die Punkte derselben sind $\partial\varphi : \partial x$ und $\partial\varphi : \partial y = 0$ unendlich gross. Die rationale Curvengleichung ist

$$(f - \alpha)^2 - \psi = 0;$$

aus dieser Gleichung folgt

$$2(f - \alpha)\, df - d\psi = 0.$$

Für die Punkte der Verzweigungscurve ist $f = \alpha$, daher bestimmt sich die Richtung einer Systemcurve in dem Punkte, den sie mit der Verzweigungscurve gemein hat, aus der Gleichung

$$d\psi = 0,$$

stimmt daher mit der Richtung überein, welche die Verzweigungscurve in demselben Punkte hat.

9. Wenn eine Curvengleichung

$$1. \qquad f(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n) = 0$$

n unbestimmte Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ enthält, die durch $n - 1$ Gleichungen verbunden sind

$$2. \quad \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 0, \quad \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 0, \ldots \quad \varphi_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 0,$$

so kann man aus den Gleichungen 2. alle Parameter durch einen derselben, z. B. α_1 ausdrücken; führt man diese Werthe in 1. ein, so enthält 1. nur noch den unbestimmten Parameter α_1, und man ist damit zu dem vorigen Falle zurückgekehrt. Statt dessen kann man auch folgendes Verfahren einschlagen: Man differenzirt 1. und 2. nach den Parametern, bildet also die Gleichungen

$$3. \qquad \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_n} d\alpha_n = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \ldots + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_n} d\alpha_n = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \ldots + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_n} d\alpha_n = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \ldots + \dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \alpha_n} d\alpha_n = 0. \end{array}$$

Aus den n Gleichungen 3. eliminirt man die Differentiale $d\alpha_1, d\alpha_2, d\alpha_3, \ldots$ und erhält

$$4. \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \alpha_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \alpha_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Aus den $(n + 1)$ Gleichungen 1., 2., 4. hat man schliesslich die Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ zu eliminiren; die Resultante ist die gesuchte Gleichung der Einhüllenden.

10. Wenn die Gleichung einer Fläche

$$1. \qquad f(x, y, z, \alpha) = 0$$

einen unbestimmten Parameter α enthält, so genügt die Schnittcurve der Flächen

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad f(x, y, z, \alpha + \delta) = 0$$

auch der Gleichung

$$2. \qquad \frac{f(x, y, z, \alpha + \delta) - f(x, y, z, \alpha)}{\delta} = 0.$$

Die Grenzlage Γ, welcher sich die Schnittcurve der beiden Flächen bei ver-

schwindendem δ nähert, genügt daher der Gleichung 1. und der durch Grenzübergang aus 2. sich ergebenden Gleichung

$$3. \qquad \frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

Die Fläche, welche die Curve Γ beschreibt, wenn α die Zahlenreihe durchläuft, wird als die einhüllende Fläche der den unendlich vielen Werthen von α entspringenden Flächen $f(x, y, z, \alpha) = 0$ bezeichnet.

Man kann 1. als Gleichung der Einhüllenden betrachten, wenn man hierin α als eine Function von x, y, z ansieht, die durch die Gleichung 3. definirt ist. Die partialen Differentialquotienten $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ ergeben sich daher aus

$$4. \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \end{aligned}$$

Für jeden Punkt einer Curve Γ ist $\partial f : \partial \alpha = 0$; daher reduciren sich die Gleichungen 4. auf die Gleichungen, aus welchen sich $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ für die eingehüllte Fläche $f(x, y, z, \alpha)$ bestimmt. Da nun durch die partialen Differentialquotienten von z die Stellungswinkel der Tangentenebene bestimmt werden, so folgt: Die Fläche, welche eine einfach unendliche (d. i. durch Veränderung eines Parameters erzeugte) Reihe von Flächen einhüllt, berührt jede Eingehüllte längs der Curve, die sie mit ihr gemein hat.

Jede Curve Γ wird als eine Charakteristik*) der einhüllenden Fläche bezeichnet; jedem Werthe des Parameters α entspricht eine Charakteristik $\Gamma(\alpha)$. Auf jeder der eingehüllten Flächen liegen zwei unendlich nahe Charakteristiken; nämlich die Durchschnitte dieser Fläche mit der in der Reihe der eingehüllten unmittelbar vorangehenden und der mit der nächstfolgenden; daher schneiden sich je zwei benachbarte Charakteristiken. Die Gleichungen der Charakteristik $\Gamma(\alpha)$ sind

$$5. \quad f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad 6. \quad \frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0;$$

die der Charakteristik $\Gamma(\alpha + \delta)$ sind

$$7. \quad f(x, y, z, \alpha + \delta) = 0, \qquad 8. \quad \left(\frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha+\delta} = 0,$$

wobei in der letzten Gleichung angedeutet sein soll, dass man nach der Differentiation α durch $\alpha + \delta$ zu ersetzen hat. Convergirt δ gegen den Grenzwerth Null, so kann man, da alsdann die Charakteristik 7., 8. auf der Eingehüllten 5. liegt, die Gleichung 7. durch

$$\lim \frac{f(x, y, z, \alpha + \delta) - f(x, y, z, \alpha)}{\delta} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

ersetzen; also wird dieselbe mit 6. identisch.

Statt des Systemes 7. und 8. hat man nun das System 6. und 8.; hierin kann man 8. ersetzen durch

$$\lim \frac{f'(\alpha + \delta) - f'(\alpha)}{\delta} = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0,$$

wobei f' abkürzend für den Differentialquotienten von f nach dem Parameter gesetzt worden ist.

Zur Bestimmung der Schnittpunkte auf einander folgender Charakteristiken hat man daher die Gleichungen

*) MONGE, Application de l'analyse à la géom., 5. éd. par Liouville, Paris 1850, pag. 29 u. f.

9. $$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Die Raumcurve, welche diese Durchschnittspunkte enthält, ist eine Rückkehrkante der Einhüllenden. Sie ist der gemeinsame Durchschnitt der Einhüllenden mit den Flächen, die sich durch Elimination von α aus $f = 0$ und $\partial^2 f : \partial\alpha^2 = 0$, bez. aus $\partial f : \partial\alpha = 0$ und $\partial^2 f : \partial\alpha^2 = 0$ ergeben.

11. A. Als Beispiel wählen wir zunächst die Fläche, welche alle Kugeln einhüllt, deren Centra auf einer zur X- und Y-Achse symmetrischen Ellipse liegen und die durch das Centrum der Ellipse gehen. Die Gleichungen dieser Kugeln haben die Form

1. $$f \equiv x^2 + y^2 - 2xa\cos\alpha - 2yb\sin\alpha + z^2 = 0,$$

wobei α der unbestimmte Parameter ist. Aus 1. erhält man

2. $$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \alpha} \equiv xa\sin\alpha - yb\cos\alpha = 0,$$

3. $$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \equiv xa\cos\alpha + yb\sin\alpha = 0.$$

Aus 1. und 2. folgt durch Elimination von α die Gleichung der Eingehüllten zu

4. $$4a^2x^2 + 4b^2y^2 - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

Dies ist die Fusspunktfläche des Ellipsoids mit den Halbachsen $2a$, $2b$, $c = 0$. Sie hat im Nullpunkte einen ausgezeichneten Punkt. Betrachtet man in 1. und 2. den Parameter α als gegeben, so sind 1. und 2. die Gleichungen der Charakteristik $\Gamma(\alpha)$. Da nun unter dieser Voraussetzung die Gleichung 2. eine Ebene darstellt, die durch die Z-Achse geht, so folgt, dass die Charakteristiken Kreise sind normal zur Ebene der Ellipse; zugleich ist ersichtlich, dass die Ebene einer Charakteristik normal zu dem Ellipsendiameter ist, der zu dem durch das Centrum der betreffenden Kugel gehenden conjugirt ist. Die Elimination von α aus 2. und 3. ergiebt

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 0;$$

diese Gleichung wird nur vom Nullpunkte erfüllt; die Rückkehrkante der Einhüllenden schrumpft daher in diesem Falle zu einem Punkte zusammen; die Einhüllende zeigt in dieser Hinsicht ein ähnliches Verhalten wie unter den Abwickelbaren der Kegel, dessen Rückkehrkante ebenfalls nur aus einem Punkte, der Kegelspitze, besteht.

B. Suchen wir ferner die Fläche auf, welche alle Flächen II. O. umhüllt, deren Gleichungen von der Form sind

5. $$K \equiv K_1 + 2\alpha K_2 + \alpha^2 K_3 = 0,$$

wobei K_1, K_2, K_3 Functionen zweiten Grades bezeichnen. Man hat

6. $$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial K}{\partial \alpha} \equiv K_2 + \alpha K_3,$$

7. $$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2} \equiv K_3.$$

Eliminirt man α aus $K = 0$ und $\partial K : \partial\alpha = 0$, so erhält man

8. $$K_1K_3 - K_2^2 = 0.$$

Die Einhüllende ist daher von der vierten Ordnung und enthält die Schnittcurven der Fläche II. O. $K_2 = 0$ mit $K_1 = 0$ und $K_3 = 0$; aus 7. folgt, dass die letztere Curve die Rückkehrkante der Einhüllenden ist.

C. Enthält die Gleichung einer eingehüllten Fläche den Parameter α nur linear, ist sie also von der Form

$$\varphi \equiv \varphi_1 + \alpha\varphi_2 = 0,$$

so degenerirt die Einhüllende zu der Curve, welche φ mit $\varphi_2 = 0$ gemein hat, d. i. zu der Schnittcurve von $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$; die Gesammtheit der Flächen φ bildet dann ein Flächenbüschel, dessen Träger die Schnittcurve der Flächen φ_1 und φ_2 ist.

12. Enthält die Gleichung einer Fläche $f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ zwei willkürliche Parameter α und β, so kann man nach der Grenzlage fragen, welcher die Schnittpunkte der Flächen

1. $f(\alpha, \beta) = 0$, 2. $f(\alpha + \delta, \beta) = 0$, 3. $f(\alpha, \beta + \varepsilon) = 0$

sich nähern, wenn δ und ε verschwinden. Diese Punkte sind offenbar die Schnittpunkte der Grenzlagen, welchen die Schnittcurven von 1. und 2. und von 1. und 3. sich nähern, wenn δ und ε verschwinden, werden daher aus den Gleichungen bestimmt

4. $f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$, 5. $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, 6. $\dfrac{\partial f}{\partial \beta} = 0$.

Wenn α und β zugleich um die verschwindenden Beträge $d\alpha$ und $d\beta$ sich ändern, so ändert sich die Function f um

$$df = \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta,$$

die Gleichung 1. geht daher über in

$$7. \quad f + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta = 0.$$

Die Schnittpunkte von 4., 5. und 6. erfüllen auch die Gleichung 6., und wir schliessen daher: Durch die Schnittpunkte der Flächen 4., 5., 6. gehen alle Flächen, welche aus f durch verschwindend kleine Aenderungen der Parameter α und β hervorgehen. Aendern sich α und β stetig, so beschreiben die Schnittpunkte von 4., 5. und 6. eine Fläche, die als die **Einhüllende des Systems der Flächen** $f(x, y, z, \alpha, \beta)$ bezeichnet wird. Während das System $f(x, y, z, \alpha) = 0$, dessen Einhüllende in No. 4 bestimmt wurde, nur eine einfach unendliche Reihe von Flächen enthält, besteht das System $f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ aus einer zweifach unendlichen Anzahl von Flächen.

Die partialen Differentialquotienten $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ für einen Punkt der Einhüllenden werden aus 1. durch Differentiation gewonnen, wenn man darin α und β als Functionen von x, y, z ansieht, die durch 5. und 6. definirt werden. Man hat daher zur Bestimmung dieser Differentialquotienten die beiden Gleichungen

$$8. \quad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta = 0,$$

$$9. \quad \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta = 0,$$

Die Differentiale $d\alpha$ und $d\beta$ sind durch Differentiation aus 5. und 6. zu entnehmen, und zwar für 8. unter Voraussetzung eines constanten y, für 9. unter Voraussetzung eines constanten x.

Aus den Gleichungen 5. und 6. folgt, dass die mit $d\alpha$ und $d\beta$ multiplicirten Glieder verschwinden, und daher die gesuchten partialen Differentialquotienten für einen Punkt der Einhüllenden dieselben Werthe haben, wie für die diesen Punkt erzeugende Fläche $f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$. Hieraus folgt sofort: **Jede Eingehüllte wird von der Einhüllenden in dem Punkte berührt, den sie erzeugt.**

13. A. Wir betrachten zunächst die Einhüllende aller Kugeln, deren Centra auf einem Ellipsoide gelegen sind, und die durch das Centrum des Ellipsoids gehen.

Sind a, b, c die Halbachsen des Ellipsoids, so sind die Coordinaten jedes Ellipsoidpunktes in der Form darstellbar

$$a\cos\alpha\cos\beta, \quad b\cos\alpha\sin\beta, \quad c\sin\alpha,$$

wobei α und β willkürlich sind. Die Gleichung einer Eingehüllten ist daher

1. $f \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2a\cos\alpha\cos\beta\cdot x - 2b\cos\alpha\sin\beta\cdot y - 2c\sin\alpha\cdot z = 0.$

Hieraus findet man

$$2. \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial\alpha} = a\sin\alpha\cos\beta\cdot x + b\sin\alpha\sin\beta\cdot y - c\cos\alpha\cdot z,$$

$$3. \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial\beta} = a\cos\alpha\sin\beta\cdot x - b\cos\alpha\cos\beta\cdot y.$$

Zur Elimination von α und β aus den Gleichungen 1. $\partial f:\partial\alpha = 0$ und $\partial f:\partial\beta = 0$ berechnen wir zunächst aus den beiden letzten

$$4. \quad \cos\beta = \frac{ax}{a^2x^2 + b^2y^2}\cdot cz\cot\alpha, \quad \sin\beta = \frac{by}{a^2x^2 + b^2y^2}\cdot cz\cot\alpha.$$

Quadrirt und addirt man, so entsteht

$$5. \quad \cot^2\alpha = \frac{a^2x^2 + b^2y^2}{c^2z^2}.$$

Substituirt man 4. in 1., so erhält man

$$6. \quad \sin\alpha = \frac{2cz}{r^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Aus 5. und 6. erhält man die Gleichung der Einhüllenden

$$4(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

Die Einhüllende ist daher die Fusspunktfläche eines Ellipsoids, dessen Achsen doppelt so gross sind, wie die Achsen des gegebenen Ellipsoids.

B. Sind K_1, K_2, K_3, K_4 Functionen zweiten Grades, so wird die Einhüllende der Flächen

$$K \equiv K_1 + \alpha K_2 + \alpha\beta K_3 + \beta K_4 = 0$$

durch Elimination von α und β aus $K = 0$ und aus

$$\frac{\partial K}{\partial\alpha} = K_2 + \beta K_3 = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial\beta} = \alpha K_3 + K_4 = 0$$

erhalten; ihre Gleichung ergiebt sich zu

$$K_1K_3 - K_2K_4 = 0,$$

und ist daher eine Fläche vierten Grades, die durch die Schnittcurven der Flächen K_1 und K_3 mit den Flächen K_2 und K_4 geht.

§ 12. Bestimmung einiger Grenzwerthe.

$$\left(\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0\cdot\infty, \quad 0^\infty, \quad \infty^0\right).$$

1. Wenn für einen Werth $x = \xi$ die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ verschwinden, so verstehen wir unter $f(\xi):\varphi(\xi)$ den Grenzwerth, dem der Quotient $f(\xi+\delta):\varphi(\xi+\delta)$ sich nähert, wenn δ gegen die Grenze Null convergirt, haben daher für das Symbol $f(\xi):\varphi(\xi)$ die definirende Gleichung

$$1. \quad \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = \lim\frac{f(\xi+\delta)}{\varphi(\xi+\delta)}.$$

Aus der Identität

$$\frac{f(\xi+\delta)}{\varphi(\xi+\delta)} = \frac{f(\xi+\delta) - f(\xi)}{\delta} : \frac{\varphi(\xi+\delta) - \varphi(\xi)}{\delta}$$

schliessen wir

$$\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = \lim\frac{f(\xi+\delta) - f(\xi)}{\delta} : \frac{\varphi(\xi+\delta) - \varphi(\xi)}{\delta}.$$

Der Uebergang zur Grenze liefert

2. $$\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Wenn also für einen Werth von x die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ gleichzeitig verschwinden, so ist für diesen Werth der Quotient $f(x):\varphi(x)$ gleich dem Quotienten der derivirten Functionen $f'(x):\varphi'(x)$.

Wenn der Quotient $f'(x):\varphi'(x)$ sich nach Beseitigung gleicher Faktoren im Zähler und Nenner in den irreductiblen Quotienten $g(x):h(x)$ verwandelt, und $g(x)$ und $h(x)$ für $x = \xi$ verschwinden, so ist

$$\frac{g(\xi)}{h(\xi)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)},$$

mithin

$$\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}, \quad \text{u. s. w.}$$

A. Setzt man $f(x) = e^{ax} - e^{bx}$, $\varphi(x) = e^{cx} - e^{dx}$, so verschwinden f und φ für $x = 0$. Da nun

$$f'(x) = ae^{ax} - be^{bx}, \quad \varphi'(x) = ce^{cx} - de^{dx},$$

so ist

$$f'(0) = a - b, \quad \varphi'(0) = c - d,$$

und man hat daher

$$\frac{f(0)}{\varphi(0)} = \frac{a-b}{c-d}.$$

B. Die Functionen $f(x) = x - \sin x$, $\varphi(x) = x - \tang x$ verschwinden ebenfalls für $x = 0$; man hat

$$f'(x) = 1 - \cos x, \quad \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = -\frac{\cos^2 x}{\cos x + 1},$$

daher ist

$$\frac{f(0)}{\varphi(0)} = \frac{f'(0)}{\varphi'(0)} = \frac{1}{2},$$

2. Der Grenzwerth, welchem sich der Quotient $f(x):\varphi(x)$ für einen Werth $x = \xi$ nähert, für welchen $f(x)$ und $\varphi(x)$ zugleich unendlich gross werden, kann nach der vorigen Regel bestimmt werden, wenn man benutzt

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{\varphi(x)} : \frac{1}{f(x)},$$

denn die Functionen $1:\varphi(x)$ und $1:f(x)$ verschwinden für $x = \xi$. Daher hat man

$$\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)^2} : \frac{f'(\xi)}{f(\xi)^2} = \frac{\varphi'(\xi)}{f'(\xi)} : \left(\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)}\right)^2;$$

hieraus schliesst man

$$\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

erhält also dieselbe Regel zur Bestimmung des Grenzwerthes wie im vorigen Falle.

Die Functionen $l\sin x$ und lx werden unendlich für $x = 0$; daher ist

$$\left(\frac{l\sin x}{lx}\right)_{x=0} = \left(\frac{dl\sin x}{dx} : \frac{dlx}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{\cos x}{\sin x} : \frac{1}{x}\right)_{x=0} = \left(\cos x \cdot \frac{x}{\sin x}\right)_{x=0} = 1.$$

3. Wenn die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ für $x = \xi$ unendlich gross werden, so kann der Grenzwerth der Differenz

$$f(x) - \varphi(x)$$

für $x = \xi$ ebenfalls durch Anwendung der Regel 1. gefunden werden. Setzt man nämlich

$$\frac{1}{f(x)} = g(x), \quad \frac{1}{\varphi(x)} = \psi(x),$$

so hat man

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\psi(x)} = \frac{\psi(x) - g(x)}{g(x)\,\psi(x)}.$$

Für $x = \xi$ verschwinden $g(x)$ und $\psi(x)$, also auch Dividend und Divisor des zuletzt gewonnenen Quotienten. Daher hat man

$$f(\xi) - \varphi(\xi) = \frac{\psi'(\xi) - g'(\xi)}{g(\xi)\,\psi'(\xi) + \psi(x)\cdot g'(x)}.$$

Durch dieses Verfahren erhält man z. B. den Grenzwerth von

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$$

für $x = 0$; man hat $g(x) = x$, $\psi(x) = e^x - 1$; daher ist der gesuchte Grenzwerth gleich dem Grenzwerthe des Quotienten

$$\frac{e^x - 1}{xe^x + e^x - 1}.$$

Zähler und Nenner dieses Bruches verschwinden für $x = 0$; mithin hat man beide nochmals zu differenziren und erhält

$$\frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{x+2}.$$

Der gesuchte Grenzwerth ist daher $\frac{1}{2}$.

4. Durch Anwendung der Regel in No. 1 lassen sich noch einige weitere Grenzwerthe bestimmen.

Wenn $f(x)$ für $x = \xi$ verschwindet, und $\varphi(x)$ für denselben Werth der Variabeln unendlich gross wird, so ist für $x = \xi$

1. $$\lim f(x)\cdot\varphi(x) = \lim f(x) : \frac{1}{\varphi(x)},$$

2. $$\lim \varphi(x)^{f(x)} = e^{\lim f(x)\, l\varphi(x)} = e^{\lim f(x) : [1 : l\varphi(x)]},$$

3. $$\lim [1 + f(x)]^{\varphi(x)} = \lim e^{\varphi(x)\, l[1+f(x)]} = \lim e^{l[1+f(x)] : [1:\varphi(x)]}.$$

Hierdurch sind diese Grenzwerthe auf den Grenzwerth des Quotienten zweier verschwindenden Functionen zurückgeführt.

§ 13. Die Taylor'sche Reihe.

1. Im Folgenden soll die Frage beantwortet werden, ob man im Stande ist, aus den Werthen, welche eine Function und ihre Differentialquotienten für einen bestimmten Werth $x = \xi$ der Variabeln haben, auf den Werth zu schliessen, den die Function für einen andern Werth der Variabeln $x = \xi + h$ annimmt, ob es also und bez. unter welchen Bedingungen es möglich ist, $f(\xi + h)$ aus

$$h,\ f(\xi),\ f'(\xi),\ f''(\xi),\ f'''(\xi),\ f''''(\xi)\ \ldots$$

zu berechnen. Um einen Anhalt zu gewinnen, beantworten wir diese Frage zunächst für den einfachsten Fall, für eine algebraische ganze Function $n$ten Grades, und untersuchen dann, wie weit sich das Resultat auf andere Functionen übertragen lässt. Ist $f(x)$ eine ganze Function, so ist $f(\xi + h)$ eine ganze Function von h, so dass wir setzen können

$$f(\xi + h) = \varphi(h),$$

wo φ eine ganze Function bezeichnet. Ferner ist

$$\frac{d^n f(\xi)}{d\xi^n} = \left(\frac{d^n f(\xi + h)}{d(\xi + h)^n}\right)_{h=0} = \left(\frac{d^n f(\xi + h)}{dh^n}\right)_{h=0} = \left(\frac{d^n \varphi(h)}{dh^n}\right)_{h=0} = \varphi^n(0).$$

Es genügt also, zu untersuchen, ob man

$$\varphi(h) \text{ aus } h,\ \varphi(0),\ \varphi'(0),\ \varphi''(0),\ \varphi'''(0)\ \ldots$$

berechnen kann; man kann dann diese Grössen der Reihe nach durch

$$f(\xi + h), \quad h, \quad f(\xi), \quad f'(\xi), \quad f''(\xi), \quad f'''(\xi) \ldots .$$

ersetzen. — Ist nun

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n = \sum_0^n a_k x^k ,$$

so haben wir

$$\varphi'(x) = 1 \cdot a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots = \sum_1^n k a_k x^{k-1} ,$$

$$\varphi''(x) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \ldots = \sum_1^n k(k-1) \cdot a_k x^{k-2} ,$$

$$\varphi'''(x) = \quad 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 x + \ldots = \sum_3^n k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3} ,$$

. . . .

Hieraus finden wir

$$\varphi(0) = a_0 , \quad \varphi'(0) = 1 \cdot a_1 , \quad \varphi''(0) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 , \quad \varphi'''(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 ,$$
$$\varphi^n(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n \cdot a_n , \quad \varphi^{n+1}(0) = \varphi^{(n+2)}(0) = \ldots = 0 .$$

Wir erhalten somit die Gleichung

$$1. \quad \begin{aligned} \varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + \frac{h^2}{1 \cdot 2}\varphi''(0) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\varphi'''(0) + \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\varphi''''(0) \\ + \ldots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\varphi^n(0) . \end{aligned}$$

Hieraus folgt weiter

$$2. \quad f(\xi + h) = f(\xi) + hf'(\xi) + \frac{h^2}{1 \cdot 2}f''(\xi) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}f'''(\xi) + \ldots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n}f^n(\xi) .$$

2. Um die Existenz einer entsprechenden Formel für andere Functionen nachzuweisen, schalten wir zunächst folgende Bemerkung ein.

Wenn die Function $F(x)$ für $x = \xi$ und $x = \xi + h$ verschwindet und innerhalb dieser Grenzen nicht unstetig ist, so kann $F(x)$ von $x = \xi$ bis $x = \xi + h$ nicht beständig wachsen oder abnehmen, sondern muss wenigstens einmal von Wachsthum zu Abnahme oder von Abnahme zu Wachsthum übergehen; es giebt daher unter der ausgesprochenen Voraussetzung einen zwischen ξ und $\xi + h$ gelegenen Werth der Variabeln x, für welchen $F'(x)$ verschwindet. Bezeichnet man durch ϑ einen positiven echten, nicht näher bestimmten Bruch, so ist also

$$F'(\xi + \vartheta h) = 0 .$$

3. Unter $f(x)$ irgend eine Function, vorläufig noch ohne jede Einschränkung, verstehend, setzen wir

$$1. \quad \begin{aligned} f(x) = f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi) + \frac{(x-\xi)^2}{1 \cdot 2}f''(\xi) + \frac{(x-\xi)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}f'''(\xi) + \ldots \\ \ldots + \frac{(x-\xi)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot f^n(\xi) + R , \end{aligned}$$

worin x und ξ als willkürliche Variable zu betrachten sind, und suchen den Rest R als Function von ξ und $h = x - \xi$ so zu bestimmen, dass diese Gleichung erfüllt wird. Aus Analogie mit dem Baue der übrigen Glieder setzen wir zunächst

$$R = \frac{(x-\xi)^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots n(n+1)} \cdot P .$$

Die Function der Variabeln z

$$2. \quad f(x) - f(z) - (x-z)f'(z) - \frac{(x-z)^2}{1 \cdot 2}f''(z) - \ldots - \frac{(x-z)^n}{1 \cdot 2 \ldots n}f^n(z) - \frac{(x-z)^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} \cdot P$$

verschwindet für $z = x$ und $z = \xi$; folglich verschwindet der erste Differentialquotient derselben für einen zwischen x und ξ liegenden Werth der Variabeln, den wir mit

3. $$\xi + \vartheta(x - \xi), \quad 0 < \vartheta < 1$$

bezeichnen können. Unter der Voraussetzung, dass alle Differentialquotienten von f bis zum $n$ten einschliesslich für jeden zwischen x und ξ liegenden Werth der Variabeln stetig und endlich sind, erhält man als Differentialquotient von 2.

$$-\frac{(x-z)^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}f^{n+1}(z) + \frac{(x-z)^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}P.$$

Da nun dieser Ausdruck für den obigen Werth von z verschwindet, so hat man

4. $$P = f^{n+1}[\xi + \vartheta(x - \xi)].$$

Ersetzt man hier und in 1. $x - \xi$ durch h, so erhält man schliesslich

5. $$f(\xi + h) = f(\xi) + hf'(\xi) + \frac{h^2}{1\cdot 2}f''(\xi) + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(\xi) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}f^n(\xi) + \frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n+1}f^{n+1}(\xi + \vartheta h).$$

Ersetzt man ξ durch 0 und h durch x, so folgt

6. $$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}f^n(0) + \frac{x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)}f^{n+1}(\vartheta x).$$

Hieraus erkennen wir, dass wir, um die Reihe No. 1, 2 auf andere als auf ganze Functionen $n$ten Grades auszudehnen, ein Restglied hinzufügen müssen. Dieses Glied ist noch nicht völlig bestimmt, da es den unbestimmten Bruch ϑ enthält; wir sehen aber, dass es ein Produkt aus einem bekannten Faktor und aus dem Faktor $f^{n+1}(\xi + \vartheta h)$ ist, dessen numerischer Werth jedenfalls zwischen dem grössten und kleinsten Werthe liegt, den $f^{n+1}(x)$ annimmt, wenn die Variable von ξ auf $\xi + h$ wächst; und dies genügt für die wichtigen Anwendungen, die wir von dieser Formel machen werden.

Ehe wir hierzu übergehen, wollen wir noch eine andere Form für das Restglied mittheilen. Setzt man in 1.

$$R = \frac{(x-\xi)^{p+1}}{p+1}P,$$

und schliesst dann in derselben Weise weiter, so erkennt man, dass der Ausdruck

$$-\frac{(x-z)^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}f^{n+1}(z) + (x-z)^p P$$

für einen zwischen x und ξ liegenden Werth von z verschwindet. Wird dieser Werth wieder mit $\xi + \vartheta(x - \xi)$ bezeichnet, so ist

$$x - z = x - \xi - \vartheta(x - \xi) = (x - \xi)(1 - \vartheta),$$

und man erhält somit

$$P = \frac{(x-\xi)^{n-p}(1-\vartheta)^{n-p}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}f^{n+1}[\xi + \vartheta(x-\xi)],$$

folglich $$R = \frac{(x-\xi)^{n+1}(1-\vartheta)^{n-p}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(p+1)}f^{n+1}[\xi + \vartheta(x-\xi)].$$

Setzt man $x - \xi = h$, so folgt

7. $$R = \frac{h^{n+1}(1-\vartheta)^{n-p}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(p+1)}f^{n+1}(\xi + \vartheta h).$$

Nimmt man $p = n$, so kommt man auf die obige Form des Restes zurück; für $p = 0$ erhält man

8. $$R = \frac{h^{n+1}(1-\vartheta)^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} f^{n+1}(\xi + \vartheta h).$$

3. Die Formel No. 2, 6 kann ohne Schwierigkeit auf Functionen von mehreren Variabeln ausgedehnt werden. Setzt man in

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{1\cdot 2}f''(0) + \ldots + \frac{t^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}f^n(0) + R.$$

statt $f(t)$ die Function

$$f(t) \equiv \varphi(x+th,\ y+tk,\ z+tl),$$

worin th, tk, tl willkürliche Aenderungen der Variabeln x, y, z bezeichnen, so ist

$$f(0) \equiv \varphi(x, y, z).$$

Ferner ist

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial(x+th)}\cdot\frac{d(x+th)}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial(y+tk)}\cdot\frac{d(y+tk)}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial(z+tl)}\cdot\frac{d(z+th)}{dl}.$$

Beachtet man nun, dass

$$\frac{d(x+th)}{dt} = h, \quad \frac{d(y+tk)}{dt} = k, \quad \frac{d(z+tl)}{dt} = l,$$

und

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(x+th)} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial(y+tk)} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial(z+tl)} = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

so folgt

$$\frac{df}{dt} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi(x+ht,\ y+kt,\ z+lt).$$

Hieraus folgt sofort

$$\frac{d^rf}{dt^r} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^r\varphi(x+ht,\ y+kt,\ z+lt).$$

Für $t = 0$ ergiebt sich insbesondere

$$f^r(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^r\varphi(x, y, z).$$

Setzt man der einfacheren Bezeichnung wegen für th, tk, tl der Reihe nach h, k, l, so erhält man hieraus

$$\varphi(x+h,\ y+k,\ z+l) = \varphi(x, y, z) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\varphi + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^n\varphi$$
$$+ \frac{(1-\vartheta)^{n-p}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(p+1)}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n+1}\varphi(x+\vartheta h,\ y+\vartheta k,\ z+\vartheta l).$$

Die Voraussetzung für die Geltung dieser Gleichung ist, dass sämmtliche Differentialquotienten bis zu denen $n$ter Ordnung inclusive endlich und stetig sind innerhalb des Gebiets x, y, z und $x+h$, $y+k$, $z+l$.

In gleicher Weise kann man

$$\varphi(x_1+h_1,\ x_2+h_2,\ x_3+h_3,\ \ldots\ x_r+h_r)$$

als Reihe darstellen.

4. Auf Grund der Formeln in No. 2 und No. 3 entwickeln wir hier noch zwei Sätze, die wir im nächsten Abschnitte verwenden werden.

W e n n f ü r e i n e n b e s t i m m t e n W e r t h d e r V a r i a b e l n e i n e r F u n c t i o n $f(x)$ d i e D i f f e r e n t i a l q u o t i e n t e n , d e r e n O r d n u n g u n t e r r i s t , v e r s c h w i n d e n , u n d d e r r t e n i c h t v e r s c h w i n d e t , s o k a n n m a n Δx i m m e r s o k l e i n w ä h l e n , d a s s d i e D i f f e r e n z $f(x+\Delta x) - f(x)$ d a s s e l b e Z e i c h e n h a t , w i e d a s P r o d u k t $f^r(x)\Delta x^r$.

Nach der Voraussetzung ist

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\frac{1}{1\cdot 2\ldots r}f^r(x)\cdot\Delta x^r+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(r+1)}f^{r+1}(x)\cdot\Delta x^{r+1}+\ldots$$

und daher

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r}f^r(x)\Delta x^r[1+A\cdot\Delta x].$$

Hierin bezeichnet A einen Faktor, der nicht unendlich gross ist; daher kann man Δx immer so wählen, dass $A\cdot\Delta x$ dem absoluten Betrage nach kleiner als 1, dass der Faktor $1+A\cdot\Delta x$ also positiv ist.

Dem soeben bewiesenen Satze steht für Functionen mit mehreren Variabeln der folgende zur Seite: Wenn die partialen Differentialquotienten einer Function, deren Ordnung kleiner als r ist, für ein gegebenes Werthsystem der Variabeln $x, y, z, \ldots$ sämmtlich verschwinden und die der $r$ten Ordnung nicht sämmtlich verschwinden, so kann man die Grössen Δx, Δy, Δz etc. immer so klein wählen, dass die Differenz

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z,\ldots)-f(x, y, z,\ldots)$$

dasselbe Vorzeichen hat, wie die Grösse

$$\left(\Delta x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}+\Delta z\frac{\partial}{\partial z}+\ldots\right)^r f.$$

Denn man hat unter der angegebenen Voraussetzung

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z,\ldots)=f(x, y, z)+\frac{1}{1\cdot 2\ldots r}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}+\ldots\right)^r f + \ldots$$

und daher

$$f(x+\Delta x,\ldots)-f(x,\ldots)=\frac{1}{1\cdot 2\ldots r}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\ldots\right)^r f\cdot\left(1+\frac{M}{N}\right).$$

Hierin ist M in Bezug auf Δx, Δy, $\Delta z\ldots$ von der $(r+1)$ten Ordnung, N von der $r$ten Ordnung; der Quotient $M:N$ kann daher durch Verkleinerung von $\Delta x,\ldots$ kleiner als jede gegebene Zahl gemacht werden, insbesondere also so klein, dass $(1+M:N)$ positiv ist.

5. Wenn man in der Gleichung

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x)+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}f^n(x)+R$$

die Zahl n über alle Grenzen wachsen lassen kann, ohne dass die Bedingungen ihrer Gültigkeit verletzt werden, so hat man

$$f(x+h)=lim\left[f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^n(x)\right]+lim R.$$

Hat nun bei unendlich wachsendem n der Rest R die Null zur Grenze, so ist

$$f(x+h)=lim\left[f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x)+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(x)+\ldots\right].$$

Man denkt sich durch die Punkte am Schlusse eine unbegrenzte Fortsetzung der Reihe angedeutet, und kann daher das Zeichen lim weglassen, so dass man hat

$$1.\quad f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x)+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(x)+\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f''''(x)+\ldots$$

und unter denselben Voraussetzungen

$$2.\quad f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0)+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(0)+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f''''(0)+\ldots$$

Der Fehler, den man begeht, wenn man diese Reihen bei dem $n$ten Gliede abbricht, wird durch Abschätzung des Restgliedes R beurtheilt; nach der Voraussetzung ist er um so kleiner, je grösser n ist und kann durch Vergrösserung der Gliederzahl n kleiner als jede noch so kleine Zahl gemacht werden.

Die Reihe 1. führt nach ihrem Erfinder den Namen TAYLOR'sche Reihe. Die zweite wurde als Specialfall der TAYLOR'schen Reihe zuerst von MACLAURIN mitgetheilt und ist nach ihm benannt worden.

6. Wir wenden uns nun dazu, die Functionen

$$(1+x)^\mu, \quad l(1+x), \quad e^x, \quad \sin x, \quad \cos x,$$

mit Hülfe des MACLAURIN'schen Satzes als unendliche Potenzreihen darzustellen.

Entwicklung von $(1+x)^\mu$ (Binomische Reihe). In den Elementen der Algebra wird für einen ganzen positiven Exponenten μ die Potenz $(1+x)^\mu$ nach steigenden Potenzen von x entwickelt; wir werden nun zeigen, dass innerhalb bestimmter Grenzen dieselbe Entwicklung auch für negative und gebrochene Exponenten gilt. Der $k$te Differentialquotient von $(1+x)^\mu$ ist

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\,.\,.\,(\mu-k+1)(1+x)^{\mu-k}.$$

Der letzte Faktor hat für ein hinlänglich grosses k einen negativen Exponenten und wird daher unendlich gross, wenn $x = -1$; daher ist die MACLAURIN'sche Reihe im vorliegenden Falle nicht anwendbar für Werthe von x, die gleich oder kleiner als -1 sind; ob sie für alle andern Werthe von x anwendbar ist, hängt von der Untersuchung des Restes R ab. Wir wenden die Form des Restes No. 2, 8 an und haben

$$R = \frac{x^{n+1}(1-\vartheta)^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot\mu(\mu-1)(\mu-2)\,.\,.\,(\mu-n)(1+\vartheta x)^{\mu-n-1}.$$

Hierfür können wir setzen

$$R = \mu x(1+\vartheta x)^{\mu-1}\cdot\left[\left(\frac{\mu}{1}-1\right)\left(\frac{\mu}{2}-1\right)\left(\frac{\mu}{3}-1\right)\,.\,.\left(\frac{\mu}{n}-1\right)\right]\cdot\left(\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x}\right)^n.$$

Der erste und der zweite Faktor werden für wachsende n nicht verschwindend klein; es muss daher der letzte Faktor verschwinden; wenn die Bedingungen dafür festgestellt sind, so haben wir dann weiter zu sehen, ob unter diesen, oder unter noch mehr beschränkenden Bedingungen, der Grenzwerth des Produkts des zweiten und letzten Faktors Null ist.

Der letzte Faktor ist eine Potenz mit unendlich wachsendem Exponenten; dieselbe verschwindet nur, wenn der Dignand ein echter Bruch ist. Aus der Identität

$$\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x} = \frac{x+1}{\vartheta x+1} - 1$$

erkennt man, dass man wegen der Unbestimmtheit des positiven echten Bruches ϑ nur dann sicher weiss, dass der Dignand echt gebrochen ist, wenn x ein positiver oder negativer echter Bruch ist; denn im ersteren Falle ist $(x+1):(\vartheta+1) < x+1$; und wird im letzteren der absolute Werth von x mit ξ bezeichnet, so ist

$$\frac{x+1}{\vartheta x+1} = \frac{1-\xi}{1-\vartheta\xi},$$

mithin positiv und < 1, und daher der Dignand ein negativer echter Bruch. Bezeichnet man den absoluten Werth des Dignanden mit t, so kann man den zweiten und dritten Faktor des Restes folgendermaassen anordnen:

$$\left(\frac{\mu}{1}-1\right)t\cdot\left(\frac{\mu}{2}-1\right)t\cdot\left(\frac{\mu}{3}-1\right)t\ldots\left(\frac{\mu}{n}-1\right)t;$$

wächst n um eine Einheit, so tritt zu diesem Produkte der Faktor

$$\left(\frac{\mu}{n+1}-1\right)t;$$

der Grenzwerth dieses Faktors ist $-t$, also ein echter Bruch. Da nun das obige Produkt für ein unendlich grosses n von einer gewissen Stelle an eine

unbegrenzte Menge von abnehmenden echten Brüchen zu Faktoren hat, so folgt, dass der Grenzwerth des Produktes selbst Null ist.

Die MACLAURIN'sche Reihe ist daher auf $(1 + x)^\mu$ anwendbar für alle positiven oder negativen echt gebrochenen Werthe von x. Da nun

$$f(0) = 1\,, \quad f^n(0) = \mu(\mu - 1)(\mu - 2) \ldots (\mu - n + 1),$$

so hat man die Entwicklung

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + .$$

mit dem Spielraume: $-1 < x < +1$.

Man kann nachweisen, dass die Reihe auch noch für $x = +1$ gilt, wenn μ grösser ist als -1, und für $x = -1$, wenn μ positiv ist*).

Insbesondere hat man

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots.$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^4}{8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^5}{10} - \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \ldots.$$

Um $(a + b)^\mu$ zu entwickeln, wo wir $a^2 > b^2$ annehmen, setze man

$$(a + b)^\mu = a^\mu\left(1 + \frac{b}{a}\right)^\mu.$$

Daher hat man

$$(a + b)^\mu = a^\mu\left\{1 + \frac{\mu}{1} \cdot \frac{b}{a} + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^3 + \ldots\right\}.$$

7. **Entwicklung von $l(1 + x)$.**

Der $k$te Differentialquotient von $l(1 + x)$ ist

$$(-1)^{k-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-1)(1+x)^{-k};$$

die Differentialquotienten bleiben daher endlich und stetig, so lange x grösser ist als -1. Der Rest ist für $p = 0$

$$R = (-1)^n \cdot (1 - \vartheta)^n \cdot x^{n+1} \cdot \frac{1}{(1 + \vartheta x)^{n+1}} = (-1)^n \cdot \frac{x}{1 + \vartheta x} \cdot \left(\frac{x - \vartheta x}{1 + \vartheta x}\right)^n.$$

Aus der vorigen No. wissen wir, dass der Rest verschwindet, wenn der absolute Werth von x kleiner als 1 ist. Für $x = 1$ ist

$$R = (-1)^n \frac{1}{1 + \vartheta} \cdot \left(\frac{1 - \vartheta}{1 + \vartheta}\right)^n$$

und daher ebenfalls $lim R = 0$. Die MACLAURIN'sche Reihe ist daher auf $l(1 + x)$ für alle Werthe von x anwendbar, die der Begrenzung genügen

$$-1 < x \leqq +1.$$

Da nun

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-1),$$

so ergiebt sich die Entwicklung

1. $$l(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \ldots,$$
$$-1 < x \leqq +1.$$

Setzt man $-x$ statt x, so erhält man

$$l(1 - x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 - \ldots,$$
$$-1 \leqq x < +1.$$

Durch Subtraction folgt hieraus

2. $$l\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots),$$
$$-1 < x < +1.$$

---

*) SCHLÖMILCH, Compendium der höhern Analysis, 5. Aufl. Braunschweig 1881, Bd. 1, pag. 111.

Setzt man hier

$$\frac{1+x}{1-x} = z, \quad \text{also} \quad x = \frac{z-1}{z+1},$$

so erhält man

$$3. \qquad lz = 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right],$$

diese Reihe gilt für jedes positive z; zur praktischen Berechnung des natürlichen Logarithmus einer Zahl ist sie aber nur für solche Werthe von z verwendbar, für welche $(z-1):(z+1)$ hinlänglich von 1 verschieden ist.

Zur praktischen Berechnung der Logarithmen von Primzahlen kann man sich der Reihe 3. für die Werthe $z = 2$ und $z = 3$ bedienen; für grössere Zahlen macht man mit Vortheil von der Identität Gebrauch

$$l(a+b) = la + l\frac{1 + \dfrac{b}{2a+b}}{1 - \dfrac{b}{2a+b}}$$

und erhält hieraus mit Hülfe der Reihe 2.

$$l(a+b) = la + 2\left[\frac{b}{2a+b} + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^7 + \ldots\right].$$

Ist $a = 3$, so liefert die Reihe für $b = 2$ und 4 ziemlich rasch genaue Resultate; für eine Genauigkeit bis auf $\pm\, 0{,}000005$ würden sechs Glieder genügen, wenn $b = 4$ genommen wird, für $b = 2$ bereits fünf Glieder. Hat man $l7$ gefunden, so kann man $a = 7$ setzen, und 4. auf die Fälle $b = 4$, 6 und 10 anwenden, u. s. f. Aus den Logarithmen der Primzahlen ergeben sich durch Additionen die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen. Hat man auf diesem Wege eine bis zu einer bestimmten Genauigkeit gehende vollständige Tafel der natürlichen Logarithmen berechnet, so kann man die Logarithmen zu einer beliebigen andern Basis a nach der bekannten Formel finden

$${}^a log\, z = lz : la.$$

Die Zahl $1 : la$ bezeichnet man als den Modulus der Logarithmen zur Basis a; für $a = 10$ erhält man mit Hülfe der obigen Reihen

$$\frac{1}{l10} = 0{,}434\,294\,481\,9.$$

8. Entwicklung von e^x.

Alle Differentialquotienten von e^x sind gleich e^x und für alle endlichen Werthe von x stetig und endlich. Der Rest ergiebt sich (No. 2, 6) zu

$$R = \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n+1} e^{\vartheta x}.$$

Der zweite Faktor ist eine endliche Zahl, sobald x nicht unendlich ist. Der erste Faktor enthält unter derselben Voraussetzung und wenn n hinlänglich gross ist $n + 1$ Faktoren

$$\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{n+1},$$

die von einer bestimmten Stelle an echt gebrochen sind, und bei unendlich wachsendem n sich der Grenze Null nähern; daher ist

$$lim R = 0.$$

Da nun

$$f^k(0) = 1,$$

so hat man die für jeden endlichen Werth von x gültige Exponentialreihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots.$$

Setzt man $x = 1$, so erhält man die zur Berechnung von e dienende Reihe

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

Für $x = -1$ erhält man

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

Die Gleichung

$$a^x = e^{x\,la}$$

führt zu einer Reihe für a^x, unter der Voraussetzung, dass a positiv ist; man erhält

$$a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{(x\,la)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x\,la)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(x\,la)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

9. Entwicklung von $cos\,x$ und $sin\,x$. Die Differentialquotienten

$$\frac{d^k cos\,x}{dx^k} = cos(\tfrac{1}{2}k\pi + x), \quad \frac{d^k sin\,x}{dx^k} = sin(\tfrac{1}{2}k\pi + x)$$

sind für alle realen Werthe von x endlich und stetig. Die Reste sind für beide Functionen

$$\frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \,..\, (n+1)} \cdot cos[\tfrac{1}{2}(n+1)\pi + \vartheta x], \text{ bez. } \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \,..\, (n+1)} \cdot sin[\tfrac{1}{2}(n+1)\pi + \vartheta x],$$

und haben für jedes endliche x den Grenzwerth Null. Wir erhalten somit die für jeden endlichen Werth von x gültigen Entwicklungen

$$cos\,x = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \dots$$

$$sin\,x = x - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots$$

Um mit Hülfe dieser Reihen eine Tafel der goniometrischen Functionen zu berechnen, genügt es, die Reihen für den Spielraum $x = 0$ bis $x = \frac{1}{4}\pi$ (entsprechend dem Spielraum des Winkels von 0° bis 45°) anzuwenden. Da

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800,$$

so genügen selbst für den über $\frac{1}{4}\pi$ hinausliegenden Werth $x = 1$ die ersten 6 bez. 5 Glieder beider Reihen für eine Genauigkeit von fünf Decimalstellen.

Wir verlassen hiermit die Anwendungen der TAYLOR'schen und der MACLAURIN'schen Reihe und bemerken, dass wir allgemeine Untersuchungen über unendliche Reihen im letzten Abschnitte mittheilen werden.

§ 14. Maxima und Minima.

1. In § 5, No. 1 haben wir bereits erkannt, dass eine Function einer Variabeln einen eminenten Werth, d. i. ein Maximum oder Minimum für denjenigen Werth der Variabeln erreicht, für welchen der erste Differentialquotient verschwindet; wir fanden, dass ein Maximum oder Minimum eintritt, je nachdem der erste Differentialquotient vom Positiven ins Negative übergeht oder umgekehrt; für den Fall, dass der erste Differentialquotient in der Nähe des betreffenden Werths der Variabeln sein Vorzeichen nicht ändert, ist damals keine Entscheidung getroffen worden. Wir geben im gegenwärtigen Abschnitte vollständigere Untersuchungen über die eminenten Werthe einer Function von einer und von mehreren Variabeln und knüpfen dieselben an die Untersuchungen des vorigen Abschnitts an.

Wenn für einen Werth x der Variabeln der erste Differentialquotient der Function $y = f(x)$ verschwindet, der zweite aber nicht, so hat für einen hinlänglich kleinen Werth von δx die Differenz $f(x + \delta x) - f(x)$ dasselbe Vor-

zeichen, wie das Produkt $f''(x)\delta x^2$, mithin dasselbe Vorzeichen wie $f''(x)$. Ist nun $f''(x)$ negativ, so ist $f(x+\delta x) - f(x) < 0$ sowohl für positive wie für negative Werthe von δx, mithin ist $f(x)$ grösser als jeder benachbarte Werth der Function, ist also ein Maximum; ist hingegen $f''(x)$ positiv, so ist $f(x+\delta x) - f(x) > 0$, und daher $f(x)$ kleiner als jeder benachbarte Werth, $f(x)$ also ein Minimum. Wir erhalten somit zunächst: Wenn der erste Differentialquotient einer Function für einen bestimmten Werth der Variabeln verschwindet, der zweite aber nicht verschwindet, so hat die Function für diesen Werth der Variabeln einen eminenten Werth, und zwar ein Maximum, wenn der zweite Differentialquotient negativ ist, ein Minimum, wenn er positiv ist.

Wenn für eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ der zweite Differentialquotient verschwindet, der dritte aber nicht, so hat die Differenz $f(x+\delta x) - f(x)$ für eine hinlänglich kleine Aenderung δx dasselbe Vorzeichen wie $f'''(x)\delta x^3$, und wechselt daher ihr Zeichen zugleich mit δx; in diesem Falle ist $f(x)$ kein eminenter Werth.

Verschwinden für eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ zugleich auch $f''(x)$ und $f'''(x)$, so hat $f(x+\delta x) - f(x)$ dasselbe Vorzeichen wie $f''''(x)\delta x^4$, und stimmt daher unabhängig von den Vorzeichen von δx dem Vorzeichen nach mit $f''''(x)$ überein. Daher ist für diesen Werth der Variabeln $f(x)$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem $f''''(x)$ negativ oder positiv ist.

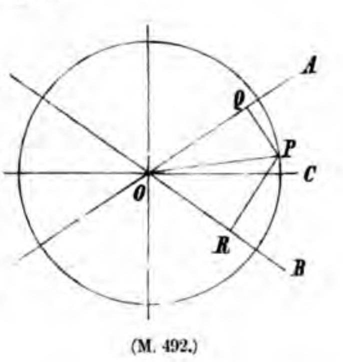
So weiter schliessend, gelangen wir zu dem Satze: Um die Werthe der Variabeln zu erhalten, zu welchen eminente Werthe der Function $f(x)$ gehören, bestimme man die Wurzeln der Gleichung

$$f'(x) = 0.$$

Diejenigen unter diesen Wurzeln sind Lösungen der Aufgabe, für welche der seiner Ordnung nach niedrigste nicht verschwindende Differentialquotient von gerader Ordnung ist; und zwar liefern diese Werthe der Variabeln ein Maximum oder Minimum, je nachdem der niedrigste nicht verschwindende Differentialquotient für den betreffenden Werth der Variabeln negativ oder positiv ist.

2. Wir geben zunächst hierzu einige Anwendungen.

Durch den Mittelpunkt O eines Kreises sind zwei Gerade OA und OB gezogen, die den Winkel 2α einschliessen; für welche Punkte der Peripherie erreicht die Summe der Quadrate der Abstände von OA und OB einen eminenten Werth?



(M. 492.)

Ist OC die Halbirende der Winkel AOB, ist ferner $COP = \varphi$, und $PQ \perp OA$, $PR \perp OB$, so ist $PQ = OP \cdot \sin(\alpha - \varphi)$, $PR = OP \cdot \sin(\alpha + \varphi)$.

Ist $OP = a$, so handelt es sich darum, die eminenten Werthe der Function des Winkels φ zu bestimmen

$$y = a^2 \sin^2(\alpha - \varphi) + a^2 \sin^2(\alpha + \varphi).$$

Die Differentiation ergiebt

$$\frac{dy}{d\varphi} = 2a^2[-\sin(\alpha - \varphi)\cos(\alpha - \varphi) + \sin(\alpha + \varphi)\cos(\alpha + \varphi)],$$

$$= a^2[\sin 2(\alpha + \varphi) - \sin 2(\alpha - \varphi)] = 2a^2 \cos 2\alpha \sin 2\varphi;$$

hieraus findet man weiter

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = 4a^2 \cos 2\alpha \cos 2\varphi .$$

Zwischen den Grenzen 0 und 2π des Winkels φ verschwindet y', wenn

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \varphi_3 = \pi, \quad \varphi_4 = \tfrac{3}{2}\pi .$$

Für diese Werthe von φ nimmt y'' die Werthe an

$$4a^2 \cos 2\alpha, \quad -4a^2 \cos^2\alpha, \quad 4a^2 \cos 2\alpha, \quad -4a^2 \cos 2\alpha .$$

Ist $2\alpha < \frac{1}{2}\pi$, so gehören daher zu φ_1 und φ_3 Minimalwerthe, zu φ_2 und φ_4 Maximalwerthe, und es ist

$$y_{min} = 2a^2 \sin^2\alpha , \quad y_{max} = 2a^2 \cos^2\alpha .$$

3. Auf einer Ellipse einen Punkt P so zu bestimmen, dass sein Abstand von einem gegebenen Punkte A einen eminenten Werth hat.

Sind ξ, η die Coordinaten des gegebenen Punktes, bezogen auf die Symmetrieachsen der Ellipse, und a, b die Halbachsen der letzteren, so ist

$$PA^2 = (a \cos\varphi - \xi)^2 + (b \sin\varphi - \eta)^2 .$$

Um Irrationalitäten zu vermeiden, kann man die eminenten Werthe von PA^2 aufsuchen, und hat daher zu differenziren

1. $$y = (a\cos\varphi - \xi)^2 + (b\sin\varphi - \eta)^2 .$$

Man erhält zur Bestimmung von φ die Gleichung

2. $$y' = -2a \sin\varphi (a\cos\varphi - \xi) + 2b \cos\varphi (b \sin\varphi - \eta) = 0 .$$

Die Gleichung der Geraden PA ist

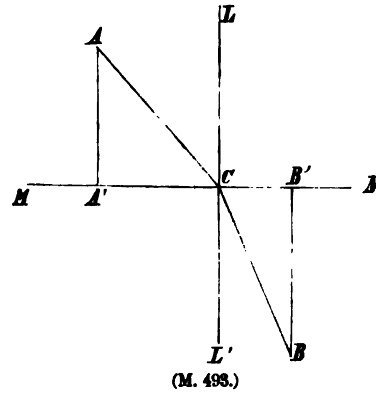
3. $$(b\sin\varphi - \eta)(X - \xi) - (a\cos\varphi - \xi)(Y - \eta) = 0 ;$$

die Gleichung der Ellipsentangente in P ist

4. $$b\cos\varphi (X - \xi) + a \sin\varphi (Y - \eta) = 0 .$$

Für die gesuchten Punkte besteht die Gleichung 2.; aus 2., 3., 4. schliesst man: Die Ellipsenpunkte, deren Entfernungen von dem gegebenen Punkte A einen eminenten Werth haben, sind die Fusspunkte der durch A gehenden Normalen der Ellipse.

4. Eine Ebene ist durch eine Gerade MN getheilt; ein Punkt P bewegt sich auf der einen Halbebene mit der constanten Geschwindigkeit g, auf der andern mit der constanten Geschwindigkeit h; welchen Weg muss der bewegte Punkt einschlagen, um in kürzester Zeit von einem gegebenen Punkte A der ersten Halbebene zu einem gegebenen Punkte B der andern zu gelangen?



(M. 493.)

Tritt P im Punkte C über die Grenze der beiden Halbebenen, so ist klar, dass P sich geradlinig von A bis C und von C bis B bewegen muss. Ist $AA' = a$, $BB' = b$, $A'B' = c$, so sind die Zeiten, in welchen P die Strecken AC und CB durchläuft, $AC : g = \sqrt{a^2 + x^2} : g$, bez. $CB : g = \sqrt{b^2 + (c-x)^2} : h$, und daher die Dauer y der Bewegung von A bis B

1. $$y = \frac{1}{g}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{h}\sqrt{b^2 + (c-x)^2} .$$

Hieraus ergiebt sich

2. $$y' = \frac{x}{g\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{h\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} ,$$

3. $$y'' = \frac{a^2}{g\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} + \frac{b^2}{h\sqrt{[b^2 + (c-x)^2]^3}} .$$

Aus 2. folgt

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} : \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = \frac{g}{h}.$$

Da nun, wenn $CL \perp MN$

$$sin LCA = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}, \quad sin L_1CB = \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

so erhalten wir als Bedingung für den Eintritt eines eminenten Werthes

4. $$\frac{sin LCA}{sin L_1CB} = \frac{g}{h}.$$

Liegt C in A', so ist $sin LCA = 0$; liegt C in B', so ist $sin L_1CB = 0$; hieraus folgt, dass 4. für einen zwischen A' und B' liegenden Punkt erfüllt wird. Beschreibt C von A' oder von B' ausgehend die Verlängerungen der Strecke $A'B'$, so wachsen beide Wege AC und CB, also kann ein Minimum für diese Lagen nicht eintreten. Bezeichnen wir mit ε den gemeinsamen Werth der Quotienten

$$\frac{x}{g\sqrt{a^2+x^2}} \quad \text{und} \quad \frac{c-x}{h\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

und bemerken, dass ε für jeden auf der Strecke $A'B'$ liegenden Punkt positiv ist, so ist

$$y'' = \varepsilon^3\left(\frac{a^2g^2}{x^3} + \frac{b^2h^2}{(c-x)^3}\right),$$

und daher positiv; folglich entspricht der durch die Gleichung 4. bestimmte Punkt C der Strecke $A'B'$ einem Minimum, was auch aus der Natur der Aufgabe vorauszusehen war.

5. Um die eminenten Werthe der ganzen rationalen Function

1. $$y = a_0x^m + a_1x^{m+1} + a_2x^{m+2} + \ldots + a_rx^{m+r}$$

zu finden, bilden wir

2. $$y' = ma_0x^{m-1} + (m+1)a_1x^m + \ldots,$$

3. $$y'' = (m-1)ma_0x^{m-2} + m(m+1)a_1x^{m-1} + \ldots.$$

Ist $m > 1$, so hat die Gleichung $y' = 0$ $(m-1)$ Wurzeln $x = 0$, während die anderen r Wurzeln von Null verschieden sind. Ist $m = 2$, so liefert die Wurzel $x = 0$

$$y'' = 2a_0,$$

gehört also zu einem Maximum oder Minimum, je nachdem $a_0 \lessgtr 0$. Ist $m > 2$, so hat man zu bilden

$$y^{(m)} = 1\cdot 2\cdot 3\ldots m\cdot a_0 + 2\cdot 3\ldots m(m+1)a_1x + \ldots,$$

denn dies ist der Differentialquotient niedrigster Ordnung, der für $x = 0$ nicht verschwindet; ist nun m gerade, so hat y für $x = 0$ einen eminenten Werth, ist hingegen m ungerade, so findet für $x = 0$ kein eminenter Werth von y statt.

6. Die eminenten Werthe der Radien eines Diametralschnitts eines dreiachsigen Ellipsoids zu bestimmen.

Die Gleichung des Ellipsoids sei

1. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Der Radius vector r, der mit den Achsen die Winkel α, β, γ einschliesst, ergiebt sich aus

2. $$\frac{1}{r^2} = \frac{cos^2\alpha}{a^2} + \frac{cos^2\beta}{b^2} + \frac{cos^2\gamma}{c^2}.$$

Sind φ, ψ, χ die Winkel, welche die Normale des den Radius r enthaltenden Diametralschnitts mit den Achsen bildet, so gelten die Gleichungen

3. $$\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi = 0,$$

4. $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Diese Gleichungen bestimmen β und γ als Function von α, so dass r als Function von α allein erscheint. Die eminenten Werthe von r treten mit den eminenten Werthen von $1 : r^2$ zugleich ein; wir bestimmen den Eintritt der letzteren, und erhalten durch Differentiation der Gleichung 2.

5. $$\frac{\cos\alpha\, d\cos\alpha}{a^2} + \frac{\cos\beta\, d\cos\beta}{b^2} + \frac{\cos\gamma\, d\cos\gamma}{c^2} = 0;$$

ferner ergiebt die Differentiation von 3. und 4.

6. $$\cos\varphi\, d\cos\alpha + \cos\psi\, d\cos\beta + \cos\chi\, d\cos\gamma = 0,$$

7. $$\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0.$$

Der Verein der Gleichungen 5., 6., 7. wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

8. $$\begin{vmatrix} \frac{\cos\alpha}{a^2} & \frac{\cos\beta}{b^2} & \frac{\cos\gamma}{c^2} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\varphi & \cos\psi & \cos\chi \end{vmatrix} = 0.$$

Das Verschwinden derselben ist gleichbedeutend mit dem Verein der drei Gleichungen

9. $$\frac{\cos\alpha}{a^2} + \lambda\cos\alpha + \mu\cos\varphi = 0,$$
$$\frac{\cos\beta}{b^2} + \lambda\cos\beta + \nu\cos\psi = 0,$$
$$\frac{\cos\gamma}{c^2} + \lambda\cos\gamma + \nu\cos\chi = 0,$$

wobei λ und μ sich aus zweien derselben bestimmen. Addirt man die Gleichungen 9., nachdem man sie der Reihe nach mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ multiplicirt hat, so erhält man in Rücksicht auf 2., 3., 4.

10. $$\frac{1}{r^2} + \lambda = 0.$$

Setzt man dies in 9. ein, so entsteht

11. $$\cos\alpha\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \mu\cos\varphi = 0,$$
$$\cos\beta\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \mu\cos\psi = 0,$$
$$\cos\gamma\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \mu\cos\chi = 0.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man in Rücksicht auf 3.

12. $$\frac{\cos^2\varphi}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}} + \frac{\cos^2\psi}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}} + \frac{\cos^2\chi}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}} = 0.$$

Diese Gleichung ist quadratisch für $1 : r^2$ und lehrt die eminenten Werthe dieser Grösse kennen. Setzt man eine Wurzel dieser Gleichung in 11. ein, so kann man aus 11. die Cosinus der unbekannten Winkel α, β, γ bis auf den gemeinsamen Faktor μ finden; dieser ergiebt sich schliesslich aus der Gleichung 4.

7. Wir haben noch nachzutragen, dass — in seltenern Fällen — ein eminenter Werth einer Function $y = f(x)$ auch für einen Werth x der Variabeln eintreten kann, für welchen der niedrigste nicht verschwindende Differentialquotient von ungerader Ordnung ist. Ereignet es sich nämlich, dass für diesen Werth der

Variabeln der genannte Differentialquotient discontinuirlich wird, und dabei von einem positiven zu einem negativen Werthe überspringt, oder umgekehrt, so ist offenbar die Differenz

$$f(x + \delta x) - f(x)$$

im ersten Falle positiv, im letzten negativ für jeden hinlänglich kleinen positiven oder negativen Werth von δx; also ist $f(x)$ im ersten Falle ein Maximum, im letzten ein Minimum.

Als Beispiel betrachten wir die durch die Gleichung

$$1. \qquad y^3 + x^2 y - 2rx^2 = 0$$

definirte Function.*)

Reducirt man zunächst auf x, so erhält man

$$2. \qquad x = \pm \sqrt{\frac{y^3}{2r - y}},$$

und hieraus

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y^3}{2r - y}} \left(\frac{3}{2y} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2r - y}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{y^3}{2r - y}} \cdot \frac{3r - y}{y(2r - y)} = \sqrt{\frac{y(3r - y)^2}{(2r - y)^3}}.$$

Hieraus folgt

$$3. \qquad y' = \pm \sqrt{\frac{(2r - y)^3}{y(3r - y)^2}}.$$

Dieser Werth wird Null für $y = 2r$; dies ist das Maximum von y; hierzu gehört $x = \infty$. Für $y = 0$, wozu $x = 0$ gehört, wird y' unendlich gross. Aus 2. ergiebt sich, dass mit y zugleich der absolute Werth von x wächst. Daher gehören in 2. und 3. die oberen und die unteren Vorzeichen zusammen. Mithin ist y' für einen unendlich kleinen negativen Werth von x negativ, für einen unendlich kleinen positiven Werth von x positiv unendlich. Folglich ist $y = 0$ das Minimum von y.

---

9. **Eminente Werthe einer Function mehrerer Variabeln.** Eine Function $f(x, y \ldots)$ mehrerer Variabeln erreicht für ein bestimmtes Werthsystem $x, y \ldots$ der Variabeln einen eminenten Werth, wenn zu jeder hinlänglich kleinen Aenderung $\delta x, \delta y \ldots$ der Variabeln eine Aenderung der Function von unveränderlichem Vorzeichen gehört.

Wenn die partialen Differentialquotienten von f bis mit denen $2m$ter Ordnung sämmtlich verschwinden, so kann man $\delta x, \delta y \ldots$ immer so klein wählen, dass das Vorzeichen der zugehörigen Aenderung der Function f mit dem Vorzeichen von

$$\left(\delta x \frac{\partial}{\partial x} + \delta y \frac{\partial}{\partial y} + \ldots\right)^{2m+1} f$$

übereinstimmt. Diese Grösse ist in Bezug auf $\delta x, \delta y \ldots$ ungerader Ordnung und wechselt daher ihr Zeichen, wenn $\delta x, \delta y \ldots$ das Zeichen wechseln. Hieraus folgt: **Eine Function mehrerer Variabeln kann für ein Werthsystem derselben nur dann einen eminenten Werth haben, wenn für dasselbe sämmtliche partialen Differentialquotienten der ersten Ordnung, aber nicht sämmtliche der zweiten, oder sämmtliche der ersten, zweiten und dritten Ordnung, aber nicht sämmtliche der vierten u. s. f. verschwinden.**

*) Construirt man einen Kreis mit dem Halbmesser r, der die Abscissenachse im Nullpunkte berührt, und bestimmt auf dem Radius vector jedes Kreispunktes ξ, η den Punkt P, dessen Ordinate $2r - \eta$ ist, so beschreibt P die Curve 1.; dieselbe ist unter dem Namen der **Cissoide** des **Diokles** bekannt.

Die seltenen Ausnahmefälle, dass Werthsysteme der Variabeln vorhanden sind, für welche die sämmtlichen Differentialquotienten einer ungeraden Ordnung unstetig sind, und alle niederen verschwinden, lassen wir ausser Betracht, ebenso die Fälle, dass es Werthsysteme giebt, für welche sämmtliche partialen Differentialquotienten der ersten, zweiten und dritten Ordnung, oder auch noch höhere, verschwinden. Wir beschränken uns vielmehr darauf, die Werthsysteme der Variabeln aufzusuchen, für welche die partialen ersten Differentialquotienten der Function verschwinden, und entwickeln die Kriterien für den Eintritt eines Maximums oder Minimums unter der Voraussetzung, dass nicht sämmtliche Differentialquotienten zweiter Ordnung verschwinden.

10. Wenn für ein Werthsystem $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ der Variabeln der Function $f(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots x_n)$ die partialen Differentialquotienten erster Ordnung verschwinden

1. $$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

die partialen Differentialquotienten zweiter Ordnung aber nicht sämmtlich verschwinden, so stimmt für hinlänglich kleine Aenderungen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n$ der Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ das Vorzeichen der Differenz

$$f(x_1 + \xi_1, \; x_2 + \xi_2, \ldots x_n + \xi_n) - f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$$

mit dem Vorzeichen der Grösse

2. $$2V = \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f$$

überein; es kommt nun darauf an, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen V für jedes reale Verhältniss der $\xi_1 \ldots \xi_n$ positiv oder negativ ist.

Man kann setzen

3. $$2V = \sum_1^n a_{ik}\xi_i\xi_k, \quad \text{wenn } a_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k},$$

und wenn man i und k alle Werthe von 1 bis n durchlaufen lässt; bemerkt man, dass $a_{ik} = a_{ki}$, so ist ersichtlich, dass der Faktor 2 bei allen Gliedern, in welchen die beiden Faktoren ξ_i und ξ_k nicht denselben Index haben, in 3. zu Stande kommt.

Die Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ können nicht alle gleich Null genommen werden. Nehmen wir zunächst $\xi_n \gtrless 0$, so kann man schreiben

$$V = \xi_n^2 W, \quad \text{wobei}$$

4. $$2W = \Sigma a_{ik} \cdot \frac{\xi_i}{\xi_n} \cdot \frac{\xi_k}{\xi_n}.$$

Während V eine homogene quadratische Function von $\xi_1 \ldots \xi_n$ ist, ist W eine nicht homogene quadratische Function von

$$\frac{\xi_1}{\xi_n}, \; \frac{\xi_2}{\xi_n} \ldots \frac{\xi_{n-1}}{\xi_n}.$$

Das Vorzeichen von V stimmt mit dem von W überein. Soll nun für alle realen, der Null gleichen oder von Null verschiedenen Werthe der Quotienten $\xi_i : \xi_n$ die Function W positiv oder negativ sein, so muss W, da es eine stetige Function der Variabeln $\xi_i : \xi_n$ ist, im ersten Falle ein Minimum haben, das positiv ist, und im zweiten ein Maximum, das negativ ist. Das dem eminenten Werthe von W entsprechende Werthsystem der Variabeln $\xi_i : \xi_n$ wird aus den $(n-1)$ Gleichungen erhalten

5. $$\frac{\partial W}{\partial \eta_1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta_2} = 0, \ldots \frac{\partial W}{\partial \eta_{n-1}} = 0,$$

wenn
$$\eta_i = \frac{\xi_i}{\xi_n}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen 5. mit ξ_n, so gehen sie über in

$$6.\quad \begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \xi_1} &= a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n = 0,\\
\frac{\partial V}{\partial \xi_2} &= a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n = 0,\\
\frac{\partial V}{\partial \xi_3} &= a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + \ldots + a_{3n}\xi_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial V}{\partial \xi_{n-1}} &= a_{n-1,1}\xi_1 + a_{n-1,2}\xi_2 + \ldots + a_{n-1,n}\xi_n = 0.
\end{aligned}$$

Wir fügen hierzu noch die Gleichung

$$7.\quad a_{n,1}\xi_1 + a_{n,2}\xi_2 + \ldots + a_{n,n}\xi_n = \frac{\partial V}{\partial \xi_n}.$$

Der eminente Werth von V wird gefunden, indem man $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$ durch die Gleichungen 6. als Multipla von ξ_n berechnet, und diese Lösungen von 6. in V substituirt. Dasselbe Resultat wird erreicht, wenn man auf irgend welchem Wege mit Hülfe der Gleichungen 6. V als Multiplum von ξ_n^2 darstellt.

Löst man die Gleichungen 6. und 7. bezüglich der Unbekannten ξ_n, so erhält man

$$8.\quad \Delta_n \cdot \xi_n = \Delta_{n-1} \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi_n},$$

wenn $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$

Nun ist identisch

$$\xi_1 \frac{\partial V}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial V}{\partial \xi_2} + \xi_3 \frac{\partial V}{\partial \xi_3} + \ldots + \xi_n \frac{\partial V}{\partial \xi_n} = 2V,$$

also, wenn die $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$ den Gleichungen 6. genügen

$$9.\quad \xi_n \frac{\partial V}{\partial \xi_n} = 2V;$$

mit Hülfe dieses Werthes folgt aus 8. für den eminenten Werth von V

$$10.\quad 2V = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \xi_n^2.$$

Wenn also ξ_n von Null verschieden ist, so hat der durch die Gleichungen 6. bestimmte Werth von V dasselbe Zeichen, wie das Verhältniss $\Delta_n : \Delta_{n-1}$.

Ist dieser Quotient positiv, und soll $2V$ immer dasselbe Zeichen haben, so muss der Werth 10. ein Minimum sein, und wenn der Quotient negativ ist, ein Maximum; ob dies der Fall ist, ersieht man aus

$$2V_1 = \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \eta_2} + \ldots + \xi_{n-1} \frac{\partial}{\partial \eta_{n-1}}\right)^2 W = \sum_1^{n-1} a_{ih}\xi_i\xi_h;$$

im ersteren Fall muss dieser Ausdruck beständig positiv, im letzteren beständig negativ sein. Die Entscheidung darüber, ob V immer dasselbe Zeichen hat, ist somit auf die gleiche Entscheidung betreffs V_1 zurückgeführt.

Man hat nun dieselbe Schlussweise wie bei V, und gelangt zunächst zu der Function

$$2V_2 = \sum_1^{n-2} a_{ih}\xi_i\xi_h,$$

von da durch Wiederholung der Schlussweise zu

13. Die Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$ der linearen Function

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_m x_m$$

so zu bestimmen, dass für n gegebene Werthsysteme der Variabeln

$$\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{m1}, \\ x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{m2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n} & x_{1n} & \ldots & x_{mn}, \end{array}$$

die Summe der Quadrate der Unterschiede der Function und der gegebenen Zahlen $u_1, u_2, \ldots u_n$ ein Minimum wird.

Die Function, welche in diesem Falle einen eminenten Werth annehmen soll, ist

$$f = \sum_1^n (\alpha_1 x_{1r} + \alpha_2 x_{2r} + \alpha_3 x_{3r} + \ldots + \alpha_m x_{mr} - u_r)^2 .$$

Wenn man zur Abkürzung setzt

$$\varphi_r = \alpha_1 x_{1r} + \alpha_2 x_{2r} + \ldots + \alpha_m x_{mr} - u_r,$$

so sind die Bedingungsgleichungen für den Eintritt eines eminenten Werthes

$$1. \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = x_{11}\varphi_1 + x_{12}\varphi_2 + x_{13}\varphi_3 + \ldots + x_{1n}\varphi_n = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = x_{21}\varphi_1 + x_{22}\varphi_2 + x_{23}\varphi_3 + \ldots + x_{2n}\varphi_n = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_3} = x_{31}\varphi_1 + x_{32}\varphi_2 + x_{33}\varphi_3 + \ldots + x_{3n}\varphi_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_m} = x_{m1}\varphi_1 + x_{m2}\varphi_2 + x_{m3}\varphi_3 + \ldots + x_{mn}\varphi_n = 0. \end{array}$$

Diese Gleichungen sind linear in Bezug auf die Unbekannten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n,$ und genügen, dieselben eindeutig zu bestimmen. Da man ferner hat

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_i \partial \alpha_k} = x_{i1}x_{k1} + x_{i2}x_{k2} + \ldots + x_{in}x_{kn},$$

so findet man, dass $\frac{1}{2^r}\Delta_r$ die Summe der Quadrate der r gliedrigen Determinanten ist, die durch Combination von je r Colonnen aus den ersten r Zeilen der Elemententafel hervorgehen

$$\begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \ldots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \ldots & x_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \ldots & x_{mn}. \end{array}$$

Mithin sind alle Δ_r positiv; folglich liefern die angegebenen Lösungen ein Minimum.

---

14. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen. Wenn ein System von n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ gesucht wird, für welches die Function $f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ einen eminenten Werth erhält, während zugleich die Bedingungsgleichungen erfüllt werden sollen

1. $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \quad \ldots \varphi_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$

so kann man zunächst aus dem m Bedingungsgleichungen m von den Variabeln $x_1, \ldots x_n$ als Functionen der übrigen ausdrücken und diese Werthe in f substituiren; dann erhält man f als Function von $(m - n)$ unabhängigen Variabeln und kann dann wie im vorigen Falle weiter verfahren. Diese Methode bringt

alle die Schwierigkeiten, die Eliminationsprobleme mit sich führen können, gleich zum Beginn in die Rechnung hinein und ist daher selten empfehlenswerth.

Ein zweiter Weg wäre der, die Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ durch $(m-n)$ Variable $y_1, y_2, \dots y_{m-n}$ zu ersetzen, die so gewählt sind, dass die Werthe
$x_1 = \psi_1(y_1, \dots y_{m-n})$, $x_2 = \psi_2(y_1, \dots y_{m-n})$, $\dots\dots x_n = \psi_n(y_1, \dots y_{m-n})$
die n Bedingungsgleichungen identisch erfüllen. Um z. B. der Bedingungsgleichung zu genügen

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_1^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 = 0,$$

könnte man setzen

$$x_1 = a_1 \cos y_1 \cos y_2, \quad x_2 = a_2 \sin y_1 \cos y_2, \quad x_3 = a_3 \sin y_3.$$

Soll diese Methode verwendbar sein, so muss es gelingen, die neuen Variabeln y so zu wählen, dass realen Werthen der x auch stets reale Werthe der y entsprechen, da alle bisherigen Entwicklungen die Voraussetzung enthalten, dass die Variablen und die Functionen real sind.

Zweckmässiger im Allgemeinen, als diese beiden, ist folgende von LAGRANGE herrührende Methode: Man betrachte auf Grund der Gleichungen 1. die m Variabeln

$$x_1, x_2, x_3, \dots\dots x_m$$

als Functionen der übrigen $n-m$ Variabeln

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n.$$

Bezeichnet x_i irgend eine Variable der zweiten Gruppe, so erhält man durch partiale Differentiation der Gleichungen 1. die Differentialgleichungen

$$2.\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i} = 0,\\
&\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i} = 0,\\
&\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_i} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_i} = 0.
\end{aligned}$$

Setzt man hier für i der Reihe nach $m+1$, $m+2$, $\dots n$, so erhält man im Ganzen $m(n-m)$ Gleichungen, welche die $m(n-m)$ Differentialquotienten

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_i}, \frac{\partial x_2}{\partial x_i}, \frac{\partial x_3}{\partial x_i}, \dots \frac{\partial x_m}{\partial x_i}$$

eindeutig bestimmen. Die partialen Differentialquotienten von f bezüglich der unabhängigen Variabeln $x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_n$ verschwinden für ein einem extremen Werthe von f zugehöriges Werthsystem der Variabeln. Also hat man noch die $n-m$ Gleichungen

$$3.\quad \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$
$$i = m+1, m+2, \dots n.$$

Substituirt man in dieselben die aus 2. gewonnenen Differentialquotienten der $x_1, \dots x_m$, so enthält das System 3. nur noch die Variabeln $x_1, \dots\dots x_n$ und genügt, um im Verein mit den m Bedingungsgleichungen

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \dots \varphi_m = 0$$

die Unbekannten $x_1, x_2, \dots\dots x_n$ zu bestimmen. Aus den Gleichungen 2. und 3. kann man die Differentialquotienten der abhängigen Variabeln mit Leichtigkeit eliminiren, denn der Verein derjenigen Gleichungen der Systeme 2. und 3., die

sich auf dieselbe unabhängige Variable x_i beziehen, bedingt das Verschwinden ihrer Determinante

$$4. \qquad \Delta_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = 0.$$

Aus den $n - m$ Gleichungen

$$\Delta_{m+1} = \Delta_{m+2} = \Delta_{m+3} = \ldots = \Delta_n = 0$$

und den Gleichungen

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_m = 0$$

erhält man die gesuchten Werthsysteme der Variabeln. Setzt man in 4. für i der Reihe nach die Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$, so erhält man Determinanten, die identisch verschwinden, weil in ihnen die erste Colonne mit einer späteren identisch ist; man hat daher die n Gleichungen

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \ldots = \Delta_m = \Delta_{m+1} = \ldots = \Delta_n = 0,$$

von denen die ersten m identisch sind, die übrigen nicht. Die Determinanten Δ_i weichen bloss in Bezug auf die erste Colonne der Elemente von einander ab. Bezeichnet man daher mit $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ die Coefficienten der Glieder der ersten Colonne in jeder der Determinanten Δ_i, so ist

$$\mu \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \mu_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \ldots + \mu_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = 0.$$

Dividirt man durch μ und bezeichnet $\mu_r : \mu$ mit λ_r, so erhält man die Gleichungen

$$5. \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots n.$$

Da diese n Gleichungen im Verein mit den m Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_m, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ ausreichen, so kann man sie zur Lösung des Problems benutzen. Dieselben $(n + m)$ Gleichungen werden aber auch erhalten, wenn man das unbedingte Problem stellt: Die Werthsysteme der Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ zu finden, welche die Function

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_m \varphi_m$$

zu einem Maximum oder Minimum machen. Denn die partialen Differentialquotienten von F nach den x führen auf die Gleichungen 5., und die nach den λ führen auf die Gleichungen

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_m = 0.$$

Wir erhalten somit folgende Regel: Um die Werthsysteme der Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ zu finden, welche die Function

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$$

zu einem Maximum oder Minimum machen und die zugleich die Bedingungsgleichungen erfüllen

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_m = 0,$$

bilde man die Function

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_m \varphi_m,$$

und suche die Systeme der Variabeln

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_m$$

auf, welche F zu einem Maximum oder Minimum machen; die dabei erhaltenen Systeme $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind die gesuchten.

Um zu entscheiden, ob für die aufgefundenen Werthe der $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Function f ein Maximum, ein Minimum oder keins von beiden wird, hat man die homogene quadratische Form zu bilden

$$2V = \Sigma_1^n \Sigma_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \xi_i \xi_k ,$$

wobei die ξ_i den aus den Bedingungsgleichungen fliessenden m Gleichungen unterworfen sind

$$\Sigma i \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} \xi_i = 0, \quad h = 1, 2, 3 \ldots m,$$

und zu untersuchen, ob nach Einsetzung der gefundenen Werthe der x die Function $2V$ für alle realen ξ_i das negative oder das positive Zeichen hat, oder nicht dasselbe Zeichen bewahrt. Näher auf diese Kriterien einzugehen, müssen wir uns versagen.

15. Aus n gegebenen Seiten, die in bestimmter Reihe auf einander folgen, das Polygon mit grösstem Flächeninhalte zu construiren.

Sind $P_1, P_2, P_3, \ldots P_k$ die Eckpunkte und x_h, y_h die rechtwinkeligen Coordinaten von P_h, so ist die doppelte Fläche des Polygons

$$\Sigma_1^n (x_{h+1} - x_{h-1}) y_h .$$

Bezeichnet man mit c_h die Strecke $P_h P_{h+1}$, so sind die n Bedingungen zu erfüllen

$$\sqrt{(x_h - x_{h-1})^2 + (y_h - y_{h-1})^2} - c_h = 0 .$$

(M. 494.)

Also hat man

$$F = \Sigma_1^n \left\{ (x_{h+1} - x_{h-1}) y_h + \lambda_h \left[\sqrt{(x_h - x_{h-1})^2 + (y_h - y_{h-1})^2} - c_h \right] \right\},$$
$$h = 1, 2 \ldots n,$$

wobei x_0, y_0 durch x_n, y_n zu ersetzen ist.

Setzt man die partialen Differentialquotienten von F nach den Variabeln gleich Null, so erhält man

$$-(y_{h+1} - y_{h-1}) + \lambda_h \frac{x_h - x_{h-1}}{c_{h-1}} - \lambda_{h+1} \frac{x_{h+1} - x_h}{c_h} = 0,$$

1. $$(x_{h+1} - x_{h-1}) + \lambda_h \frac{y_h - y_{h-1}}{c_{h-1}} - \lambda_{h+1} \frac{y_{h+1} - y_h}{c_h} = 0 .$$

Wir bezeichnen die Strecke $P_{h-1}P_{h+1}$ mit d_{h-1}, ihre Winkel mit OX, OY und c_k mit $(H-1, x)$, $(H-1, y)$ und $(H-1, k)$; ferner die Winkel von c_k mit OX, OY und c_i mit (k, x), (k, y) und (k, i); alsdann folgt aus 1.

2. $$-d_{h-1} \cdot \cos(H-1, y) + \lambda_h \cos(h-1, x) - \lambda_{h+1} \cos(h, x) = 0,$$

3. $$d_{h-1} \cdot \cos(H-1, x) + \lambda_h \cos(h-1, y) - \lambda_{h+1} \cos(h, y) = 0 .$$

Werden 2. und 3. mit $\cos(H-1, x)$ und $\cos(H-1, y)$ multiplicirt und addirt, so folgt

4. $$\lambda_h \cos(H-1, h-1) - \lambda_{h+1} \cos(H-1, h) = 0 .$$

Multiplicirt man dagegen 2. und 3. mit $\cos(h-1, y)$ und $\cos(h-1, x)$ und subtrahirt, so entsteht

5. $$d_{h-1} \cos(H-1, h-1) - \lambda_{h+1} \sin(h, h-1) = 0 .$$

Aus 4. folgt

6. $$\frac{\lambda_k}{cos(H-1,\ h)} = \frac{\lambda_{k+1}}{cos(H-1,\ h-1)};$$

aus 5. und 6.

7. $$\frac{d_{k-1}}{sin(h,\ h-1)} = \frac{\lambda_{k+1}}{cos(H-1,\ h-1)} = \frac{\lambda_k}{cos(H-1,\ h)}.$$

Das Dreieck $P_{k-1}P_kP_{k+1}$ lehrt

8. $$\frac{d_{k-1}}{sin(h,\ h-1)} = \frac{c_{k-1}}{sin(H-1,\ h)} = \frac{c_k}{sin(H-1,\ h-1)};$$

folglich ist

9. $$\lambda_{k+1} = c_k\,cot(H-1,\ h-1).$$

Ersetzt man in 7. und 8. h durch $h+1$, so erhält man für das Dreieck $P_k\,P_{k+1}\,P_{k+2}$

10. $$\frac{d_k}{sin(h+1,\ h)} = \frac{\lambda_{k+2}}{cos(H,\ h)} = \frac{\lambda_{k+1}}{cos(H,\ h+1)} = \frac{c_k}{sin(H,\ h+1)} = \frac{c_{k+1}}{sin(H,\ h)}.$$

Hieraus folgt

11. $$\lambda_{k+1} = c_k\,cot(H,\ h+1).$$

Aus 9. und 11. ergiebt sich

$$cot(H-1,\ h-1) = cot(H,\ h+1),$$

folglich liegen die Punkte P_{k-1}, P_k, P_{k+1}, P_{k+2} auf einem Kreise. Der Halbmesser r des dem Maximalpolygon umschriebenen Kreises wird aus der transcendenten Gleichung bestimmt

$$arc\,sin\frac{c_1}{2r} + arc\,sin\frac{c_2}{2r} + \ldots + arc\,sin\frac{c_n}{2r} = \pi,$$

die durch Annäherung aufgelöst werden kann.

16. Welches Polygon unter allen Polygonen von gegebener Eckenzahl und gegebenem Umfange hat die grösste Fläche?

Ist n Anzahl der Ecken und c der Perimeter des Polygons, so ist die Function F

1. $$F = \Sigma_1^n (x_{k-1} - x_{k+1})\,y_k + \lambda\Big[\Sigma_1^n \sqrt{(x_k - x_{k+1})^2 + (y_k - y_{k+1})^2} - c\Big] = 0.$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = -y_{k-1} + y_{k+1} + \lambda\left[\frac{x_k - x_{k+1}}{\sqrt{(x_k - x_{k+1})^2 + (y_k - y_{k+1})^2}} - \frac{x_{k-1} - x_k}{\sqrt{(x_{k-1} - x_k)^2 + (y_{k-1} - y_k)^2}}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} = x_{k-1} - x_{k+1} + \lambda\left[\frac{y_k - y_{k+1}}{\sqrt{(x_k - x_{k+1})^2 + (y_k - y_{k+1})^2}} - \frac{y_{k-1} - y_k}{\sqrt{(x_{k-1} - x_k)^2 + (y_{k-1} - y_k)^2}}\right] = 0.$$

Durch Anwendung der Bezeichnungen in der vorigen Aufgabe gehen diese Gleichungen über in

3. $$d_{k-1}\cdot cos(H-1,\ y) = \lambda\,[cos(h,\ x) - cos(h-1,\ x)],$$

4. $$d_{k-1}\cdot cos(H-1,\ x) = -\lambda\,[cos(h,\ y) - cos(h-1,\ y)].$$

Quadrirt und addirt man, so entsteht

$$d_{k-1}^2 = 2\lambda^2[1 - cos(h-1,\ h)],$$

daher ist

5. $$d_{k-1} = 2\lambda\,sin\tfrac{1}{2}(h-1,\ h).$$

Ferner ergiebt sich, wenn man 3. mit $cos(h-1,\ y)$ und 4. mit $cos(h-1,\ x)$ multiplicirt und addirt

6. $$d_{k-1}\,cos(H-1,\ h-1) = \lambda sin(h-1,\ h).$$

Aus 5. und 6. folgt weiter

$$\cos(H-1,\, h-1) = \cos\tfrac{1}{2}(h-1,\, h)\,, \quad \text{und daher}$$

$$(H-1,\, h-1) = \tfrac{1}{2}(h-1,\, h)\,.$$

Dies zeigt, dass die Basis $P_{h-1}P_{h+1}$ mit der Halbirungslinie des Aussenwinkels von der Spitze des Dreiecks $P_{h-1}P_hP_{h+1}$ parallel, dass mithin $P_{h-1}P_hP_{h+1}$ ein gleichschenkeliges Dreieck ist. Hieraus ergiebt sich weiter, dass alle Seiten des Maximalpolygons einander gleich sind. Aus der vorigen Aufgabe erfolgt dann weiter, dass alle Winkel des gesuchten Polygons gleich sind. Unter allen Polygonen von gegebener Seitenzahl und gegebenem Umfange hat das reguläre die grösste Fläche.

§ 15. Singuläre Punkte, Tangenten und Tangentenebenen an Curven und Flächen.

1. Unter einem singulären Punkte einer Curve oder Fläche $f = 0$ versteht man einen Punkt der Curve oder Fläche, für welchen alle partialen Differentialquotienten erster Ordnung der Function f, — oder alle partialen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung — oder allgemein alle partialen Differentialquotienten erster, zweiter u. s. w. bis zur $r$ten Ordnung verschwinden.

Ist x, y ein singulärer Punkt der einfachsten Art der Curve $f = 0$, d. i. ein Punkt, für welchen nur die ersten partialen Differentialquotienten verschwinden, so genügen x, y den Gleichungen

$$1. \qquad f = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen die Coordinaten x, y, so erhält man eine Gleichung zwischen den Constanten der Curvengleichung; diese muss erfüllt sein, wenn singuläre Punkte auf der Curve vorhanden sein sollen. Ist ferner x, y, z ein singulärer Punkt einfachster Art der Fläche $f = 0$, so sind die Gleichungen erfüllt

$$f = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0\,.$$

Durch Elimination der Coordinaten ergiebt sich wieder eine Bedingungsgleichung der Constanten der Flächengleichung. Wir sehen hieraus: Eine ebene Curve und eine Fläche enthalten im Allgemeinen keine singulären Punkte; das Vorhandensein eines singulären Punktes setzt vielmehr voraus, dass zwischen den Constanten der Gleichung eine gewisse charakteristische Bedingungsgleichung erfüllt ist.

Sollen singuläre Punkte höherer Art auf einer Curve oder Fläche vorkommen, so müssen mehrere Bedingungsgleichungen erfüllt sein. Die Existenz eines singulären Punktes einer Curve, für welchen die partialen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung verschwinden, verlangt den Verein der Gleichungen

$$f = 0\,; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,.$$

Combinirt man mit den beiden ersten Gleichungen jede der übrigen vier, so erhält man vier Systeme von drei Gleichungen; eliminirt man die Coordinaten aus jedem dieser Systeme, so erhält man vier Bedingungsgleichungen als nothwendige und ausreichende Bedingung für einen singulären Punkt dieser Art.

2. Die Gleichung der Tangente der Curve $f = 0$ im Punkte x, y ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) = 0\,;$$

für einen singulären Punkt ist $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$; die Gleichung der Tangentenebene der Fläche $f = 0$ im Punkte x, y, z ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) = 0,$$

und für einen singulären Punkt der Fläche hat man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Wir sehen daher: In einem singulären Punkte einer Curve ist die Tangente, in einem singulären Punkte einer Fläche die Tangentenebene unbestimmt.

3. Ist P ein Punkt der Curve $f = 0$, so sind die Coordinaten eines Punktes Π der Geraden, die durch P geht und mit der X-Achse den Winkel α bildet

$$1. \qquad \xi = x + r\cos\alpha, \qquad \eta = y + r\sin\alpha,$$

wobei r die Strecke $P\Pi$ bezeichnet. Um die Punkte zu erhalten, welche die Gerade mit der Curve gemein hat, setzt man die Werthe 1. in die Curvengleichung ein; diese enthält dann nur noch die Unbekannte r. Entwickelt man die Function $f(x + r\cos\alpha,\ y + r\sin\alpha)$ nach dem TAYLOR'schen Satze, so erhält man

$$2. \quad \begin{aligned} f(x + r\cos\alpha,\ y + r\sin\alpha) &= f(x, y) + r\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)f \\ &+ \frac{1}{2}r^2\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f + \frac{1}{2\cdot 3}r^3\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f + \ldots \end{aligned}$$

Nach der Voraussetzung ist $f(x, y) = 0$. Die Gleichung für r enthält daher in allen Gliedern den Faktor r, und liefert eine Wurzel $r = 0$, die dem Punkte P zugehört. Die übrigen Wurzeln r ergeben sich aus der Gleichung

$$3. \quad \begin{aligned} &\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)f + \frac{1}{2}r\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f \\ &+ \frac{1}{6}r^2\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f + \ldots\ldots = 0. \end{aligned}$$

Ist nun P ein singulärer Punkt, so verschwindet das erste Glied der linken Seite für jeden Werth von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$; die Gleichung 3. hat daher eine Wurzel $r = 0$. Sind die partialen Differentialquotienten zweiter Ordnung nicht sämmtlich gleich Null, so sind die andern Wurzeln r der Gleichung 3. im Allgemeinen von Null verschieden. Wir schliessen daher: Jede Gerade, die durch einen singulären Punkt P einfachster Art geht, hat in P mit der Curve zwei Schnittpunkte.

Ein solcher Punkt wird daher als Doppelpunkt der Curve bezeichnet.

Ist P ein Doppelpunkt, so werden die Punkte, in welcher eine durch P gehende Gerade die Curve noch ausser in P durchschneidet, aus der Gleichung gewonnen

$$4. \quad \frac{1}{2}\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f + \frac{r}{6}\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f + \ldots\ldots = 0.$$

Wählt man die Gerade so, dass

$$5. \quad \left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\alpha = 0,$$

so hat die Gleichung 4. eine Wurzel $r = 0$. Die Gerade hat alsdann in P drei Punkte mit der Curve gemein; sie giebt eine Richtung an, in welcher man vom Doppelpunkte aus auf der Curve fortschreiten kann und heisst daher Tangente im Doppelpunkte.

Durch die Gleichung 5. werden zwei Gerade bestimmt, die real und verschieden, real und gleich, oder conjugirt complex sind, je nachdem

6. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \lesseqgtr 0 .$$

Sind die beiden Tangenten im Doppelpunkte real und verschieden, so bezeichnet man den singulären Punkt als Doppelpunkt im engern Sinne; in diesem Falle kann man von P aus in zwei verschiedenen Richtungen auf der Curve fortschreiten, die Curve geht also zweimal durch P hindurch. Sind sie real und vereint, so giebt man ihm den Namen Rückkehrpunkt und die durch 5. bestimmte Gerade heisst Rückkehrtangente. Sind sie complex, so kann von dem Punkte aus in keiner realen Richtung auf der Curve fortschreiten, es giebt also keine realen Punkte der Curve, die dem singulären Punkte benachbart wären, er ist ein vereinzelter oder isolirter Punkt.

Die Gleichung der beiden Doppelpunktstangenten wird erhalten, wenn man in 5. setzt

$$\cos\alpha = \frac{\xi - x}{r}, \quad \sin\alpha = \frac{\eta - y}{r}.$$

Man erhält

7. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi - x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi - x)(\eta - y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\eta - y)^2 = 0 .$$

4. Wir geben zunächst hierzu einige Beispiele.

Für die Doppelpunkte der Curve dritter Ordnung

$$f \equiv ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + 3ex^2 + 6fxy + 3gy^2 = 0$$

hat man $$\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x} \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + 2fy = 0,$$

$$\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial y} \equiv bx^2 + 2cxy + dy^2 + 2fx + 2gy = 0.$$

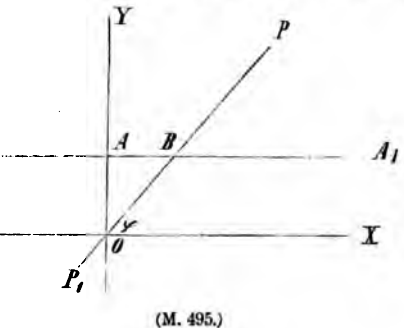
Alle drei Curven $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ gehen durch den Nullpunkt, daher ist dieser Doppelpunkt von f; mehr als einen Doppelpunkt kann f nicht haben; denn hätte eine Curve III. O. zwei Doppelpunkte A und B, so würde die Gerade AB in A zwei und in B zwei Punkte mit der Curve gemein haben, hätte also vier Schnittpunkte mit der Curve, im Widerspruche mit der Thatsache, dass eine Gerade mit einer (eigentlichen, nicht in Kegelschnitt und Gerade oder in drei Gerade zerfallenden) Curve III. O. nur drei Punkte gemein haben kann. Man hat

$$\frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ax + by + e, \quad \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = bx + cy + f, \quad \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = cx + dy + g .$$

Für den Doppelpunkt $x = y = 0$ erhalten diese Ausdrücke der Reihe nach die Werthe e, f, g; daher ist die Gleichung der Doppelpunktstangenten

$$ex^2 + 2fxy + gy^2 = 0 .$$

Der Nullpunkt ist ein Doppelpunkt im engern Sinne, wenn $eg - f^2 < 0$, ein Rückkehrpunkt, wenn $eg - f^2 = 0$, ein isolirter Punkt, wenn $eg - f^2 > 0$.



(M. 495.)

5. Zieht man durch den Nullpunkt Gerade, und trägt vom Schnittpunkte B dieser Geraden mit einer Parallelen AA_1 zur Abscissenachse auf der Geraden nach

beiden Seiten hin eine gegebene Strecke $BP = P_1 B = m$ ab, so ist der Ort der Punkte P und P_1 eine Curve, die unter dem Namen der Conchoide des NIKOMEDES bekannt ist. Ist $OA = p$, und bezeichnet man Radius vector und Anomalie eines Curvenpunktes r und φ, so gelten für P und P_1 die Gleichungen

$$(r \mp m)\sin\varphi = p\,.$$

Ersetzt man $\sin\varphi$ durch $y:r$, so erhält man

$$\mp m\frac{y}{r} = p - y,$$

und hieraus die rationale Gleichung

1. $$f = (x^2 + y^2)(p - y)^2 - m^2y^2 = 0\,.$$

Hieraus findet man

2. $$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = x(p - y)^2,$$ 3. $$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = (y - p)(x^2 + 2y^2 - py) - m^2y,$$

4. $$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (p-y)^2,\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = x(y-p),\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 + 6y^2 - 6py + p^2 - m^2.$$

Aus 2. folgt für Doppelpunkte

5. $$x = 0,\quad\text{oder}\quad y = p.$$

Setzt man das erstere in 1. und 3. ein, so ergiebt 1.

6. $$y^2 = 0,\quad\text{oder}\quad (p - y)^2 = m^2,\quad\text{und 3.}$$

7. $$y = 0,\quad\text{oder}\quad (y - p)(2y - p) = m^2.$$

Hieraus folgt, dass der Nullpunkt den Gleichungen 1., 2. und 3. genügt; da er die Grössen 4. nicht zu Null macht, so ist er ein Doppelpunkt der Conchoide. Die beiden andern Werthe für y unter 6. und 7. stimmen nicht überein; der in 5. noch angegebene Werth $y = p$ befriedigt 3. nur unter der Annahme $x = \infty$; beide Werthe genügen auch 1., und machen 4. nicht gleich Null, sind also Coordinaten eines zweiten Doppelpunktes.

Setzt man in den Formeln 4. $x = y = 0$, so erhält man die Gleichung der Doppelpunktstangenten des Nullpunktes

8. $$px^2 + (p^2 - m^2)y^2 = 0\,.$$

Ist $p > m$, so sind diese Tangenten conjugirt complex; der Nullpunkt wird in diesem Falle zwar durch die Construction der Curve nicht erhalten, gehört aber als isolirter Punkt zu der durch die Gleichung 1. definirten Curve. Ist $p = m$, so hat die Curve in O einen Rückkehrpunkt und OY ist Rückkehrtangente; ist $p < m$, so ist O ein eigentlicher Doppelpunkt.

Der zweite Doppelpunkt ist der unendlich ferne Punkt der Geraden AA_1. Für die Coordinaten desselben ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\ \text{unbestimmt},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \infty,$$

die Gleichung der Doppelpunktstangenten ist daher

$$(y - p)^2 = 0;$$

der unendlich ferne Punkt der Geraden AA_1 ist somit ein Rückkehrpunkt, und AA_1 die zugehörige Rückkehrtangente der Conchoide.

6. Die Curve

1. $$f = (x^2 - a^2)^2 - ay^2(3a + 2y) = 0^{*})\quad\text{liefert}$$

2. $$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2 - a^2),\quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6ay(a + y),$$

3. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(3x^2 - a^2),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6a(a + 2y).$$

---

*) SALMON-FIEDLER, Analyt. Geom. der höh. ebenen Curven, Leipzig 1873, 1. Kap., 2. Abschn.

Für Doppelpunkte folgt aus 2.

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x = \pm a,$$

und

$$y = 0 \quad \text{oder} \quad y = -a.$$

Von den sechs Paar Punkten, die sich durch Combination dieser Abscissen und Ordinaten ergeben, genügen der Curvengleichung die drei Punkte

$$x_1 = 0, \; y_1 = -a; \qquad x_2 = a, \; y_2 = 0; \qquad x_3 = -a, \; y_3 = 0.$$

Für keinen dieser Punkte verschwinden die zweiten Differentialquotienten; also sind die so bestimmten Punkte P_1, P_2, P_3 Doppelpunkte. Die Gleichungen der Doppelpunktstangenten sind

$$\text{für } P_1: \quad 2x^2 - 3(y + a)^2 = 0,$$
$$\text{für } P_2: \quad 4(x - a)^2 - 3y^2 = 0,$$
$$\text{für } P_3: \quad 4(x + a)^2 - 3y^2 = 0.$$

Hieraus erkennt man, dass P_1, P_2, P_3 eigentliche Doppelpunkte sind.

7. Wenn in einem Punkte P einer Curve $f = 0$ die ersten und die zweiten partialen Differentialquotienten von f verschwinden, aber nicht sämmtliche dritte, so hat die Gleichung (vergl. No. 2, 2)

$$\begin{aligned} f(x + r\cos\alpha,\; y + r\sin\alpha) &= f(x, y) + r\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)f \\ &+ \frac{1}{2}r^2\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f + \frac{1}{2\cdot 3}r^3\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f \\ &+ \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}r^4\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f + \dots \end{aligned}$$

drei Wurzeln $r = 0$, und die übrigen Wurzeln folgen aus der Gleichung

$$1. \quad \frac{1}{2\cdot 3}\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot r\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f + \dots = 0.$$

Für jede durch den Punkt P gehende Gerade sind also drei Schnittpunkte mit der Curve in P vereint; der Punkt wird daher als dreifacher Punkt der Curve bezeichnet. Bestimmt man α aus der Gleichung

$$2. \quad \begin{aligned} &\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\cdot\cos^3\alpha + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\cos^2\alpha\sin\alpha + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\cos\alpha\sin^2\alpha + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\sin^3\alpha = 0, \end{aligned}$$

so erhält man drei durch P gehende Gerade; diese enthalten die Richtungen, in denen man von P aus auf der Curve fortschreiten kann. Durch einen dreifachen Punkt geht daher die Curve dreimal. Die drei durch 2. bestimmten Geraden bezeichnet man als die Tangenten im dreifachen Punkte. Sind die Wurzeln von 2. real und verschieden, so ist P ein dreifacher Punkt im engern Sinne; sind zwei Wurzeln gleich, so wird die der Doppelwurzel zugehörige Gerade T_1 in P von zwei Curvenästen berührt, die in P einen Rückkehrpunkt und T_1 zur Rückkehrtangente haben; ausserdem geht durch P noch ein dritter Curvenast, dessen Tangente in P der dritten Wurzel von 2. entspricht. Hat 2. drei gleiche Wurzeln, so enden in P drei Curvenäste und haben in P eine gemeinsame Tangente, nämlich die der dreifachen Wurzel von 2. zugehörige Gerade; in diesem Falle ist P ein Rückkehrpunkt höherer Art. Hat 2. eine reale und zwei complexe Wurzeln, so ist P als ein isolirter Punkt aufzufassen, durch den ein Curvenast hindurchgeht.

8. Wenn die Coordinaten der Punkte einer Curve als Functionen eines unabhängigen Parameters u dargestellt sind,

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u),$$

so können Doppelpunkte in der Weise auftreten, dass zwei verschiedene Werthe u_1, u_2 des Parameters dieselben Coordinatenwerthe x, y ergeben, während die Differentialquotienten φ' und ψ' und damit die Tangente

$$\psi' \cdot (\xi - x) - \varphi' \cdot (\eta - y) = 0$$

für die beiden Parameter verschiedene Werthe annehmen. Aendert sich u continuirlich wachsend oder abnehmend von u_1 zu u_2, so beschreibt dabei P eine Curvenschleife, die zu dem Ausgangspunkte zurückkehrt.

Diese Schleife wird immer kleiner, je kleiner die Differenz $u_1 - u_2$ ist; wenn u_2 von u_1 nur unendlich wenig verschieden ist, so verschwindet die Schleife und der Doppelpunkt geht in einen Rückkehrpunkt über. Die Bedingung für einen Rückkehrpunkt ist also, dass einer unendlich kleinen Aenderung von u unendlich kleine Aenderungen höherer Ordnung von x und y entsprechen; daher ist für einen Rückkehrpunkt

$$\frac{dx}{du} = 0, \quad \frac{dy}{du} = 0.$$

A. Für die Curve, welche durch die Gleichungen dargestellt ist

$$x = \frac{(u-a)(u-b)}{u-c} + d, \quad y = \frac{(u-a)(u-b)}{u-c_1} + d_1$$

ergiebt sich derselbe Punkt $x = d$, $y = d_1$ für die beiden Parameterwerthe $u = a$ und $u = b$. Die Differentialquotienten der Coordinaten sind

$$\frac{dx}{du} = \frac{(u-a)(u-c) + (u-b)(u-c) - (u-a)(u-b)}{(u-c)^2},$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{(u-a)(u-c_1) + (u-b)(u-c_1) - (u-a)(u-b)}{(u-c)^2}.$$

Für $u = a$ und $u = b$ folgt

$$\left(\frac{dx}{du}\right)_a = \frac{a-b}{a-c}, \quad \left(\frac{dy}{du}\right)_a = \frac{a-b}{a-c_1},$$

$$\left(\frac{dx}{du}\right)_b = \frac{b-a}{b-c}, \quad \left(\frac{dy}{du}\right)_b = \frac{b-a}{b-c_1}.$$

Daher ist der Punkt d, d_1 Doppelpunkt und die Gleichungen der Tangenten im Doppelpunkte sind

$$\frac{x-d}{a-c_1} - \frac{y-d_1}{a-c} = 0, \quad \frac{x-d}{b-c_1} - \frac{y-d_1}{b-c} = 0.$$

B. Die Cycloide hat die Gleichungen

$$x = a(u - \sin u), \quad y = a(1 - \cos u);$$

daher ist

$$\frac{dx}{du} = a(1 - \cos u), \quad \frac{dy}{du} = a \sin u.$$

Beide Differentialquotienten verschwinden für die Parameterwerthe $u = 0$ 2π, 4π u. s. w. Die zugehörigen Punkte sind daher Rückkehrpunkte; die Rückkehrtangenten sind normal zur Abscissenachse.

---

9. Doppelpunkte an Flächen. Um die Punkte Π zu erhalten, die eine durch den Punkt P der Fläche $f(x, y, z) = 0$ unter den Richtungswinkeln α, β, γ gelegte Gerade mit der Fläche gemein hat, setzt man

$$\xi = x + r\cos\alpha, \quad \eta = y + r\cos\beta, \quad \zeta = z + r\cos\gamma$$

in die Flächengleichung an die Stelle von x, y, z und bestimmt aus der resultirenden Gleichung die Unbekannte r. Entwickelt man nach dem TAYLOR'schen Satze, so erhält man

$$1.\quad f(x,y,z)+r\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)f+\frac{1}{2}r^2\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f$$
$$+\frac{1}{6}r^3\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^3 f+\ldots\ldots$$

Nach der Voraussetzung ist $f(x, y, z) = 0$; mithin hat die Gleichung 1. eine Wurzel $r = 0$, entsprechend dem Punkte P. Die andern Wurzeln werden aus der Gleichung bestimmt

$$2.\quad \left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\ldots\right)f+\frac{1}{2}r\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\ldots\right)^2 f+\ldots=0.$$

Diese Gleichung hat eine Wurzel $r = 0$, die Gleichung 1. also eine Doppelwurzel $r = 0$, wenn die Gerade so gelegt wird, dass

$$\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Ersetzt man hier $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ durch die proportionalen Differenzen $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, so erhält man die Gleichung der Tangentenebene in P.

Sind für P die Gleichungen erfüllt

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

so verschwindet in 2. das erste Glied unabhängig von α, β, γ. Es hat also denn jede Gerade, die durch P geht, mit der Fläche in P zwei zusammenfallende Schnittpunkte. Sind für P nun nicht sämmtliche partiale Differentialquotienten zweiter Ordnung gleich Null, so verschwindet das zweite Glied von 2. nicht identisch, alsdann hat also im Allgemeinen eine durch P gehende Gerade in P nicht mehr als zwei Schnittpunkte mit der Fläche; der Punkt P wird deswegen als Doppelpunkt der Fläche bezeichnet.

10. Die durch den Doppelpunkt P gehenden Geraden, welche mit der Fläche in P drei zusammenfallende Punkte gemein haben, genügen der Gleichung

$$1.\quad \left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f=0,$$

denn in diesem Falle verschwinden in der Gleichung No. 9, 1. das erste, zweite und dritte Glied, dieselbe hat daher eine dreifache Wurzel $r = 0$. Die der Gleichung 1. genügenden Geraden bezeichnet man als Tangenten im Doppelpunkte. Ersetzt man in 1. die Cosinus der Reihe nach durch $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, so erhält man die Gleichung der von den Tangenten im Doppelpunkte erzeugten Kegelfläche, nämlich

$$2.\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi-x)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi-x)(\eta-y)+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(\xi-x)(\zeta-z)$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\eta-y)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(\eta-y)(\zeta-z)+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\zeta-z)^2=0.$$

Wir schliessen daher: Die Tangenten im Doppelpunkte einer Fläche sind die Mantellinien eines Kegels II. O., der den Doppelpunkt zur Spitze hat.

Je nach der Realität und den Ausartungen dieses Berührungskegels im Doppelpunkte unterscheidet man verschiedene Ausartungen der Doppelpunkte. Ist der Kegel real und ohne Ausartung, so wird P als Doppelpunkt im engern Sinne bezeichnet. Ist der Kegel imaginär, so ist nur seine Spitze real, und P wird zu einem isolirten Punkte.

11. A. Die Gleichung der Fusspunktfläche eines dreiachsigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

für das Centrum als Pol ist

1. $$f \equiv a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0\,.$$

Die partialen Differentialquotienten erster Ordnung sind

2. $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(a^2 - 2r^2)x\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(b^2 - 2r^2)y\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(c^2 - 2r^2)z\,,$$

wobei $$r^2 = x^2 + y^2 + z^2\,.$$

Die Functionen 1. und 2. verschwinden nur für $x = y = z = 0$.

Die zweiten partialen Differentialquotienten von f sind

3. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a^2 - 4r - 8x^2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2b^2 - 4r - 8y^2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2c^2 - 4r^2 - 8z^2\,,$$
$$\frac{\partial x \partial y}{\partial^2 f} = -8xy\,, \quad \frac{\partial x \partial z}{\partial y} = -8xz\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -8yz\,.$$

Sie verschwinden für den Nullpunkt nicht; derselbe ist daher ein Doppelpunkt der Fusspunktfläche.

Der Tangentenkegel im Nullpunkte ist, wie sich aus 3. ergiebt:

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 0\,;$$

derselbe ist imaginär, und daher der Nullpunkt kein Doppelpunkt im engeren Sinne, sondern ein isolirter Punkt.

B. Für das einschalige Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ist die Gleichung der Fusspunktfläche, wieder mit dem Centrum als Pol,

$$f \equiv a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0\,.$$

Daher ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(a^2 - 2r^2)x\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(b^2 - 2r^2)y\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2(c^2 + 2r^2)z\,;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a^2 - 4r^2 - 8x^2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2b^2 - 4r^2 - 8y^2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2c^2 - 4r^2 - 8z^2\,,$$
$$\frac{b^2 f}{\partial x \partial y} = -8xy\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -8xz\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -8yz\,.$$

Der Nullpunkt ist daher Doppelpunkt, und der Tangentenkegel im Doppelpunkte hat die Gleichung

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0\,.$$

Ist $a = 0$, artet also das Hyperboloid in eine hyperbolische Grenzfläche aus, so artet der Tangentenkegel im Doppelpunkte zu zwei Ebenen aus

$$b^2y^2 - c^2z^2 = 0\,.$$

12. Trägt man auf jeder durch das Centrum eines dreiachsigen Ellipsoids gehenden Geraden vom Centrum aus nach beiden Seiten hin je zwei Strecken ab, die der grossen und der kleinen Halbachse des zur Geraden normalen Diametralschnittes gleich sind, so erhält man die Punkte der FRESNEL'schen Wellenfläche*).

Ist P ein Punkt der Wellenfläche und sind φ, ψ, χ die Richtungswinkel von OP, so genügt $OP = r$ der Gleichung § 14 No. 6, 12

$$\frac{a^2 \cos^2\varphi}{r^2 - a^2} + \frac{b^2 \cos^2\psi}{r^2 - b^2} + \frac{c^2 \cos^2\chi}{r^2 - c^2} = 0\,.$$

*) Der Name der Fläche bezieht sich auf die Bedeutung, die sie für die Theorie der Aetherschwingungen in optisch zweiachsigen Mitteln hat.

Multiplicirt man mit r und substituirt

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi, \quad z = r\cos\chi,$$

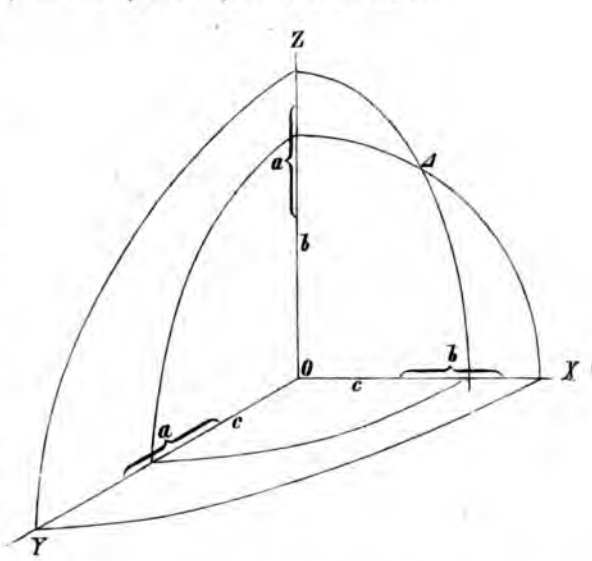
so erhält man die Gleichung der Wellenfläche in der Form

$$\frac{a^2x^2}{r^2-a^2} + \frac{b^2y^2}{r^2-b^2} + \frac{c^2z^2}{r^2-c^2} = 0. \tag{1.}$$

Durch Beseitigung der Nenner erhält man hieraus

$$\begin{aligned} f \equiv (x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2) - a^2x^2(b^2+c^2) \\ - b^2y^2(a^2+a^2) - c^2z^2(a^2+b^2) + a^2b^2c^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.}$$

Um eine Vorstellung von der Gestalt der Wellenfläche zu erhalten, bemerke man, dass die Wellenfläche von jeder Coordinatenebene in einem Kreise und in einer Ellipse geschnitten wird; bei der XY-Ebene hat der Kreis den Halbmesser c, die Ellipse in der X- und der Y-Achse der Reihe nach die Halbachsen b und a; bei der XZ-Ebene hat der Kreis den Halbmesser b, die Ellipse in der X- und Z-Achse die Halbachsen c und a; bei der YZ-Ebene hat der Kreis den Halbmesser a, die Ellipse in der Y- und Z-Achse die Halbachsen c und b.



(M. 496.)

Die Differentialquotienten von f sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x\,[a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+a^2(r^2-b^2-c^2)] \equiv 2xA, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y\,[a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+b^2(r^2-c^2-a^2)] \equiv 2yB, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2z\,[a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+c^2(r^2-a^2-b^2)] \equiv 2zC, \end{aligned} \tag{3.}$$

wobei A, B, C zur Abkürzung für die Grössen in den eckigen Klammern eingeführt sind. Die Gleichung der Tangentenebene der Wellenfläche im Punkte P derselben ist daher

$$xA(\xi - x) + yB(\eta - y) + zC(\zeta - z) = 0. \tag{4.}$$

Man überzeugt sich leicht, dass unter den Punkten, welche den Gleichungen

$$xA = yB = zC = 0$$

genügen, nur diejenigen drei Gruppen der Fläche angehören, welche je eines der drei Systeme auflösen

$$x = B = C = 0, \tag{5.}$$

$$A = y = C = 0, \tag{6.}$$

$$A = B = z = 0, \tag{7.}$$

Jede dieser drei Gruppen enthält vier Punkte, nämlich die Schnittpunkte der Kegelschnitte, welche je eine Coordinatenebene mit der Wellenfläche gemein hat.

Unter diesen Gruppen enthält eine vier reale, die andern beiden enthalten imaginäre Punkte; ist $a > b > c$, so sind die vier Punkte der zweiten Gruppe real; einer derselben ist in der Figur mit Δ bezeichnet. Die Coordinaten dieser vier realen Doppelpunkte ergeben sich aus

$$5. \qquad x^2 = c^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad y = 0, \quad z^2 = a^2 \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Die zweiten partialen Differentialquotienten von f sind

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2A + 8a^2x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2B + 8b^2y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2C + 8c^2z^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4(a^2 + b^2)xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 4(a^2 + c^2)xz, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 4(b^2 + c^2)yz,$$

Für einen Doppelpunkt ist $y = A = C = 0$, und daher

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8a^2x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(a^2x^2 + b^2z^2) + 2b^2(x^2 + z^2 - a^2 - c^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 8c^2z^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 4(a^2 + c^2)xz.$$

Setzt man aus 5. die Werthe ein, so erhält man die Gleichung des Tangentenkegels im Doppelpunkte

$$a^2c^2(b^2 - a^2)(\xi - x)^2 - \tfrac{1}{4}(c^2 - a^2)(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)\eta^2$$
$$+ a^2c^2(c^2 - b^2)(\zeta - z)^2 + ac(a^2 + c^2)\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}(\xi - x)\zeta - z) = 0.$$

Dieser Kegel ist symmetrisch gegen die XZ-Ebene; sein in diese Ebene fallender Hauptschnitt wird aus den beiden Tangenten gebildet, die man im Doppelpunkte an den Kreis und die Ellipse legt, in welchen die Wellenfläche von der XZ-Ebene geschnitten wird; die Achse des Kegels halbirt den stumpfen Winkel dieser Tangenten.

Die Wellenfläche besteht aus zwei Mänteln; einem äusseren Mantel, dessen Punkte von den grossen Halbachsen der Diametralschnitte herrühren, und einem inneren, dessen Punkte von den kleinen Halbachsen herrühren; der innere wird ganz von dem äusseren eingeschlossen. Beide Mäntel haben vier Punkte gemein, die vier Doppelpunkte. Wie man aus den Coordinaten der Doppelpunkte erkennt, sind die Geraden $O\Delta$ normal zu den Kreisschnitten des Ellipsoids. In der Umgebung von Δ hat der innere Mantel eine Spitze, der äussere eine trichterförmige Vertiefung. Der Uebergang aus dem inneren durch einen Doppelpunkt in den äusseren Mantel erfolgt entlang der Oberfläche des Tangentenkegels.

---

13. Betrachtet man eine Curve als Einhüllende ihrer Tangenten, so können singuläre Tangenten auftreten, die den Doppelpunkten und den vielfachen Punkten einer als Punktgebilde aufgefassten Curve entsprechen.

Sind u, v und $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ die Coordinaten zweier Geraden, und ξ, η die Coordinaten ihres Schnittpunktes, so ist bekanntlich (vergl. § 3, No. 23)

$$\xi : \eta = -\Delta v : \Delta u.$$

Man kann daher setzen

$$1. \qquad \Delta u = \eta t, \quad \Delta v = -\xi t,$$

wobei t unbestimmt ist; ändert sich t von $-\infty$ bis $+\infty$, so umhüllt die Gerade $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ den Punkt ξ, η.

Die Geraden $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, welche durch den Punkt ξ, η einer Geraden u, v gehen und die Curve $f(u, v) = 0$ berühren, werden erhalten, indem man t aus der Gleichung berechnet

$$2. \qquad f(u + \Delta u, v + \Delta v) = f(u + \eta t, v - \xi t) = 0,$$

und mit Hülfe der Wurzeln dieser Gleichung und der bekannten Werthe ξ, η, u, v die Coordinaten zusammensetzt

$$3.\qquad u + \Delta u = u + \eta t, \quad v + \Delta v = v - \xi t.$$

Entwickelt man $f(u + \eta t,\ v - \xi t)$ nach dem TAYLOR'schen Satze, so erhält man

$$4.\qquad f(u+\eta t,\ v-\xi t) = f(u,v) + t\left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)f + \frac{1}{1\cdot 2}t^2\left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 f + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot t^3\left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)^3 f + \ldots = 0.$$

Ist u, v eine Tangente der Curve, so ist $f(u, v) = 0$ und daher eine Wurzel der Gleichung 4. gleich Null; die andern Wurzeln ergeben sich aus der Gleichung

$$5.\qquad \left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)f + \frac{1}{2}t\left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 f + \frac{1}{6}t^2\left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)^3 f + \ldots = 0.$$

Wählt man ξ, η so, dass sie der Gleichung genügen

$$6.\qquad \eta\frac{\partial f}{\partial u} - \xi\frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

so ist hierdurch ein Punkt P vollständig bestimmt; durch diesen Punkt gehen zwei zusammenfallende Tangenten der Curve, der Punkt ist somit der Berührungspunkt der Geraden u, v und der Curve. Die Gleichung desselben ergiebt sich aus 6., wenn man darin η und $(-\xi)$ durch die proportionalen Grössen

$$\mathfrak{u} - u, \qquad \mathfrak{v} - v$$

ersetzt; denn ist $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ eine P enthaltende Gerade, so ist für einen bestimmten Werth von t (No. 1)

$$\mathfrak{u} - u = \eta t, \qquad \mathfrak{v} - v = -\xi t.$$

Man erhält dadurch die Gleichung

$$7.\qquad \frac{\partial f}{\partial u}(\mathfrak{u} - u) + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathfrak{v} - v) = 0,$$

in Uebereinstimmung mit § 5 No. 23, 4.

Wenn es eine Tangente T der Curve giebt, für welche

$$8.\qquad \frac{\partial f}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

so ist die Gleichung 7. identisch erfüllt; in diesem Falle gehen durch jeden Punkt der Geraden T zwei zusammenfallende Tangenten der Curve, die Curve wird daher als Doppeltangente bezeichnet. Die Tangenten, welche ausser der Doppeltangente selbst durch einen Punkt derselben gehen, ergeben sich aus der Gleichung

$$9.\qquad \frac{1}{2}\left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 f + \frac{1}{6}t\left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)^3 f + \ldots\ldots = 0.$$

Bestimmt man ξ, η aus der Gleichung

$$10.\qquad \left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 f = \eta^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\eta\xi\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + \xi^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

so fallen für diese beiden Punkte je drei Tangenten der Curve mit der Doppeltangente zusammen. Die Gleichung dieser beiden Punkte wird erhalten, wenn man 10. mit t^2 multiplicirt und dann die Substitution ausführt

$$\eta t = \mathfrak{u} - u, \qquad \xi t = \mathfrak{v} - v.$$

Man erhält dadurch

$$11.\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(\mathfrak{u} - u)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(\mathfrak{u} - u)(\mathfrak{v} - v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(\mathfrak{v} - v)^2 = 0.$$

Diese beiden Punkte werden als die Berührungspunkte der Doppeltangente bezeichnet. Sind sie real und verschieden, so ist T eine Doppel-

tangente im engern Sinne; sind sie conjugirt complex, so enthält T keinen realen Punkt der Curve und ist daher eine isolirte Tangente.

14. Beispiel. Sind P_1 und P_2 lineare Functionen von Liniencoordinaten, so werden durch die Gleichung

$$P_1 P_2 + \lambda (P_1^2 + aP_1 P_2 + bP_2^2) = 0$$

für ein veränderliches λ Punktpaare dargestellt, die auf der Geraden $P_1 P_2$ liegen und eine quadratische Involution bilden. Sind Q_1 und Q_2 ebenfalls lineare Functionen in Liniencoordinaten, so bilden die Punkte

$$Q_1 + \lambda Q_2 = 0$$

eine Punktreihe, die mit der Involution projectiv ist. Die Geraden, welche entsprechende Punkte der Involution und der Reihe verbinden, genügen der Gleichung

$$f \equiv (P_1^2 + aP_1 P_2 + bP_2^2)Q_1 - P_1 P_2 Q_1 = 0;$$

dies ist die Gleichung einer Curve dritter Klasse. Man erhält

$$\frac{\partial f}{\partial u} = P_1 M + P_2 N, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = P_1 M' + P_2 N',$$

wobei M, N, M', N' leicht zu bildende Functionen sind. Man sieht hieraus, dass die drei Gleichungen

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

durch die Gerade erfüllt werden, deren Coordinaten den Gleichungen

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0$$

genügen. Die Curve $f = 0$ hat also die Gerade $P_1 P_2$ zur Doppeltangente.

15. Sind $u, v, w,$ und $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $w + \Delta w$ die Coordinaten zweier Tangentialebenen T, T' der Fläche $f(u, v, w) = 0$, sind ferner $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Coordinaten einer durch den Schnitt von T und T' gehenden Ebene $\mathfrak{T}$, so ist bekanntlich (vergl. § 6, No. 9, 4)

$$\frac{\mathfrak{u} - u}{\Delta u} = \frac{\mathfrak{v} - v}{\Delta v} = \frac{\mathfrak{w} - w}{\Delta w}.$$

Man kann daher, mit t eine unbestimmte Grösse bezeichnend, setzen

$$1. \qquad \mathfrak{u} = u + t \cdot \Delta u, \quad \mathfrak{v} = v + t \cdot \Delta v, \quad \mathfrak{w} = w + t \cdot \Delta w.$$

Die Tangentialebenen von f, welche durch die Gerade TT' gehen, werden somit aus der Gleichung erhalten

$$f(u + t \cdot \Delta u, \quad v + t \cdot \Delta v, \quad w + t \cdot \Delta w) = 0.$$

Entwickelt man nach dem Taylor'schen Satze, so erhält man

$$2. \qquad \begin{aligned} &f(u, v, w) + t\left(\Delta u \frac{\partial}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial}{\partial v} + \Delta w \frac{\partial}{\partial w}\right) f + \frac{1}{2} t^2 \cdot \left(\Delta u \frac{\partial}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial}{\partial v} + \Delta w \frac{\partial}{\partial w}\right)^2 f \\ &+ \frac{1}{6} \cdot t^3 \left(\Delta u \frac{\partial}{\partial n} + \Delta v \frac{\partial}{\partial v} + \Delta w \frac{\partial}{\partial w}\right)^3 f + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Nach der Voraussetzung ist $f(u, v, w) = 0$; die Gleichung 2. hat daher eine Wurzel $t = 0$; ihr gehört die Ebene T zu.

Werden Δu, Δv, Δw so gewählt, dass

$$3. \qquad \Delta u \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \Delta v \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + \Delta w \cdot \frac{\partial f}{\partial w} = 0,$$

so hat die Gleichung 2. noch eine Wurzel $t = 0$; es fallen denn also zwei durch die Gerade TT' gehende Tangentenebene der Fläche in T zusammen. Bezeichnet man die Coordinaten von T' mit U, V, W, so ist

$$\Delta u = U - u, \quad \Delta v = V - v, \quad \Delta w = W - w,$$

aus der Gleichung 3. erhält man daher

4. $$\frac{\partial f}{\partial u}(U-u)+\frac{\partial f}{\partial v}(V-v)+\frac{\partial f}{\partial w}(W-w)=0;$$

dies ist in Uebereinstimmung mit § 6, No. 5, 4 die Gleichung des auf T enthaltenen Tangentialpunkts der Fläche f.

Giebt es eine Tangentenebene T der Fläche, für welche die Differentialquotienten verschwinden

5. $$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial w}=0,$$

so dass für die Coordinaten von T die vier Gleichungen bestehen

$$f=0, \quad \frac{\partial f}{\partial u}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial v}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial w}=0,$$

so ist 3. identisch erfüllt; jede auf T enthaltene Gerade hat dann die Eigenschaft, dass zwei durch sie hindurchgehende Tangentenebenen der Fläche f mit T zusammenfallen. Die Ebene T heisst daher Doppeltangentenebene.

Sind in 2. u, v, w die Coordinaten einer Doppeltangentenebene, so hat die Gleichung 2. unabhängig von der Wahl der Ebene T zwei Wurzeln $t=0$; die übrigen ergeben sich aus

6. $$\frac{1}{2}\left(\Delta u\frac{\partial}{\partial x}+\Delta v\frac{\partial}{\partial y}+\Delta w\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f+\frac{1}{6}\left(\Delta u\frac{\partial}{\partial u}+\Delta v\frac{\partial}{\partial v}+\Delta w\frac{\partial}{\partial w}\right)^3 f+\ldots=0.$$

Wählt man nun T' so, dass

7. $$\left(\Delta u\frac{\partial}{\partial x}+\Delta v\frac{\partial}{\partial y}+\Delta w\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f=0,$$

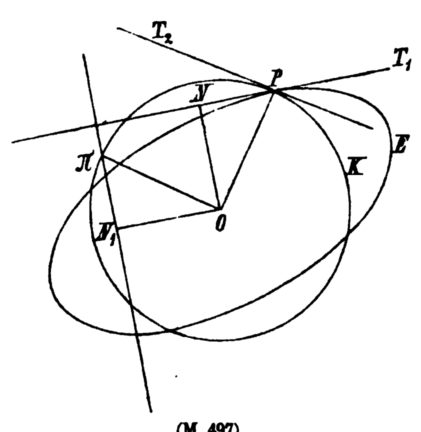
so hat die Gleichung 6. eine Wurzel $t=0$, die Gleichung 2. mithin eine dreifache Wurzel $t=0$; für die Geraden, in welchen die der Gleichung 7. entsprechenden Ebenen T' die Doppeltangentenebene T schneiden, fallen also drei Tangentenebenen mit T zusammen. Die Gleichung 7. giebt entwickelt

8. $$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(U-u)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(U-u)(V-v)+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}(U-u)(W-w)\\&+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(V-v)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}(V-v)(W-w)+\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(W-w)^2=0.\end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung einer Grenzfläche zweiter Klasse; die in T liegenden Tangenten dieser Grenzfläche (die Träger der Ebenenbüschel, welche die Grenzfläche berühren) heissen die Tangenten der Fläche auf der Doppeltangentenebene, die auf T liegende Curve zweiten Gerades, welche sie berühren, und deren Punkte der Fläche f angehören, ist die Berührungscurve der Doppeltangentenebene. Ist diese Curve eine eigentliche Curve zweiten Grades, so wird T als Doppelebene im engern Sinne bezeichnet; sie kann auch zu zwei getrennten oder vereinten Punkten ausarten, oder imaginär sein; im letztern Falle ist T eine isolirte Tangentenebene der Fläche f, ohne reale Berührungspunkte.

16. Als Beispiel wählen wir die Wellenfläche. Um zunächst die Gleichung der Wellenfläche in Ebenencoordinaten zu erhalten, bemerken wir Folgendes: Ist P ein Punkt des der Wellenfläche zu Grunde liegenden Ellipsoids E, so beschreibe man um das Centrum O des Ellipsoids eine Kugel K, die durch P geht, und construire die Ebenen T_1 und T_2, die E und K in P berühren. Die Schnittlinie QQ_1 dieser beiden Ebenen ist normal zu OP, und berührt den durch QQ_1 gehenden Diametralschnitt in P; folglich ist P ein Scheitel dieses Diametralschnitts*).

*) In Fig. 497 sind E, K, T_1, T_2 durch ihre Schnittlinien mit der Ebene vertreten, die durch OP normal zu QQ_1 geht.



(M. 497).

Macht man daher auf einer durch O gehenden Normalen zu OPQ die Strecke $O\Pi = OP$, so ist Π ein Punkt der Wellenfläche; wir wollen ihn als den mit P verbundenen Punkt bezeichnen.

Die Gleichungen der Ebenen T_1 und T_2 sind, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ laufende Coordinaten bezeichnen, und $OP = r$ gesetzt wird

$$1.\quad \begin{aligned} T_1 &= \frac{x}{a^2}\mathfrak{x} + \frac{y}{b^2}\mathfrak{y} + \frac{z}{c^2}\mathfrak{z} - 1 = 0. \\ T_2 &= x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + z\mathfrak{z} - r^2 = 0, \end{aligned}$$

Die Ebene OQQ_1 geht durch die Schnittlinie $T_1 T_2$ und durchs Centrum; ihre Gleichung ist daher

$$r^2 T_1 - T_2 = x\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)\mathfrak{x} + y\left(\frac{r^2}{b^2} - 1\right)\mathfrak{y} + z\left(\frac{r^2}{c^2} - 1\right)\mathfrak{z} = 0.$$

Die Richtungscosinus der Normalen dieser Ebene, d. i. der Geraden $O\Pi$ folgen hieraus zu

$$2.\quad \cos\varphi = \frac{x\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)}{rM}, \quad \cos\psi = \frac{y\left(\frac{r^2}{b^2} - 1\right)}{rM}, \quad \cos\chi = \frac{z\left(\frac{r^2}{c^2} - 1\right)}{rM}.$$

Hierbei ist

$$3.\ M^2 = \frac{1}{r^2}\left[x^2\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)^2 + y^2\left(\frac{r^2}{b^2} - 1\right)^2 + z^2\left(\frac{r^2}{c^2} - 1\right)^2\right] = r^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) - 1.$$

Aus 2. ergeben sich die Coordinaten des mit P verbundenen Punktes der Wellenfläche zu

$$4.\quad \xi = \frac{x}{M}\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right), \quad \eta = \frac{y}{M}\left(\frac{r^2}{b^2} - 1\right), \quad \zeta = \frac{z}{M}\left(\frac{r^2}{c^2} - 1\right).$$

Aus der von Nennern freien Gleichung der Wellenfläche erhält man die Gleichung der Tangentenebene im Punkte Π

$$\begin{aligned} T = \xi[\varphi + a^2(r^2 - b^2 - c^2)](\mathfrak{x} - \xi) + \eta[\varphi + b^2(r^2 - c^2 - a^2)](\mathfrak{y} - \eta) \\ + \zeta[\varphi + c^2(r^2 - a^2 - b^2)](\mathfrak{z} - \zeta) = 0, \end{aligned}$$

wenn $\varphi = a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2$,

Legt man Ebenen T_1', T_2', T' parallel zu T_1, T_2, T durch den Nullpunkt, so sind deren Gleichungen

$$T_1' = \frac{x}{a^2}\mathfrak{x} + \frac{y}{b^2}y + \frac{z}{c^2}\mathfrak{z} = 0,$$

$$T_2' = x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + z\mathfrak{z} = 0,$$

$$T' = \xi[\varphi + a^2(r^2 - b^2 - c^2)]\mathfrak{x} + \eta[\varphi + b^2(r^2 - c^2 - a^2)]\mathfrak{y} + \zeta[\varphi + c^2(r^2 - a^2 - b^2)]\mathfrak{z} = 0.$$

Hierzu fügen wir noch die Gleichung der Ebene OQQ_1

$$T_3' = \xi\mathfrak{x} + \eta\mathfrak{y} + \zeta\mathfrak{z} = 0,$$

und beachten, dass die Ebenen T_1', T_2', T_3' ein Büschel bilden. Die Function T lässt sich in folgender Weise unter Benutzung der Formeln 4. zerlegen

$$\begin{aligned} T' &= \varphi \cdot T_3' + \frac{r^2}{M}[(r^2 - a^2)x\mathfrak{x} + (r^2 - b^2)y\mathfrak{y} + (r^2 - c^2)z\mathfrak{z}] \\ &\quad - \frac{1}{M}[(b^2 + c^2)(r^2 - a^2)x\mathfrak{x} + (c^2 + a^2)(r^2 - b^2)y\mathfrak{y} + (a^2 + b^2)(r^2 - c^2)\mathfrak{z}] \\ &= \varphi \cdot T_3' + \left[\frac{r^4}{M} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{M}r^2 + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\right]T_2' - a^2b^2c^2 \cdot T_1'. \end{aligned}$$

Da hiernach die Function T' in der Form erscheint

$$T' = \alpha T_3' + \beta T_2' + \gamma T_1',$$

so erkennt man, dass T' durch die den Ebenen T_1', T_2', T_3 gemeinsame Schnittlinie geht. Hieraus folgt, dass die Tangentenebene der Wellenfläche in Π normal zur Ebene $\Pi O P$ ist.

Um den Winkel zu beurtheilen, den die Tangentenebenen T und T_1 einschliessen, bilden wir die Ausdrücke

$$\frac{x}{a^2}\cdot\xi[\varphi+a^2(r^2-b^2-c^2)]=r^2\varphi\cdot\frac{x^2}{a^4}-(\varphi-r^4)\cdot\frac{x^2}{a^2}-r^2x^2-r^2(b^2+c^2)\frac{x^2}{a^2}+(b^2+c^2)x^2,$$

$$5.\quad \frac{y}{b^2}\cdot\eta[\varphi+b^2(r^2-c^2-a^2)]=r^2\varphi\cdot\frac{y^2}{b^4}-(\varphi-r^4)\cdot\frac{y^2}{b^2}-r^2y^2-r^2(c^2+a^2)\frac{y^2}{b^2}+(c^2+a^2)y^2,$$

$$\frac{z}{c^2}\cdot\zeta[\varphi+c^2(r^2-a^2-b^2)]=r^2\varphi\cdot\frac{z^2}{c^4}-(\varphi-r^4)\cdot\frac{z^2}{c^2}-r^2z^2-r^2(a^2+b^2)\frac{z^2}{c^2}+(a^2+b^2)z^2.$$

In Rücksicht auf

$$(b^2+c^2)\frac{x^2}{a^2}+(c^2+a^2)\frac{y^2}{b^2}+(a^2+b^2)\frac{z^2}{c^2}=(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-(x^2+y^2+z^2)$$
$$= a^2+b^2+c^2-r^2,$$

$$(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2=(a^2+b^2+c^2)\,r^2-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)$$

ergiebt sich die Summe der Ausdrücke 5. zu

$$6.\quad \varphi r^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)-(\varphi-r^4)-r^4-r^2(a^2+b^2+c^2-r^2)+(a^2+b^2+c^2)\,r^2$$
$$-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)=\varphi M^2+r^4-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2).$$

Nun ist

$$\varphi M^2 = a^2\xi^2M^2+b^2\eta^2M^2+c^2\zeta^2M^2,$$
$$= a^2x^2\left(\frac{r^4}{a^4}-2\frac{r^2}{a^2}+1\right)+b^2y^2\left(\frac{r^4}{b^4}-2\frac{r^2}{b^2}+1\right)+c^2z^2\left(\frac{r^4}{c^4}-2\frac{r^2}{c^2}+1\right),$$
$$= r^4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-2r^2(x^2+y^2+z^2)+a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2,$$
$$= -r^4+a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2.$$

Setzt man diesen Werth in 6. ein, so erkennt man, dass die Summe der drei Produkte 5. verschwindet und hat somit den Satz: Die Tangentenebenen zweier verbundenen Punkte des Ellipsoids E und der Wellenfläche sind normal zu einander.

Ist $ON \perp T_1$ und $ON_1 \perp T$, so folgt hieraus, dass $ON \perp ON_1$ und $ON = ON_1$. Die Gleichung jeder Ebene, die den Schnitt $T_1'T_2'$ enthält, hat die Form

$$T_2' + \alpha T_1' = 0.$$

Soll sie ON enthalten, mithin normal zu T_1 sein, so muss die Gleichung erfüllt sein

$$x\left(1+\frac{\alpha}{a^2}\right)\cdot\frac{x}{a^2}+y\left(1+\frac{\alpha}{b^2}\right)\cdot\frac{y}{b^2}+z\left(1+\frac{\alpha}{c^2}\right)\cdot\frac{z}{c^2}=0,$$

aus welcher sich ergiebt

$$\alpha = -1:\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right).$$

Sind u, v, w die Coordinaten von T_1, sowie $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ die von T_2, so ist

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=u^2+v^2+w^2=\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2,$$

denn diese Quadratsummen sind gleich dem reciproken Quadrate der Strecke $ON = ON_1$. Setzt man

$$1 : ON = 1 : ON_1 = \rho,$$

so ist daher die Gleichung der ON enthaltenden Ebene des Büschels $T_1'T_2'$, d. i. die Gleichung der Normalebene zu ON_1,

$$6. \quad \frac{x}{a^2}(a^2\rho^2 - 1)\mathfrak{x} + \frac{y}{b^2}(b^2\rho^2 - 1)\mathfrak{y} + \frac{z}{c^2}(c^2\rho^2 - 1)\mathfrak{z} = 0.$$

Ersetzt man $x : a^2$, $y : b^2$, $z : c^2$ durch u, v, w, so erhält man für die Cosinus der Winkel der Geraden ON und der Achsen

$$7. \quad \cos\varphi = \frac{u}{\rho L}(a^2\rho^2 - 1), \quad \cos\psi = \frac{v}{\rho L}(b^2\rho^2 - 1), \quad \cos\chi = \frac{w}{\rho L}(c^2\rho^2 - 1),$$

wobei L sich ergiebt aus

$$8. \; L^2 = \frac{1}{\rho^2}[u^2(a^2\rho^2 - 1)^2 + v^2(b^2\rho^2 - 1)^2 + w^2(c^2\rho^2 - 1)^2] = \rho^2(a^4u^2 + b^4v^2 + c^4w^2) - 1.$$

Die Coordinaten von T folgen aus

$$\mathfrak{u} = \rho\cos\varphi, \quad \mathfrak{v} = \rho\cos\psi, \quad \mathfrak{w} = \rho\cos\chi \quad \text{zu}$$

$$9. \quad \mathfrak{u} = \frac{u}{L}(a^2\rho^2 - 1), \quad \mathfrak{v} = \frac{v}{L}(b^2\rho^2 - 1), \quad \mathfrak{w} = \frac{w}{L}(c^2\rho^2 - 1).$$

Die gesuchte Gleichung der Wellenfläche in Ebenencoordinaten ergiebt sich nun, indem man aus 9. und aus der Gleichung des Ellipsoids E

$$E = a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1 = 0.$$

die Coordinaten u, v, w eliminirt. Aus 9. ergiebt sich

$$\frac{\mathfrak{u}^2}{a^2\rho^2 - 1} = \frac{u^2(a^2\rho^2 - 1)}{L^2}, \quad \frac{\mathfrak{v}^2}{b^2\rho^2 - 1} = \frac{v^2(b^2\rho^2 - 1)}{L^2}, \quad \frac{\mathfrak{w}^2}{c^2\rho^2 - 1} = \frac{w^2(c^2\rho^2 - 1)}{L^2}.$$

Addirt man, so erhält man die gesuchte Gleichung

$$10. \quad \frac{\mathfrak{u}^2}{a^2\rho^2 - 1} + \frac{\mathfrak{v}^2}{b^2\rho^2 - 1} + \frac{\mathfrak{w}^2}{c^2\rho^2 - 1} = 0.$$

Man überzeugt sich auf Grund dieser Gleichung leicht, dass die Tangentenebenen der Wellenfläche erhalten werden, wenn man auf der Normalen zu einem Diametralschnitte des Ellipsoids

$$\mathfrak{E} = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 1 = 0$$

die reciproke grosse und kleine Halbachse des Schnittes vom Nullpunkte aus nach beiden Seiten hin abträgt und durch die Endpunkte Ebenen parallel zum Diametralschnitte legt. Denn die Endpunkte der Normalen gehören einer Fläche an, deren Gleichung aus der Gleichung der Wellenfläche

$$11. \quad \frac{a^2x^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2y^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2z^2}{r^2 - c^2} = 0$$

hervorgeht, indem man a, b, c mit $1 : a$, $1 : b$, $1 : c$ vertauscht, und die Coordinaten x, y, z eines Punktes P durch die Coordinaten X, Y, Z des Punktes P' ersetzt, der auf OP liegt, und dessen Radius vector reciprok zu OP ist. Man hat somit

$$X : Y : Z = x : y : z, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2},$$

und daher

$$12. \quad x = \frac{X}{R^2}, \quad y = \frac{Y}{R^2}, \quad z = \frac{Z}{R^2}, \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{1}{r^2}.$$

Die gesuchte Gleichung der Reciprokalfläche der zum Ellipsoide E gehörigen Wellenfläche ist hiernach

$$13. \quad \frac{X^2}{a^2 - R^2} + \frac{Y^2}{b^2 - R^2} + \frac{Z^2}{c^2 - R^2} = 0.$$

Die Ebene, die durch P' normal zu OP' geht, hat die Coordinaten

$$\mathfrak{u} = \frac{X}{R^2}, \quad \mathfrak{v} = \frac{Y}{R^2}, \quad \mathfrak{w} = \frac{Z}{R^2},$$

dabei ist $R^2 = 1 : (\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2) = 1 : \rho^2$.

Setzt man dies in 13. ein, so erhält man in der That die Gleichung der Wellenfläche 10.

Befreit man die Gleichung 10. von Brüchen, so erhält man, wenn man nun u, v, w statt $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ schreibt

$$f \equiv (u^2 + v^2 + w^2)(b^2c^2u^2 + c^2a^2v^2 + a^2b^2w^2) - (b^2 + c^2)u^2 - (c^2 + a^2)v^2 - (a^2 + b^2)w^2 + 1 = 0.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u} = u(b^2c^2u^2 + c^2a^2v^2 + a^2b^2w^2 + b^2c^2\rho^2 - b^2 - c^2) = u \cdot A,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial v} = v(b^2c^2u^2 + c^2a^2v^2 + a^2b^2w^2 + c^2a^2\rho^2 - c^2 - a^2) = v \cdot B,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial w} = w(b^2c^2u^2 + c^2a^2v^2 + a^2b^2w^2 + a^2b^2\rho^2 - a^2 - b^2) = w \cdot C,$$

wobei A, B, C abkürzungsweise für die eingeklammerten Polynome gesetzt ist. Den Gleichungen

$$uA = vB = wC = f = 0$$

kann nur durch die Ebenen genügt werden, deren Coordinaten eines der drei Systeme erfüllen

$$u = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$
$$v = 0, \quad C = 0, \quad A = 0,$$
$$w = 0, \quad A = 0, \quad B = 0,$$

und hiervon liefert nur das zweite reale Wurzeln. Die Wellenfläche hat somit 12 Doppeltangentenebenen, nämlich vier parallel zu jeder Achse; von diesen sind aber nur die vier real, die parallel zur mittleren Achse des Ellipsoids E sind.

Die Spuren der realen Doppeltangentenebenen auf der XZ-Ebene sind die gemeinsamen Tangenten des Kreises und der Ellipse, welche die Wellenfläche mit der XZ-Ebene gemein hat. Die Coordinaten der Doppeltangentenebenen ergeben sich aus

$$u^2 = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad v^2 = 0, \quad w^2 = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Die Gleichung der Grenzfläche zweiter Klasse, längs welcher die Doppelebene u, v, w die Wellenfläche berührt, ergiebt sich mit Hülfe der Werthe, welche die zweiten partialen Differentialquotienten von f für die Doppelebene haben

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 4b^2c^2u^2 = 4\frac{c^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} = 2b^2(a^2 + c^2)uw = 2\frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2}\sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - b^2)},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = b^2(c^2u^2 + a^2w^2) + a^2c^2(u^2 + w^2) - (a^2 + c^2) = -\frac{1}{b^2}(a^2 - b^2)(b^2 - c^2),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} = 0, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = 4a^2b^2w^2 = 4a^2\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Man erhält, wenn $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ laufende Coordinaten bezeichnen,

$$14. \quad \begin{aligned} & b^2c^2(a^2 - b^2)(\mathfrak{u} - u)^2 + b^2(a^2 + c^2)\sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - b^2)} \cdot (\mathfrak{u} - u)(\mathfrak{w} - w) \\ & - \tfrac{1}{4}(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)\mathfrak{v}^2 + a^2b^2(b^2 - c^2)(\mathfrak{w} - w)^2 = 0. \end{aligned}$$

Für die Doppelebene, welche im ersten Quadranten berührt, ist der positive Werth der Quadratwurzel zu nehmen.

Die Gleichung der Horizontalprojection der Berührungscurve wird erhalten, wenn man in 14. $\mathfrak{w} = 0$ setzt. Man erhält

$$15.\quad \begin{aligned} & b^2c^2(a^2-b^2)(\mathfrak{u}-u)^2 - b^2(a^2+c^2)\sqrt{(b^2-c^2)(a^2-b^2)}\,w(\mathfrak{u}-u) \\ & - \tfrac{1}{4}(a^2-b^2)(a^2-c^2)\mathfrak{v}^2 + a^2b^2(b^2-c^2)w^2 = 0. \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, die symmetrisch zur X-Achse liegt; daher ist die Berührungscurve eine zur XZ-Ebene symmetrische Ellipse. Eine Achse der Ellipse 14. ist der zur OX normalen Achse von 15. parallel und gleich. Das halbe Reciprokum derselben ist der Werth von $\mathfrak{v}$, den die Gleichung 15. für $\mathfrak{u} = 0$ ergiebt; letzterer bestimmt sich aus

$$16.\quad \begin{aligned} & b^2c^2(a^2-b^2)u^2 + b^2(a^2+c^2)\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}\,uw \\ & - \tfrac{1}{4}(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)\mathfrak{v}^2 + a^2b^2(b^2-c^2)w^2 = 0. \end{aligned}$$

Setzt man für u, w die Werthe ein, so ergiebt sich

$$17.\quad \mathfrak{v}^2 = \frac{4b^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}.$$

Daher ist die der Y-Achse parallele Achse der Berührungsellipse

$$18.\quad \frac{1}{b}\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}.$$

Die reciproken Abstände der auf der OX liegenden Scheitel der Ellipse 15. vom Nullpunkte sind die Werthe von $\mathfrak{u}$, welche aus 15. für $\mathfrak{v} = 0$ hervorgehen; werden diese mit $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ bezeichnet, so ist die auf der X-Achse liegende Achse der Ellipse 15.

$$19.\quad \frac{1}{\mathfrak{u}_2} - \frac{1}{\mathfrak{u}_1}.$$

Die Gleichung 15. liefert für $\mathfrak{v} = 0$, unter Rücksicht auf den Werth von w,

$$20.\quad (\mathfrak{u}-u)^2 - \frac{(a^2+c^2)(b^2-c^2)}{c^2b\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}(\mathfrak{u}-u) + \frac{a^2(b^2-c^2)^2}{b^2c^2(a^2-c^2)(a^2-b^2)} = 0.$$

Löst man diese Gleichung auf und setzt dann für u den Werth ein, so erhält man nach den einfachen Reductionen

$$21.\quad \mathfrak{u}_1 = \frac{b}{c^2}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}},\quad \mathfrak{u}_2 = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}}.$$

Daher ist die auf der X-Achse liegende Achse der Ellipse 15.

$$22.\quad \frac{1}{\mathfrak{u}_2} - \frac{1}{\mathfrak{u}_1} = \frac{b^2-c^2}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}.$$

Die auf der XZ-Ebene liegende Achse der Berührungsellipse selbst wird hieraus durch Multiplication mit $1 : \cos\varphi$ erhalten, wenn φ den Winkel der Doppeltangentenebene mit der X-Achse bezeichnet. Da nun

$$\cos\varphi = w : \sqrt{u^2+w^2} = \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},$$

so ist die in der XZ-Ebene liegende Achse der Berührungsellipse

$$\frac{1}{b}\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}.$$

Vergleicht man dies mit 18., so erkennt man: Die Wellenfläche wird von jeder der vier Doppeltangentenebenen in einem Kreise berührt.

---

17. Ist eine Raumcurve der Durchschnitt der Flächen $f(x, y, z) = 0$ und $F(x, y, z) = 0$ und gehören ihr die Punkte P und P' mit den Coordinaten x, y, z bez. $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ an, so sind die Gleichungen erfüllt

$$1.\quad f(x, y, z) = 0;\quad F(x, y, z) = 0,$$

$$2.\quad \begin{aligned} & f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) = f(x, y, z) + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z}\right)f + \cdots \\ & + \frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f + \ldots = 0, \end{aligned}$$

$$3.\quad F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) = F(x,y,z) + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z}\right)F + \frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 F + \ldots = 0\,.$$

Zufolge der Gleichungen 1. vereinfachen sich die Gleichungen 2. und 3 zu

$$4.\quad \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\right)f + \frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\right)^2 f + \ldots = 0\,,$$

$$5.\quad \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\right)F + \frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\right)^2 F + \ldots = 0\,.$$

Bezeichnet man die Strecke PP' mit p und ihre Winkel mit den Achsen mit α, β, γ, so gehen 4. und 5 über in

$$6.\quad r\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)f + \frac{r^2}{2}\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f + \ldots = 0,$$

$$7.\quad r\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)F + \frac{r^2}{2}\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 F + \ldots = 0.$$

Verschwindet die Strecke PP', so werden die Winkel α, β, γ durch die Gleichungen bestimmt, die durch Grenzübergang aus 6. und 7. hervorgehen. Im Allgemeinen sind dies die beiden Gleichungen

$$8.\quad \cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial f}{\partial z} = 0\,;$$

$$9.\quad \cos\alpha\frac{\partial F}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial F}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial F}{\partial z} = 0\,.$$

Die Geraden, die ihnen einzeln genügen, erfüllen bekanntlich die Tangentenebenen an f und F in P, ihr Verein bestimmt die Curventangente in P als Schnitt dieser beiden Tangentenebenen. Unter besonderen Voraussetzungen können aber hiervon abweichende Bestimmungen eintreten.

A. Wenn für den Punkt P die beiden Functionen

$$\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial f}{\partial z}\,,\quad \cos\alpha\frac{\partial F}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial F}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial F}{\partial z}$$

nur um einen constanten Faktor verschieden sind, wenn also

$$10.\quad n\left(\cos\alpha\frac{\partial F}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial F}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial F}{\partial z}\right) = m\left(\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

so fallen die Tangentenebenen von f und F in P zusammen, die beiden Flächen berühren sich also in P. Die Richtungen, in welchen man von P auf der Schnittcurve von f und F fortschreiten kann, sind in diesem Falle nicht aus 8. und 9. zu bestimmen, da diese Gleichungen identisch sind, sondern man muss auf 6. und 7. zurückgehen. Multiplicirt man 6. mit m und 7. mit n und subtrahirt, so erhält man mit Rücksicht auf 10. und wenn man zur Grenze $r = 0$ übergeht

$$11.\quad m\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f - n\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 F = 0.$$

Diese Gleichung im Verein mit

$$\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

bestimmt die Tangenten der Raumcurve in dem ausgezeichneten Punkte P. Sind ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes Π einer solchen Tangente, so kann man $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ durch die proportionalen Grössen $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ ersetzen und erhält daher die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&\left(m\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-n\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)(\xi-x)^2+2\left(m\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-n\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)(\xi-x)(\eta-y)\\
12.\quad &+2\left(m\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}-n\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\right)(\xi-x)(\zeta-z)+\left(m\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-n\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)(\eta-y)^2\\
&+2\left(n\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}-m\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)(\eta-y)(\zeta-z)+\left(m\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}-n\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)(\zeta-z)^2=0,
\end{aligned}
$$

$$
13.\quad \frac{\partial F}{\partial x}(\xi-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(\eta-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(\zeta-z)=0.
$$

Die Gleichung 12. ist die eines Kegels zweiter Ordnung; je nachdem derselbe von der Ebene 13. in zwei realen verschiedenen, oder in zwei realen zusammenfallenden oder in zwei imaginären Geraden geschnitten wird, hat die Curve in P zwei reale getrennte, oder zwei reale zusammenfallende, oder zwei imaginäre Tangenten, und P ist demgemäss als Doppelpunkt, als Rückkehrpunkt oder als isolirter Punkt der Raumcurve zu bezeichnen.

B. Wenn für die Fläche f im Punkte P die partialen ersten Differentialquotienten verschwinden, für F aber nicht, so bestimmen sich die Tangenten der Raumcurve in P aus den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi-x)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi-x)(\eta-y)+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(\xi-x)(\zeta-z)\\
14.\quad &+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\eta-y)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta\partial z}(\eta-y)(\zeta-z)+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\zeta-z)^2=0
\end{aligned}
$$

$$
15.\quad \frac{\partial F}{\partial x}(\xi-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(\eta-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(\zeta-z)=0.
$$

Je nachdem die Ebene 15. mit dem Kegel 14. zwei reale getrennte, reale vereinte oder imaginäre Gerade gemein hat, ist P ein Doppelpunkt, Rückkehrpunkt oder vereinzelter Punkt der Raumcurve.

C. Wenn für beide Flächen f und F die partialen ersten Differentialquotienten im Punkte P verschwinden, wenn also beide Flächen in P einen Doppelpunkt haben, so werden die Tangenten ihrer Schnittcurve in P aus den beiden Gleichungen erhalten.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi-x)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi-z)(\eta-y)+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(\xi-x)(\zeta-z)\\
16.\quad &+\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(\eta-y)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(\eta-y)(\zeta-z)+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\zeta-z)^2=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
17.\quad &\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi-x)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(\xi-x)(\eta-v)+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}(\xi-x)(\zeta-z)\\
&+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\eta-y)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}(\eta-y)(\zeta-z)+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(\zeta-z)^2=0.
\end{aligned}
$$

Diese beiden Kegel zweiter Ordnung haben vier gemeinsame Mantellinien. Wenn also zwei Flächen einen gemeinsamen Doppelpunkt haben, so gehen durch denselben vier Zweige ihrer Durchschnittscurve, dieser Punkt ist daher ein vierfacher Punkt der Raumcurve; er tritt als isolirter Punkt auf, wenn die vier Tangenten imaginär sind.

18. Für die Rotationscylinder

$$
f\equiv y^2+z^2-R^2=0,
$$

$$
F\equiv x^2+y^2-2(R-r)y+R^2-2Rr=0
$$

hat man $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y,\quad \dfrac{\partial f}{\partial z}=2z;$

$$
\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2(y-R+r),\quad \frac{\partial F}{\partial z}=0.
$$

Die Gleichungen No. 17, 8. und 9 sind daher

1. $2\cos\beta\cdot y + 2\cos\gamma\cdot z = 0$, 2. $2\cos\alpha\cdot x + 2\cos\beta(y - R + r) = 0$,

Sie werden identisch für $x = z = 0$; für diese Werthe haben $f = 0$ und $F = 0$ die gemeinsame Wurzel $y = R$; die Cylinder haben also den Punkt $x = z = 0$, $y = R$ gemein und in diesem Punkte eine gemeinsame Tangentenebene, die der XZ-Ebene parallel ist. Für $x = z = 0$, $y = R$ gehen die Gleichungen 1. und 2. über in

$$2\cos\beta\cdot R = 0, \quad 2\cos\beta\cdot r = 0;$$

daher ist $m = r$, $n = R$.

Ferner ergeben sich die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0.$$

Daher werden die Gleichungen No. 17, 12. und 13.

$$R\xi^2 + (R - r)(\eta - R)^2 - r\zeta^2 = 0, \quad \eta - R = 0.$$

Hieraus folgen die Gleichungen der Verticalprojectionen der Doppelpunktstangenten

$$R\xi^2 - r\zeta^2 = 0.$$

Für die Abscisse $\xi = r$ folgt die Ordinate $\zeta = \sqrt{Rr}$, wonach die Tangenten leicht construirt werden können*).

19. Das Ellipsoid $\quad f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

und die Kugel $\quad F = x^2 + y^2 + z^2 - 2(c - r)z + c^2 - 2cr = 0$

haben den Punkt C mit den Coordinaten 0, 0, c gemein und berühren sich in diesem Punkte. Man hat

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{c^2};$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z - c + r);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{b^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2}{c^2};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2.$$

Die übrigen partialen Differentialquotienten zweiter Ordnung sind gleich Null. Die Gleichungen No. 17, 8, 9 werden für C

$$\frac{2}{c}\cos\gamma = 0, \quad 2r\cos\gamma = 0,$$

Daher ist $m = c$, $n = 1 : r$; die Gleichungen 12 und 13 sind

$$\left(\frac{c}{a^2} - \frac{1}{r}\right)\xi^2 + \left(\frac{c}{b^2} - \frac{1}{r}\right)\eta^2 + \left(\frac{2}{c} - \frac{1}{r}\right)(\zeta - c)^2 = 0, \quad \zeta - c = 0.$$

Hieraus ergiebt sich die Gleichung der Doppelpunktstangenten

$$\left(\frac{c}{a^2} - \frac{1}{r}\right)\xi^2 + \left(\frac{c}{b^2} - \frac{1}{r}\right)\eta^2 = 0.$$

Wird das geometrische Mittel aus c und r mit d bezeichnet, und ist $a > b$, so sind die beiden Tangenten

real und verschieden, wenn $a > d > b$,
real und vereint, „ $a = d$ oder $b = d$,
imaginär, „ $a < d$ „ $b > d$.

*) Vergl. Schloemilch, Handbuch der Math., 1. Bd., Darstellende Geometrie § 8, No. 14.

20. Der Kegel $f \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

und die Kugel $F \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2dx - 2ey - 2fz = 0$

haben den Nullpunkt gemein, und im Nullpunkte hat f einen Doppelpunkt. Die Gleichungen No. 17, 14. und 15. werden für den Nullpunkt

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 0, \quad d\xi + e\eta + f\zeta = 0.$$

Die Doppelpunktstangenten sind daher die Mantellinien, in welchen der Kegel von der Tangentenebene der Kugel im Nullpunkte geschnitten wird.

Allgemein gilt die Bemerkung, dass in der Schnittcurve eines Kegels zweiter Ordnung mit einer Fläche F, die durch die Kegelspitze S geht, letztere ein Doppelpunkt ist und die Tangenten des Doppelpunktes die Mantellinien des Kegels sind, in welchen derselbe von der Tangentenebene von F in S geschnitten wird.

§ 16. Unendliche Reihen.

1. In § 13 haben wir die Reihen kennen gelernt

1. $$1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots$$

2. $$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots\ldots$$

3. $$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$$

4. $$1 - \frac{1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6 + \ldots$$

5. $$x - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1}{1.2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots$$

Diese Reihen stimmen darin überein, dass für unbeschränkte oder für innerhalb gewisser Grenzen liegende Werthe von x die Summe der ersten n Glieder mit einer bestimmten Function um so genauer übereinstimmt, je grösser n ist, und dass man diese Genauigkeit beliebig gross machen kann, wenn man nur n hinlänglich gross wählt. Diese Functionen $[(1+x)^\mu,\ l(1+x),\ e^x,\ \cos x,\ \sin x]$ sind daher die Grenzwerthe, denen sich die Reihen bei unendlich wachsender Gliederzahl nähern, und konnten in Folge dessen als die Summen der unendlich fortgesetzten Reihen bezeichnet werden.

Jedes Glied der obigen Reihen kann als Function der Zahl m angesehen werden, welche angiebt, das wievielste Glied der Reihe es ist; wird diese Function mit q_m bezeichnet, so treten die Reihen unter die allgemeine Form

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + \ldots$$

oder noch kürzer

$$\Sigma_1^\infty q_m,$$

wobei das vor q_m stehende Zeichen bedeutet, dass die Functionen q_1, q_2, q_3, q_4 gebildet und addirt werden sollen. Die Grösse q_m wird als das allgemeine Glied der betreffenden unendlichen Reihe bezeichnet. Die allgemeinen Glied der Reihen 1 . . 5 sind

$$\binom{\mu}{m-1}x^{m-1},\ (-1)^{m-1}\cdot\frac{x^m}{m},\ \frac{x^{m-1}}{(m-1)!},\ (-1)^{m-1}\cdot\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!},\ (-1)^{m-1}\cdot\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)}$$

Diese Beispiele für unendliche Reihen fordern dazu auf, unendliche Reihen im Allgemeinen zu betrachten, die Bedingungen anzugeben, unter welchen di

Summe der ersten n Glieder bei wachsender Gliederzahl einer endlichen Grenze sich nähert, und zu zeigen, unter welchen Bedingungen die Reihen den arithmetischen Operationen unterworfen werden können.

2. Es sei q_m eine Function der positiven ganzen Zahl m, und das allgemeine Glied einer unendlich fortgesetzten Reihe $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + \dots$.

Nähert sich die Summe der ersten n Glieder einem bestimmten endlichen Grenzwerthe S, mit dem sie bis zu jedem Grade der Genauigkeit übereinstimmt, wenn man nur n gross genug wählt, so bezeichnet man S als die Summe der unendlichen Reihe und die Reihe selbst heisst convergent. Enthält dabei das allgemeine Glied q_m eine unbestimmte Grösse x, so wird im Allgemeinen die Reihe nicht für alle, sondern nur für die zwischen bestimmten Grenzen liegenden Werthe von x convergiren; innerhalb der Convergenzgrenzen ist die Summe der Reihe von x abhängig und daher eine bestimmte Function $f(x)$ von x; jenseit der Convergenzgrenzen ist die Summe der Reihenglieder unabhängig von x unendlich gross oder unbestimmt; die Reihensumme stimmt also dann nur innerhalb der Convergenzgrenzen mit $f(x)$ überein; jenseit derselben ist diese Uebereinstimmung nicht vorhanden.

Wächst die Summe der ersten n Glieder über alle Grenzen, wenn n wächst, so bezeichnet man die Reihe als divergent. Wenn hingegen bei einer Reihe Gruppen mit positiven und Gruppen mit negativen Gliedern abwechseln, so kann es sich ereignen, dass die Summe der Glieder, bis zum Abschlusse einer Gruppe positiver Glieder, sich einer bestimmten Grenze nähert, während die Summe der Glieder bis zum Abschlusse einer Gruppe negativer sich einer andern bestimmten Grenze nähert; dies ist z. B. der Fall bei

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Hört man hier bei einem positiven Gliede auf, so ist die Summe $+1$, hört man bei einem negativen auf, so erhält man 0. Solche Reihen sind als oscillirende bezeichnet worden; da durch dieselben bestimmte Grössen nicht dargestellt werden, so sind sie analytisch nicht verwendbar.

3. Wir beschäftigen uns in den folgenden Abschnitten mit der wichtigsten der hierher gehörigen Fragen — mit den Convergenzbedingungen für unendliche Reihen.

Um über die Convergenz einer unendlichen Reihe zu entscheiden, kann man zunächt versuchen, die Summe der ersten n Glieder in übersichtlicher Weise als Function von n darzustellen. Findet man dann, dass diese Function für ein unendlich wachsendes n sich einer bestimmten endlichen Grenze nähert, so ist diese Grenze die Summe der vorgelegten unendlichen Reihe und die Reihe selbst ist convergent; man hat also in diesem Falle nicht blos über die Convergenz entschieden, sondern auch die Reihe in geschlossener Form summirt.

A. Um über die Convergenz der Reihe

$$1. \qquad 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

zu entscheiden, bilde man

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$
$$= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} \cdot x^{n+1}.$$

Ist der absolute Werth von $x > 1$, so ist $lim x^{n+1} = \infty$, und daher die Reihe 1. divergent.

Ist $x = 1$, so ersieht man sofort, dass die Summe der Reihe unendlich ist.

Ist $-1 < x < 1$, so ist

$$\lim x^{n+1} = 0,$$

und daher

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots . = \frac{1}{1-x}.$$

Diese Reihe wird als die geometrische Reihe bezeichnet.

B. Um über die Reihe zu entscheiden (vergl. § 2, No. 7, 3)

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \ldots . .$$

betrachte man

$$s_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}.$$

Man hat

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + x + 2x^2 + \ldots + (n-1)x^{n-1}.$$

$$= \frac{1-x^n}{1-x} + x(s_n - nx^{n-1}).$$

Hieraus folgt

$$s_n = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2} \cdot x^n - \frac{1}{1-x} \cdot nx^n.$$

Die Grösse nx^n wird für ein unendlich grosses n selbst unendlich, sobald der absolute Werth von $x = 1$ oder > 1 ist; wenn x ein echter Bruch ist, so giebt es immer eine Zahl m, für welche

$$1 + \frac{1}{m} < \frac{1}{x}$$

so dass also $\left(1 + \frac{1}{m}\right)x$ ein echter Bruch ist, den wir mit ε bezeichnen wollen; bezeichnen wir ferner die endliche Zahl mx^m mit A, so ist

$$(m+1)x^{m+1} = m\left(1 + \frac{1}{m}\right)x^{m+1} = A\left(1 + \frac{1}{m}\right)x = A\varepsilon$$

$$(m+2)x^{m+2} = (m+1)x^{m+1}\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)x, \quad \text{also} < A\varepsilon^2,$$

$$(m+3)x^{m+3} = (m+2)x^{m+2}\left(1 + \frac{1}{m+2}\right)x, \quad \text{also} < A\varepsilon^3,$$

. . . .

Folglich bilden die Grössen

$$mx^m, \quad (m+1)x^{m+1}, \quad (m+2)x^{m+2}, \quad (m+3)x^{m+3}, \ldots .$$

eine abnehmende Reihe, die stärker fällt als die Reihe

$$A\varepsilon, \quad A\varepsilon^2, \quad A\varepsilon^3, \quad A\varepsilon^4, \ldots .$$

Da nun ε ein echter Bruch ist, so ist für ein unendlich grosses n und einen gegebenen Werth von m

$$\lim A\varepsilon^{n-m} = 0,$$

also um so mehr

$$\lim nx^n = 0.$$

Die unendliche Reihe

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots .$$

convergirt daher für alle echt gebrochenen x; es ist

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad -1 < x < 1.$$

4. Die endliche Reihe*)

$$1. \quad \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \ldots + \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}$$

lässt sich summiren, indem man von der identischen Gleichung Gebrauch macht

*) Vergl. u. A. SCHLOEMILCH, Compendium der höhern Analysis, 1. Bd., § 36.

$$2.\quad \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m-1)} - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots\ldots(\beta+m)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots(\alpha+m)}$$
$$= \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+m)}.$$

Setzt man hierin der Reihe nach $m = 1, 2, 3 \ldots\ldots n-1$ und addirt, so erhält man

$$3.\quad \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}$$
$$= \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \ldots\ldots + \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}\right).$$

Die Convergenz oder Divergenz der unendlichen Reihe

$$4.\quad \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)} + \ldots$$

wird daher durch die Untersuchung des Grenzwerthes entschieden, den der Bruch

$$5.\quad \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}$$

bei unendlich wachsendem n sich nähert.

Ist $\alpha = \beta$, so ist dieser Bruch die Einheit; in diesem Falle wird aus 1. die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

In 3. sind dann beide Seiten Null, und man kann an 2. weitere Schlüsse nicht knüpfen; wir berücksichtigen diesen Fall jetzt nicht weiter und behalten uns vor, auf die unendliche Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots\ldots$$

später zurückzukommen.

Wir haben nun die Fälle $\alpha > \beta$ und $\alpha < \beta$ zu untersuchen und beschränken uns dabei auf positive Werthe von α und β.

Sind h und k ganze positive Zahlen, und ist auch x positiv, so ist bekanntlich

$$\left(1+\frac{x}{h}\right)^h > 1 + x, \quad (1+x)^k > 1 + kx,$$

folglich auch

$$6.\quad \frac{1}{\left(1+\frac{x}{h}\right)^h} < \frac{1}{1+x} < \frac{1}{(1+kx)^{\frac{1}{k}}}.$$

Ist nun $\alpha > \beta$ und $m > 0$, so kann man x durch $(\alpha-\beta):(\beta+m)$ ersetzen und erhält

$$7.\quad \left[\frac{\beta+m}{\beta+m+\frac{\alpha-\beta}{h}}\right]^h < \frac{\beta+m}{\alpha+m} < \left(\frac{\beta+m}{\beta+m+k(\alpha-\beta)}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Wählt man h und k so, dass

$$h > \alpha-\beta, \quad k > \frac{1}{\alpha-\beta},$$

so ist $(\alpha-\beta):h < 1$ und $k(\alpha-\beta) > 1$; die Ungleichung 7. wird daher noch verstärkt, wenn man $(\alpha-\beta):h$ und $k(\alpha-\beta)$ durch die Einheit ersetzt. Dadurch entsteht

$$8.\quad \left(\frac{\beta+m}{\beta+m+1}\right)^h < \frac{\beta+m}{\alpha+m} < \left(\frac{\beta+m}{\beta+m+1}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Setzt man hier der Reihe nach $m = 0, 1, 2, 3, \ldots . n - 1$ und multiplicirt alle so entstehenden Ungleichungen, so erhält man

$$\left(\frac{\beta}{\beta + n}\right)^k < \frac{\beta(\beta + 1)(\beta + 2) \ldots (\beta + n - 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \ldots (\alpha + n - 1)} < \left(\frac{\beta}{\beta + n}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Geht man zur Grenze für $n = \infty$ über, so wird

$$\lim \frac{\beta}{\beta + n} = 0, \quad \text{also auch} \quad \lim \left(\frac{\beta}{\beta + n}\right)^k = 0, \quad \lim \left(\frac{\beta}{\beta + n}\right)^{\frac{1}{k}} = 0,$$

und daher auch

$$\lim \frac{\beta(\beta + 1)(\beta + 2) \ldots (\beta + n - 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \ldots (\alpha + n - 1)} = 0.$$

Setzt man dagegen $\beta > \alpha$ voraus, so beachte man, dass

$$\lim \frac{\beta(\beta + 1) \ldots (\beta + n - 1)}{\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n - 1)} = \frac{1}{\lim \frac{\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n - 1)}{\beta(\beta + 1) \ldots (\beta + n - 1)}}.$$

Da $\beta > \alpha$, so ist

$$\lim \frac{\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n - 1)}{\beta(\beta + 1) \ldots (\beta + n - 1)} = 0,$$

und daher

$$\lim \frac{\beta(\beta + 1) \ldots (\beta + n - 1)}{\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n - 1)} = \infty.$$

Wir haben somit gefunden: Die unendliche Reihe

$$\frac{\beta}{\alpha + 1} + \frac{\beta(\beta + 1)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} + \frac{\beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)} + \ldots .$$

convergirt, wenn $\alpha > \beta > 0$, und hat dann die Summe

$$\frac{\beta}{\alpha - \beta};$$

Ist $\beta > \alpha > 0$, so divergirt sie.

5. Durch die Forderung, behufs der Entscheidung über die Convergenz einer unendlichen Reihe die Summe einer endlichen Reihe in übersichtlicher Form darzustellen, wird die Schwierigkeit im Allgemeinen nicht vermindert, sondern vermehrt. Handelt es sich zunächst nur um die Entscheidung über die Convergenz, so giebt es einfachere Mittel. Wir geben dieselben zunächst für Reihen an, die lauter positive Glieder haben.

Um über die Convergenz der Reihe

$$1. \qquad q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 \ldots$$

zu entscheiden, vergleichen wir diese Reihe mit einer Reihe

$$2. \qquad Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 \ldots$$

deren Convergenz bekannt ist; wenn von irgend einem Gliede q_m an die Glieder der Reihe 1. kleiner bleiben, als die gleichstehenden Glieder der zweiten Reihe, so dass also

$$q_m < Q_m, \quad q_{m+1} < Q_{m+1}, \quad q_{m+2} < Q_{m+2}, \ldots$$

so ist

$$3. \quad q_m + q_{m+1} + q_{m+2} + q_{m+3} \ldots < Q_m + Q_{m+1} + Q_{m+2} + Q_{m+3} + \ldots$$

Da nun nach der Voraussetzung die Reihe 2. eine endliche Summe hat, da ferner die Reihe

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + \ldots + Q_{m-1}$$

als die Summe einer endlichen Anzahl endlicher Grössen selbst endlich ist so hat auch die unendliche Reihe

$$Q_m + Q_{m+1} + Q_{m+2} + Q_{m+3} + \ldots$$

eine endliche Summe, und diese ist zufolge der Ungleichung 3. grösser als die Summe

$$q_m + q_{m+1} + q_{m+2} + q_{m+3} + \dots$$

also ist letztere Reihe, und daher auch die um eine endliche Anzahl endlicher Glieder vermehrte Reihe

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_{m-1} + q_m + q_{m+1} + q_{m+2} + \dots$$

convergent. Dies ergiebt den Satz: Wenn die Glieder der unendlichen Reihe

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \dots$$

von einem Gliede q_m an sämmtlich kleiner sind als die gleichstehenden Glieder einer convergenten Reihe, so ist die vorgelegte Reihe convergent.

In ähnlicher Weise schliesst man: Sind die Glieder der unendlichen Reihe

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + \dots$$

von einem bestimmten Gliede q_m an sämmtlich grösser als die Glieder einer divergenten Reihe, so ist die vorgelegte Reihe divergent.

6. Die unendliche Reihe

1. $$ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \dots$$

convergirt für alle echt gebrochenen x. Wenn daher in der unendlichen Reihe

2. $$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \dots$$

von einer gewissen Stelle an

3. $$q_{m+1} < ax^{m+1}, \quad q_{m+2} < ax^{m+2}, \quad q_{m+3} < ax^{m+3} \quad \text{u. s. w.,}$$

so convergirt auch 2. Ist nun von einer bestimmten Stelle an das Verhältniss zweier auf einander folgenden Glieder $q_{m+1} : q_m$ ein echter Bruch, und bezeichnet x einen echten Bruch, der grösser ist, als der grösste Werth, den das Verhältniss $q_{m+1} : q_m$ annimmt, so ist

$$q_{m+1} < q_m \cdot x,$$
$$q_{m+2} < q_{m+1} \cdot x < q_m \cdot x^2,$$
$$q_{m+3} < q_{m+2} \cdot x < q_m \cdot x^3, \dots$$

Wenn man nun in 1. und 3. a durch q_m ersetzt, so erkennt man, dass die Glieder der Reihe 2. von q_{m+1} an kleiner bleiben, als die gleichstehenden Glieder der Reihe 1. Hieraus folgt: Wenn das Verhältniss zweier auf einander folgenden Glieder einer unendlichen Reihe von einer bestimmten Stelle an kleiner bleibt als ein gegebener echter Bruch, so ist die Reihe convergent.

Wenn der Quotient $q_{m+1} : q_m$ mit m wächst, so hat man, um dieses Kriterium anwenden zu können, nachzuweisen, dass

$$lim(q_{m+1} : q_m) < 1.$$

Geht man davon aus, dass die Reihe

4. $$ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \dots$$

für $x > 1$ divergirt, so ergiebt sich auf ganz ähnliche Weise: Wenn das Verhältniss zweier auf einander folgenden Glieder einer unendlichen Reihe von einer bestimmten Stelle an grösser ist als die Einheit, so divergirt die Reihe. Nimmt $q_{m+1} : q_m$ mit m zu, so ist die Reihe divergent, wenn

$$lim(q_{m+1} : q_m) > 1.$$

Wenn das Verhältniss $q_{m+1} : q_m$ die Einheit zur Grenze hat, so sind die obigen Schlüsse nicht mehr anwendbar; in diesem Falle muss man die vorge-

legte unendliche Reihe mit einer Reihe vergleichen, die schwächer convergirt oder divergirt, als die Reihen 1. und 4., d. i. deren Glieder langsamer abnehmen als in 1. oder bez. langsamer zunehmen, als in 4.

Als Beispiel betrachten wir die Reihe

5. $$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{5^\mu} + \frac{1}{6^\mu} + \ldots$$

Nimmt man das 2. und 3., das 4., 5., 6. und 7., das 8. bis mit 15., das 16. bis mit 31. Glied u. s. w. zusammen, und bemerkt, dass

$$\frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} < 2 \cdot \frac{1}{2^\mu}, \quad \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{5^\mu} + \frac{1}{6^\mu} + \frac{1}{7^\mu} < 4 \cdot \frac{1}{4^\mu},$$
$$\frac{1}{8^\mu} + \frac{1}{9^\mu} + \ldots + \frac{1}{15^\mu} < 8 \cdot \frac{1}{8^\mu}, \ldots .$$

so erhält man

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \ldots < 1 + \frac{2}{2^\mu} + \frac{4}{4^\mu} + \frac{8}{8^\mu} + \ldots$$

mithin kleiner als

$$1 + \frac{1}{2^{\mu-1}} + \frac{1}{4^{\mu-1}} + \frac{1}{8^{\mu-1}} + \ldots$$

Schreibt man hierfür

$$1 + \frac{1}{2^{\mu-1}} + \left(\frac{1}{2^{\mu-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{\mu-1}}\right)^3 + \ldots ,$$

so erkennt man, dass diese Reihe, und mithin auch 6. convergirt, sobald $\mu > 1$, und divergirt, sobald $\mu < 1$.

Um auch über den Fall $\mu = 1$, also über die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots$$

zu entscheiden, bemerken wir, dass

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} > \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} > \tfrac{1}{2},$$
$$\tfrac{1}{9} + \ldots + \tfrac{1}{16} > \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{17} + \ldots + \tfrac{1}{32} > \tfrac{1}{2},$$

. . . .

In dieser Weise die Glieder zusammenfassend, erhält man unendlich viele Gruppen von Gliedern, deren Summe grösser als $\frac{1}{2}$ ist; folglich ist die Summe der Reihe unendlich gross, die Reihe also divergent.

7. Die Reihe

1. $$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots$$

divergirt nur schwach und liefert daher ein verwendbares Merkmal für die Divergenz einer Reihe. Man erhält hieraus: Wenn das Produkt nq_n von einer gewissen Stelle an abnimmt und sich einer Grenze nähert, die von Null verschieden ist, so divergirt die Reihe

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots$$

Nähert sich das Produkt nq_n der von Null verschiedenen Zahl k, so müssen von einer gewissen Nummer m an die Ungleichungen bestehen

$$mq_m > k, \quad \text{daher} \quad q_m > \frac{1}{m} \cdot k,$$
$$(m+1)\,q_{m+1} > k, \quad \text{„} \quad q_{m+1} > \frac{1}{m+1} \cdot k,$$
$$(m+2)\,q_{m+2} > k, \quad \text{„} \quad q_{m+2} > \frac{1}{m+2} \cdot k.$$

Hieraus folgt

$$q_m + q_{m+1} + q_{m+2} + \ldots > k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots\right)$$

Die Reihe 1. lehrt, dass der Klammerinhalt unendlich gross ist; da nun k nach der Voraussetzung nicht unendlich klein ist, so ist $q_m + q_{m+1} + \ldots$ unendlich gross, und daher die vorgelegte Reihe divergent.

Bei der Reihe

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \ldots$$

ist

$$\lim m q_m = \lim \frac{m}{2m+1} = \lim 1 : \left(2 + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2},$$

daher divergirt die Reihe.

Ebenso erfährt man, dass die Reihen

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{13} + \ldots,$$
$$1 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{17} + \ldots,$$
$$1 + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{21} + \ldots,$$

überhaupt alle Reihen von der Form

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{a+4b} + \ldots.$$

divergiren; denn es ist

$$\lim m q_m = \lim \frac{m}{a + (m-1)b} = \lim \frac{1}{\dfrac{a-b}{m} + b} = \frac{1}{b},$$

und daher von Null verschieden, wenn a und b endliche Zahlen sind.

8. Wenn $\lim q_{n+1} : q_n = 1$, so führt der Vergleich der unendlichen Reihe

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots.$$

mit der geometrischen Reihe zu keiner Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz. In einigen dieser Fälle führt der folgende Satz zum Ziele: Ist von einer bestimmten Stelle $n = m$ an das Produkt

$$n\left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n}\right)$$

grösser als die Einheit, so convergirt die Reihe; ist es kleiner als die Einheit, so divergirt die Reihe.

Im ersten Falle kann man einen unechten Bruch k wählen, so dass die Ungleichungen gelten

$$m\left(1 - \frac{q_{m+1}}{q_m}\right) > k, \quad (m+1)\left(1 - \frac{q_{m+2}}{q_{m+1}}\right) > k,$$
$$(m+2)\left(1 - \frac{q_{m+3}}{q_{m+2}}\right) > k, \ldots.$$

Aus der Ungleichung

$$n\left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n}\right) > k$$

schliesst man die folgende

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} < \frac{n-k}{n}.$$

Wendet man dies der Reihe nach für die Werthe $n = m$, $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$, ... an und multiplicirt die ersten zwei, die ersten drei, die ersten vier .... der so erhaltenen Ungleichungen, so erhält man

$$\frac{q_{m+1}}{q_m} < \frac{m-k}{m}, \quad \frac{q_{m+2}}{q_m} < \frac{(m-k)(m-k+1)}{m(m+1)},$$
$$\frac{q_{m+3}}{q_m} < \frac{(m-k)(m-k+1)(m-k+2)}{m(m+1)(m+2)}, \quad \frac{q_{m+4}}{q_m} < \frac{(m-k)(m-k+1)(m-k+2)(m-k+3)}{m(m+1\,(m+2)(m+3)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hieraus ergiebt sich

$$q_{m+1} + q_{m+2} + q_{m+3} + q_{m+4} + \cdots$$
$$< q_m \left[\frac{m-k}{m} + \frac{(m-k)(m-k+1)}{m(m+1)} + \frac{(m-k)(m-k+1)(m-k+2)}{m(m+1)(m+2)} + \cdots\right].$$

Da k nach der Voraussetzung ein unechter Bruch ist, so ist

$$m - k < m - 1,$$

daher convergirt die in der Klammer enthaltene unendliche Reihe (vergl. No. 4), mithin auch die vorgelegte Reihe

Ist hingegen von einer bestimmten Stelle $n = m$ an das Produkt

$$n\left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n}\right)$$

beständig kleiner als die Einheit, so kann man einen echten Bruch k immer so wählen, dass die Ungleichung gilt

$$n\left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n}\right) < k.$$

Hieraus schliesst man

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} > \frac{n-k}{n},$$

und dann wie oben weiter, dass

$$\frac{q_{m+1}}{q_m} > \frac{m-k}{m}, \quad \frac{q_{m+2}}{q_m} > \frac{(m-k)(m-k+1)}{m(m+1)}, \quad \frac{q_{m+3}}{q_m} > \frac{(m-k)(m-k+1)(m-k+2)}{m(m+1)(m+2)}$$

. . . .

Daher ist

$$q_{m+1} + q_{m+2} + q_{m+3} + q_{m+4} + \cdots$$
$$> q_m \left[\frac{m-k}{m} + \frac{(m-k)(m-k+1)}{m(m+1)} + \frac{(m-k)(m-k+1)(m-k+2)}{m(m+1\,(m+2)} + \cdots\right].$$

Da k hier ein unechter Bruch ist, so ist

$$m - k > m - 1,$$

daher divergirt die in der Klammer enthaltene Reihe, und um so mehr die vorgelegte Reihe.

Nimmt das Produkt

$$n\left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n}\right)$$

von einer bestimmten Stelle an beständig zu oder beständig ab, und ist $\lim n\left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n}\right) = 1$, so liefert der soeben bewiesene Satz keine Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz der Reihe; auf die Untersuchung solcher Fälle können wir hier nicht weiter eingehen.

Beispiel. Die Reihe

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{x^9}{9} + \cdots$$

liefert für den Quotienten zweier auf einander folgenden Glieder

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{(2n-3)^2}{(2n-2)(2n-1)}\,x^2.$$

Der vor x^2 stehende Faktor ist kleiner als Eins, nimmt beständig zu, wenn m wächst und hat für ein unendliches m den Grenzwerth 1. Ist nun $x < 1$, so ist daher für alle Werthe von n

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} < 1,$$

und daher die obige Reihe convergent; ist $x > 1$, so ist

$$\lim \frac{q_{n+1}}{q_n} > 1,$$

und daher divergirt die Reihe. Für $x = 1$ erhält man aber auf diesem Wege keine Auskunft. Wendet man das soeben entwickelte Verfahren an, so erhält man für $x = 1$ nach einfacher Reduction

$$n\left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n}\right) = \frac{n(6n-7)}{(2n-2)(2n-1)} = \left(6 - \frac{7}{n}\right) : \left(2 - \frac{2}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

Der Grenzwerth dieses Bruches ist $\frac{3}{2}$; folglich convergirt die vorgelegte Reihe auch noch, wenn $x = 1$ ist.

9. Wir wenden uns nun zur Untersuchung über die Convergenz und Divergenz von Reihen, deren Glieder nicht sämmtlich positiv sind.

Hier kann man zunächst von folgendem Satze Gebrauch machen, dessen Richtigkeit ohne Weiteres erhellt: *Eine unendliche Reihe, deren Glieder ungleiche Vorzeichen haben, convergirt, wenn die aus den absoluten Werthen der Glieder gebildete Reihe convergirt.* Die Reihe kann aber auch dann noch convergiren, wenn die aus den absoluten Werthen gebildete Reihe divergirt.

10. *Wenn je zwei auf einander folgende Glieder einer unendlichen Reihe ungleiche Vorzeichen haben, und die absoluten Werthe der Glieder von einer bestimmten Stelle an beständig bis zur Grenze Null abnehmen, so ist die Reihe convergent.*

Die Reihe sei

$$q_1 - q_2 + q_3 - q_4 + q_5 - q_6 + q_7 - q_8 + \dots$$

es seien q_1, q_2, q_3 sämmtlich positiv und

$$q_m > q_{m+1} > q_{m+2} > q_{m+3} > \dots .$$

Setzt man alsdann

$$\begin{aligned}
s_1 &= q_m, \\
s_3 &= q_m - (q_{m+1} - q_{m+2}), \\
s_5 &= q_m - (q_{m+1} - q_{m+2}) - (q_{m+3} - q_{m+4}), \\
s_7 &= q_m - (q_{m+1} - q_{m+2}) - (q_{m+3} - q_{m+4}) - (q_{m+5} - q_{m+6}), \\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
s_2 &= q_m - q_{m+1}, \\
s_4 &= q_m - q_{m+1} + (q_{m+2} - q_{m+3}), \\
s_6 &= q_m - q_{m+1} + (q_{m+2} - q_{m+3}) + (q_{m+4} - q_{m+5}), \\
s_8 &= q_m - q_{m+1} + (q_{m+2} - q_{m+3}) + (q_{m+4} - q_{m+5} + (q_{m+6} - q_{m+7}), \\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

so ist, da $q_r - q_{r+1}$ der Voraussetzung nach für jedes $r > m$ positiv ist

$$s_1 > s_3 > s_5 > s_7 > s_9 > \dots$$

und

$$s_2 < s_4 < s_6 < s_8 < s_{10} < \dots$$

Dabei ist $s_1 > s_2, \quad s_3 > s_4, \quad s_5 > s_6, \dots$

Da nun

$$\lim(s_{2p-1} - s_{2p}) = \lim q_{m+2p-1} = 0,$$

so folgt, dass die abnehmenden Grössen $s_1, s_3, s_5, s_7 \dots$ sowie die zunehmenden $s_2, s_4, s_6, s_8 \dots$ derselben endlichen Grenze sich nähern, die kleiner als jedes s_{2p} und grösser als jedes s_{2p-1} ist. Wird diese gemeinsame Grenze mit S bezeichnet, so ist

$$S = q_1 - q_2 + q_3 - q_4 + q_5 - q_6 + \dots .$$

Dieser Satz zeigt, dass die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \dots$$

convergirt, obgleich die Reihe aus den absoluten Werthen divergirt. Die Summe der Reihe liegt z. B. zwischen

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} \quad \text{und} \quad 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5},$$

d. i. zwischen $\frac{35}{60}$ und $\frac{47}{60}$.

11. Wenn der Grenzwerth der absoluten Werthe der Glieder einer Reihe eine von Null verschiedene Zahl γ ist, und im Uebrigen dieselben Voraussetzungen gelten, wie beim vorigen Satze, so hat die Reihe keinen bestimmten Grenzwerth.

Man hat nämlich auch jetzt wieder

$$s_1 < s_3 < s_5 < s_7 < s_9 \ldots$$

$$s_2 > s_4 > s_6 > s_8 > s_{10} \ldots$$

und

$$\lim(s_{2p-1} - s_{2p}) = \lim q_{m+2p-1}.$$

Da nun nach der Voraussetzung

$$\lim q_{m+2p-1} = \gamma,$$

so folgt, dass die Summen $s_1, s_3, s_5 \ldots$ und $s_2, s_4, s_6 \ldots$ sich zwei verschiedenen Grenzen nähern, deren Unterschied γ ist. Die unendliche Reihe

$$q_1 - q_2 + q_3 - q_4 + q_5 - q_6 + \ldots.$$

liefert also zwei endliche um γ verschiedene Werthe, je nachdem man sie bei einer ungeraden oder einer geraden Gliederzahl abbricht.

12. Eine Reihe, deren Glieder ungleiche Zeichen haben, kann verschiedene Summen geben, wenn man die Anordnung der Glieder ändert; es kann selbst der Fall eintreten, dass die Reihe bei einer gewissen Anordnung der Glieder convergirt, bei einer andern divergirt. Wenn die aus den positiven Gliedern gebildete Reihe, sowie die aus den negativen Gliedern gebildete einzeln divergiren, so ist es doch möglich, dass, wenn man in einer bestimmten Weise zwischen die positiven Glieder die negativen einstreut, der Grenzwerth von

$$q_1 + q_2 + q_3 + \ldots. + q_n,$$

der als der Grenzwerth der Differenz zweier unendlich wachsenden Summen aufgefasst werden kann, einen endlichen Betrag hat, während bei einer andern Anordnung, bei welcher unter den ersten n Gliedern eine grössere Anzahl positiver oder negativer Glieder sich finden, der Grenzwerth positiv oder negativ unendlich oder auch von einem andern endlichen Betrage sein kann, als bei der ersten Anordnung. Die Reihe

$$S = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots.,$$

in welcher je zwei folgende Glieder ungleiche Vorzeichen haben, ist nach No. 9 convergent; ihre Summe beträgt $l2$ (§ 13, No. 7). Ordnet man die negativen Glieder so an, dass man hinter je zwei positive ein negatives einschaltet, vom grössten an absteigend, so entsteht die Reihe

$$S' = (1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6}) + \ldots.$$

S' ist dann der Grenzwerth von

$$S_n' = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right),$$

während S der Grenzwerth ist von

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4}\right.$$

Hieraus folgt

$$\lim(S_n' - S_n) = \Sigma_1^\infty \left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n}\right) = \Sigma_1^\infty \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2} S,$$

und daher hat man $\qquad S' = \tfrac{3}{2} S.$

Wir begnügen uns damit, hierüber folgenden Satz nachzuweisen: Wenn eine convergente Reihe nur positive Glieder hat, oder wenn, falls die Glieder mit ungleichen Vorzeichen behaftet sind, die aus den absoluten Werthen der Glieder gebildete Reihe convergirt, so ist die Reihensumme von der Anordnung der Glieder nicht abhängig.

Die vorliegende Reihe sei

1. $$S = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + \ldots .$$

Durch andere Anordnung der Glieder entstehe

2. $$S' = q_f + q_g + q_h + q_i + q_k + \ldots$$

Ferner sei S_n die Summe der ersten n Glieder in 1., also

$$S_n = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n .$$

In der Reihe S' gehe man bis zu einem solchen Gliede q_r vorwärts, dass in der Gruppe

$$S_r' = q_f + q_g + q_h + \ldots + q_r$$

alle Glieder von S_n vorhanden sind; ausser diesen Gliedern enthält dann S_r' noch andere Glieder, deren Indices alle grösser sein müssen, als n; die Summe dieser Glieder sei

$$q_x + q_y + q_z + \ldots .$$

Alsdann ist

$$S_r' - S_n = q_x + q_y + q_z + \ldots$$

Nähert sich nun n dem Grenzwerthe ∞, so nähert sich auch r dieser Grenze; die Summe der absoluten Werthe von $q_x, q_y, q_z, \ldots$ ist nur ein Theil der Summe der absoluten Werthe der Glieder der Reihe S, deren Index grösser als n ist, also nähert sich

$$q_x + q_y + q_z \ldots .$$

dem Grenzwerthe Null; daher haben wir

$$S - S' = lim S_n - lim S_r' = lim (S_n - S_r') = 0 ,$$

folglich

$$S = S' .$$

In dem obigen Beispiele ist die Voraussetzung des Satzes nicht erfüllt, denn die Reihe der absoluten Werthe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots$$

ist divergent.

13. Addition unendlicher Reihen. Wenn die unendlichen Reihen

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \ldots ,$$
$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots$$

convergiren, und man streut zwischen die n Glieder der ersten Reihe

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$$

die r Glieder der zweiten

$$q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_r$$

so, dass mit n auch r unendlich gross wird, so erhält man eine neue convergente unendliche Reihe, deren Summe $P + Q$ ist.

Bezeichnet man die neue unendliche Reihe mit S und die Summe der ersten $n + r$ Glieder mit S_{n+r}, so ist

$$S_{n+r} = P_n + Q_r .$$

Werden n und r unendlich gross, so gehen P_n und Q_r in P und Q über, und man hat daher

$$S = P + Q .$$

Denkt man sich P und Q aus gegebenen Reihen durch Multiplication mit en ichen Faktoren a und b entstanden, so erkennt man, dass der soeben

gegebene Satz auch auf die Bildungen $P - Q$, $aP + bQ$ anwendbar ist. Nachdem man aus den convergenten Reihen aP und bQ die convergente Reihe $aP + bQ$ erhalten hat, kann man auf diese Reihe und eine neue S den Satz wieder anwenden u. s. f.; dadurch gelangt man zu der Bildung

$$aP + bQ + cS + dT + \ldots,$$

jedoch mit der ausdrücklichen Einschränkung, dass die Anzahl der zu einem Aggregat verbundenen unendlichen Reihen nicht eine unendlich grosse sein darf; ein solcher Fall müsste vielmehr besonders untersucht werden.*)

14. Multiplication von Potenzreihen. Auf die convergenten unendlichen, nach steigenden Potenzen einer Variabeln x fortschreitenden Reihen

$$1. \quad P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

$$2. \quad Q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

wollen wir die gewöhnlichen Multiplicationsregeln anwenden und das Resultat nach steigenden Potenzen von x ordnen; wir erhalten dann eine neue Potenzreihe, und es ist nun zu entscheiden, ob die Summe dieser Reihe gleich dem Produkte PQ ist. Durch Multiplication der Reihen 1. und 2. erhält man eine Reihe S, deren allgemeines Glied ist

$$3. \quad s_{n+1} = (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0) x^n.$$

Durch Multiplication der ersten $n + 1$ Glieder der Reihen 1. und 2. entsteht das Produkt

$$4. \quad \begin{aligned} P_{n+1} Q_{n+1} = a_0 b_0 &+ (a_1 b_0 + a_0 b_1) x \\ &+ (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 \\ &+ (a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3) x^3 \\ &+ (a_4 b_0 + a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_0 b_4) x^4 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n) x^n \\ &+ (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \ldots + a_1 b_n) x^{n+1} \\ &+ (a_n b_2 + a_{n-1} b_3 + \ldots + a_2 b_n) x^{n+2} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ a_n b_n x^{2n}. \end{aligned}$$

Diese ersten $n + 1$ Glieder dieses Produktes stimmen der Reihe nach mit

$$s_1, \; s_2, \; s_3, \; s_4, \; s_5 \ldots\ldots s_{n+1}$$

überein. Setzen wir nun voraus, dass die Reihen P und Q nur positive Glieder enthalten, und setzen

$$S_{n+1} = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_{n+1}$$

so ist

$$5. \quad S_{n+1} < P_{n+1} \cdot Q_{n+1}.$$

Die Glieder, welche in 4. auf das $(n + 1)$te folgen, sind kleiner als die Glieder

$$s_{n+2}, \; s_{n+3}, \; \ldots s_{2n+1};$$

folglich ist

$$6. \quad S_{2n+1} > P_{n+1} Q_{n+1}.$$

Vertauschen wir in 5. n gegen $2n$, so erhalten wir im Verein mit 6. die Begrenzung

$$P_{2n+1} Q_{2n+1} > S_{2n+1} > P_{n+1} Q_{n+1}.$$

Für ein unendlich wachsendes n wird

$$\lim P_{2n+1} Q_{2n+1} = \lim P_{n+1} Q_{n+1} = PQ, \quad \lim S_{2n+1} = S;$$

daher folgt

$$S = PQ.$$

---

*) Vergl. Schloemilch, Compendium der höheren Analysis, 1. Bd., § 43.

Wenn man daher zwei convergente Potenzreihen mit positiven Gliedern multiplicirt, und das Produkt nach steigenden Potenzen der Variabeln ordnet, so erhält man eine convergente Potenzreihe, deren Summe das Produkt der Summen der beiden gegebenen Reihen ist.

Wenn in den Reihen P und Q positive und negative Glieder mit einander abwechseln, und die Reihen aus den positiven sowie die aus den negativen Glieder einzeln convergiren (oder wenn, was damit gleichbedeutet, die Reihen der absoluten Werthe convergiren), so kann man die Ordnung der Glieder in P und Q dergestalt ändern, dass man P und Q als Differenzen je zweier Reihen auffasst, deren Glieder positiv sind,

$$P = U' - U'', \quad Q = V' - V''.$$

Auf die Reihen U', U'', V', V'' kann man die Multiplicationsregel anwenden. Aus den Produkten

$$U'V', \quad U'V'', \quad U''V', \quad U''V'',$$

erhält man

$$S = U'V' - U'V'' - U''V' + U''V'' = (U' - U'')(V' - V'');$$

folglich ist

$$S = PQ.$$

Bei Potenzreihen mit wechselnden Zeichen gilt also die Multiplicationsregel, wenn die Reihen der absoluten Werthe convergiren.

15. Differentiation unendlicher Reihen. Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe eine unbestimmte Grösse x enthalten und die Reihe für alle zwischen gegebenen Grenzen liegenden Werthe von x convergirt, so ist innerhalb dieser Grenzen die Summe der Reihe eine Function von x. Bezeichnen wir dieselbe mit $S(x)$ und das allgemeine Glied der Reihe mit $\varphi(x, n)$, so ist

$$1. \qquad S(x) = \varphi(x, 1) + \varphi(x, 2) + \varphi(x, 3) + \ldots\ldots$$

Es fragt sich nun, unter welchen Bedingungen man aus dieser Gleichung auf die durch Differentiation gewonnene schliessen darf

$$S'(x) = \varphi'(x, 1) + \varphi'(x, 2) + \varphi'(x, 3) + \ldots$$

Denn wenn auch für eine endliche Anzahl Summanden aus der Gleichung

$$S = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n$$

auf die Gleichung

$$S' = \varphi_1' + \varphi_2' + \ldots + \varphi_n'$$

geschlossen wird, so kann doch nicht behauptet werden, dass dieser Schluss auf eine Summe aus unendlich vielen Summanden ausgedehnt werden kann.

Wenn $x + h$ den Convergenzbereich der Reihe 1. nicht überschreitet, so ist

$$2. \qquad S(x + h) = \varphi(x + h, 1) + \varphi(x + h, 2) + \varphi(x + h, 3) + \ldots$$

Zieht man hiervon die Reihe 1. ab und setzt nach § 13, No. 3, 5

$$\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} = \varphi'(x) + \tfrac{1}{2}h\varphi''(x + \vartheta h), \quad 0 < \vartheta < h,$$

so erhält man

$$3. \qquad \frac{S(x + h) - S(x)}{h} = \varphi'(x, 1) + \varphi'(x, 2) + \varphi'(x, 3) + \ldots$$
$$+ \tfrac{1}{2}h[\varphi''(x + \vartheta_1 h, 1) + \varphi''(x + \vartheta_2 h, 2) + \varphi''(x + \vartheta_3 h, 3) + \ldots].$$

Wenn die in der Klammer eingeschlossene Reihe — auch für einen verschwindenden Werth von h — gegen einen endlichen Grenzwerth $R(x, h)$ convergirt, so nähert sich das Produkt $hR(x, h)$ mit h zugleich der Grenze Null; man erhält daher aus 3.

$$\frac{dS(x)}{dx} = \varphi'(x, 1) + \varphi'x, 2) + \varphi'(x, 3) + \ldots .$$

Dies ergiebt: Wenn für den Werth x die Differentialquotienten $\varphi'(x, n)$ und $\varphi''(x, n)$ endlich und stetig sind und wenn die Reihe

$$R(x, h) = \varphi''(x + \vartheta_1 h, 1) + \varphi''(x + \vartheta_2 h, 2) + \varphi''(x + \vartheta_3 h, 3) + \ldots$$

für ein hinlänglich kleines positives h und für positive echt gebrochene ϑ convergirt, so folgt aus der convergenten Reihe

$$S(x) = \varphi(x, 1) + \varphi(x, 2) + \varphi(x, 3) + \ldots$$

die neue convergente Reihe

$$\frac{dS(x)}{dx} = \varphi'(x, 1) + \varphi'(x, 2) + \varphi'(x, 3) + \ldots$$

16. Als Beispiel betrachten wir zunächst die Potenzreihe

$$S(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots, \qquad -1 < x \leqq +1.$$

Das allgemeine Glied derselben ist

$$S(x, n) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1};$$

hieraus folgt

$$\varphi''(x, n) = (-1)^{n-1}(2n-2)x^{2n-3},$$

$$R(x, h) = -2(x + \vartheta_2 h) + 4(x + \vartheta_3 h)^3 - 6(x + \vartheta_4 h)^5 + 8(x + \vartheta_5 h)^7 \ldots$$

Die Reihe der absoluten Werthe ist

$$2(x + \vartheta_2 h) + 4(x + \vartheta_3 h)^3 + 6(x + \vartheta_4 h)^5 + \ldots .$$

Setzt man für die ϑ den grössten Werth, nämlich die Einheit, so erhält man eine Reihe, welche convergirt, so lange $-1 < (x + h) < +1$; es convergirt daher auch $R(x, h)$; folglich ist der Differentialquotient von $S(x)$ gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Reihenglieder

$$\frac{dS(x)}{dx} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots$$

Die Summe der rechts stehenden Reihe ist bekanntlich $1 : (1 + x^2)$; man hat daher

$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Da nun auch

$$\frac{d\, arc\, tang\, x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2},$$

so folgt, dass

$$\frac{d(S - arc\, tang\, x)}{dx} = 0,$$

dass also $S - arc\, tang\, x$ gleich eine von x unabhängige Constante a ist. Man kann dieselbe bestimmen, indem man für einen geschickt gewählten Werth $x = x_0$ die Differenz $S_0 - arc\, tang\, x_0$ berechnet; setzt man z. B. $x_0 = 0$, so erhält man $S_0 = 0$, $arc\, tang\, x_0 = 0$, und hieraus folgt $a = 0$. Daher ist

$$arc\, tang\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots . \quad -1 < x \leqq +1.$$

Für $x = +1$ folgt hieraus eine zur Berechnung von π brauchbare For-

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \ldots$$

17. Die Reihe

$$\varphi = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

convergirt für $-1 \leqq x \leqq +1$.

Das allgemeine Glied ist

$$\varphi(x, n) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Hieraus folgt

$$\varphi''(x, n) = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-4)} \cdot x^{2n-3}.$$

Die Reihe $R(x, h)$ wird bei positiven Werthen von x vergrössert, wenn man $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \ldots = +1$ setzt. Für den Grenzwerth des Quotienten zweier auf einanderfolgenden Glieder ergiebt sich unter dieser Voraussetzung

$$lim \frac{\varphi(x+h, n+1)}{\varphi(x+h, n)} = lim \frac{2n-1}{2n-2}(x+h)^2.$$

Folglich convergirt $R(x, h)$ sobald $x^2 < 1$; innerhalb dieser Grenzen ist daher

$$\frac{dS(x)}{dx} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot x^6 + \ldots$$

Nun ist nach dem binomischen Satze (§ 13, No. 6)

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \ldots.$$

Daher haben wir

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Da nun auch

$$\frac{d \, arc \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

so folgt

$$S - arc \sin x = a,$$

wo a einer von x unabhängige Constante bezeichnet. Setzen wir $x = 0$, so wird $S = 0$ und $arc \sin x = 0$; folglich ist auch $a = 0$. Dies ergiebt die auch für $x^2 = 1$ convergente Reihenentwicklung

$$arc \sin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

$$-1 \leqq x \leqq +1.$$

Für $x = +1$ folgt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \ldots,$$

eine nur schwach convergirende Reihe. Für $x = \frac{1}{2}$ ergiebt sich die rascher convergirende

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \ldots$$

18. Wenn man zur numerischen Berechnung einer Irrationalzahl (z. B. von π, e, Logarithmen, Sinus oder Cosinus bestimmter Bogen) eine unendliche Reihe zur Verfügung hat und die gesuchte Zahl mit grosser Genauigkeit bestimmt werden soll, so ist die direkte Verwendung der Reihe oft insofern sehr lästig, al man zur Erreichung grosser Genauigkeit nicht selten eine sehr grosse Anzahl v Gliedern der Reihe berechnen und addiren muss. Für solche Fälle ist es w thvoll, eine Methode zu besitzen, welche die Reihensumme bis auf eine grosse G auigkeit rascher gewinnen lehrt, als dies durch direkte Summation erfolgen k nte*).

*) KUMMER, Eine neue Methode, die numerischen Summen langsam convergirender Reihen zı aden. CRELLE's Journal, Bd. 16, pag. 206, 1837.

Die unendliche Reihe

$$S = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n + q_{n+1} + \ldots$$

theilen wir in

$$S_n = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$$

und

$$R = q_{n+1} + q_{n+2} + \ldots;$$

wir nehmen an, dass S_n durch direkte Summation der darin enthaltenen Reihenglieder gefunden sei und suchen einen angenäherten Werth des Restes R. Hierzu bestimme man die beiden Functionen $\varphi(n)$ und $f(n)$ so, dass

1. $$\lim \varphi(n) \cdot q_n = 0,$$

2. $$\lim f(n) = 1,$$

3. $$f(n) = \frac{q_n}{q_{n+1}} \varphi(n) - \varphi(n+1).$$

Es wird sich später zeigen, wie sich φ und f diesen Bedingungen entsprechend bestimmen lassen. Aus den Gleichungen

$$f(n)\, q_{n+1} = \varphi(n)\, q_n - \varphi(n+1)\, q_{n+1},$$
$$f(n+1)\, q_{n+2} = \varphi(n+1)\, q_{n+1} - \varphi(n+2)\, q_{n+2},$$
$$f(n+2)\, q_{n+3} = \varphi(n+2)\, q_{n+2} - \varphi(n+3)\, q_{n+3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(n+k)\, q_{n+k+1} = \varphi(n+k)\, q_{n+k} - \varphi(n+k+1)\, q_{n+k+1}$$

erhält man durch Addition

$$f(n)q_{n+1} + f(n+1)q_{n+2} + \ldots + f(n+k)q_{n+k+1} = \varphi(n)q_n - \varphi(n+k+1)q_{n+k+1}.$$

Lässt man n unbegrenzt wachsen, so folgt in Rücksicht auf 1.

$$\varphi(n)\, q_n = f(n)\, q_{n+1} + f(n+1)\, q_{n+2} + f(n+2)\, q_{n+3} + \ldots.$$

Ist nun

$$f(n) > f(n+1) > f(n+2) > \ldots > 1$$

so ist

$$R < f(n)\, q_{n+1} + f(n+1)\, q_{n+2} + \ldots.$$

und zugleich

$$R > q_{n+1} + \frac{f(n+1)}{f(n)} q_{n+2} + \frac{f(n+2)}{f(n+1)} q_{n+3} + \ldots$$

Man hat somit für R die Begrenzung

4. $$\frac{\varphi(n)\, q_n}{f(n)} < R < \varphi(n)\, q_n.$$

Wenn hingegen

$$f(n) < f(n+1) < f(n+2) < \ldots < 1,$$

so hat man umgekehrt

5. $$\varphi(n)\, q_n < R < \frac{\varphi(n)\, q_n}{f(n)}.$$

Die Functionen φ und f kann man in folgender Weise entsprechend den Bedingungen 1., 2., 3. erhalten. Man setze für $\varphi(n)$ eine algebraische rationale gebrochene Function von n, etwa

6. $$\varphi(n) = c'n + c_0 + \frac{a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \ldots + a_p}{n^p + b_1 n^{p-1} + b_2 n^{p-2} + \ldots + b_p}.$$

Entwickelt man durch Division den Bruch nach steigenden Potenzen von $1 : n$, so erhält man

7. $$\varphi(n) = c'n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_3}{n^3} + \frac{c_4}{n^4} + \ldots$$

Ferner wollen wir voraussetzen, dass sich der Quotient $q_n : q_{n+1}$ in folgende Reihe entwickeln lässt

8. $$\frac{q_n}{q_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{\alpha_3}{n^3} + \frac{\alpha_4}{n^4} + \ldots$$

Dann ist $f(n)$ durch die Gleichung 3. bestimmt

$$f(n) = \frac{q_n}{q_{n+1}}\varphi(n) - \varphi(n+1).$$

Um aus derselben $f(n)$ nach fallenden Potenzen von n darzustellen, multipliciren wir zunächst die Reihen 7. und 8. und erhalten

$$
\begin{aligned}
\frac{q_n}{q_{n+1}}\varphi(n) = c'n &+ (c_0 + \alpha_1 c') + (c'\alpha_2 + c_0\alpha_1 + c_1)\frac{1}{n} \\
&+ (c'\alpha_3 + c_0\alpha_2 + c_1\alpha_1 + c_2)\frac{1}{n^2} \\
&+ (c'\alpha_4 + c_0\alpha_3 + c_1\alpha_2 + c_2\alpha_1 + c_3)\frac{1}{n^3} \\
&+ (c'\alpha_5 + c_0\alpha_4 + c_1\alpha_3 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_1 + c_4)\frac{1}{n^4} \\
&+ (c'\alpha_6 + c_0\alpha_5 + c_1\alpha_4 + c_2\alpha_3 + c_3\alpha_2 + c_4\alpha_1 + c_5)\frac{1}{n^5} \\
9.\quad &+ (c'\alpha_7 + c_0\alpha_6 + c_0\alpha_5 + c_2\alpha_4 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_2 + c_5\alpha_1 + c_6)\frac{1}{n^6} \\
&+ (c'\alpha_8 + c_0\alpha_7 + c_1\alpha_6 + c_2\alpha_5 + \ldots\ldots + c_6\alpha_1 + c_7)\frac{1}{n^7} \\
&+ (c'\alpha_9 + c_0\alpha_8 + c_1\alpha_7 + c_2\alpha_6 + \ldots\ldots + c_7\alpha_1 + c_8)\frac{1}{n^8} \\
&+ (c'\alpha_{10} + c_0\alpha_9 + c_1\alpha_8 + c_2\alpha_7 + \ldots\ldots + c_8\alpha_1 + c_9)\frac{1}{n^9} \\
&+ (c'\alpha_{11} + c_0\alpha_{10} + c_1\alpha_9 + c_2\alpha_8 + \ldots\ldots + c_9\alpha_1 + c_{10})\frac{1}{n^{10}} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Ferner ersetzen wir in 7. n durch $n+1$ und bilden so

$$\varphi(n+1) = c'(n+1) + c_0 + \frac{c_1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{c_2}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2} + \frac{c_3}{n^3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3} + \ldots$$

Entwickeln wir hier die negativen Potenzen der Binome nach steigenden Potenzen von $1 : n$ und beachten, dass

$$
\begin{aligned}
\binom{-\mu}{\nu} &= (-1)^\nu \cdot \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+\nu-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\nu} = (-1)^\nu\binom{\mu+\nu-1}{\nu} \\
&= (-1)^\nu\binom{\mu+\nu-1}{\mu-1},
\end{aligned}
$$

so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\varphi(n+1) = c'n + (c'+c_0) + \frac{c_1}{n} - (c_1 - c_2)\frac{1}{n^2} + (c_1 - 2c_2 + c_3)\frac{1}{n^3} \\
10.\quad &- \ldots + (-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{n^k}\left[c_1 - \binom{k-1}{1}c_2 - \binom{k-1}{2}c_3 - \binom{k-1}{3}c_4 + \ldots \pm c_k\right] \pm \ldots
\end{aligned}
$$

Aus den Reihen 9. und 10. ergiebt sich schliesslich

$$
\begin{aligned}
11.\quad f(n) = c'(\alpha_1 - 1) &+ (c'\alpha_2 + c_0\alpha_1)\frac{1}{n} + [c'\alpha_3 + c_0\alpha_2 + c_1(\alpha_1 + 1)]\frac{1}{n^2} \\
&+ [c'\alpha_4 + c_0\alpha_3 + c_1(\alpha_2 - 1) - c_2(\alpha_1 + 2)]\cdot\frac{1}{n^3} \\
&+ [c'\alpha_5 + c_0\alpha_4 + c_1(\alpha_3 + 1) + c_2(\alpha_2 - 3) + c_3(\alpha_1 + 3)]\frac{1}{n^4} \\
&+ [c'\alpha_6 + c_0\alpha_5 + c_1(\alpha_4 - 1) + c_2(\alpha_3 + 4) + c_3(\alpha_2 - 6) + c_4(\alpha_1 + 4)]\frac{1}{n^5}
\end{aligned}
$$

$$+ [c'\alpha_7 + c_0\alpha_6 + c_1(\alpha_5+1) + c_2(\alpha_4-5) + c_3(\alpha_3+10) + c_4(\alpha_2-10) + c_5(\alpha_1+5) \cdot \frac{1}{n^6}$$

$$+ [c'\alpha_8 + c_0\alpha_7 + c_1(\alpha_6-1) + c_2(\alpha_5+6) + c_3(\alpha_4-15) + c_4(\alpha_3+20) + c_5(\alpha_2-15)$$
$$+ c_6(\alpha_1+6)] \cdot \frac{1}{n^7}$$

$$+ [c'\alpha_9 + c_0\alpha_8 + c_1(\alpha_7+1) + c_2(\alpha_6-7) + c_3(\alpha_5+21) + c_4(\alpha_4-35) + c_5(\alpha_3+35)$$
$$+ c_6(\alpha_2-21) + c_7(\alpha_1+7)] \cdot \frac{1}{n^8}$$

$$+ [c'\alpha_{10} + c_0\alpha_9 + c_1(\alpha_8-1) + c_2(\alpha_7+8) + c_3(\alpha_6-28) + c_4(\alpha_5+56) + c_5(\alpha_4-70)$$
$$+ c_6(\alpha_3+56) + c_7(\alpha_2-28) + c_8(\alpha_1+8)] \cdot \frac{1}{n^9}$$

$$+ [c'\alpha_{11} + c_0\alpha_{10} + c_1(\alpha_9+1) + c_2(\alpha_8-9) + c_3(\alpha_7+36) + c_4(\alpha_6-84)$$
$$+ c_5(\alpha_5+126) + c_6(\alpha_4-126) + c_7(\alpha_3+84) + c_8(\alpha_2-36) + c_9(\alpha_1+9)] \cdot \frac{1}{n^{10}}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Zahlen c', c_0, $c_1 \ldots$ kann man nun so bestimmen, dass der Gleichung 2. genügt wird, und dass möglichst viele Glieder von $f(n)$ verschwinden; zur Erfüllung dieser Bestimmungen muss man die Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ kennen, und erhält somit für jede Reihe eine besondere Bestimmung für $f(n)$. Hat man nun die Coefficienten bestimmt

$$c',\ c_0,\ c_1,\ c_2 \ldots c_{2p},$$

so hat man den Bruch (6)

$$\frac{a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \ldots + a_p}{n^p + b_1 n^{p-1} + \ldots + b_p}$$

der Reihe gleichzusetzen

$$\frac{c_1}{n} + \frac{c^2}{n^2} + \frac{c^3}{n^3} + \ldots + \frac{c_{2p}}{n^{2p}} + \ldots$$

Man erhält dann die Gleichung

$$a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p = (n^p + b_1 n^{p-1} + \ldots + b_p)\left(\frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \ldots + \frac{c_{2p}}{n^{2p}} + \ldots\right).$$

Setzt man die Coefficienten gleich hoher Potenzen von n auf beiden Seiten dieser Gleichung einander gleich, so erhält man

$$\begin{aligned}
a_1 &= c_1, \\
a_2 &= c_2 + b_1 c_1, \\
a_3 &= c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1, \\
a_4 &= c_4 + b_1 c_3 + b_2 c_2 + b_3 c_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_p &= c_p + b_1 c_{p-1} + \ldots + b_{p-1} c_1, \\
0 &= c_{p+1} + b_1 c_p + \ldots + b_p c_1, \\
0 &= c_{p+2} + b_1 c_{p+1} + \ldots + b_p c_2, \\
0 &= c_{p+3} + b_1 c_{p+2} + \ldots + b_p c_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= c_{2p} + b_1 c_{2p-1} + \ldots + b_p c_p.
\end{aligned} \tag{12.}$$

Aus den letzten p dieser Gleichungen erhält man die Grössen

$$b_1,\ b_2,\ b_3 \ldots b_p,$$

und mit Hülfe derselben aus dem ersten p die Grössen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots a_p.$$

19. Als Beispiel hierzu wollen wir π mit Hülfe der schwach converge[illegible] Reihe berechnen

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots .$$

Nimmt man je zwei Glieder zusammen, und dividirt dann durch 2, so erhält man

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \frac{1}{17 \cdot 19} + \frac{1}{21 \cdot 23} + \frac{1}{25 \cdot 27} + \ldots$$

Das $n$te Glied dieser Reihe ist

$$q_n = \frac{1}{(4n-3)(4n-1)} = \frac{1}{16n^2 - 16n + 3}.$$

Demnach hat man

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{(4n+1)(4n+3)}{(4n-3)(4n-1)} = \frac{16n^2 + 16n + 3}{16n^2 - 16n + 3}$$

$$= 1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{13}{8} \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{n^4} + \frac{121}{128} \cdot \frac{1}{n^5} + \frac{91}{128} \cdot \frac{1}{n^6} + \ldots$$

Man hat daher für $\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \alpha_5, \quad \alpha_6$

die Werthe $2, \quad 2, \quad \frac{13}{8}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{121}{128}, \quad \frac{91}{128}.$

Setzt man in No. 18, 11. die Coefficienten von n^{-1}, n^{-2}, n^{-3}, n^{-4}, n^{-5}, gleich Null, und berücksichtigt die Bedingung 2., so erhält man

$$c' - 1 = 0, \quad \ldots \ldots \quad c' = 1,$$

$$2c' + 2c_0 = 0, \quad \ldots \ldots \quad c_0 = -1,$$

$$\frac{13}{8}c' + 2c_0 + 3c_1 = 0, \quad \ldots \ldots \quad c_1 = \frac{1}{8},$$

$$\frac{5}{4}c' + \frac{13}{8}c_0 + c_1 + 4c_2 = 0, \quad \ldots \ldots \quad c_2 = \frac{1}{16},$$

$$\frac{121}{128}c' + \frac{5}{4}c_0 + \frac{21}{8}c_1 - c_2 + 5c_3 = 0, \quad \ldots \ldots \quad c_3 = \frac{1}{128},$$

$$\frac{91}{128}c' + \frac{121}{128}c_0 + \frac{1}{4}c_1 + \frac{45}{8}c_2 - 4c_3 + 6c_4 = 0, \quad \ldots \quad c_4 = -\frac{5}{256}.$$

Das System No. 18, 12. ergiebt für $p = 2$ und für die soeben gefundenen Werthe der c die Gleichungen

$0 = \frac{1}{128} + \frac{1}{16}b_1 + \frac{1}{8}b_2$, folglich $b_1 = -1$,

$0 = -\frac{5}{256} + \frac{1}{128}b_1 + \frac{1}{16}b_2$, „ „ $b_2 = \frac{7}{16}$,

$a_1 = \frac{1}{8}$, $a_2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{8}b_1$, „ „ $a_2 = -\frac{1}{16}$.

Daher ist nach Beseitigung der gebrochenen Coefficienten

$$\varphi(n) = n - 1 + \frac{2n - 1}{16n^2 - 16n + 7}.$$

Berechnet man nun die Summe

$$S_6 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6$$

direkt, so erhält man auf 8 Stellen genau

$$S_6 = 0{,}382\,300\,35.$$

Ferner ergiebt sich

$$\varphi(6) = 5{,}022\,587\,26, \qquad \varphi(7) = 6{,}019\,145\,80,$$

$$\varphi(6) \cdot q_6 = 0{,}010\,398\,73, \quad \varphi(6) \cdot \frac{q^6}{q^7} = 7{,}019\,142\,75.$$

Aus diesen Werthen folgt

$$f(6) = 0{,}999\,996\,95, \qquad \frac{\varphi(6)q_6}{f(6)} = 0{,}010\,398\,70.$$

Dies ergiebt auf 7 Stellen genau

$$R = 0{,}010\,398\,7.$$

Hieraus findet man schliesslich ebenfalls auf 7 Stellen genau

$$\frac{\pi}{8} = 0{,}392\,699\,1\,.$$

Um dieselbe Genauigkeit durch direkte Summation der Glieder der gegebenen unendlichen Reihe zu erlangen, hätte man so viel Glieder zusammennehmen müssen, bis man $1:(4n-3)(4n-1)$ kleiner als 10^{-7}, also $(4n-3)(4n-1)$ grösser als 10^7 erhalten hätte; bei dem Gliede

$$\frac{1}{3001 \cdot 3003} = \frac{1}{(4 \cdot 751 - 3)(4 \cdot 751 - 1)}$$

wäre dies noch nicht erreicht worden; man hätte also mehr als 750 Glieder berechnen müssen, um zu dem Ziele zu gelangen, das wir durch eine nicht umständliche Rechnung nach KUMMER's Methode erreicht haben.

---

20. **Methode der unbestimmten Coefficienten.** Wenn man nachweisen kann, dass eine Function $f(x)$ innerhalb gewisser Grenzen für die Variable x sich in eine Potenzreihe

$$1. \qquad f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

entwickeln lässt, die Anwendung des TAYLOR'schen Satzes aber wegen der mehrfachen Differentiationen ungeeignet erscheint, so kann man durch geschickte Benutzung der Besonderheiten von $f(x)$ oft eine Reihe von linearen Gleichungen aufstellen, aus denen sich A_0, A_1, A_2, A_3 . . ergeben. Man kommt dann dazu, eine beliebige Anzahl der Coefficienten von A kennen zu lernen; lässt sich der Fortgang der Rechnung mit Sicherheit übersehen, so kann man auch das allgemeine Glied finden, während man im Gegenfalle es dabei bewenden lassen muss, jeden einzelnen Coefficienten zu ermitteln.

Geht man von der Voraussetzung aus, dass $tang x$ für die zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegenden x, für welche kein Differentialquotient von $tang x$ unendlich gross wird, in eine Potenzreihe entwickelt werden kann,

$$tang x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots,$$

so ist zunächst sicher, dass $A_0 = 0$ ist, da $tang x$ mit x zugleich verschwindet. Da ferner x und $tang x$ zugleich das Vorzeichen wechseln, so erkennt man, dass

$$A_2 = A_4 = A_6 = \dots = A_{2n} = \dots = 0\,.$$

Die Reihenentwicklung beschränkt sich daher auf die Glieder mit ungeraden Exponenten,

$$tang x = A_1 x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + A_7 x^7 + \dots$$

Benutzt man die Gleichung

$$sin x = tang x \, cos x\,,$$

und setzt für $sin x$ und $cos x$ die früher gefundenen unendlichen Reihen ein, so erhält man

$$\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots\right)$$
$$= (A_1 x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + \dots)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - \dots\right).$$

Führt man links die Multiplication aus und vergleicht beiderseits die Coëfficienten gleich hoher Potenzen von x, so erhält man zur Bestimmung der A die Gleichungen

$$A_1 = 1\,, \quad A_3 - \frac{A_1}{2!} = -\frac{1}{3!}\,,$$

$$A_5 - \frac{A_3}{2!} + \frac{A_1}{4!} = \frac{1}{5!}\,,$$

$$A_7 - \frac{A_5}{2!} + \frac{A_3}{4!} - \frac{A_1}{6!} = -\frac{1}{7!},$$
$$A_9 - \frac{A_7}{2!} + \frac{A_5}{4!} - \frac{A_3}{6!} + \frac{A_1}{8!} = \frac{1}{9!},$$
$$A_{11} - \frac{A_9}{2!} + \frac{A_7}{4!} - \frac{A_5}{6!} + \frac{A_3}{8!} - \frac{A_1}{10!} = -\frac{1}{11!},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hieraus gewinnt man

$$A_3 = \frac{1}{3}, \quad A_5 = \frac{2}{15}, \quad A_7 = \frac{17}{315}, \quad A_9 = \frac{29}{945}, \ldots$$

Ueber das allgemeine Glied der Reihe und über die Convergenzbedingungen erhält man hierbei keinen Aufschluss.

Aus der Reihe

$$arc\,sin\,x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$

kann man durch direkte Multiplication eine Potenzreihe für $(arc\,sin\,x)^2$ ableiten, die zwischen denselben Grenzen convergirt wie die obige, und nur die geraden Potenzen von x enthält; die Coefficienten dieser Reihe werden dabei als endliche Reihen erhalten, deren Summen sich nicht ohne Weiteres in knapper Form darstellen lassen. Durch die Methode der unbestimmten Coefficienten kann man in folgender Weise das Ziel erreichen. Differenzirt man

$$(arc\,sin\,x)^2 = A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \ldots,$$

so entsteht

$$\frac{2\,arc\,sin\,x}{\sqrt{1-x^2}} = 2A_2 x + 4A_4 x^3 + 6A_6 x^5 + \ldots;$$

folglich ist

$$2\,arc\,sin\,x = (2A_2 x + 4A_4 x^3 + \ldots)\sqrt{1-x^2}.$$

Hieraus erhält man durch Differentiation

$$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = (2\cdot 1 A_2 + 4\cdot 3 A_4 x^2 + 6\cdot 5 A_6 x^4 + \ldots)\sqrt{1-x^2}$$
$$- (2A_2 x + 4A_4 x^3 + 6A_6 x^5 + \ldots)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Beseitigt man die irrationalen Nenner, so erhält man

$$2 = (2A_2 + 4\cdot 3A_4 x^2 + 6\cdot 5 A_6 x^4 + \ldots)(1-x^2) - (2A_2 x^2 + 4A_4 x^4 + 6A_6 x^6 + \ldots).$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$A_2 = 1, \quad (2n+2)(2n+1)A_{2n+2} - 2n(2n-1)A_{2n} - 2nA_{2n} = 0,$$

also

$$A_{2n+2} = \frac{(2n)^2}{(2n+1)(2n+2)}A_{2n}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$A_{2n+2} = \frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\ldots(2n)^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\ldots(2n+1)(2n+2)} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{1}{n+1}$$

Daher hat man die Reihenentwicklung

$$(arc\,sin\,x)^2 = x^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{x^6}{3} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{x^8}{4} + \ldots -1 \leq x \leq 1.$$

Zwischen denselben Gültigkeitsgrenzen ist

$$\frac{arc\,sin\,x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot x^5 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot x^7 + \ldots$$

§ 17. Unendliche Produkte.

1. Bekanntlich ist

$$\sin 3u = 3\sin u - 4\sin^3 u,$$
$$\cos 3u = 4\cos^3 u - 3\cos u,$$
$$\sin 5u = \sin 3u \cos 2u + \sin 2u \cos 3u,$$
$$= \sin 3u(1 - 2\sin^2 u) + 2\sin u(4\cos^4 u - 3\cos^2 u),$$
$$= 5\sin u - 20\sin^3 u + 16\sin^5 u.$$

Auf Grund dieser Formeln kann man den Nachweis dafür versuchen, dass für ein ungerades μ

1. $$\sin\mu u = A_0 \sin u + A_2 \sin^3 u + A_4 \sin^5 u + \ldots + A_{\mu-1}\sin^\mu u.$$

Man hat zunächst

$$\sin(2n+1)u = \sin(2n-1)u\cdot\cos 2u + \cos(2n-1)u\cdot\sin 2u$$
$$= \sin(2n-1)u\cdot(1 - 2\sin^2 u) + 2\cos(2n-1)u\cdot\cos u \sin u.$$

Die Entscheidung darüber, ob sich $\sin(2n+1)u$ nach ungeraden Potenzen von $\sin u$ entwickeln lässt, hängt somit davon ab, ob $\sin(2n-1)u$ und $\cos(2n-1)u\cdot\cos u\cdot\sin u$ diese Entwicklung zulassen. Für das letztere Produkt hat man

$$\cos(2n-1)u\cdot\cos u = \cos(2n-3)u\cdot\cos u\cdot(1 - 2\sin^2 u) - 2\sin(2n-3)u(1-\sin^2 u).$$

Wenn sich also $\sin(2n-3)u$, $\cos(2n-3)u\cdot\cos u\cdot\sin u$ und $\sin(2n-1)u$ gemäss 1. entwickeln lassen, so ist diese Entwicklung auch für $\sin(2n+1)u$ und $\cos(2n-1)u\cdot\cos u \sin u$ nachgewiesen. Da sie nun für

$$\sin 3u, \quad \cos 3u \cos u \sin u, \quad \sin 5u$$

gilt, so gilt sie allgemein.

Aus der Gleichung 1. folgt

2. $$\frac{\sin\mu u}{\sin u} = A_0 + A_2 \sin^2 u + \ldots + A_{\mu-1}\sin^{\mu-1} u.$$

Geht man zur Grenze für $u = 0$ über, so erhält man

3. $$A_0 = \lim\frac{\sin\mu u}{\sin u} = \mu \lim\frac{\sin\mu u}{\mu u}\cdot\frac{u}{\sin u} = \mu.$$

Bezeichnet man mit $u_1, u_2, \ldots u_{\mu-1}$ die Werthe von u, für welche die rechte Seite der Gleichung 2. verschwindet, so ist

4. $$\frac{\sin\mu u}{\sin u} = A_{\mu-1}(\sin u_1 - \sin u)(\sin u_2 - \sin u)\ldots(\sin u_{\mu-1} - \sin u).$$

Ferner folgt aus 2. und 3.

5. $$\mu = A_{\mu-1}\sin u_1 \sin u_2 \sin u_3 \ldots \sin u_{\mu-1},$$

und durch Division aus 4. durch 5.

$$\frac{\sin\mu u}{\mu\sin u} = \left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_1}\right)\left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_2}\right)\left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_3}\right)\ldots\left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_{\mu-1}}\right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung verschwindet für die $\mu - 1$ von einander verschiedenen Bogen

$$u = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\mu}, & \dfrac{2\pi}{\mu}, \quad \dfrac{3\pi}{\mu}, \ldots \dfrac{\frac{1}{2}(\mu-1)\pi}{\mu}, \\[2ex] -\dfrac{\pi}{\mu}, & -\dfrac{2\pi}{\mu}, \quad -\dfrac{3\pi}{\mu}, \ldots -\dfrac{\frac{1}{2}(\mu-1)\pi}{\mu}. \end{cases}$$

Setzt man diese Werthe für $u_1 \ldots u_{\mu-1}$, so kann man die aus je zwei entgegengesetzt gleichen Bogen entstehenden Faktoren vereinen und erhält

$$\frac{\sin\mu u}{\mu\sin u} = \left[1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2\frac{\pi}{\mu}}\right]\left[1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2\frac{2\pi}{\mu}}\right]\ldots\left[1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2\frac{(\mu-1)\pi}{2\mu}}\right].$$

Ersetzt man μu durch x, so entsteht

$$6.\quad \frac{\sin x}{\mu \sin\frac{x}{\mu}} = \left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{\mu}}{\sin^2\frac{\pi}{\mu}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{\mu}}{\sin^2\frac{2\pi}{\mu}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{\mu}}{\sin^2\frac{(\mu-1)\pi}{2\mu}}\right).$$

Es liegt nahe, hier zur Grenze für ein unendliches wachsendes μ überzugehen. Die linke Seite hat wegen

$$\lim \mu \sin\frac{x}{\mu} = \lim\left(\sin\frac{1}{\mu}x : \frac{1}{\mu}\right) = x$$

den Grenzwerth $\sin x : x$. Die rechte Seite wird zu einem Produkte aus unendlich vielen Faktoren, und hat nur dann eine analytische Bedeutung, wenn nachgewiesen werden kann, dass das Produkt der ersten n Faktoren sich einer Grenze bis zu jedem Grade der Genauigkeit nähert, wenn man nur n gross genug wählt. Um dies nachzuweisen, haben wir zu zeigen, dass das Produkt der Faktoren vom $(n+1)$ten an

$$R = \left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{\mu}}{\sin^2\frac{(n+1)\pi}{\mu}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{\mu}}{\sin^2\frac{(n+2)\pi}{\mu}}\right)\cdots\cdots$$

für einen unendlich grossen Werth von n mit der Einheit bis zu jedem Grade der Genauigkeit übereinstimmt. Die Brüche

$$\frac{n+1}{\mu},\ \frac{n+2}{\mu},\ \frac{n+3}{\mu},\ \ldots$$

sind echte Brüche, kleiner als $\frac{1}{2}$ (vergl. 6), und daher

$$\frac{n+1}{\mu}\pi,\ \frac{n+2}{\mu}\pi,\ \frac{n+3}{\mu}\pi\ \ldots\ldots$$

spitze Winkel. Setzt man nun $x < (n+1)\pi$ voraus, so sind die Faktoren von R sämmtlich echte Brüche und daher

$$11.\quad R_n < 1\,.$$

Um eine untere Grenze für R zu erhalten, bemerken wir, dass für positive echt gebrochene Werthe von $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$

$$(1-Q_1)(1-Q_2) = 1 - (Q_1+Q_2) + Q_1 Q_2 > 1 - (Q_1+Q_2)$$
$$(1-Q_1)(1-Q_2)(1-Q_3) > [1-(Q_1+Q_2)](1-Q_3) > 1-(Q_1+Q_2+Q_3)$$

und daher allgemein

$$(1-Q_1)(1-Q_2)(1-Q)(1-Q_4)\ldots > 1-(Q_1+Q_2+Q_3+Q_4+\ldots).$$

Folglich ist

$$12.\quad R > 1 - \left(\frac{\sin^2\frac{x}{\mu}}{\sin^2\frac{(n+1)\pi}{\mu}} + \frac{\sin^2\frac{x}{\mu}}{\sin^2\frac{(n+2)\pi}{\mu}} + \ldots\right).$$

Da $\quad \sin\frac{n+1}{\mu}\pi < \sin\frac{n+2}{\mu}\pi < \sin\frac{n+3}{\mu}\pi < \ldots,$

so wird der Klammerinhalt vergrössert, wenn man jeden der $(\mu - 2n - 1) : 2$ Nenner durch den ersten ersetzt; daher ist

$$R_n > 1 - \frac{\mu - 2n - 1}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{\mu}}{\sin^2\frac{n+1}{\mu}\pi}.$$

Setzt man $\mu = \rho n$, so erhält man

13. $$R_n > 1 - \frac{\rho n - 2n - 1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{\rho n}}{\sin^2 \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\pi}{\rho}}.$$

Für einen unendlich grossen Werth von n ist

$$\lim(\rho n - 2n - 1) \cdot \sin^2 \frac{x}{\rho n} = \lim x^2 \frac{\rho n - 2n - 1}{\rho^2 n^2} = 0.$$

Daher folgt aus 12. und 13.

$$\lim R_n = 1.$$

Folglich bleibt 8. auch für $\mu = \infty$ gültig; da nun

$$\lim \frac{\sin \frac{x}{\mu}}{\sin \frac{k\pi}{\mu}} = \frac{x}{k\pi},$$

so hat man in Rücksicht auf 9.

14. $$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \cdots\cdots$$

gültig für jeden endlichen Werth von x.

Setzt man $x = \frac{\pi}{6}$, so ist $\sin x = \frac{1}{2}$, und man hat

$$\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6^2} \cdot \frac{11 \cdot 13}{12^2} \cdot \frac{17 \cdot 19}{18^2} \cdot \frac{23 \cdot 25}{24^2} \cdots\cdots$$

und daher

$$\frac{\pi}{3} = \frac{6^2}{5 \cdot 7} \cdot \frac{12^2}{11 \cdot 13} \cdot \frac{18^2}{17 \cdot 19} \cdot \frac{24^2}{23 \cdot 25} \cdots\cdots$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ erhält man das schwächer convergirende unendliche Produkt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6^2}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8^2}{7 \cdot 9} \cdots\cdots$$

2. Aus der im Eingange des vorigen Abschnitts gemachten Bemerkung ist ersichtlich, dass man $\cos\mu u \cos u$ für jedes ungerade ganze μ nach geraden Potenzen von $\sin u$ entwickeln kann, in der Form

1. $$\cos\mu u \cos u = B_0 + B_2 \sin^2 u + B_4 \sin^4 u + \ldots + B_{\mu+1} \sin^{\mu+1} u.$$

Setzt man $u = 0$, so erhält man

2. $$B_0 = 1.$$

Sind wieder $u_1, u_2, u_3 \ldots u_{\mu+1}$ die Werthe von u, für welche die rechte Seite von 1. verschwindet, so hat man

$$\cos\mu u \cdot \cos u = B_{\mu+1}(\sin u_1 - \sin u)(\sin u_2 - \sin u) \ldots (\sin u_{\mu+1} - \sin u).$$

Ferner folgt aus 1. und 2.

$$1 = B_{\mu+1} \sin u_1 \sin u_2 \ldots \sin u_{\mu+1},$$

folglich ist

3. $$\cos\mu u \cos u = \left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_1}\right)\left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_{\mu+1}}\right).$$

Die linke Seite verschwindet für die von einander verschiedenen Bogen

$$u = \begin{cases} \frac{\pi}{2\mu}, \frac{3\pi}{2\mu}, \frac{5\pi}{2\mu}, \ldots \frac{\mu\pi}{2\mu}, \\ -\frac{\pi}{2\mu}, -\frac{3\pi}{2\mu}, -\frac{5\pi}{2\mu}, \ldots -\frac{\mu\pi}{2\mu}. \end{cases}$$

Daher ist, wenn man noch μu mit x vertauscht

4. $$\cos x \cdot \cos\frac{x}{\mu} = \left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{\mu}}{\sin^2\frac{\pi}{2\mu}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{\mu}}{\sin^2\frac{3\pi}{2\mu}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{\mu}}{\sin^2\frac{5\pi}{2\mu}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{\mu}}{\sin^2\frac{\mu\pi}{2\mu}}\right).$$

Das Produkt

$$R_n = \left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{\mu}}{\sin^2\frac{2n+1}{2\mu}\pi}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{\mu}}{\sin^2\frac{2n+3}{2\mu}\pi}\right)\cdots\cdots$$

enthält lauter echt gebrochene Faktoren, sobald man voraussetzt, dass $x < \frac{n+1}{2}\pi$ ist; daher hat man

5. $$R_n < 1\,.$$

Ferner ist

$$R_n > 1 - \left(\frac{\sin^2\frac{x}{\mu}}{\sin^2\frac{2n+1}{2\mu}\pi} + \frac{\sin^2\frac{x}{\mu}}{\sin^2\frac{2n+3}{2\mu}\pi} + \cdots\right),$$

6. $$R_n > 1 - \frac{\mu - 2n + 2}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{\mu}}{\sin^2\frac{2n+1}{2\mu}\pi}.$$

Nun ist für $\mu = \rho n$

$$(\mu - 2n + 2)\cdot\sin^2\frac{x}{\mu} : \sin^2\frac{2n+1}{2\mu}\pi = (\rho n - 2n + 2)\sin^2\frac{x}{\rho n} : \sin^2\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{\pi}{\rho},$$

folglich hat diese Grösse für ein unendlich grosses n die Null zur Grenze. Aus 5. und 6. folgt

$$\lim R_n = 1\,.$$

Geht man nun auch in 4. zur Grenze für $\mu = \infty$ über, so erhält man

7. $$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{29\pi^2}\right)\cdots$$

Ersetzt man x durch $\frac{1}{2}x$, so entsteht

$$\cos\tfrac{1}{2}x = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{25\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{49\pi^2}\right)\cdots\cdots$$

Beide Entwicklungen sind für jedes endliche x gültig.

Die unendlichen Produkte für $\sin x$ und $\cos x$ ergeben durch Division

$$\tan g\, x = x\,\frac{\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots}{\left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\cdots}.$$

3. Wir schliessen hieran folgende für die einfachsten Fälle ausreichenden Bemerkungen über die Convergenz und Divergenz unendlicher Produkte*):

Wenn die Glieder der unendlichen Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \cdots$$

positiv und kleiner als Eins sind, und die Reihe convergirt, so convergiren auch die unendlichen Produkte

$$P = (1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3)(1 - u_4)\cdots$$

*) WEIERSTRASS, Ueber die analyt. Facultäten, CRELLE's Journal, Bd. 51. 1856.

$$Q = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3)(1 + u_4) \ldots .$$

gegen Grenzwerthe, die endlich und von Null verschieden sind.

Jeder Faktor des Produktes

$$P_n = (1 - u_1)(1 - u_2) \ldots (1 - u_n)$$

ist nach der Voraussetzung ein echter Bruch; daher ist $P_n < 1$ und nimmt ab, wenn n wächst. Ferner kann man, wenn nur n gross genug ist, $m < n$ immer so wählen, dass

1. $$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots$$

kleiner ist als ein gegebener Bruch ε. Man hat

$$\frac{P_n}{P_m} = (1 - u_{m+1})(1 - u_{m+2}) \ldots (1 - u_n)$$

also

$$\frac{P_n}{P_m} > 1 - (u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n).$$

Nach der Voraussetzung ist daher

$$P_n > P_m(1 - \varepsilon).$$

Hieraus folgt, dass sich P_n einer positiven, von Null verschiedenen Grenze nähert. Setzt man $P = P_n \cdot R_n$, so hat man die Ungleichung

$$1 > R_n > 1 - (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots).$$

Nach der Voraussetzung nähert sich die Reihe

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

mit wachsendem n der Grenze Null; je grösser n ist, um so weniger ist also R_n von der Einheit verschieden. Das Produkt P_n stimmt daher mit einem bestimmten positiven Grenzwerth P um so genauer und bis zu jedem Grade der Genauigkeit überein, je grösser man n wählt.

Ferner ist

$$\frac{1}{1 + u} = 1 - \frac{u}{1 + u}$$

und daher

$$\frac{1}{Q} = \left(1 - \frac{u_1}{1 + u_1}\right)\left(1 - \frac{u_2}{1 + u_2}\right)\left(1 - \frac{u_3}{1 + u_3}\right) \ldots .$$

Da nun die Reihe

$$\frac{u_1}{1 + u_1} + \frac{u_2}{1 + u_2} + \frac{u_3}{1 + u_3} + \ldots$$

mit der Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots .$ convergirt, so folgt, dass $1 : Q$ convergirt und einen endlichen Grenzwerthe hat. Dabei ist zu bemerken, dass

$$Q_n = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \ldots (1 + u_n)$$

sich dem Grenzwerthe Q nähert, indem es bei zunehmendem n unaufhörlich wächst.

Wenn dagegen die Reihe der positiven echten Brüche

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots .$$

divergirt, so divergiren die unendlichen Produkte

$$P = (1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3) \ldots ,$$
$$Q = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \ldots ,$$

und zwar nähern sich

$$P_n = (1 - u_1) \ldots (1 - u_n) \quad \text{und} \quad Q_n = (1 + u_1) \ldots (1 + u_n)$$

mit wachsendem n bez. den Grenzen 0 und ∞.

Man hat zunächst

$$Q_n > 1 + (u_1 + u_2 + \ldots u_n).$$

Da nun $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ mit n unendlich wächst, so folgt, dass sich Q_n mit n unendlich gross wird.

Ferner ist

$$\frac{1}{P} = \left(1 + \frac{u_1}{1 - u_1}\right)\left(1 + \frac{u_2}{1 - u_2}\right) \dots$$

Da nun die Reihe

$$\frac{u_1}{1 - u_1} + \frac{u_2}{1 - u_2} + \dots$$

mit der Reihe $u_1 + u_2 + \dots$ divergirt, so folgt, dass $1 : P$ unendlich gross, also P gleich Null ist.

Aus den beiden bewiesenen Sätzen ergiebt sich ohne Weiteres die Richtigkeit des folgenden: Wenn die Glieder der Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

sämmtlich von -1 verschieden sind, und von einem bestimmten Gliede an beständig dasselbe Vorzeichen haben, und kleiner als Eins bleiben, so hat das unendliche Produkt

$$P = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \dots$$

einen positiven von Null verschiedenen Werth, sobald die Reihe $u_1 + u_2 + \dots$ convergirt.

Wenn dagegen unter übrigens denselben Voraussetzungen die Reihe $u_1 + u_2 + \dots$ divergirt, so ist das unendliche Produkt P divergent, und zwar gleich Null, oder unendlich gross, je nachdem die Glieder der Reihe $u_1 + u_2 + \dots$ von einer bestimmten Stelle an beständig negativ oder positiv bleiben.

4. Aus den in No. 1 und 2 entwickelten unendlichen Produkten gewinnt man noch einige bemerkenswerthe Reihen.

Nimmt man in No. 1, 14 beiderseits die Logarithmen, so erhält man

$$l\,sin\,x = lx + l\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) + \dots$$

Differenzirt man, so entsteht

$$1.\quad cot\,x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{4\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{9\pi^2 - x^2} - \dots$$

Da nun

$$-\frac{2x}{k^2\pi^2 - x^2} = -\frac{1}{k\pi - x} + \frac{1}{k\pi + x},$$

so findet man schliesslich

$$2.\quad cot\,x = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{3\pi + x} - \frac{1}{3\pi - x} + \dots$$

Ersetzt man x durch πx, so entsteht

$$3.\quad \pi \cdot cot\,\pi x = \frac{1}{x} + \frac{1}{1 + x} - \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{2 + x} - \frac{1}{2 - x} + \frac{1}{3 + x} - \frac{1}{3 - x} + \dots$$

Nimmt man die Logarithmen in No. 2, 7, so erhält man

$$l\,cos\,x = l\left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right) + \dots$$

Durch Differentiation erhält man hieraus

$$4.\quad tang\,x = \frac{8x}{\pi^2 - 4x^2} + \frac{8x}{9\pi^2 - 4x^2} + \frac{8x}{25\pi^2 - 4x^2} + \dots$$

Da nun

$$\frac{4x}{k^2\pi^2 - 4x^2} = \frac{1}{k\pi - 2x} - \frac{1}{k\pi + 2x},$$

so kann man 4. ersetzen durch

$$tang\,x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + x} + \frac{1}{\frac{5\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{5\pi}{2} + x} + \dots$$

Anhang.

Wir geben anhangsweise eine schärfere Ableitung der in § 4, No. 9 und § 5, No. 1 benutzten Grenzbestimmnng

$$\lim \frac{F(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - F(x+\Delta x,\ y)}{\Delta y} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y},$$

die dem gleichzeitigen Verschwinden von Δx und Δy Rechnung trägt.

Die Function $f(x)$ wächst oder nimmt ab, sobald $df : dx$ positiv oder negativ ist; ist $df : dx$ stetig, so kann ein Uebergang vom Wachsthum zur Abnahme oder umgekehrt nur für solche Werthe der Variabeln eintreten, für welche $df : dx$ verschwindet.

Ein Curvenast $y = \varphi(x)$ und der Differentialquotient $d\varphi : dx$ seien stetig zwischen den Punkten P und P_1, die zu den Abscissen x und $x + \Delta x$ gehören. Der Punkt der Strecke PP_1, dessen Abscisse $x + \varepsilon\Delta x$ ist ($\varepsilon < 1$), hat die Ordinate

$$\varphi(x) + \varepsilon[\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)] = (1-\varepsilon)\varphi(x) + \varepsilon\varphi(x+\Delta x).$$

Der Unterschied u dieser Ordinate und der zu derselben Abscisse gehörigen Curvenordinate ist

$$u = \varphi(x+\varepsilon\Delta x) - (1-\varepsilon)\varphi(x) - \varepsilon\varphi(x+\Delta x).$$

Diese Grösse verschwindet für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$; folglich giebt es einen positiven echten Bruch ε, für welchen

$$1. \qquad \frac{du}{d\varepsilon} = \frac{d\varphi(x+\varepsilon\Delta x)}{d\varepsilon} + \varphi(x) - \varphi(x+\Delta x) = 0.$$

Da nun

$$\frac{d\varphi(x+\varepsilon\Delta x)}{d\varepsilon} = \frac{d\varphi(x+\varepsilon\Delta x)}{dx}\cdot\Delta x,$$

so folgt aus 1.

$$2. \qquad \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \Delta x \cdot \frac{d\varphi(x+\varepsilon\Delta x)}{dx}.$$

Ersetzt man hierin x durch y und $\varphi(x)$ durch $F(x+\Delta x, y)$, so erhält man sofort

$$F(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - F(x+\Delta x,\ y) = \Delta y \cdot \frac{\partial F(x+\Delta x,\ y+\varepsilon\Delta y)}{\partial y}.$$

Dividirt man beide Seiten durch Δy und geht dann zur Grenze für verchwindende Werthe Δx und Δy über, so erhält man

$$\lim \frac{F(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - F(x+\Delta x,\ y)}{\Delta y} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}.$$

Integralrechnung,

bearbeitet von

Dr. Richard Heger,

Gymnasiallehrer u. a. o. Hon.-Professor am Kgl. Polytechnikum zu Dresden.

I. Theil. Integrale realer Functionen einer realen Variabeln.

§ 1. Grundbegriffe und Grundformeln.

1. Die Grundaufgabe der Differentialrechnung ist: Zu einer gegebenen Function das Differential zu bestimmen; die Grundaufgabe der Integralrechnung ist die Umkehrung hiervon: Ein Differential $f(x)\,dx$ ist gegeben; man soll die Function bestimmen, von welcher $f(x)\,dx$ das Differential ist.

Die Function, von welcher $f(x)\,dx$ das Differential ist, nennt man das Integral von $f(x)\,dx$, geschrieben

$$\int f(x)\,dx\,.$$

Man hat daher für das Zeichen $\int f(x)\,dx$ die definirende Gleichung

1. $$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx\,.$$

Ist u irgend eine Function von x, so ist daher

2. $$\int du = u\,.$$

Aus 1. und 2. ist ersichtlich, dass die Zeichen d und $\int$ einander aufheben.

2. Die Aufgabe, das Differential einer Function zu bestimmen, hat eine eindeutig bestimmte Lösung; nicht so die Umkehrung: Aus dem Differential die ursprüngliche Function herzustellen.

Ist nämlich $dF(x) = f(x)\,dx$, so ist auch

$$d[F(x) + C] = f(x)\,dx\,,$$

wobei C eine willkürliche Constante bedeutet. Man hat daher

1. $$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,.$$

Man sieht leicht, dass unter der Form $F(x) + C$ jede Function enthalten ist, die $f(x)\,dx$ zum Differential hat. Denn ist ausser 1. auch $\int f(x)\,dx = \psi(x)$, so ist

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = f(x)\,;$$

da nun auch

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)\,,$$

so ist

$$\frac{d\psi(x) - dF(x)}{dx} = \frac{d[\psi(x) - F(x)]}{dx} = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Differenz $\psi(x) - F(x)$ eine von x unabhängige Constante ist; man hat daher

$$\psi(x) - F(x) = C, \quad \text{oder} \quad \psi(x) = F(x) + C.$$

Die Function $F(x)$, welche keine willkürliche Constante enthält, bezeichnet man als ein particulares Integral von $f(x)\,dx$; und dem gegenüber $F(x) + C$ als das allgemeine Integral. Das allgemeine Integral geht daher aus einem particularen durch Hinzufügung einer willkürlichen Constanten hervor.

3. Nach No. 1 führt jede Differentialformel auf eine Integralformel. Aus den Differentialen der einfachen Functionen erhält man die Grundformeln der Integralrechnung:

1. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,$ denn $d\frac{x^{m+1}}{m+1} = x^m dx;\quad m \gtrless -1,$

2. $\int \frac{dx}{x} = lx + C,$ „ $dlx = \frac{dx}{x};$

3. $\int e^x dx = e^x + C,$ „ $de^x = e^x dx;$

4. $\int \cos x\, dx = \sin x + C,$ „ $d\sin x = \cos x\, dx;$

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C,$ „ $d(-\cos x) = \sin x\, dx;$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,$ „ $d\tan x = \frac{dx}{\cos^2 x};$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$ „ $d\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x};$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$ „ $d\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,$ „ $d\arctan x = \frac{dx}{1+x^2};$

Bekanntlich ist

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

und daher $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$.

Man kann daher 8. ersetzen durch

10. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C_1,$$

in Uebereinstimmung mit der Differentialformel

$$d\arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Eine ähnliche Bemerkung gilt bezüglich der Formel 9.; da man hat

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x,$$

so folgt aus 9.

11. $$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arccot} x + C_1,$$

in Uebereinstimmung mit

$$d\,arc\,cot\,x = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

In 10. und 11. kann das Zeichen C_1 wieder durch das völlig unbestimmte Zeichen C ersetzt werden.

4. Die nächste Aufgabe der Integralrechnung besteht darin, Integrale von Differentialen, die nicht mit in den Grundformeln enthalten sind, durch geschickte Substitutionen und Transformationen auf die Grundformeln zurückzuführen.

Ehe wir uns aber dazu wenden, ist eine wichtige principielle Frage zu erledigen.

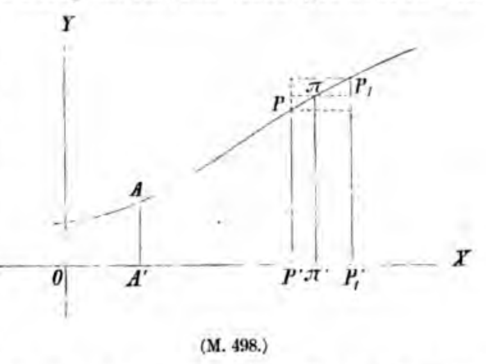
Es ist zu erwarten, — und diese Erwartung wird sich bald bestätigen — dass es Formeln $f(x)\,dx$ giebt, die in keiner Weise sich als Differentiale der bisher in der Analysis bekannten Functionen oder von Combinationen derselben ansehen lassen. In solchen Fällen wird durch das Zeichen

$$\int f(x)\,dx$$

eine neue Function definirt; wie wir in No. 2 gesehen haben, ist diese Function bis auf eine additive Constante bestimmt. In dieser Weise führt die Integralrechnung eine ungemessene Fülle neuer Functionen ein, die sich von den bisher bekannten z. Th. durch ganz neue Arten von Eigenschaften unterscheiden; wir werden einige von diesen genauer kennen lernen.

Wir wollen zunächst versuchen, eine Anschauung der Function $\int f(x)\,dx$ zu gewinnen. Wir beschränken uns dabei, wie überhaupt bei allen gegenwärtigen Untersuchungen, auf reale Werthe von x und auf reale Functionen $f(x)$; behalten uns aber vor, diese Beschränkung später wieder aufzuheben.

Wir construiren die Curve, welche in Bezug auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem die Gleichung hat $y = f(x)$; P sei ein Punkt derselben, also $OP' = x$, $P'P = f(x)$. Ein anderer Punkt desselben Curvenzugs mit kleinerer Abscisse sei A, so gelegen, dass zwischen A und P die Ordinaten sich weder unstetig ändern, noch unendlich gross oder imaginär werden, und dass, wenn A sich auf der Curve bis P bewegt, der Punkt A' immer in derselben Richtung fortschreitend nach P' gelangt. Alsdann ist die von $A'P'$, $A'A$, $P'P$ und dem Curvenbogen AP umschlossene Fläche eine endliche, eindeutig bestimmte Grösse.



(M. 498.)

Ferner sei $OP_1' = x + \Delta x$. Wir können Δx immer so klein wählen, dass die Curve von P bis P_1 nur steigt oder nur fällt. Alsdann giebt es einen zwischen P und P_1 gelegenen Punkt Π der Curve, so dass die von dem Curvenbogen begrenzte Fläche $P'PP_1P_1'$ gleich dem Rechtecke von der Breite $P'P_1'$ und der Höhe $\Pi'\Pi$ ist. Wird die Fläche $A'APP'$ mit F und demgemäss $P'PP_1P_1'$ mit ΔF bezeichnet, so ist

$$\Delta F = \Pi'\Pi \cdot \Delta x.$$

Ist μ ein echter Bruch, so ist $O\Pi' = x + \mu\cdot\Delta x$, daher $\Pi'\Pi = f(x+\mu\Delta x)$ und

$$\Delta F = f(x+\mu\Delta x)\cdot\Delta x,$$

oder

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x+\mu\Delta x).$$

Gehen wir zur Grenze für einen verschwindenden Werth von Δx über, so erhalten wir

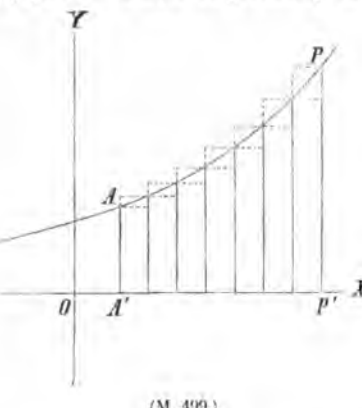
$$lim\frac{\Delta F}{\Delta x} = lim f(x + \mu\Delta x), \quad \text{folglich}$$

$$lim\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x) \quad \text{oder} \quad dF = f(x)\,dx.$$

Hieraus folgt

$$\int f(x)\,dx = F + Const.$$

5. Wir wollen nun zeigen, wie die Fläche F — und damit also das Integral $\int f(x)\,dx$ — durch Begrenzung bestimmt werden kann.



(M. 499.)

Wir setzen zunächst voraus, dass die Curve von A bis P nur steigt. Theilen wir $A'P'$ in n gleiche Theile δ, so sind die zu den Theilpunkten 0, 1, 2 . . . n gehörigen Ordinaten

$$f(a),\ f(a+\delta),\ f(a+2\delta),\ f(a+3\delta)\ \ldots\ f(a+\overline{n-1}\,\delta),\ f(a+n\delta) = f(x).$$

Construirt man zwischen den Ordinaten $f(a+\overline{k-1}\,\delta)$ und $f(a+k\delta)$ ein Rechteck ρ_k mit der Höhe $f(a+\overline{k-1}\,\delta)$ und eines r_k mit der Höhe $f(a+k\delta)$, so ist, da nach der Voraussetzung

$$f(a+\overline{k-1}\,\delta) < f(a+k\delta),$$

der zwischen $f(a+\overline{k-1}\,\delta)$ und $fa+k\delta)$ enthaltene Flächenstreifen grösser als ρ_k und kleiner als r_k. Daher ist

$$1. \qquad \sum_1^n \rho_k < F < \sum_1^n r_k.$$

Nun ist $\quad \rho_k = f(a+\overline{k-1}\,\delta)\cdot\delta, \quad r_k = f(a+k\delta)\cdot\delta,$

daher $\quad r_k - \rho_k = [f(a+k\delta) - f(a+\overline{k-1}\cdot\delta)]\,\delta.$

Also ist

$$\begin{aligned}
r_1 - \rho_1 &= [f(a+\delta) - f(a)]\,\delta,\\
r_2 - \rho_2 &= [f(a+2\delta) - f(a+\delta)]\,\delta,\\
r_3 - \rho_3 &= [f(a+3\delta) - f(a+2\delta)]\,\delta,\\
r_4 - \rho_4 &= [f(a+4\delta) - f(a+3\delta)]\,\delta,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_n - \rho_n &= [f(a+n\delta) - f(a+\overline{n-1}\,\delta)]\,\delta.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Addition

$$2. \qquad \Sigma r_k - \Sigma\rho_k = [f(x) - f(a)]\,\delta.$$

Bezeichnet μ einen positiven echten Bruch, so folgt aus 1. und 2.

$$3. \qquad F = \Sigma\rho_k + \mu\,[f(x) - f(a)]\,\delta.$$

Wenn die Curve von A bis P nur fällt, so nehmen wir dieselben Constructionen vor; da aber jetzt

$$f(a+\overline{k-1}\,\delta) > f(a+k\delta),$$

so ist der zwischen diesen Ordinaten enthaltene Flächenstreifen kleiner als ρ_k und grösser als r_k; daher ist jetzt

$$4. \qquad \Sigma\rho_k > F > \Sigma r_k;$$

(M. 500.)

Ferner ist

$$\rho_1 - r_1 = [f(a) - f(a+\delta)]\,\delta,$$
$$\rho_2 - r_2 = [f(a+\delta) - f(a+2\delta)]\,\delta,$$
$$\rho_3 - r_3 = [f(a+2\delta) - f(a+3\delta)]\,\delta,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\rho_n - r_n = [f(a+\overline{n-1}\,\delta) - f(a+n\delta)]\,\delta.$$

Hieraus folgt

5. $$\Sigma\rho_n - \Sigma r_n = [f(a) - f(x)]\,\delta.$$

Wir haben daher jetzt

6. $$F = \Sigma\rho_k - \mu\,[f(a) - f(x)]\,\delta.$$

Gehen wir in 3. und 6. rechts zur Grenze für einen verschwindend kleinen Werth für δ über, und bemerken, dass, da $f(a)$ und $f(x)$ als endliche Grössen vorausgesetzt worden sind,

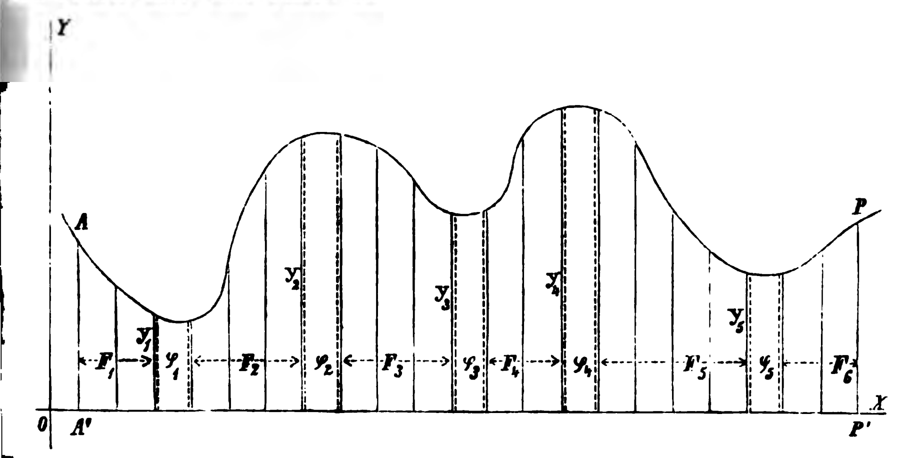
$$lim\,[f(a) - f(x)]\,\delta = 0,$$

so erhalten wir

7. $$F = lim\,[f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f(a+\overline{n-1}\,\delta)]\,\delta,$$

oder kürzer $$F = lim\sum_0^{n-1} f(a+k\delta)\,\delta.$$

Wenn die Curve zwischen A und P eine endliche Anzahl Male vom Steigen zum Fallen und vom Fallen zum Steigen übergeht, so nehmen wir zunächst



(M. 501.)

wieder die obige Construction vor, und zerlegen dann durch die zu gewissen Theilpunkten der Strecke $A'P'$ gehörigen Ordinaten die Fläche in solche Theile $F_1, F_2, F_3, \ldots F_i$, innerhalb deren die Curve nur steigt oder nur fällt; diese werden durch Streifen getrennt, deren jeder zwischen zwei aufeinander folgenden Ordinaten liegt. Für die Theile $F_1 \ldots F_i$ gilt dann die Formel 7. Sind die Anfangsordinaten der trennenden Streifen, deren Anzahl $i-1$ ist,

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_{i-1},$$

und die Flächen $$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots\ \varphi_{i-1},$$

so ist für jedes dieser φ

$$\varphi_m = y_m\,\delta + v_m,$$

wobei v_m eine positive oder negative Grösse bezeichnet, die mit δ zugleich verschwindet. Addiren wir nun die $F_1 \ldots F_i$ und schalten dazwischen an den passenden Stellen die $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{i-1}$ ein, so erhalten wir für die ganze Fläche

$$F = lim\sum_0^{n-1} f(a+k\delta)\,\delta + lim\,(v_1 + v_2 + \ldots + v_{i-1}).$$

Wenn aber bei einer endlichen Anzahl von Grössen v jede einzelne verschwindet, so verschwindet auch ihre Summe, also ist

$$lim(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_{i-1}) = 0,$$

und wir erhalten somit die allgemein gültige Gleichung

$$F = lim \sum_0^{n-1} f(a + k\delta)\,\delta,$$

oder

$$8. \qquad \int f(x)\,dx = lim \sum_0^{n-1} f(a + k\delta)\,\delta + Const.$$

Eine Veränderung innerhalb der anfangs angegebenen Schranken der willkürlichen Grösse a hat, wie die Figur sofort zeigt, den Erfolg, dass die Fläche F um einen von x unabhängigen Betrag zu- oder abnimmt; und diesen kann man dann in 8. mit der willkürlichen Constanten vereinigt denken.

Den particularen Werth $lim \sum_0^{n-1} f(a + k\delta)\,\delta$ nennen wir das zwischen den Grenzen a und x genommene bestimmte Integral von $f(x)\,dx$ und bezeichnen es mit $\int_a^x f(x)\,dx$. Es gilt also die definirende Gleichung

$$\int_a^x f(x)\,dx = lim \sum_0^{n-1} f(a + k\delta)\,\delta.$$

Fügt man rechts zur Vereinfachung der Summenformel den verschwindenden Summanden $f(a + n\delta)\,\delta$ hinzu, so erhält man

$$9. \qquad \int_a^x f(x)\,dx = lim \sum_0^{n} f(a + k\delta)\,\delta.$$

Die vorigen Betrachtungen zeigen, wie dasselbe angenähert bestimmt werden kann. Berechnet man für jeden der Theile $F_1, F_2 \ldots F_i$ gemäss der Formeln 2. und 5. die Grössen

$$[f(c) - f(d)]\,\delta,$$

wobei c und d die kleinste und die grösste Abscisse irgend eines dieser Theile bezeichnen, so gewinnt man zugleich ein Urtheil über die Genauigkeit des angenäherten Resultats, sowie eine Auskunft dafür, wie klein δ gewählt werden muss, damit der Fehler einen gegebenen Betrag nicht übersteigt.

In den folgenden Abschnitten werden wir uns zunächst mit solchen Integralen beschäftigen, die auf die bisher bekannten Functionen führen.

§ 2. Integral eines Polynoms und eines Produkts. Einführung einer neuen Variabeln.

1. Aus der Gleichung

$$d(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) = du_1 + du_2 + du_3 + \ldots + du_n$$

gewinnt man durch Integration

$$\int(du_1 + du_2 + du_3 + \ldots + du_n) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + Const$$

Hierfür kann man setzen

$$\int(du_1 + du_2 + du_3 + \ldots + du_n) = \int du_1 + \int du_2 + \int du_3 + \ldots$$

Daher der Satz: Ein Polynom wird integrirt, indem man je es einzelne Glied integrirt.

Durch Anwendung dieses Satzes ergiebt sich z. B.

$$\int (1+x)\,dx = \int dx + \int x\,dx = x + \frac{x^2}{2} + C;$$

$$\int (x - x^2)\,dx = \int x\,dx - \int x^2 dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C;$$

$$\int (1 + e^x)\,dx = \int dx + \int e^x dx = x + e^x + C;$$

$$\int \frac{1+x^2}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} + \int x\,dx = lx + \frac{x^2}{2} + C;$$

$$\int (\cos x - \sin x)\,dx = \int \cos x\,dx - \int \sin x\,dx = \sin x + \cos x + C.$$

2. Die Differentialformel

$$d(au) = a\,du$$

ergiebt durch Umkehrung

$$\int a\,du = au + Const.,$$
$$\int a\,du = a\int du.$$

Einen constanten Faktor eines Differentials kann man vor das Integralzeichen setzen; oder: um ein Integral mit einer Constanten zu multipliciren (oder zu dividiren), multiplicirt (oder dividirt) man das Differential.

Hieraus folgt z. B.

$$\int a\,dx = a\int dx = ax + C;$$

$$\int (a + bx + cx^2)\,dx = a\int dx + b\int x\,dx + c\int x^2 dx = ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} + C;$$

$$\int (-x\,dx) = -\int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + C;$$

$$\int \frac{dx}{ax} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{a} lx + C.$$

3. Aus der Differentialformel

$$duv = v\,du + u\,dv$$

folgt

$$v\,du = duv - u\,dv;$$

hieraus geht die Integralformel hervor

$$\int v\,du = uv - \int u\,dv.$$

Hiervon wird man mit Erfolg Gebrauch machen, wenn $\int u\,dv$ bekannt ist, oder leichter auf ein bekanntes reducirt werden kann, als $\int v\,du$; man bezeichnet diese Reduction als die Methode der theilweisen Integration.

Wir geben hierzu folgende Beispiele:

$$\int x e^x dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C;$$

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x d(x^2) = e^x(x^2 - 2x + 2) + C;$$

$$\int x^3 e^x dx = \int x^3 de^x = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C.$$

Allgemein hat man

$$\int x^m e^x dx = \int x^m de^x = x^m e^x - m\int x^{m-1} e^x dx.$$

Ferner ist

$$\int lx\,dx = x\,lx - \int x\,dlx = x\,lx - \int dx = x(lx - 1) + C;$$

$$\int x\,lx\,dx = \frac{1}{2}\int lx\,d(x^2) = \frac{1}{2}x^2 lx - \frac{1}{2}\int x^2 dlx = \frac{x^2}{4}(2lx - 1) + C;$$

$$\int x^2 lx dx = \frac{1}{3}\int lx d(x^3) = \frac{1}{3}x^3 lx - \frac{1}{3}\int x^3 dlx = \frac{x^3}{9}(3lx - 1) + C;$$

$$\int x^m dx dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1}lx - \frac{1}{m+1}\int x^m dx = \frac{1}{(m+1)^2}x^{m+1}[(m+1)lx - 1] + C.$$

$$\int x\cos x\, dx = \int x d\sin x = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C;$$

$$\int x\sin x\, dx = -\int x d\cos x = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C;$$

$$\int x^2\cos x dx = \int x^2 d\sin x = x^2\sin x - 2\int x\sin x dx;$$

$$\int x^2\sin x dx = -\int x^2 d\cos x = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx;$$

$$\int x^m\cos x dx = \int x^m d\sin x = x^m\sin x - m\int x^{m-1}\sin x dx;$$

$$\int x^m\sin x dx = -\int x^m d\cos x = -x^m\cos x + m\int x^{m-1}\cos x dx;$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln gelangt man schliesslich zu einer vollständigen Bestimmung von $\int x^m\cos x\, dx$ und $\int x^m\sin x\, dx$.

4. Ein sehr wichtiges Mittel zur Transformation von Integralen ist die Einführung einer neuen Variabeln. Um z. B. $\int(a+bx)^m dx$ zu bestimmen, setze man $a + bx = y$, also $bdx = dy$; durch diese Substitution erhält man

$$\int(a + bx)^m dx = \frac{1}{b}\int y^m dy = \frac{y^{m+1}}{(m+1)b} + C,$$

$$= \frac{1}{(m+1)b}(a+bx)^{m+1} + C.$$

Auf gleichem Wege ergiebt sich

$$\int\frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\int\frac{d(a+bx)}{a+bx} = \frac{1}{b}l(a+bx) + C.$$

In $\int\frac{xdx}{\sqrt{a+bx^2}}$ setze man $a + bx^2 = y$, also $2bxdx = dy$.

Man erhält dann

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{2b}\int\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{b} + C,$$

$$= \frac{1}{b}\sqrt{a+bx^2} + C.$$

Ferner ist

$$\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}.$$

Setzt man $e^x = y$, so ist $e^x dx = dy$, und daher

$$\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int\frac{dy}{1+y^2} = arc\,tang\,y + C,$$

$$= arc\,tang(e^x) + C.$$

§ 3. Integration rationaler algebraischer Functionen.

1. Eine rationale algebraische Function der Variabeln x ist von der Form

$$f(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}.$$

Ist die Function unecht gebrochen, ist also $m > n$, so kann man nach den Regeln der Buchstabenrechnung den Zähler durch den Nenner dividiren; man erhält dann den Quotienten

$$c_0x^{m-n} + c_1x^{m-n-1} + \ldots + c_{m-n-1}x + c_{m-n}$$
$$+ \frac{d_0x^{n-1} + d_1x^{n-2} + \ldots + d_{n-1}}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n}.$$

Man hat daher

$$\int f(x)\,dx = \int (c_0 x^{m-n} + c_1 x^{m-n-1} + \ldots + c_{m-n})\,dx$$
$$+ \int \frac{d_0 x^{n-1} + d_1 x^{n-2} + \ldots + d_{n-1}}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}\,dx.$$

Das erste Integral rechts — das einer ganzen rationalen algebraischen Function — ist nach den bisherigen Regeln sofort ausgeführt. Es bleibt daher nur noch die Integration einer echt gebrochenen rationalen algebraischen Function zu untersuchen.

Ehe wir hierfür die allgemeinen Regeln aufstellen, mögen einige einfache Fälle erledigt werden.

1.
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)dx$$
$$= \tfrac{1}{2}l(1+x) - \tfrac{1}{2}l(1-x) + C$$
$$= l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

2.
$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)dx$$
$$= \frac{1}{a-b}\,l\frac{x-a}{x-b} + C.$$

3.
$$\int \frac{dx}{x^2+6x+11} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\frac{x+3}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,arc\,tang\,\frac{x+3}{\sqrt{2}} + C.$$

4.
$$\int \frac{dx}{x^2+6x+4} = \int \frac{dx}{(x+3)^2-5} = \int \frac{dx}{(x+3+\sqrt{5})(x+3-\sqrt{5})}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\int \frac{d(x+3-\sqrt{5})}{x+3-\sqrt{5}} - \int \frac{d(x+3+\sqrt{5})}{x+3+\sqrt{5}}\right]$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\,l\frac{x+3-\sqrt{5}}{x+3+\sqrt{5}} + C.$$

5.
$$\int \frac{x\,dx}{x^2-4x+7} = \int \frac{x\,dx}{(x-2)^2+3} = \int \frac{(x-2)\,d(x-2)}{(x-2)^2+3} + \int \frac{2\,d(x-2)}{(x-2)^2+3}$$
$$= \frac{1}{2}\,l[(x-2)^2+3] + \frac{2}{\sqrt{3}}\,arc\,tang\,\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

6.
$$\int \frac{(x+5)\,dx}{x^2-8x+10} = \int \frac{(x+5)\,dx}{(x-4)^2-6} = \int \frac{(x-4)\,d(x-4)}{(x-4)^2-6} + 9\int \frac{dx}{(x-4)^2-6}$$
$$= \frac{1}{2}\,l(x^2-8x+10) + \frac{9}{2\sqrt{6}}\,l\frac{x-4-\sqrt{6}}{x-4+\sqrt{6}} + C.$$

7.
$$\int \frac{dx}{x^2(x+5)} = \int \frac{1}{25}\left(\frac{5-x}{x^2} + \frac{1}{x+5}\right)dx$$
$$= -\frac{1}{5x} - \frac{1}{25}\,lx + \frac{1}{25}\,l(x+5) + C.$$

8. $$\int\frac{dx}{x^5(x-3)} = \int\frac{1}{243}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{x^4+3x+9x^2+27x+81}{x^5}\right)dx$$
$$= \frac{1}{243}\left[l(x-3) - lx + \frac{3}{x} + \frac{9}{2x^2} + \frac{9}{x^3} + \frac{81}{4x^4}\right] + C.$$

Wie man sieht, gelingt in allen diesen Fällen die Integration dadurch, dass man die gebrochene Function in ein Polynom von Brüchen auflöst, deren Nenner lineare Functionen von x oder (Beispiel 7. und 8.) Potenzen linearer Functionen sind; die Zähler sind in dem ersten Falle constant, im letzteren von minderem Grade als der Nenner; nur die Beispiele 3. und 5. machen eine Ausnahme, bei ihnen treten nur Nenner von der Form $z^2 + a$ auf, wobei a positiv ist. Umgekehrt sieht man, dass die Integration echt gebrochener Functionen durchführbar wäre, wenn es gelänge, jede solche Function in der hier angegebenen Weise in Partialbrüche zu zerlegen, d. i. in ein Polynom echt gebrochener Functionen, deren Nenner linear, oder quadratisch, oder Potenzen einer linearen oder quadratischen Function sind. Wir werden nun zeigen, wie diese Zerlegung in jedem Falle durchgeführt werden kann.

2. Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei ganze Functionen und zwar $\varphi(x)$ vom $n$ten, $\psi(x)$ von niederem Grade. Man zerlege die Function $\varphi(x)$ in ihre linearen Faktoren; dies erfolgt bekanntlich durch Auflösung der Gleichung
$$\varphi(x) = 0.$$
Sind $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ die Wurzeln dieser Gleichung, und ist a der Coefficient von x^n in $\varphi(x)$, so ist dann
$$\varphi(x) = a(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n).$$
Wir setzen nun zunächst voraus, dass sämmtliche ξ von einander verschieden sind, und suchen die Zahlen $A_1, A_2, \ldots A_n$ so zu bestimmen, dass
$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{x-\xi_1} + \frac{A_2}{x-\xi_2} + \frac{A_3}{x-\xi_3} + \ldots + \frac{A_n}{x-\xi_n}.$$
Durch Multiplication mit $\varphi(x)$ erhält man hieraus
$$\psi(x) = A_1\frac{\varphi(x)}{x-\xi_1} + A_2\frac{\varphi(x)}{x-\xi_2} + \ldots + A_n\frac{\varphi(x)}{x-\xi_n}.$$
Ersetzt man in dieser Identität für x den besonderen Werth ξ_1, so verschwinden rechts alle Glieder vom zweiten an, da die Grössen
$$\frac{\varphi(x)}{x-\xi_2},\ \frac{\varphi(x)}{x-\xi_3},\ \ldots\ \frac{\varphi(x)}{x-\xi_n}$$
alle den Faktor $x-\xi_1$ enthalten. Für die Grösse $\varphi(x):(x-\xi_1)$ verschwinden Zähler und Nenner, der Werth dieses Quotienten wird daher $\varphi'(\xi)$ (Diff.-Rechn., § 12). Somit gewinnt man
$$\psi(\xi_1) = A_1\varphi'(\xi_1),$$
und hieraus ergiebt sich der gesuchte Zähler A_1 zu

2. $$A_1 = \frac{\psi(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)}.$$

In gleicher Weise folgt allgemein

3. $$A_i = \frac{\psi(\xi_i)}{\varphi'(\xi_i)}.$$

Sind nun sämmtliche ξ real, so sind auch alle A real und man erhält, wenn man die A in 1. einsetzt und integrirt

4. $$\int\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}dx = \frac{\psi(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)}l(x-\xi_1) + \frac{\psi(\xi_2)}{\varphi'(\xi_2)}l(x-\xi_2) + \ldots + \frac{\psi(\xi_n)}{\varphi'(\xi_n)}l(x-\xi_n) + C.$$

Sind nicht alle ξ real, so treten eine gerade Anzahl complexer ξ auf, die paarweis conjugirt sind. Wenn ξ_h und ξ_k conjugirt sind, so sind auch die zugehörigen Zähler A_h und A_k conjugirt, also von der Form $M + iN$ und $M - iN$. Ist nun

$$\xi_h = r + is\,, \quad \text{also} \quad \xi_k = r - is\,,$$

so ist

$$\frac{A_h}{x - \xi_h} + \frac{A_k}{x - \xi_k} = \frac{(A_h + A_k)\,x - A_h\xi_k - A_k\xi_h}{x^2 - (\xi_h + \xi_k)\,x + \xi_h\xi_k}\,.$$

Da nun

$$A_h\xi_k + A_k\xi_h = Mr + Ns + i(Nr - Ms) + Mr + Ns - i(Nr - Ms) = 2(Mr + Ns)\,,$$

so folgt schliesslich

5. $$\frac{A_h}{x - \xi_h} + \frac{A_k}{x - \xi_k} = 2 \cdot \frac{Mx - Mr - Ns}{x^2 - 2rx + r^2 + s^2}\,.$$

Daher ist

6. $$\int\left(\frac{A_h}{x - \xi_h} + \frac{A_k}{x - \xi_k}\right)dx = 2M\int\frac{(x - r)\,dx}{(x - r)^2 + s^2} - 2Ns\int\frac{dx}{(x - r)^2 + s^2}$$
$$= Ml[(x - r)^2 + s^2] - 2N\,arc\,tang\,\frac{x - r}{s} + C.$$

3. Wir wenden uns nun zu dem Falle, dass die Function $\varphi(x)$ mehrere gleiche lineare Faktoren enthält. Es sei $(x - \xi_1)^\alpha$ ein Faktor von $\varphi(x)$, also

$$\varphi(x) = (x - \xi_1)^\alpha\,\varphi_1(x)\,,$$

wobei φ_1 eine Function vom Grade $(n - \alpha)$ ist. Wir versuchen nun die Zerlegung

1. $$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{(x - \xi_1)^\alpha\varphi_1(x)} = \frac{A_0}{(x - \xi_1)^\alpha} + \frac{A_1}{(x - \xi_1)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x - \xi_1} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}\,.$$

Hierbei bezeichnet $\psi_1(x)$ eine Function von minderem Grade, als $\varphi_1(x)$.

Setzt man*) $x - \xi_1 = \dfrac{1}{z}$, also $x = \dfrac{1 + \xi_1 z}{z}$, so wird aus 1.

2. $$\frac{z^\alpha\,\psi\left(\frac{1 + \xi_1 z}{z}\right)}{\varphi_1\left(\frac{1 + \xi_1 z}{z}\right)} = A_0 z^\alpha + A_1 z^{\alpha-1} + \ldots + A_{\alpha-1}z + \frac{\psi_1\left(\frac{1 + \xi_1 z}{z}\right)}{\varphi_1\left(\frac{1 + \xi_1 z}{z}\right)}\,.$$

Macht man die einzelnen Theile jeder der Functionen φ_1, ψ und ψ_1 gleichnamig und vereint sie dann, so erscheinen diese Functionen als Quotienten ganzer Functionen von z von demselben Grade, den die ursprünglichen Functionen in x hatten, dividirt durch die höchste vorkommende Potenz von z. Sind also $\psi(x)$ und $\psi_1(x)$ vom Grade $n - \delta$ bez. $n - \alpha - \varepsilon$, und bezeichnen Φ_1, Ψ, Ψ_1 ganze Functionen von den Graden $n - \alpha$, $n - \delta$, $n - \alpha - \varepsilon$, so hat man

$$\varphi_1\left(\frac{1 + \xi_1 z}{z}\right) = \frac{\Phi_1(z)}{z^{n-\alpha}}\,, \quad \psi\left(\frac{1 + \xi_1 z}{z}\right) = \frac{\Psi(z)}{z^{n-\delta}}\,, \quad \psi_1\left(\frac{1 + \xi_1 z}{z}\right) = \frac{\Psi_1(z)}{z^{n-\alpha-\varepsilon}}\,.$$

Daher wird aus 2.

$$z^\alpha \cdot \frac{\Psi(z)}{z^{n-\delta}} \cdot \frac{z^{n-\alpha}}{\Phi_1(z)} = A_0 z^\alpha + \ldots + A_{\alpha-1}z + \frac{\Psi_1(z)}{z^{n-\alpha-\varepsilon}} \cdot \frac{z^{n-\alpha}}{\Phi_1(z)}\,,$$

oder einfacher

3. $$\frac{z^\delta\,\Psi(z)}{\Phi_1(z)} = A_0 z^\alpha + \ldots + A_{\alpha-1}z + \frac{z^\varepsilon\,\Psi_1(z)}{\Phi_1(z)}\,.$$

Die Function Φ_1 kann nicht durch Annullirung einiger Coefficienten von minderem Grade als $n - \alpha$ sein; denn den Wurzeln z der Gleichung

*) Dölp, Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung, nebst den Resultaten und den zur Lösung nöthigen theoretischen Erläuterungen. Giessen 1869. pag. 81.

$$4. \qquad \frac{\Phi_1(z)}{z^{n-\alpha}} = 0$$

entsprechen die Wurzeln der Gleichung $\varphi_1(x) = 0$; davon sind aber die $n - \alpha$ Wurzeln $z = \infty$ von 4. auszunehmen, denn sie liefern $x - \xi_1 = 1 : z = 0$, also $x = \xi_1$ während nach der Voraussetzung die Function $\varphi_1(x)$ den Faktor $x - \xi_1$ nicht besitzt. Um die $n - \alpha$ Wurzeln von $\varphi_1(x) = 0$ zu erhalten, hat man also nur die Wurzeln von $\Phi_1(z) = 0$ zu ermitteln und in $x - \xi_1 = 1 : z$ einzusetzen. Verschwänden nun die Coefficienten von $z^{n-\alpha}$, $z^{n-\alpha-1}$, $z^{n-\alpha-2}, \ldots z^{n-\alpha-x}$ in $\Phi_1(z)$, so würde die Gleichung $\Phi_1(z) = 0$ k gleiche Wurzeln $z = \infty$ haben, im Widerspruche mit der Voraussetzung, wie soeben gezeigt wurde.

In ganz gleicher Weise ist ersichtlich, dass $\Psi(z)$ und $\Psi_1(z)$ nicht von minderem Grade als $n - \delta$, bez. $n - \alpha - \varepsilon$ ausfallen können; mithin ist $z^\delta \Psi(z)$ vom Grade n und $z^\varepsilon \Psi_1(z)$ vom Grade $n - \alpha$.

Man erhält daher die Darstellung 3., indem man die algebraische Division $z^\delta \Psi(z) : \Psi_1(z)$ nach fallenden Potenzen von z geordnet ausführt.

Das höchste Glied des Quotienten ist $A_0 z^\alpha$; man berechnet ihn bis zu dem Gliede $A_{\alpha-1} z$. Der Rest ist vom Grade $n - \alpha$, und ist die Function

$$z^\varepsilon \Psi_1(z).$$

Substituirt man in

$$4. \qquad \frac{z^\varepsilon \Psi(z)}{\Phi_1(z)}$$

für z rückwärts wieder den Werth $z = 1 : (x - \xi_1)$, so geht 4. in $\psi_1(x) : \varphi_1(x)$ über; somit ist nun ψ_1 bekannt. Hat nun $\varphi_1(x)$ lauter ungleiche lineare Faktoren, so wird $\psi_1(x) : \varphi_1(x)$ nach No. 2 weiter zerlegt; enthält hingegen $\varphi_1(x)$ noch mehrfache lineare Faktoren, so hat man die soeben gegebene Entwicklung zu wiederholen. Ist

$$\varphi(x) = (x - \xi_1)^\alpha \cdot (x - \xi_2)^\beta \cdot \ldots (x - \xi_r)^\rho,$$

so erhält man schliesslich

$$5. \qquad \begin{aligned} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = &\frac{A_0}{(x-\xi_1)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-\xi_1)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-2}}{(x-\xi_1)^2} + \frac{A_{\alpha-1}}{x-\xi_1} \\ &+ \frac{B_0}{(x-\xi_2)^\beta} + \frac{B_1}{(x-\xi_2)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-2}}{(x-\xi_2)^2} + \frac{B_{\beta-1}}{x-\xi_2} \\ &+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ &+ \frac{R_0}{(x-\xi_r)^\rho} + \frac{R_1}{(x-\xi_r)^{\rho-1}} + \ldots + \frac{R_{\rho-2}}{(x-\xi_r)^2} + \frac{R_{\rho-1}}{x-\xi_r}. \end{aligned}$$

Sind nun alle $\xi_1 \ldots \xi_r$ real, so ist mit dieser Zerlegung auch die Integration von $[\psi(x) : \varphi(x)]\, dx$ erledigt; man erhält

$$6. \qquad \begin{aligned} \int \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} dx = &- \frac{(\alpha-1)A_0}{(x-\xi_1)^{\alpha-1}} - \frac{(\alpha-2)A_1}{(x-\xi_1)^{\alpha-2}} - \ldots - \frac{A_{\alpha-2}}{x-\xi_1} + A_{\alpha-1}\, l(x-\xi_1) \\ &- \frac{(\beta-1)B_0}{(x-\xi_2)^{\beta-1}} - \frac{(\beta-2)B_1}{(x-\xi_2)^{\beta-2}} - \ldots - \frac{B_{\beta-2}}{x-\xi_2} + B_{\beta-1}\, l(x-\xi_2) \\ &- \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ &- \frac{(\rho-1)R_0}{(x-\xi_r)^{\rho-1}} - \frac{(\rho-2)R_1}{(x-\xi_r)^{\rho-2}} - \ldots - \frac{R_{\rho-2}}{x-\xi_r} + R_{\rho-1}\, l(x-\xi_r). \end{aligned}$$

4. Ist $\xi_1 = r + is$ und enthält φ den Faktor $(x - r - is)^\mu$, so enthält φ auch den conjugirten Faktor $(x - r - is)^\mu$; beide Faktoren geben vereint den Faktor

$$[(x - r)^2 + s^2]^\mu.$$

Es lässt sich nun nachweisen, dass dann immer eindeutig folgende Entwicklung durchgeführt werden kann

$$1.\quad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_0 x + B_0}{[(x-r)^2 + s^2]^\mu} + \frac{A_1 x + B_1}{[(x-r)^2 + s^2]^{\mu-1}} + \ldots + \frac{A_{\mu-1}x + B_{\mu-1}}{(x-r)^2 + s^2} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)},$$

wobei $\varphi_1(x)$ das Produkt der Faktoren bezeichnet, die in φ ausser $(x-r)^2 + s^2$ enthalten sind.

Multiplicirt man nämlich in 1. beide Seiten mit $[(x-r)^2 + s^2]^\mu$, so erhält man, wenn man $(x-r)^2 + s^2$ zur Abkürzung mit U bezeichnet

$$2.\quad \begin{aligned} \frac{\psi(x)}{\varphi_1(x)} &= A_0 x + B_0 + (A_1 x + B_1)\, U + (A_2 x + B_2)\, U^2 + \ldots \\ &\ldots + (A_{\mu-1}x + B_{\mu-1})\, U^{\mu-1} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}\, U^\mu . \end{aligned}$$

Ersetzt man hier x durch $r + is$, so verschwinden alle Potenzen von U; nimmt die linke Seite dabei den complexen Werth $M_0 + iN_0$ an, so hat man

$$3.\quad M_0 + iN_0 = A_0(r + is) + B_0 .$$

Durch Vergleichung der realen und imaginären Theile ergiebt sich hieraus

$$4.\quad A_0 = \frac{N_0}{s}, \quad B_0 = M_0 - \frac{r}{s} N_0 .$$

Die Function $\psi(x) - \varphi_1(x)(A_0 x + B_0)$ verschwindet, wenn A_0 und B_0 die Werthe 4. haben, und x durch ξ_1 ersetzt wird; hieraus folgt, dass diese Function den Faktor $x - \xi_1$ hat; sie hat daher auch den conjugirten Faktor, und ist folglich theilbar durch das Produkt dieser beiden Faktoren, durch U. Führt man die Division aus, und bezeichnet den Quotienten mit $\chi_1(x)$, so hat man daher

$$\psi(x) - \varphi_1(x)(A_0 x + B_0) = U \cdot \chi_1(x) .$$

Setzt man dies in 2. ein, so enthalten alle Glieder der Gleichung den Faktor U; nach Entfernung desselben bleibt

$$5.\quad \begin{aligned} \frac{\chi_1(x)}{\varphi_1(x)} &= A_1 x + B_1 + (A_2 x + B_2)\, U + (A_3 x + B_3)\, U^2 + \ldots \\ &+ (A_{\mu-1}x + B_{\mu-1})\, U^{\mu-2} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}\, U^{\mu-1} . \end{aligned}$$

Setzt man hier $x = \xi_1$, so erhält man

$$6.\quad A_1 \xi_1 + B_1 = \frac{\chi_1(\xi_1)}{\varphi_1(\xi_1)},$$

und hieraus wie bei 3. und 4. durch Sonderung des Realen und Imaginären die Grössen A_1 und B_1.

Durch wiederholte Anwendung dieses in der Ausführung zwar umständlichen, aber ganz elementaren und durchsichtigen Verfahrens gewinnt man sämmtliche A und B.

Es ist klar, dass man ein gleiches Verfahren auch an Stelle des in No. 3 gegebenen anwenden könnte.

5. Für den Fall, dass $\varphi(x)$ mehrfache complexe Faktoren hat, kommt die Integration von $(\psi : \varphi)\, dx$ daher auf die Entwicklung der Integrale hinaus

$$1.\quad \int \frac{Ax + B}{(x-r)^2 + s^2}\, dx \qquad \text{und} \qquad 2.\quad \int \frac{Ax + B}{[(x-r)^2 + s^2]^n}\, dx,$$

wobei n eine ganze positive Zahl bezeichnet. Das Integral 1. liefert (vergl. No. 2, 6)

$$3.\quad \begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(x-r)^2 + s^2}\, dx &= \int \frac{A(x-r) + (B + Ar)}{(x-r)^2 + s^2}\, dx \\ &= \frac{A}{2}\, l[(x-r)^2 + s^2] + \frac{B + Ar}{s}\, arc\,tang\, \frac{x-r}{s} + C . \end{aligned}$$

Für das zweite erhält man die Zerlegung

4. $$\int \frac{Ax + B}{[(x-r)^2 + s^2]^n} dx = A \int \frac{(x-r)\,dx}{[(x-r)^2+s^2]^n} + (B + Ar)\int \frac{dx}{[(x-r)^2+s^2]^n}.$$

Nun ist

5. $$\int \frac{(x-r)\,dx}{[(x-r)^2+s^2]^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{[(x-r)^2+s^2]^{n-1}},$$

also erübrigt noch die Ausführung des Integrals

$$\int \frac{dx}{[(x-r)^2+s^2]^n}.$$

Führt man hier eine neue Variable durch die Gleichung ein

$$x - r = sz,$$

so ist $$dx = s\,dz, \quad (x-r)^2 + s^2 = s^2(1+z^2),$$

und man erhält

6. $$\int \frac{dx}{[(x-r)^2+s^2]^2} = \frac{1}{s}\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}.$$

Wie man aus der Zusammenrechnung der rechten Seite sofort sieht, ist

7. $$\int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}} - \int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^n};$$

ferner erhält man durch theilweise Integration

8. $$\int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^n} = \int z \cdot \frac{z\,dz}{(1+z^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{z}{(1+z^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dz}{(1-z^2)^{n-1}}.$$

Daher ist

9. $$\int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{z}{(1+z^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dz}{(1-z^2)^{n-1}}.$$

Durch dieselbe Formel reducirt man $\int dz : (1 - z^2)^{n-1}$ auf $\int dz : (1 + z^2)^{n-2}$ u. s. w., bis man zum Schluss auf

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = arc\,tang\,z + C$$

kommt.

6. Alles in No. 1 bis No. 5 Entwickelte zusammenfassend, erhalten wir somit das Ergebniss: Das Integral einer rationalen algebraischen Function lässt sich in jedem Falle durch eine endliche Anzahl von rationalen Functionen, Logarithmen und Arcustangens ausdrücken.

7. Die Anwendung der soeben entwickelten Regeln wollen wir nun an einigen Beispielen zeigen.

A.

$$\int \frac{x^3 + 9x^2 - 4x + 7}{(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x + 6)} dx.$$

Hier ist $\psi(x) = x^3 + 9x^2 - 4x + 7$, $\varphi(x) = (x-2)(x-3)(x+2)(x+3)$,
also $\xi_1 = 2, \quad \xi_2 = 3, \quad \xi_3 = -2, \quad \xi_4 = -3.$

Die Werthe $\varphi'(\xi_k)$ werden am zweckmässigsten nach der Formel berechnet

$$\varphi'(\xi_k) = \left[\frac{\varphi(x)}{x - \xi_k}\right]_{x = \xi_k}.$$

Man findet $\varphi'(2) = -20, \quad \varphi'(3) = 30, \quad \varphi'(-2) = 20, \quad \varphi'(-3) = -30.$
Ferner ist $\psi(2) = 43, \quad \psi(3) = 103, \quad \psi(-2) = 43, \quad \psi(-3) = 73.$

Daher hat man die Zerlegung

$$\frac{x^3+9x^2-4x+7}{(x^2-5x+6)(x^2+5x+6)}=-\frac{43}{20}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{30}{103}\cdot\frac{1}{x-3}+\frac{43}{20}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{73}{30}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\int\frac{x^3+9x^2-4x+7}{(x^2-5x+6)(x^2+5x+6)}\,dx=-\frac{43}{20}\,l(x-2)+\frac{30}{103}\,l(x-3)$$
$$+\frac{43}{20}\cdot l(x+2)-\frac{73}{30}\cdot l(x+3)+C.$$

B.

$$\int\frac{dx}{(x^2-4x+5)(x^2-6x+13)}.$$

Hier ist $\psi(x)=1$,

$$\varphi(x)=(x-2-i)(x-2+i)(x-3-2i)(x-3+2i),$$
$$\xi_1=2+i,\quad \xi_2=2-i,\quad \xi_3=3+2i,\quad \xi_4=3-2i,$$
$$\varphi'(2+i)=4+8i,\qquad \varphi'(2-i)=4-8i,$$
$$\varphi'(3+2i)=-16-8i,\qquad \varphi'(3-2i)=-16+8i.$$

Man hat daher die Zerlegung

$$\frac{1}{(x^2-4x+5)(x^2-6x+1)}=\frac{1}{4+8i}\cdot\frac{1}{x-2-i}+\frac{1}{4-8i}\cdot\frac{1}{x-2+i}$$
$$-\frac{1}{16+8i}\cdot\frac{1}{x-3-2i}-\frac{1}{16-8i}\cdot\frac{1}{x-3+2i}.$$

Durch Vereinigung conjugirt complexer Ausdrücke erhält man

$$\frac{1}{4+8i}\cdot\frac{1}{x-2-i}+\frac{1}{4-8i}\cdot\frac{1}{x-2+i}=\frac{x}{10[(x-2)^2+1]},$$
$$\frac{1}{16-8i}\cdot\frac{1}{x-3-2i}+\frac{1}{16-8i}\cdot\frac{1}{x-3+2i}=\frac{x-2}{10[(x-3)^2+4]}.$$

Da nun

$$\int\frac{x\,dx}{(x-2)^2+1}=\frac{1}{2}\,l(x^2-4x+5)+2\,arc\,tang(x-2),$$
$$\int\frac{(x-2)\,dx}{(x-3)^2+4}=\frac{1}{2}\,l(x^2-6x+13)+\frac{1}{2}\,arc\,tang\frac{x-3}{2},$$

so folgt schliesslich

$$\int\frac{dx}{(x^2-4x+5)(x^2-6x+13)}=\frac{1}{20}\,l\frac{x^2-4x+5}{x^2-6x+13}+\frac{1}{5}\,arc\,tang(x-2)$$
$$-\frac{1}{20}\,arc\,tang\frac{x-3}{2}+C.$$

C.

$$\int\frac{x^2-3x+1}{(x-2)^3(x-3)^2}\,dx.$$

Hier ist $\xi_1=2$; die Substitution $x=\dfrac{1+2z}{z}$ liefert

$$x^2-3x+1=\frac{1}{z^2}(-z^2+z+1),$$
$$\varphi_1\left(\frac{1+2z}{z}\right)=\left(\frac{1+2z}{z}-3\right)^2=\frac{1}{z^2}(1-z)^2.$$

Daher ist

$$\frac{z^3\Psi(z)}{\Phi_1(z)}=\frac{z^3(-z^2+z+1)}{(1-z)^2}.$$

Nun ist

$$(-z^5+z^4+z^3):(z^2-2z+1)=-z^3-z^2+\frac{z^2}{z^2-2z+1}.$$

Substituirt man im Restbruche $z=1:(x-2)$, so erhält man

$$\frac{z^2}{z^2-2z+1}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^2}=\frac{1}{(x-3)^2}.$$

Daher hat man die Zerlegung

$$\frac{x^2-3x+1}{(x-2)^3(x-3)^2}=-\frac{1}{(x-2)^3}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-3)^2},$$

folglich ist

$$\int\frac{x^2-3x+1}{(x-2)^3(x-3)^2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}.$$

D.

$$\int\frac{x^3+4}{x^4(x-1)^2}\,dx.$$

In diesem Falle hat man $\xi_1=1$, und hat daher die Substitution $x=(1+z):z$; sie ergiebt

$$x^3+4=\frac{1}{z^3}(5z^3+3z^2+3z+1),$$

$$\varphi_1\left(\frac{1+z}{z}\right)=\frac{1}{z^4}(z+1)^4,\quad\text{und daher}$$

$$\frac{z^3\Psi(z)}{\Phi_1(2)}=\frac{z^3(5z^3+3z^2+3z+1)}{(z+1)^4}.$$

Man erhält weiter

$$(5z^6+3z^5+3z^4+z^3):(z^4+4z^3+6z^2+4z+1)=5z^2-17z$$
$$+\frac{41z^4+83z^3+63z^2+17z}{(z+1)^4}.$$

Ersetzt man im Restbruche z wieder durch $1:(x-1)$, also $z+1$ durch $x:(x-1)$, so erhält man

$$\frac{41z^4+83z^3+63z^2+17z}{(z+1)^4}=\frac{17x^3+12x^2+8x+4}{x^4}.$$

Folglich ist

$$\frac{x^3+4}{x^4(x-1)^2}=\frac{5}{(x-1)^2}-\frac{17}{x-1}+\frac{17}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{12}{x^3}+\frac{4}{x^4},$$

und mithin

$$\int\frac{x^3+4}{x^4(x-1)^2}dx=-\frac{5}{x-1}-17l\frac{x-1}{x}-\frac{8}{x}-\frac{6}{x^2}-\frac{4}{3x^3}+C.$$

E.

$$\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^2(x+1)^3}.$$

Die Auflösung der Gleichung $x^2-2x+5=0$ liefert $\xi_1=1+2i$. Ur die Darstellung zu erreichen

$$\frac{1}{(x^2-2x+5)^2(x+1)^3}=\frac{A_0x+B_0}{(x^2-2x+5)^2}+\frac{A_1x+B_1}{x^2-2x+5}+\frac{\Psi_1(x)}{(x+1)^3},$$

setze man $x=1+2i$ in

$$\frac{1}{(x+1)^3}=A_0x+B_0+(A_1x+B_1)(x^2-2x+5)+\frac{\psi_1(x)(x^2-2x+5)^2}{(x+1)^3}$$

Da $(2+2i)^3 = 16(i-1)$, so erhält man

$$\frac{1}{16(i-1)} = -\frac{i+1}{32} = A_0(1+2i) + B_0,$$

und daher
$$A_0 = -\frac{1}{64}, \quad B_0 = -\frac{1}{64}.$$

Man bildet nun

$$1 - \varphi_1(x)(A_0 x + B_0),$$

wobei $\varphi_1(x) = (x+1)^3$, und erhält

$$1 - \varphi_1(x)(A_0 x + B_0) = \frac{1}{64}[64 + (x+1)^4] = \frac{1}{64}(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 65).$$

Dies durch $x^2 - 2x + 5$ dividirt, ergiebt den Quotienten

$$\chi_1(x) = \frac{1}{64}(x^2 + 6x + 13).$$

Daher hat man nun

$$\frac{\frac{1}{64}(x^2+6x+13)}{(x+1)^3} = A_1 x + B_1 + \frac{\psi_1(x)(x^2-2x+5)}{(x+1)^3}.$$

Setzt man hier wieder $x = 1 + 2i$, also $x^2 + 6x + 13 = 16(1+i)$, so erhält man

$$-\frac{i}{64} = A_1(1+2i) + B_1, \quad \text{folglich } A_1 = -\frac{1}{128}, \quad B_1 = \frac{1}{128}.$$

Bildet man weiter $\chi_1(x) - \varphi_1(x)(A_1 x + B_1)$, so erhält man hierfür

$$\frac{1}{64}(x^2 + 6x + 13) - \frac{1}{128}(x+1)^3(-x+1) = \frac{1}{128}(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25).$$

Dies wieder durch $(x^2 - 2x + 5)$ dividirt, ergiebt

$$\frac{1}{128}(x^2 + 4x + 5).$$

Man hat daher

$$\frac{\frac{1}{128}(x^2+4x+5)}{(x+1)^3} = \frac{\psi_1(x)}{(x+1)^3}, \quad \text{also} \quad \psi_1(x) = \frac{1}{128}(x^2 + 4x + 5).$$

Macht man noch von der Identität Gebrauch

$$x^2 + 4x + 5 = (x+1)^2 + 2(x+1) + 2,$$

so hat man schliesslich die vollständige Zerlegung

$$\frac{1}{(x^2-2x+5)(x+1)^3} = -\frac{1}{64}\cdot\frac{x+1}{(x^2-2x+5)^2} - \frac{1}{128}\cdot\frac{x-1}{x^2-2x+5}$$
$$+ \frac{1}{128}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3}\right).$$

Nun hat man

$$\int\frac{x+1}{[(x-1)^2+4]^2}dx = \int\frac{(x-1)\,dx}{[(x-1)^2+4]^2} + 2\int\frac{dx}{[(x-1)^2+4]^2},$$

$$\int\frac{(x-1)\,dx}{[(x-1)^2+4]^2} = \frac{1}{2}l(x^2 - 2x + 5),$$

$$\int\frac{dx}{[(x-1)^2+4]^2} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2+4} - \frac{1}{4}\int\frac{(x-1)^2\,dx}{[(x-1)^2+4]^2},$$

$$\int\frac{(x-1)^2\,dx}{[(x-1)^2+4]^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{(x-1)^2+4} + \frac{1}{4}\,arc\,tang\,\frac{x-1}{2}.$$

Daher ergiebt sich schliesslich

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2(x+1)^3} = \frac{1}{256}\left[3l\frac{1}{x^2-2x+5} - \frac{x-1}{x^2-2x+5} - \frac{1}{2} arctang \frac{x-1}{2}\right.$$
$$\left. + 2l(x+1) - \frac{4}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}\right] + C.$$

§ 4. Integration irrationaler Functionen.

1. Die Integrale irrationaler Function lassen sich, wie wir später zeigen werden, im Allgemeinen nicht auf die bisher bekannten Functionen reduciren; nur in den einfachsten Fällen gelingt diese Reduction, und derartige Fälle sollen im gegenwärtigen Abschnitte betrachtet werden.

2. Kommt in einer irrationalen Function von x die Variable nur in einer Wurzel vor, und ist der Radicand dieser Wurzel eine ganze Potenz einer linearen Function von x, also die Function von der Form

$$F[x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}],$$

so lässt sich das Integral

$$\int F[x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}]\,dx$$

durch Substitution einer neuen Variabeln leicht auf das Integral einer rationalen Function reduciren. Setzt man nämlich

$$ax + b = z^n,$$

also

$$x = \frac{z^n - b}{a}, \quad dx = \frac{n}{a} z^{n-1},$$

so geht das Integral über in

$$\int F[x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}]\,dx = \frac{n}{a}\int F\left(\frac{z^n - b}{a}, z^m\right) dz,$$

und dieses Integral kann nach den im vorigen Abschnitte gegebenen Anleitungen vollständig entwickelt werden.

Beispiel.
$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{x+1}}.$$

Man setze $x + 1 = z^3$, also $x = z^3 - 1$, $dx = 3z^2$.
Dadurch erhält man

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x+1}}dx = 3\int \frac{z^6 - 2z^3 + 1}{z} z^2\,dz = 3\int (z^7 - 2z^4 + z)\,dz$$
$$= \frac{3}{8}z^8 - \frac{6}{5}z^5 + \frac{3}{2}z^2 + C$$
$$= \frac{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}{40}[5(x+1)^2 - 16(x+1) + 20] + C.$$

3. Wir wenden uns nun zur Entwicklung des Integrals

1.
$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}.$$

Man hat

2.
$$a + 2bx + cx^2 = a - \frac{b^2}{c} + c\left(x + \frac{b}{c}\right)^2$$
$$= \frac{b^2 - ac}{c}\left[\frac{c^2}{b^2 - ac}\left(x + \frac{b}{c}\right)^2 - 1\right].$$

Ist nun $b^2 - ac < 0$, so muss $c > 0$ sein, da sonst der Radicand für alle realen Werthe von x negativ, die Wurzel also imaginär würde, während wir ausdrücklich uns gegenwärtig auf Integrale realer Functionen beschränken. Macht man von der Substitution Gebrauch

3. $$\frac{c}{\sqrt{ac-b^2}}\left(x+\frac{b}{c}\right)=z\,,\quad \text{also}\quad dx=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{c}\,dz\,,$$
so geht das gegebene Integral über in

4. $$J=\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}\,.$$

Nun ist bekanntlich
$$dl(z+\sqrt{1+z^2})=\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}\,.$$

Daher hat man
$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\,\frac{cx+b+\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{\sqrt{ac-b^2}}+C\,.$$

Man kann den Bestandtheil $\left(-\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\sqrt{ac-b^2}\right)$ mit der Constanten verschmelzen, und erhält dann

5. $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\,[cx+b+\sqrt{c(a+2bx+cx^2)}]+C\,,$$
$$b^2-ac<0\,,\quad c>0\,.$$

Ist hingegen $b^2-ac>0$, so setzen wir in 2.

6. $$\frac{c}{\sqrt{b^2-ac}}\left(x+\frac{b}{c}\right)=z\,,\quad \text{also}\quad dx=\frac{\sqrt{b^2-ac}}{c}\,dz\,,$$
und erhalten dadurch

7. $$a+2bx+cx^2=-\frac{b^2-ac}{c}(1-z^2)\,.$$

Ist nun $c>0$, so muss $z^2>1$ sein, damit $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ real ist. Unter dieser Beschränkung setzen wir
$$a+2bx+cx^2=\frac{b^2-ac}{c}(z^2-1)\,.$$

Aus der Differentialformel
$$dl(z+\sqrt{z^2-1})=\frac{dx}{\sqrt{z^2-1}}$$
folgt nun
$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\,\frac{cx+b+\sqrt{c(a+2bx+cx^2)}}{\sqrt{b^2-ac}}+C\,,$$
oder, wenn man die Constante mit $\left(-\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\sqrt{b^2-ac}\right)$ vereint,

9. $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\,[cx+b+\sqrt{c(a+2bx+cx^2)}]+C\,.$$

Diese Integralformel ist daher anzuwenden,

wenn $b^2-ac<0$ und $c>0$, für jedes reale x;

wenn $b^2-ac>0$ und $c>0$, für $\frac{(cx+b)^2}{b^2-ac}\geq 1$.

Ist $c<0$, so wird $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ nur real, so lange $z^2<1$. In diesem Falle und unter dieser Beschränkung für z ist nun
$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}=-\frac{1}{\sqrt{-c}}\,arc\sin z+C\,,$$
also, wenn man wieder z durch x ausdrückt

$$10. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \, arc \sin \frac{cx + b}{\sqrt{b^2 - ac}} + C,$$

$$b^2 - ac > 0, \quad c < 0, \quad \frac{(cx + b)^2}{b^2 - ac} \leq 1.$$

Ist $ac - b^2 = 0$, so sind die Substitutionen unbrauchbar, die zu den Formeln 9. und 10. führen. In diesem Falle ist

$$a + 2bx + cx^2 = c\left(x + \frac{b}{c}\right)^2.$$

Die Wurzel ist daher rational und man hat

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \int \frac{dx}{x + \frac{b}{c}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \, l\left(x + \frac{b}{c}\right) + C.$$

4. Zur Reduction des Integrals

$$\int \frac{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} \, dx$$

dient folgender Satz*):

Die Constanten $B_0, B_1, \ldots B_{n-1}, B_n$ lassen sich immer so wählen, dass

$$1. \quad \int \frac{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} \, dx$$

$$= (B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \ldots + B_{n-1})\sqrt{a + 2bx + cx^2} + B_n \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}.$$

Durch Differentiation erhält man nämlich aus 1.

$$\frac{A_0 x^n + \ldots + A_n}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = (B_0 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1}) \frac{b + cx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$$
$$+ [(n-1) B_0 x^{n-2} + (n-2) B_1 x^{n-3} + \ldots + B_{n-2}] \sqrt{a + 2bx + cx^2}$$
$$+ \frac{B_n}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}.$$

Multiplicirt man beide Seiten mit $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$, so erhält man

$$A_0 x^n + \ldots + A_n = (B_0 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1})(cx + b)$$
$$+ [(n-1) B_0 x^{n-2} + \ldots + B_{n-2}](cx^2 + 2bx + a) + B_n.$$

Vergleicht man die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x auf beiden Seiten, so erhält man zur Bestimmung der B die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
A_0 &= ncB_0, \\
A_1 &= (n-1)cB_1 + (2n-1)bB_0, \\
A_2 &= (n-2)cB_2 + (2n-3)bB_1 + (n-1)aB_0, \\
A_3 &= (n-3)cB_3 + (2n-5)bB_2 + (n-2)aB_1, \\
A_4 &= (n-4)cB_4 + (2n-7)bB_3 + (n-3)aB_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{n-2} &= 2cB_{n-2} + 5bB_{n-3} + 3aB_{n-4}, \\
A_{n-1} &= cB_{n-1} + 3bB_{n-2} + 2aB_{n-3}, \\
A_n &= bB_{n-1} + aB_{n-2} + B_n.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen kann man nach einander die Zahlen $B_0, B_1, \ldots B_n$ bestimmen.

Beispiel. Für die Ermittelung von

*) DÖLP, Aufgaben, pag. 90.

$$\int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

hat man in obigen Gleichungen zu setzen

$$n = 6\,, \quad A_0 = 1\,, \quad A_1 = \ldots = A_n = 0\,, \quad a = 1\,, \quad b = 0\,, \quad c = 1\,,$$

daher gehen dieselben über in

$$\begin{aligned} 1 &= 6B_0\,, & 0 &= 3B_3 + 4B_1\,, \\ 0 &= 5B_1\,, & 0 &= 2B_4 + 3B_2\,, \\ 0 &= 4B_2 + 5B_0\,, & 0 &= B_5 + 2B_3\,, \end{aligned}$$

$$0 = B_4 + B_6\,.$$

Sie ergeben $B_1 = B_3 = B_5 = 0\,,$

$$B_0 = \tfrac{1}{6}\,, \quad B_2 = -\tfrac{5}{24}\,, \quad B_4 = \tfrac{5}{16}\,, \quad B_6 = -\tfrac{5}{16}\,.$$

Folglich ist

$$\int \frac{x^6\, dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\frac{x^5}{6} - \frac{5x^3}{24} + \frac{5x}{16}\right)\sqrt{1+x^2} - \frac{5}{16}\, l(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

5. Um das Integral zu ermitteln

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{a + 2bx + cx^2}}\,,$$

setzen wir

$$x = \frac{1}{y} + \alpha\,, \quad \text{also} \quad dx = -\frac{dy}{y^2}\,,$$

$$a + 2bx + cx^2 = \frac{1}{y^2}\left[c + 2(b + c\alpha)y + (a + 2b\alpha + c\alpha^2)y^2\right],$$

und erhalten dadurch

$$1. \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{a + 2bx + cx^2}} = -\int \frac{y^{n-1}\, dy}{\sqrt{c + 2(b + c\alpha)y + (a + 2b\alpha + c\alpha^2)y^2}}\,.$$

Ist nun $a^2 + 2b\alpha + c\alpha^2 = 0$, also $x - \alpha$ ein Faktor von $a + 2bx + cx^2$, so reducirt sich das Integral auf

$$2. \quad -\int \frac{y^{n-1} dy}{\sqrt{c + 2(b + c\alpha)y}}\,,$$

und wird durch die Substitution

$$c + 2(b + c\alpha)y = z^2$$

in das Integral einer rationalen Function transformirt. Ist hingegen $a^2 + 2b\alpha + c\alpha^2 \gtrless 0$, so hat man 1. nach den im vorigen Abschnitte gegebenen Regeln zu entwickeln.

6. Hiermit ist nun auch das allgemeine Integral erledigt

$$\int \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}\,,$$

wenn $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ ganze Functionen von x bezeichnen und $\varphi(x)$ nur reale lineare Faktoren hat.

Man zerlege den Quotienten $\psi(x) : \varphi(x)$ nach den in § 3 gegebenen Regeln in eine ganze Function und in ein Polynom von Brüchen von der Form

$$\frac{A}{(x - \xi)^n}\,.$$

Dadurch zerfällt das vorgelegte Integral in ein Polynom von Integralen, die nach den gegebenen Regeln entwickelt werden können.

7. Alle Integrale von der Form

$$1. \quad \int F(x, \sqrt{a + 2bx + cx^2})\, dx\,,$$

wobei F eine rationale algebraische Function von x und $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ bedeutet, können durch eine geschickte Substitution in Integrale einer rationalen Function transformirt werden.

Eine solche Substitution einer neuen Variabeln y muss die Bedingungen erfüllen, dass durch dieselbe sowol x als $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ rational in y ausgedrückt werden. Diese Bemerkung führt auf den Gedanken, eine Substitution von der Form zu versuchen

$$\sqrt{a+2bx+cx^2} = A + Bx + Cy,$$

worin A, B, C noch zu bestimmen sind. Durch Quadriren findet man

$$2. \quad a + 2bx + cx^2 = A^2 + 2ABx + 2ACy + B^2x^2 + 2BCxy + C^2y^2.$$

Damit nun x rational in y ausgedrückt werde, muss $B^2 = c$ sein; um die Formeln zu vereinfachen nehmen wir ferner $AB = b$, also $A = b : \sqrt{c}$. Hierdurch erhält man aus 2., wenn man zur Abkürzung $b^2 - ac$ durch Δ bezeichnet

$$3. \quad x = -\frac{\Delta + cC^2y^2 + 2b\sqrt{c}\cdot Cy}{2\sqrt{c}\,Cy}.$$

Hierin kann noch C beliebig gewählt werden; nimmt man $C = 2b : \sqrt{c}$, so wird $cC^2 = 2b\sqrt{c}\,C = 4b^2$ und man erhält die Formelgruppe

$$4. \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\Delta + 4b^2(y+y^2)}{4bcy}, \\ \sqrt{a+2bx+cx^2} = -\dfrac{\Delta - 4b^2y^2}{4b\sqrt{c}\cdot y}, \\ dx = \dfrac{\Delta - 4b^2y^2}{4bcy^2}\,dy. \end{cases}$$

Diese Formeln sind nur anzuwenden, so lange c positiv ist, da sonst durch $\sqrt{c}$ imaginäre Bestandtheile eintreten würden.

Ist c negativ, so ist $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ für reale Werthe von x nur dann real, wenn $b^2 - ac > 0$ ist, wenn also $a + 2bx + cx^2$ reale lineare Faktoren hat. Ist nun $a + 2bx + cx^2 = c(x-\alpha)(x-\beta)$, so setze man

$$5. \quad c\frac{x-\alpha}{x-\beta} = y^2, \quad \text{also}$$

$$6. \quad a + 2bx + cx^2 = c(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\beta)^2y^2.$$

Aus 5. und 6. folgen die Substitutionsformeln

$$7. \quad \begin{cases} x = \dfrac{\beta y^2 - \alpha c}{y^2 - c}, \\ \sqrt{a+2bx+cx^2} = \dfrac{c(\beta-\alpha)y}{y^2-c}, \\ dx = -2\dfrac{c(\beta-\alpha)y}{(y^2-c)^2}\,dx. \end{cases}$$

Durch die Anwendung der Formeln 4. gewinnt man insbesondere, wenn $c > 0$,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = -\int\frac{dy}{\sqrt{c}\cdot y} = -\frac{1}{\sqrt{c}}\,ly$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\frac{-(b+cx)+\sqrt{c}\cdot\sqrt{a+2bx+cx^2}}{\sqrt{c}} + C.$$

Rechnet man $\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\sqrt{c}$ mit in die Constante, so kann man hierfür schreiben

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\frac{1}{-(b+cx)+\sqrt{c}\cdot\sqrt{a+2bx+cx^2}} + C.$$

Erweitert man den Logarithmanden mit $b + cx + \sqrt{c}\sqrt{a + 2bx + cx^2}$, so erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\, l\, \frac{b + cx + \sqrt{c}\sqrt{a + 2bx + cx^2}}{ac - b^2} + C.$$

Wird hiervon der Bestandtheil $\frac{1}{\sqrt{c}}\, l \frac{1}{ac - b^2}$ zur Constanten gerechnet, so bleibt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot l(b + cx + \sqrt{c}\sqrt{a + 2bx + cx^2}) + C,$$

in Uebereinstimmung mit No. 3, 5.

Ist $c < 0$, so ergiebt die zweite Substitution

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = -2\int \frac{dy}{-c + y^2} = -\frac{2}{\sqrt{-c}}\, arc\, tang \frac{y}{\sqrt{-c}} + C.$$

Ist z die Tangente eines Arcus, so ist dessen Sinus bekanntlich $\frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}$, daher hat man die cyklometrische Formel

$$arc\, tang\, z = arc\, sin \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}},$$

und folglich

$$arc\, tang \frac{y}{\sqrt{-c}} = arc\, sin \frac{y}{\sqrt{y^2 - c}}.$$

Ist ferner z der Sinus eines Arcus, so ist der Sinus des doppelten Arcus $2z\sqrt{1 - z^2}$, also hat man

$$2\, arc sin\, z = arc sin\, 2z\sqrt{1 - z^2},$$

folglich

$$2\, arc sin \frac{y}{\sqrt{y^2 - c}} = arc sin \frac{2\sqrt{-c} \cdot y}{y^2 - c}.$$

Benutzt man hier die zweite Gleichung der Gruppe 7., sowie

$$\beta - \alpha = -\frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{c},$$

so ergiebt sich

$$2\, arc\, sin \frac{y}{\sqrt{y^2 - c}} = -\, arc sin \sqrt{-\frac{c}{b^2 - ac}(a + 2bx + cx^2)}.$$

Macht man noch von der Formel Gebrauch

$$arc sin t = \frac{\pi}{2} - arc sin \sqrt{1 - t^2},$$

und bemerkt, dass

$$1 - \left[\sqrt{-\frac{c}{b^2 - ac}(a + 2bx + cx^2)}\right]^2 = \frac{b^2 + 2bcx + c^2x^2}{b^2 - ac},$$

so erhält man schliesslich

$$2\, arc\, sin \frac{y}{\sqrt{y^2 - c}} = arc sin \frac{cx + b}{\sqrt{b^2 - ac}} - \frac{\pi}{2}.$$

Daher folgt, wenn man $-\frac{\pi}{2}$ in die Constante rechnet

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}}\, arc sin \frac{cx + b}{\sqrt{(b^2 - ac)}} + C,$$

in Uebereinstimmung mit No. 3, 10.

§ 5. Integration transcendenter Functionen.

1. Die Integrale von Functionen, welche die transcendenten Functionen e^x, lx, $\sin x$, $\cos x$, $\tang x$, $\arc\sin x$, $\arc\tang x$ enthalten, sind im Allgemeinen ebensowenig durch die bisher bekannten Functionen ausdrückbar, wie die Integrale von irrationalen Functionen; nur in einigen einfachen Fällen gelingt die Reduction auf bekannte Functionen.

2. A. Ein Integral von der Form

1. $$\int f(e^x)\,dx\,,$$

worin f eine algebraische Function bezeichnet, verwandelt man in ein Integral einer algebraischen Function durch die Substitution

$$e^x = y\,, \quad \text{also} \quad dx = \frac{dy}{y}\,;$$

denn man erhält hierdurch

1. $$\int f(e^x)\,dx = \int f(y)\,\frac{dy}{y}\,.$$

So hat man z. B.

$$\int\frac{dx}{a+be^x} = \int\frac{dy}{y(a+by)} = \int\frac{1}{a}\left(\frac{1}{y} - \frac{b}{a+by}\right)dy$$
$$= \frac{1}{a}[ly - l(a+by)] + C = \frac{1}{a}[x - l(a+be^x)] + C.$$

B. Für das Integral

$$\int f(e^{ax})\,dx$$

benutzt man die Substitution

$$e^{ax} = y\,, \quad \text{also} \quad dx = \frac{dy}{ay}\,,$$

und erhält so

2. $$\int f(e^{ax})\,dx = \frac{1}{a}\int f(y)\,\frac{dy}{y}\,.$$

Auf diesem Wege erhält man

$$\int\sqrt{e^{ax}+1}\,dx = \frac{1}{a}\int\sqrt{y+1}\,\frac{dy}{y}\,.$$

Substituirt man hier weiter

$$y = z^2 - 1\,, \quad dy = 2z\,dz\,,$$

so erhält man

$$\int\sqrt{e^{ax}+1}\,dx = \frac{2}{a}\int\frac{z^2\,dz}{z^2-1} = \frac{2}{a}\int\left(1 + \frac{1}{z^2-1}\right)dz$$
$$= \frac{2}{a}\left(z + \frac{1}{2}\,l\,\frac{z-1}{z+1}\right) + C$$
$$= \frac{2}{a}\left(\sqrt{e^{ax}+1} + \frac{1}{2}\,l\,\frac{\sqrt{e^{ax}+1}-1}{\sqrt{e^{ax}+1}+1}\right) + C.$$

Macht man noch von der Formel Gebrauch

$$\frac{1}{\sqrt{e^{ax}+1}+1} = \frac{\sqrt{e^{ax}+1}-1}{e^{ax}}\,,$$

so hat man schliesslich

$$\int\sqrt{e^{ax}+1}\,dx = \frac{2}{a}[\sqrt{e^{ax}+1} + l(\sqrt{e^{ax}+1}-1)] - x + C.$$

C. Das Integral

$$\int x^n e^{mx}\,dx$$

kann man zunächst dadurch vereinfachen, dass man $mx = y$ setzt; dann wird $dx = y : m$, $x^n = y^n : m^n$, und man erhält

3. $$\int x^n e^{mx}\,dx = \frac{1}{m^{n+1}}\int y^n e^y\,dy.$$

Ist nun n eine positive ganze Zahl, so kann dieses durch wiederholte Anwendung der theilweisen Integration vollständig entwickelt werden. Denn man hat (§ 2, No. 3)

4. $$\int y^k e^y\,dy = y^k e^y - k\int y^{k-1} e^y\,dy.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man

5. $$\int y^n e^y\,dy = e^y[y^k - ky^{k-1} + k(k-1)y^{k-2} - \ldots].$$

Wenn in dem Integrale

6. $$\int f(x)e^{mx}\,dx$$

$f(x)$ eine ganze rationale Function von x ist, so kann man dies Integral in ein Polynom von Integralen

$$A\int x^n e^{mx}\,dx$$

zerlegen und jedes derselben nach 3. und 5. integriren.

Kürzer gelangt man auf folgendem Wege zum Ziele. Durch theilweise Integration ergiebt sich

$$\int f(x)e^x\,dx = f(x)e^x - \int f'(x)e^x\,dx.$$

Wendet man diese Formel wiederholt an, so findet man

7. $$\int f(x)e^x\,dx = e^x[f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \ldots].$$

Ist n eine negative ganze Zahl, so führt folgender Weg zu einer Vereinfachung: Man erhält aus 4., wenn man $k-1$ durch k ersetzt

$$\int y^k e^y\,dy = \frac{y^{k+1}e^y}{k+1} - \frac{1}{k+1}\int y^{k+1}e^y\,dy.$$

Ist nun k negativ, etwa $k = -n$, so erhält man

8. $$\int\frac{e^y}{y^n}\,dy = -\frac{e^y}{(n-1)y^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{e^y}{y^{n-1}}\,dy.$$

Wendet man diese Reductionsformel hinreichend oft an, so gelangt man schliesslich zu dem Integrale

$$\int\frac{e^y}{y}\,dy,$$

das nicht weiter reducirt werden kann.

So ist

$$\int\frac{e^y}{y^4}\,dy = -\frac{e^y}{3y^3} + \frac{1}{3}\int\frac{e^y}{y^3}\,dy,$$

$$\int\frac{e^y}{y^3}\,dy = -\frac{e^y}{2y^2} + \frac{1}{2}\int\frac{e^y}{y^2}\,dy,$$

$$\int\frac{e^y}{y^2}\,dy = -\frac{e^y}{y} + \int\frac{e^y}{y}\,dy.$$

Daher

$$\int\frac{e^y}{y^4}\,dy = -e^y\left(\frac{1}{3y^3} + \frac{1}{6y^2} + \frac{1}{6y}\right) + \frac{1}{6}\int\frac{e^y}{y}\,dy.$$

D. Zur Reduction des Integrals

$$\int(x-a)^n e^x\,dx$$

setze man $x - a = y$; man erhält

9. $$\int(x-a)^n e^x\,dx = e^a\int y^n e^y\,dy,$$

und reducirt nun weiter nach Formel 5. oder 8., je nachdem n positiv oder negativ ist.

Für die Bestimmung von $\int \frac{e^x}{x} dx$, sowie anderer irreductibler Integrale ist man auf die Entwicklung in eine unendliche Reihe verwiesen (vergl. § 6).

E. Integrale von der Form

$$\int f(a^x)\,dx\,,\quad \int f(a^x)\,\varphi(x)\,dx$$

reducirt man auf die soeben betrachteten, indem man von der Identität Gebrauch macht

$$a^x = e^{x\,la}\,,$$

und die Substitution ausführt

$$x = \frac{y}{la}\,,$$

Die gegebenen Integrale gehen dadurch über in

$$\frac{1}{la}\int f(e^y)\,dy\,,\quad \frac{1}{la}\int f(e^y)\,\varphi\left(\frac{y}{la}\right)dy\,.$$

3. Integrale von Functionen, welche ausser der Variabeln noch den natürlichen Logarithmus derselben enthalten, also von der Form sind

$$\int f(x,\, lx)\,dx\,,$$

kann man auf Integrale mit Exponentialgrössen reduciren, indem man substituirt

$$lx = y\,,\quad \text{also}\quad x = e^y\,,\quad dx = e^y dy\,.$$

Man erhält dadurch

$$1.\qquad \int f(x,\, lx)\,dx = \int f(e^y, y)\,e^y dy\,.$$

A. So erhält man

$$\int (lx-2)^3\,dx = \int (y-2)^3 e^y\,dy\,,$$

also nach No. 2, 9

$$\begin{aligned} &= e^y[(y-2)^3 - 3(y-2)^2 + 6(y-2) - 6] + C \\ &= e^y(y^3 - 9y^2 + 30y - 38) + C \\ &= x[(lx)^3 - 9(lx)^2 + 30(lx) - 38] + C\,. \end{aligned}$$

B. Ferner erhält man durch dieselbe Substitution, wenn $m \gtrless -1$,

$$\begin{aligned} \int x^m\,lx\,dx &= \int e^{(m+1)y}\cdot y\,dy \\ 2.\qquad &= \frac{1}{(m+1)^2}\,e^{(m+1)y}[(m+1)\,y - 1] + C \\ &= \frac{1}{(m+1)^2}\,x^{m+1}\,[(m+1)\,lx - 1] + C\,. \end{aligned}$$

Dasselbe Resultat hätte man auch leicht direkt durch theilweise Integration finden können.

C. Auf letzterem Wege ergiebt sich

$$3.\qquad \int f(x)\,lx\,dx = lx\int f(x)\,dx - \int \frac{\int f(x)\,dx}{x}\,dx + C\,.$$

Ist $f(x)$ eine ganze rationale Function von x, so sind die rechts vorkommenden Integrale ausführbar; das Integral 2. ist ein besonderer Fall von Formel 3.

D. Ebenso erhält man

$$4.\qquad \int x^n l(a + bx^m)\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} l(a + bx^m) - \frac{bm}{n+1}\int \frac{x^{m+n}}{a + bx^m}\,dx\,.$$

E. Allgemeiner ergiebt sich

$$5.\qquad \int f(x)\,l\varphi(x)\,dx = l\varphi(x)\int f(x)\,dx = \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\left(\int f(x)\,dx\right)dx\,.$$

Ist $f(x)$ eine ganze Function und $\varphi(x)$ eine rationale, so ist das Integral vollständig ausführbar; doch führt die Formel 5. auch nicht selten in andern Fällen zum Ziele, insbesondere dann, wenn $\int f(x)\,dx$ algebraisch ist.

F. Man bemerke noch das Integral

6. $$\int \frac{lx}{x} dx = \frac{1}{2}(lx)^2 + C.$$

G. Macht man in $\int \frac{dx}{lx}$ die Substitution $lx = y$, so erhält man

7. $$\int \frac{dx}{lx} = \int \frac{e^y}{y} dy.$$

---

4. Integrale goniometrischer Functionen. Wir bemerken hier zunächst folgende einfache Integralformeln

1. $$\int tang\, x\, dx = \int \frac{sin\, x\, dx}{cos\, x} = -l\, cos\, x + C,$$

2. $$\int cot\, x\, dx = \int \frac{cos\, x\, dx}{sin\, x} = l\, sin\, x + C,$$

3. $$\int \frac{dx}{sin\, x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{sin\frac{1}{2}x\, cos\frac{1}{2}x} = \int \frac{d\frac{1}{2}x}{cos^2\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{tang\frac{1}{2}x} = l\, tang\tfrac{1}{2}x + C,$$

4. $$\int \frac{dx}{cos\, x} = \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = l\, tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

5. Integrale goniometrischer Functionen können durch verschiedene Substitutionen auf Integrale algebraischer reducirt werden. Hat man zu integriren

$$\int f(sin\, x,\; cos\, x)\, dx,$$

so setze man $tang\frac{1}{2}x = z$; dann ist

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad sin\, x = 2\, sin\tfrac{1}{2}x\, cos\tfrac{1}{2}x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad cos\, x = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Das Integral geht somit über in

$$\int f\left(\frac{2z}{1+z^2},\; \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2}.$$

Ist f eine rationale Function von $sin\, x$ und $cos\, x$, so hat man eine rationale Function von z zu integriren.

Man hat hiernach

$$\int \frac{dx}{a\, sin\, x + b\, cos\, x} = \int \frac{2dz}{2az + b - bz^2} = \frac{2}{b}\int \frac{dz}{1 + \frac{a^2}{b^2} - \left(z - \frac{a}{b}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\, l\, \frac{\sqrt{a^2+b^2} - a + bz}{\sqrt{a^2+b^2} + a - bz} + C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\, l\, \frac{\sqrt{a^2+b^2} - a + b\, tang\frac{1}{2}x}{\sqrt{a^2+b^2} + a - b\, tang\frac{1}{2}x} + C.$$

Dieses Integral kann auch auf folgendem Wege reducirt werden. Man kann setzen

$$a = \sqrt{a^2+b^2}\cdot cos\mu, \quad b = \sqrt{a^2+b^2}\cdot sin\mu.$$

Dadurch erhält man

$$\int \frac{dx}{a\, sin\, x + b\, cos\, x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot \int \frac{dx}{sin(x+\mu)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot l\, tang\frac{x+\mu}{2} + C.$$

Um dieses Ergebniss mit dem vorhergehenden zu vereinen, bemerke man, dass

$$tang\,\frac{x+\mu}{2} = \frac{sin\,\frac{\mu}{2} + cos\,\frac{\mu}{2}\,tang\,\frac{x}{2}}{cos\,\frac{\mu}{2} - sin\,\frac{\mu}{2}\,tang\,\frac{x}{2}},$$

$$\sqrt{2}\cdot sin\,\frac{\mu}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{\sqrt{a^2+b^2}}}, \quad \sqrt{2}\cdot cos\,\frac{\mu}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{\sqrt{a^2+b^2}}}.$$

Hiernach erhält man

$$l\,tang\,\frac{x+\mu}{2} = l\,\frac{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a} + \sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}\cdot tang\,\frac{x}{2}}{\sqrt{\sqrt{a^2-b^2}+a} - \sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\cdot tang\,\frac{x}{2}}.$$

Addirt man hierzu den constanten Betrag

$$l\,\frac{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}},$$

so erhält man

$$l\,\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a+b\,tang\,\frac{x}{2}}{\sqrt{a^2+b^2}+a-b\,tang\,\frac{x}{2}}.$$

Allgemeiner ergiebt sich

$$\int\frac{dx}{a\,sin\,x+b\,cos\,x+c} = 2\int\frac{dz}{b+c+2az+(c-b)z^2}.$$

Für die weitere Ausführung ist zu unterscheiden, ob der Nenner im rechts stehenden Integrale in reale oder in complexe Faktoren zerfällt.

6. Ersetzt man in dem Integrale

$$\int f(sin\,x,\ cos\,x,\ tang\,x)\,dx$$

den Cosinus und die Tangente durch den Sinus, so erhält man ein Integral von der Form

$$\int\varphi(sin\,x)\,dx.$$

Setzt man nun weiter $sin\,x = z$, so ist $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, und man erhält

$$\int\varphi(sin\,x)\,dx = \int\varphi(z)\,\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Unter Umständen ist es zweckmässiger, den Sinus und die Tangente durch den Cosinus auszudrücken; man kommt damit auf ein Integral von der Form

$$\int\psi(cos\,x)\,dx;$$

durch die Substitution $cos\,x = z$ erhält man dann

$$\int\psi(cos\,x)\,dx = -\int\psi(z)\,\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Auf diesem Wege ergiebt sich

$$\int sin^n x\,dx = \int\frac{z^n}{\sqrt{1-z^2}}\,dz.$$

Ist n eine ganze positive Zahl, so folgt nach § 4, No. 4, 1. für ein gerades

$$\int\frac{z^n}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = -\frac{1}{n}\left[z^{n-1} + \frac{n-1}{n-2}\,z^{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\,z^{n-5} + \ldots\right]\sqrt{1-}$$

$$+\frac{(n-1)(n-3)\ldots 5\cdot 3}{(n-2)(n-4)\ldots 4\cdot 2}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

daher hat man in diesem Falle

$$\int sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\left[sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}sin^{n-3}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}sin^{n-5}x + \,.\,.\right]cos\,x$$
$$+ \frac{(n-1)(n-3)\,.\,.\,.\,5\cdot 3}{(n-2)(n-4)\,.\,.\,.\,4\cdot 2}\cdot x + C.$$

Für ein ungerades n ist

$$\int\frac{z^n}{\sqrt{1-z^2}}dz = -\frac{1}{n}\left[z^{n-1} + \frac{n-1}{n-2}z^{n-3} + \ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4\cdot 2}{(n-2)(n-4)\ldots 3\cdot 1}\right]\sqrt{1-z^2} + C,$$
$$\int sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\left[sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}sin^{n-3}x + \,.\,. + \frac{(n-1)(n-3)\,.\,.\,4\cdot 2}{(n-2)(n-4)\,.\,.\,3\cdot 1}\right]cos\,x + C.$$

7. In manchen Fällen empfiehlt es sich, in dem Integrale

$$\int f(sin\,x,\ cos\,x,\ tang\,x)\,dx$$

den Sinus und Cosinus durch die Tangente auszudrücken; man erhält dann ein Integral

$$\int\varphi(tang\,x)\,dx\,;$$

setzt man nun $tang\,x = z$, so erhält man

$$\int\varphi(z)\,\frac{dz}{1+z^2}.$$

Diese Transformation wird insbesondere dann von Nutzen sein, wenn φ rational ist.

Hiernach ist

$$\int\frac{dx}{a\,sin^2 x + b\,cos^2 x} = \int\frac{dz}{az^2 + b}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{ab}}\,arc\,tang\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot tang\,x\right) + C,\quad \frac{a}{b} > 0$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\,l\,\frac{b + \sqrt{-ab}\cdot tang\,x}{b - \sqrt{-ab}\cdot tang\,x} + C,\quad \frac{a}{b} < 0.$$

8. Für die Entwicklung des Integrals

$$\int sin^n x\,cos^m x\,dx,$$

worin n und m positive ganze Zahlen sein mögen, kann folgender Weg eingeschlagen werden.

Ist m ungerade, $m = 2r + 1$, so hat man

$$\int sin^n x\,cos^{2r+1}x\,dx = \int sin^n x(1 - sin^2 x)^r\,cos\,x\,dx$$
$$= \int\left[sin^n x - \binom{r}{1}sin^{n+2}x + \binom{r}{2}sin^{n+4}x - \binom{r}{3}sin^{n+6}x + \,.\,.\right]cos\,x\,dx$$
$$= \frac{1}{n+1}sin^{n+1}x - \frac{1}{n+3}\cdot\binom{r}{1}sin^{n+3}x + \frac{1}{n+5}\cdot\binom{r}{2}sin^{n+5}x - \,.\,. + C.$$

Ist n ungerade, so setzt man

$$\int sin^{2r+1}x\,cos^m x\,dx = \int(1 - cos^2 x)^r cos^m x\cdot sin\,x\,dx$$
$$= \int\left[cos^m x - \binom{r}{1}cos^{m+2}x + \binom{r}{2}cos^{m+4}x - \,.\,.\right]\cdot sin\,x\,dx$$
$$= -\frac{1}{m+1}\cdot cos^{m+1}x + \frac{1}{m+3}\cdot\binom{r}{1}cos^{m+3}x - \frac{1}{m+5}\cdot\binom{r}{2}cos^{m+5}x + \ldots + C.$$

Sind m und n beide gerade, $m = 2q$, $n = 2r$, so hat man

$$\int sin^{2q}x\,cos^{2r}x\,dx = \int sin^{2q}x(1 - sin^2 x)^r dx$$
$$= \int\left[sin^{2q}x - \binom{r}{1}sin^{2q+2}x + \binom{r}{2}sin^{2q+4}x - \binom{r}{3}sin^{2q+6}x + \,.\,.\right]dx.$$

Hier kann jedes Glied nach No. 6 integrirt werden.

9. Sind r und n positive ganze Zahlen, so ist

$$1.\quad \int \frac{\sin^{2r+1} x\,dx}{\cos^n x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)^r}{\cos^n x} \sin x\,dx$$
$$= \int \left[\frac{1}{\cos^n x} - \binom{r}{1}\frac{1}{\cos^{n-2} x} + \binom{r}{2}\frac{1}{\cos^{n-4} x} - \ldots\right] \sin x\,dx.$$

Ist $n = 2q$, so erhält man hieraus bei der Integration lauter ungerade Potenzen von $\cos x$; ist $n = 2q + 1$, und $q \overline{\overline{<}} r$, so erhält man ausser geraden Potenzen von $\cos x$ noch ein Glied von der Form

$$A\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -A l \cos x + C.$$

Sind r und q ganz und positiv, so ist

$$2.\quad \int \frac{\sin^{2r} x}{\cos^{2q-1} x}\,dx = \int \frac{\sin^{2r} x}{\cos^{2q} x} \cos x\,dx$$
$$= \int \frac{\sin^{2r} x}{(1-\sin^2 x)^q}\, d\sin x.$$

Dieses Integral ist nach den Regeln für die Integration einer gebrochenen rationalen algebraischen Function (der Variabeln $\sin x$) weiter zu behandeln.

Für die Entwicklung des Integrales

$$\int \frac{\sin^{2r} x}{\cos^{2q} x}\,dx$$

wird man von der Substitution $\cos x = z$ Gebrauch machen.

Ersetzt man in diesen Integralen x durch $\frac{1}{2}\pi - x$, so erhält man Integrale von der Form

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx.$$

10. Durch theilweise Integration findet man

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx,$$
$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C,$$
$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C,$$

Ersetzt man x durch $-x$, so folgt

$$\int e^{-ax} \sin bx\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx + b\cos bx) + C,$$
$$\int e^{-ax} \cos bx\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx - b\sin bx) + C.$$

11. Durch theilweise Integration ergiebt sich

$$\int f(x)\,\mathrm{arc}\sin x\,dx = \mathrm{arc}\sin x\int f(x)dx - \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int f(x)dx,$$
$$\int f(x)\,\mathrm{arc}\cos x\,dx = \mathrm{arc}\cos x\int f(x)dx + \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int f(x)dx,$$
$$\int f(x)\,\mathrm{arc}\,\mathrm{tang}\, x\,dx = \mathrm{arc}\,\mathrm{tang}\, x\int f(x)dx - \int\frac{dx}{1+x^2}\int f(x)dx.$$

Ist $\int f(x)dx$ algebraisch, so hat man schliesslich nur noch eine algebraische Function zu integriren.

12. Durch die Substitution

$$arc\sin x = z\,, \quad \text{also} \quad x = \sin z$$

erhält man

1. $$\int f(arc\sin x)\,dx = \int f(z)\cos z\,dz\,.$$

Ebenso erhält man durch die Substitutionen

$$arc\cos x = z\,, \quad \text{bez.} \quad arc\,tang\,x = z$$

die Reductionen

2. $$\int f(arc\cos x)\,dx = -\int f(z)\sin z\,dz\,,$$

3. $$\int f(arc\,tang\,x)\,dx = \int f(z)\frac{dz}{\cos^2 z}\,.$$

§ 6. Integration durch unendliche Reihen.

1. Hat man mit Hilfe des TAYLOR'schen Satzes die Entwicklung

1. $$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + R_n\,,$$

und ist für Werthe von x, die innerhalb gewisser Grenzen liegen

$$\lim R_n = 0\,, \quad n = \infty\,,$$

so ist zunächst

2. $$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + R_n)\,dx \\ &= A_0 x + \frac{1}{2}A_1 x^2 + \frac{1}{3}A_2 x^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}A_n x^{n+1} + \int R_n dx\,.\end{aligned}$$

Das Integral $\int_a^x R_n dx$ bedeutet geometrisch den Inhalt einer Fläche, welche von der Abscissenachse und von der Curve $y = R_n$ begrenzt wird, und zwar das Stück dieser Fläche, das zwischen den zu den Abscissen a und x gehörigen Ordinaten liegt. Die Abscisse a ist dabei willkürlich, sie soll nur kleiner als x sein; sie mag daher so gewählt werden, dass für alle Werthe der Variabeln von a bis x die Reihe 1. noch convergirt.

Unter dieser Voraussetzung und für einen endlichen Werth von x ist $\int_a^x R_n dx$ eine ganz im Endlichen liegende Fläche, deren Ordinaten sämmtlich verschwinden; daher verschwindet auch die Fläche und man hat

$$\int_a^x R_n dx = 0\,, \quad \text{also} \quad \int R_n dx = \text{Const.}$$

Für alle Werthe von x, für welche die Reihe convergirt

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots,$$

ist daher

$$\int f(x)dx = A_0 x + \tfrac{1}{2}A_1 x^2 + \tfrac{1}{3}A_2 x^3 + \tfrac{1}{4}A_3 x^4 + \ldots + C.$$

2. Wir benutzen diesen Satz zunächst, um einige in der Differentialrechnung gegebene Reihenentwicklungen auf einem neuen Wege abzuleiten.

A. Für jedes echt gebrochene x ist

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots, \qquad x^2 < 1\,.$$

Hieraus folgt

$$\int \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots + C.$$

Da nun $\int \frac{dx}{1+x} = l(1+x) + C_1$, so ist, indem man C_1 und C vereint

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots + C.$$

Den besonderen Werth, den die Constante zur Erfüllung dieser Gleichung haben muss, bestimmt man, indem man x einen besonderen Werth beilegt, für den die Reihensumme sich leicht angeben lässt. Wir nehmen $x = 0$ und erhalten

$$0 = C, \quad \text{also}$$

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

B. Aus der Entwicklung

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots, \qquad x^2 \leqq 1$$

folgt

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots + C.$$

Daher hat man

$$arc\,tang x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots + C, \qquad x^2 \leqq 1.$$

Da für $x = 0$ die Reihe sowie $arc\,tang x$ verschwinden, so folgt $C = 0$, also

$$arc\,tang x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots, \qquad x^2 \leqq 1.$$

C. Nach dem binomischen Satze ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \ldots, \qquad x^2 \leqq 1.$$

Hieraus folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots + C.$$

Mithin ist

$$arc\,sin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots C.$$

Für $x = 0$ verschwinden die Reihe und $arc\,sin x$; also ist $C = 0$ und man hat

$$arc\,sin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots, \qquad x^2 \leqq 1.$$

3. Wenn man $f(x)$ in eine convergente Reihe nach Taylor entwickeln und das Integral $\int f(x)\,dx$ auf bisher bekannte Functionen reduciren kann, so dient der Satz in No. 1 dazu, die Function $f(x)$ in eine unendliche Reihe zu entwickeln. Aus der Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot x^6 + \ldots, \qquad x^2 \leqq 1$$

folgt durch Integration

$$l(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots + C.$$

Setzt man $x = 0$, so findet man $C = 0$. Also hat man die neue Reihe entwicklung

$$l(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} = \ldots, \qquad x^2 \leqq 1$$

4. Die wichtigste Anwendung der Integration durch unendliche Reihen be

steht darin, dass man durch dieselben in den Stand gesetzt ist, ein irreductibles Integral $\int f(x)\,dx$ in eine Potenzreihe zu entwickeln, sobald die Function $f(x)$ dieser Entwicklung fähig ist.

Aus der für alle Werthe von x gültigen Entwicklung

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

folgt, ebenfalls für alle Werthe von x

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

Die Function $e^x : x$ ist für alle endlichen von Null verschiedenen Werthe von x endlich und wird nur unendlich gross für $x = 0$. Schliessen wir diesen Werth aus, so ist für jedes endliche positive x

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = lx + x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + C.$$

Ist x negativ, so setze man $x = -y$; dann erhält man

$$e^x = e^{-y} = 1 - \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1\cdot 2} - \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots$$

Daher ist

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int \frac{e^{-y}}{y}\,dy = ly - y + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{1\cdot 2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots + C.$$

Ersetzt man nun hier wieder y durch $-x$, so findet man für negative Werthe von x

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = l(-x) + x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + C.$$

5. Für alle endlichen x gilt die Reihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \ldots$$

Daher ist auch unbeschränkt

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \ldots$$

und mithin

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \ldots + C.$$

6. Bei dem Integrale

$$\int \frac{l(1+x)}{x}\,dx$$

muss x wegen $l(1+x)$ grösser als -1 sein. Ist nun $-1 < x < +1$, so hat man

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Daher ist

$$\int \frac{l(1+x)}{x}\,dx = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \ldots + C$$
$$-1 < x < +1.$$

Ist $x > 1$, so benutze man

$$l(1+x) = lx + l\left(1 + \frac{1}{x}\right) = lx + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4} + \ldots$$

Da nun

$$\int \frac{lx}{x} dx = \int lx \cdot dlx = \frac{1}{2}(lx)^2 + C, \quad \text{so folgt}$$

$$\int \frac{l(1+x)}{x} dx = \frac{1}{2}(lx)^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2^2 x^2} - \frac{1}{3^2 x^3} + \frac{1}{4^2 x^4} - \ldots + C,$$
$$x > 1.$$

§ 7. Einfache bestimmte Integrale.

1. Unter dem bestimmten Integrale

$$\int_a^x f(x)\, dx$$

verstehen wir nach § 1, No. 5 die Fläche, welche von der Curve $y = f(x)$, der Abscissenachse und den zu den Abscissen a und x gehörigen Ordinaten eingeschlossen wird, unter der Voraussetzung, dass $x > a$ und dass $f(x)$ innerhalb der Grenzen a und x nicht unendlich wird. Wir haben gesehen, dass dieses bestimmte Integral ein particularer Werth des vollständigen (unbestimmten) Integrals

$$\int f(x)\, dx$$

ist; ist daher

$$\int f(x)\, dx = \varphi(x) + C,$$

so geht das bestimmte Integral

$$\int_a^x f(x)\, dx$$

aus $\varphi(x) + C$ hervor, indem man der Constanten C einen geeigneten besonderen Werth C_1 ertheilt, so dass man hat

$$1. \qquad \int_a^x f(x)\, dx = \varphi(x) + C_1.$$

Nun folgt unmittelbar aus der Definition, dass $\int_a^x f(x)$ verschwindet, wenn man x den besonderen Werth a ertheilt; daher ist

$$2. \qquad 0 = \varphi(a) + C_1.$$

Durch Subtraction folgt nun aus 1. und 2.

$$3. \qquad \int_a^x f(x)\, dx = \varphi(x) - \varphi(a).$$

In dieser Gleichung erscheint nun x in doppelter Bedeutung. Insofern es in $f(x)\,dx$ auftritt, soll man sich unter x die veränderliche Abscisse denken, die von einem gegebenen Anfangswerthe a bis zu einem unbestimmt gelassenen Endwerthe wächst, und dann bedeutet wieder x diesen Endwerth, und tritt in dieser Bedeutung als obere Grenze an dem Zeichen $\int_a^x$ sowie auf der rechten Seite in $\varphi(x)$ auf.

Will man die Unbestimmtheit des x in der letzteren Bedeutung aufheben, so wird man zweckmässig ein anderes Zeichen dafür setzen, etwa b, und hat dann

$$4. \qquad \int_a^b f(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a),$$
$$b > a.$$

Um die Beschränkung $b > a$ aufheben zu können, benutzen wir als Definition des bestimmten Integrals die Gleichung § 1, No. 5, 9

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_0^n f(a + k\delta)\,\delta\,,$$

und halten nur daran fest, dass $f(x)$ für keine Abscisse, die zwischen a und b liegt, unendlich gross wird. Hierbei ist

$$\delta = \frac{b-a}{n}\,,$$

also ist

$$5. \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_0^n f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}.$$

Nun ist, wie man sofort sieht,

$$a + k\frac{b-a}{n} = b + (n-k)\frac{a-b}{n}.$$

Setzt man $n - k = k'$, so geht k' von n bis 0, wenn k die Werthe von 0 bis n durchläuft. Daher hat man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_n^0 f\left(b + k'\cdot\frac{a-b}{n}\right)\frac{b-a}{n}.$$

Kehrt man hier die Ordnung der Summanden um, so hat man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_0^n f\left(b + k'\cdot\frac{a-b}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

$$= -\lim \sum_0^n f\left(b + k'\cdot\frac{a-b}{n}\right)\frac{a-b}{n}.$$

Vergleicht man die rechte Seite mit 5., so sieht man, dass gemäss dieser Definition

$$\lim \sum_0^n f\left(b + k'\cdot\frac{a-b}{n}\right)\cdot\frac{a-b}{n} = \int_b^a f(x)\,dx.$$

Daher hat man schliesslich die Gleichung

$$6. \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Dieselbe lehrt den Satz: Vertauscht man die Grenzen eines bestimmten Integrals, so wechselt das Integral das Vorzeichen.

Aus der für $b > a$ gültigen Gleichung 4.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

folgt nun mit Hülfe der Gleichung 6.

$$\int_b^a f(x)\,dx = -[\varphi(b) - \varphi(a)] = \varphi(a) - \varphi(b).$$

Mithin gilt die Gleichung 4. unabhängig davon, ob $a \gtrless b$.

2. Ist $a < b < c$, so folgt aus der geometrischen Bedeutung des bestimmten Int grals die Gleichung

$$1. \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Hieraus ergiebt sich weiter

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

Benutzt man nach No. 1

$$-\int_b^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx\,,$$

so erhält man

2. $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Der Satz 1. gilt also auch, wenn man die Grenzen b und c gegen einander vertauscht.

Ferner folgt aus 1.

$$-\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx\,, \quad \text{also ist}$$

3. $$\int_b^a f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx\,.$$

Der Satz 1. gilt daher auch, wenn man a und b vertauscht.

Aus der Anordnung acb (2) erhält man durch Vertauschung der ersten und zweiten Grenze (nach 3) die Reihenfolge cab, hieraus durch Vertauschung der zweiten und dritten cba, und daraus endlich durch Vertauschung der ersten und zweiten bca. Hieraus ergiebt sich, dass der Satz

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

unabhängig davon gilt, wie die drei Zahlen a, b, c der Grösse nach geordnet sind.

3. Nicht selten hat man es mit Functionen $f(x)$ zu thun, welche die Eigenschaft haben, dass

$$f(a) = 0\,, \quad \text{und} \quad f(a+z) = -f(a-z)\,.$$

Hierher gehören z. B. alle ungeraden Potenzen von $a - x$; denn es ist

$$(a-a)^{2n+1} = 0\,, \quad [a-(a+z)]^{2n+1} = -[a-(a-z)]^{2n+1}\,;$$

ferner alle goniometrischen Functionen von x. Man hat z. B.

$$tang\,0 = 0\,, \quad tang\,z = -tang(-z)\,,$$

$$cos\,\frac{\pi}{2} = 0\,, \quad cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right) = -cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right).$$

Für derartige Functionen ist

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = 0\,.$$

Ersetzt man nämlich x durch $a + z$, also dx durch dz, so entsprechen den Werthen $a - b$ und $a + b$ von x die Werthe $(-b)$ und b der neuen Veränderlichen z; daher hat man

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{b} f(a+z)\,dz\,.$$

Nun ist weiter

1. $$\int_{-b}^{b} f(a+z)\,dz = \int_{-b}^{0} f(a+z)\,dz + \int_0^b f(a+z)\,dz\,.$$

Ferner ist

$$\int_{-b}^{0} f(a+z)\,dz = -\int_0^{-b} f(a+z)\,dz\,.$$

Ersetzt man rechts z durch $-z$, also dz durch $-dz$, so erhält man

$$\int_{-b}^{0} f(a+z)\,dz = \int_0^b f(a-z)\,dz\,.$$

Nun ist aber nach der Voraussetzung

$$f(a - z) = - f(a + z);$$

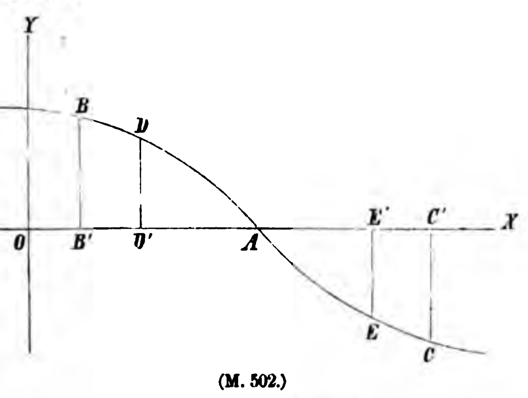
daher hat man

$$\int_{-b}^{0} f(a + z)\, dz = - \int_{0}^{b} f(a + z)\, dz.$$

Setzt man dies in 1. ein, so ergiebt sich: Ist $f(a) = 0$ und $f(a + z) = - f(a - z)$, so ist

$$\int_{a-b}^{a+b} f(z)\, dz = 0.$$

Diesen Satz kann man geometrisch leicht erläutern.



(M. 502.)

Die Curve $y = f(x)$ schneidet die Abscissenachse in dem zur Abscisse $x = a$ gehörigen Punkte A. Nach der Voraussetzung $f(a + z) = - f(a - z)$ sind die Ordinaten, welche zu zwei gleichweit von A liegenden Punkten D' und E' der Abscissenachse gehören, entgegengesetzt gleich, $D'D = - E'E$; ist daher $B'A = - AC' = b$, so sind die Figuren $BB'A$ und $CC'A$ congruent.

Da nun aber zu negativen Ordinaten negative Flächen gehören, so folgt, dass die Flächen $BB'A$ und $AC'C$ entgegengesetzt gleich sind, mithin verschwindet ihre Summe, es ist also

$$\int_{a-b}^{a+b} f(z)\, dz = 0.$$

Als Beispiele hierzu haben wir:

$$\int_{-b}^{b} (Ax^5 + Bx^3 + Cx)\, dx = 0,$$

$$\int_{-b}^{b} \sin x\, dx = 0,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}-b}^{\frac{\pi}{2}+b} \cos x\, dx = 0,$$

$$\int_{-b}^{b} \arc\sin x\, dx = 0.$$

4. Hat die Curve $y = f(x)$ eine zur Y-Achse im Abstande a parallele Symmetrieachse, ist also

$$f(a + z) = f(a - z),$$

und nimmt man an dem Integrale

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\, dx$$

dieselbe Substitution und Zerlegung vor, wie in No. 3, so erhält man

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{0} f(a+z)\,dz + \int_{0}^{b} f(a+z)\,dz = \int_{0}^{b} f(a-z)\,dz + \int_{0}^{b} f(a+z)\,dz.$$

Daher ist jetzt

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = 2\int_{a}^{a+b} f(x)\,dx.$$

Die Eigenschaft $f(a+z) = f(a-z)$ besitzen alle geraden Potenzen von $(a-x)$; ferner die goniometrischen Functionen Sinus und Cosinus, denn es ist

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\cos x = \cos(-x).$$

Man hat daher z. B. die Reductionen:

$$\int_{a-b}^{a+b} (a-x)^2\,dx = 2\int_{a}^{a+b} (a-x)^2\,dx,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}-b}^{\frac{\pi}{2}+b} \sin x\,dx = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+b} \sin x\,dx,$$

$$\int_{-b}^{b} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{b} \cos x\,dx.$$

Um auch diesen Satz geometrisch anschaulich zu machen, sei $OA' = a$, $B'A' = A'C' = b$; dann sind die Flächen $BB'A'A$ und $AA'C'C$ gleich und es ist daher $BB'C'C = 2AA'C'C$, also

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = 2\int_{a}^{a+b} f(x)\,dx.$$

(M. 508.)

5. Enthält $f(x)$ eine von den Grenzen a und b unabhängige Grösse γ, so ist

$$\int_{a}^{b} f(x, \gamma)\,dx$$

eine Function von γ. Setzen wir daher

$$\int_{a}^{b} f(x, \gamma)\,dx = F(\gamma),$$

so ist

$$\frac{dF(\gamma)}{d\gamma} = \lim\left[\int_{a}^{b} f(x, \gamma + \Delta\gamma)\,dx - \int_{a}^{b} f(x, \gamma)\,dx\right] : \Delta\gamma.$$

Nun ist

$$\int_{a}^{b} f(x, \gamma + \Delta\gamma)\,dx - \int_{a}^{b} f(x, \gamma)\,dx = \int_{a}^{b} [f(x, \gamma + \Delta\gamma) - f(x, \gamma)]\,dx.$$

Folglich hat man

$$\frac{dF(\gamma)}{d\gamma} = \lim \int_{a}^{b} \frac{f(x, \gamma + \Delta\gamma) - f(x, \gamma)}{\Delta\gamma}\,dx$$

$$= \int_{a}^{b} \lim \frac{f(x, \gamma + \Delta\gamma) - f(x, \gamma)}{\Delta\gamma}\,dx = \int_{a}^{b} \frac{df(x, \gamma)}{d\gamma}\,dx.$$

Daher hat man die Gleichung

$$\frac{d\int\limits_a^b f(x,\gamma)\,dx}{d\gamma} = \int\limits_a^b \frac{df(x,\gamma)}{d\gamma}\,dx\,.$$

Wir werden von derselben wiederholt Gebrauch machen, um aus einfacheren Integralen minder einfache abzuleiten.

6. Wir wenden das soeben Mitgetheilte auf einige Beispiele an.

Ist $n \gtrless -1$, sowie $a > 0$, $b > 0$, so ist

$$1. \qquad \int\limits_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})\,.$$

Ist $n > 0$, so bleibt x^n für alle endlichen Werthe von x endlich, und die Formel 1. gilt daher für alle endlichen a und b. Ist n negativ, so wird x^n unendlich gross, wenn $x = 0$ ist; in diesem Falle ist die Gleichung

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

nicht unbeschränkt anwendbar.

Wird $f(x)$ für die untere Grenze $a(< b)$, oder für die obere b, oder für einen zwischen den Grenzen liegenden Werth c unendlich gross, so verstehen wir unter

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

den Grenzwerth, gegen welchen das Integral

$$\int\limits_{a+\delta}^b f(x)\,dx\,, \quad \text{bez.} \quad \int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$$

bez. die Summe

$$\int\limits_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

für verschwindende Werthe der positiven Grössen δ und ε convergiren.

Demnach ist, wenn a eine negative, b eine positive Zahl bezeichnen

$$\int\limits_0^b x^n\,dx = lim \int\limits_\delta^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - lim\,\delta^{n+1})\,,$$

$$\int\limits_a^b x^n\,dx = lim\left(\int\limits_a^{-\delta} x^n\,dx + \int\limits_\varepsilon^b x^n\,dx\right) = \frac{1}{n+1}[b^{n+1} - a^{n+1} + lim(-\delta)^{n+1} - lim\,\varepsilon^{n+1}].$$

Ist nun $n > -1$, so ist $n+1 > 0$, und daher

$$lim(-\delta)^{n+1} = lim\,\varepsilon^{n+1} = 0\,,$$

also ist

$$\int\limits_0^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,b^{n+1}\,, \quad \int\limits_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})\,;$$

die Formel 1. gilt also für alle Werthe von a und b, wenn $n > -1$.

Ist hingegen $n < -1$, so ist $n+1 < 0$ und

$$lim(-\delta)^{n+1} = \infty\,, \quad lim\,\varepsilon^{n+1} = \infty\,.$$

Daher ist in diesem Falle

$$\int_0^b x^n\,dx = -\infty\,, \quad \int_a^0 x^n\,dx = \infty\,.$$

Das von der negativen Grenze a bis zur positiven b genommene Integral ist die Differenz zweier unendlich grossen Werthe; da δ und ε unabhängig von einander der Grenze Null sich nähern, so ist diese Differenz unbestimmt.

Für $n = 1$ und positive Werthe von a und b hat man

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = l\frac{b}{a}\,.$$

Geht man zur Grenze $a = 0$ über, so erhält man

$$\int_0^b \frac{dx}{x} = \infty\,.$$

7. Aus dem unbestimmten Integrale

$$\int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}e^{mx} + C$$

ergiebt sich das bestimmte

$$\int_a^b e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}(e^{mb} - e^{ma})\,.$$

Insbesondere ist

$$\int_0^1 e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}(e^m - 1)\,,$$

$$\int_0^a e^{-x}\,dx = 1 - e^{-a}\,.$$

Geht man zur Grenze $a = \infty$ über, so ergiebt sich

$$1. \qquad \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1\,.$$

Aus der Reduction

$$\int x^m e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}\,x^m e^{-ax} + \frac{m}{a}\int x^{m-1}e^{-ax}\,dx$$

folgt, wenn m und a positiv sind,

$$2. \qquad \int_0^\infty x^m e^{-ax}\,dx = \frac{m}{a}\int_0^\infty x^{m-1}e^{-ax}\,dx\,.$$

Denn $x^m e^{-ax}$ verschwindet, wenn $x = 0$; dass diese Grösse auch für $x = \infty$ verschwindet, erkennt man an der Reihenentwicklung

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2x^2}{1\cdot 2} + \frac{a^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

die auch für $x = \infty$ gilt; man erhält hiernach

$$x^m e^{-ax} = 1 : \left(\frac{1}{x^m} + \frac{a}{x^{m-1}} + \frac{a^2}{2!\,x^{m-2}} + \ldots + \frac{a^m}{m!} + \frac{a^{m+1}x}{(m+1)!} + \ldots\right).$$

Die ersten m Glieder des Divisors verschwinden für $x = \infty$; das $(m+1)$te und alle folgenden werden unendlich gross; daher verschwindet der Quotient.

Ist nun m eine positive ganze Zahl, so gewinnt man durch wiederholte Anwendung von 2.

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax} dx = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{a^m}\int_0^\infty e^{-ax} dx.$$

Ersetzt man rechts ax durch z, so erhält man

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-z} dz.$$

Daher hat mit Rücksicht auf 1.

3. $$\int_0^\infty x^m e^{-ax} dx = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{a^{m+1}}, \quad a > 0.$$

Ist m eine positive gemischte Zahl, die aus der ganzen Zahl q und dem echten Bruche r besteht, so kommt man durch wiederholte Anwendung der Formel 2. auf die Reduction

4. $$\int_0^\infty x^m e^{-ax} dx = \frac{m(m-1)\ldots(m-q)}{a^{q+1}}\int_0^\infty x^r e^{-ax} dx.$$

8. Das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{a} + C$$

liefert die bestimmten

1. $$\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{4a},$$

2. $$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}.$$

Ersetzt man im letztern Integral a^2 durch b, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{dx}{b+x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}}.$$

Differenzirt man dies $(n-1)$ mal nach b und macht dabei von den Formeln Gebrauch

$$\frac{d^{n-1}(b+x^2)^{-1}}{db^{n-1}} = (-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\,.\,.\,(n-1)\cdot\frac{1}{(b+x^2)^n}$$

$$\frac{d^{n-1}b^{-\frac{1}{2}}}{db^{n-1}} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\,.\,.\,(2n-3)}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^{2n-1}}}$$

so erhält man, wenn man schliesslich wieder b durch a^2 ersetzt

3. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\,.\,.\,(2n-3)}{2^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,.\,.\,(n-1)}\cdot\frac{\pi}{a^{2n-1}}.$$

9. Durch theilweise Integration findet man

$$\int \sin^m x\,dx = -\sin^{m-1}x\cos x + (m-1)\int \cos^2 x \sin^{m-2}x\,dx.$$

Ersetzt man im letzten Integrale $\cos^2 x$ durch $1-\sin^2 x$, so erhält man

$$\int \sin^m x\,dx = -\sin^{m-1}x\cos x + (m-1)\int \sin^{m-2}x\,dx - (m-1)\int \sin^m x\,dx,$$

daher ist

$$\int sin^m x\,dx = -\frac{1}{m} sin^{m-1}x\cos x + \frac{m-1}{m}\int sin^{m-2} x\,dx\,.$$

Führt man hier die Integrationsgrenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ein, so erhält man, sobald $m > 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^m x\,dx = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{m-2} x\,dx\,.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Reduction gelangt man, je nachdem m gerade oder ungerade ist, schliesslich zu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}\,, \quad \text{oder} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin x\,dx = 1\,.$$

Daher erhält man für ein gerades m

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^m x\,dx = \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots 3\cdot 1}{m(m-2)(m-4)\ldots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\,;$$

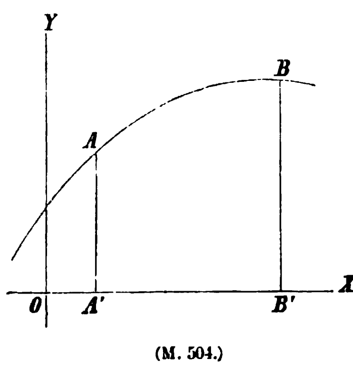
für ein ungerades m

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^m x\,dx = \frac{(m-1)(m-3)\ldots 4\cdot 2}{m(m-2)\ldots 5\cdot 3}\,.$$

Ersetzt man $sin x$ durch z, so ist $cos x\,dx = dz$, also $dx = dz : \sqrt{1-z^2}$, und den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ für x entsprechen für z die Grenzen 0 und 1. Vertauscht man nach der Substitution wieder die Buchstaben z und x, da, wie man sieht, die Bezeichnung der Integrationsvariabeln bei einem bestimmten Integral zwischen constanten Grenzen ganz willkürlich ist, so erhält man anstatt 1. und 3. die Integralformeln

$$3. \quad \int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \dfrac{(m-1)(m-3)\ldots 3\cdot 1}{m(m-2)\ldots 4\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2}\,, & m \text{ gerade} \\ \dfrac{(m-1)(m-3)\ldots 4\cdot 2}{m(m-2)\ldots 3\cdot 1}\,, & m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

§ 8. Berechnung von ebenen Flächen, Curvenbogen, Raumtheilen und unebenen Flächen durch einfache bestimmte Integrale.



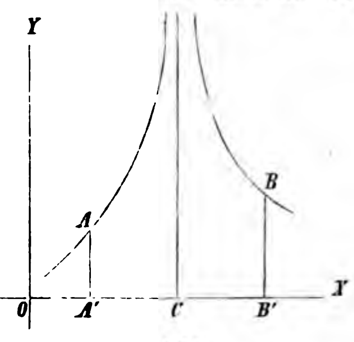
(M. 504.)

1. Wenn der Curvenzug (Fig. 504) $y = f(x)$ zwischen Punkten A und B, deren Abscissen a und b sind, stetig verläuft, und so beschaffen ist, dass, während ein Punkt P auf der Curve sich von A und B so bewegt, dass jeder Curvenpunkt nur einmal durchlaufen wird, die Horizontalprojection P' von P immer in derselben Richtung von A' nach B' gelangt, so ist die Fläche $A'ABB'$ (§ 1, No. 5)

$$1. \qquad F = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Wird die Ordinate für eine zwischen a und b liegende Abscisse $OC = c$ unendlich gross, so ergiebt sich die Fläche

2. $$F = \lim \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \lim \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx .$$



(M. 505.)

Ist die Gleichung $y = f(x)$ auf ein schiefwinkeliges Coordinatensystem bezogen mit dem Achsenwinkel α, so ist der zu Δx gehörige, der Ordinatenachse parallele Flächenstreifen zwischen den Grenzen enthalten

$$y \sin\alpha\, \Delta x < \Delta F < (y + \Delta y) \sin\alpha \cdot \Delta x .$$

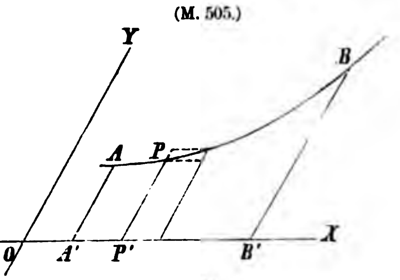
Also ist

$$y \sin\alpha < \frac{\Delta F}{\Delta x} < (y + \Delta y) \sin\alpha .$$

Geht man zur Grenze $\Delta x = 0$ über, so erhält man

$$\frac{dF}{dx} = y \sin\alpha ,$$

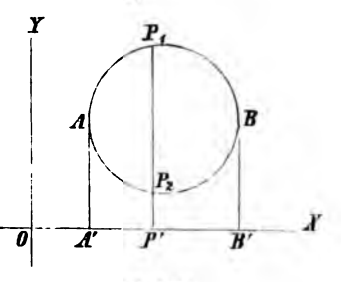
mithin für die Fläche $AA'B'B$ (unter übrigens gleichen Voraussetzungen, wie oben)



(M. 506.)

3. $$F = \sin\alpha \int_a^b y\,dx .$$

Ist in rechtwinkeligen Coordinaten $y = f(x)$ die Gleichung einer geschlossenen Curve, die von den Normalen zur Abscissenachse in zwei Punkten getroffen wird, so bestimme man zunächst auf analytisch-geometrischem Wege die Abscissen a und b der beiden die Curve tangirenden Ordinaten, zwischen denen die Curve liegt. Bezeichnet nun y_1 die zu einer Abscisse x gehörige grössere, y_2 die zugehörige kleinere Ordinate, so ist die gesuchte Fläche (Fig 507)



(M 507.)

$$F = \int_a^b y_1\,dx - \int_a^b y_2\,dx ,$$

mithin

4. $$F = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx .$$

Für schiefwinkelige Coordinaten erhält man (Fig. 508)

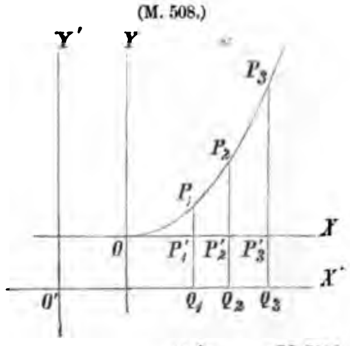
(M. 508.)

5. $$F = \sin\alpha \cdot \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx .$$

2. Eine Parabel, deren Achse in die Y-Achse und deren Scheitel in den Nullpunkt fällt, hat die Gleichung

$$y = \frac{x^2}{2p} .$$

Daher ist die Fläche $P_1'P_1P_3P_3'$



(M. 509.)

$$1. \qquad F = \int_{x_1}^{x_3} \frac{x^2}{2p} dx = \frac{1}{6p}(x_3^3 - x_1^3).$$

Wird die Fläche vom Scheitel an gerechnet, so ist $x_1 = 0$, daher, und wenn man x statt x_3 setzt,

$$2. \qquad F = \frac{x^3}{6p} = \frac{1}{3}xy.$$

Die Fläche ist daher der dritte Theil des Rechtecks aus der Abscisse und Ordinate des Punktes P.

Die Formel 1. lässt eine bemerkenswerthe Umgestaltung zu. Man hat nämlich zunächst

$$F = \frac{x_3 - x_1}{6p}(x_1^2 + x_3 x_1 + x_3^2).$$

Wird die Differenz $x_3 - x_1$ mit $2d$ bezeichnet, so erhält man

$$F = \frac{d}{3p}[x_1^2 + x_1(x_1 + 2d) + (x_1 + 2d)^2],$$

$$= \frac{d}{6p}(6x_1^2 + 12dx_1 + 8d^2),$$

$$= \frac{d}{6p}[x_1^2 + 4(x_1 + d)^2 + (x_1 + 2d)^2].$$

Bezeichnet man die zu den Abscissen x_1, $x_1 + d$, $x_1 + 2d$ gehörenden Ordinaten der Reihe nach durch η_1, η_2, η_3, so hat man

$$F = \frac{d}{3}(\eta_1 + 4\eta_2 + \eta_3).$$

Verschiebt man das Coordinatensystem, und hat O im neuen Systeme $X'O'Y'$ die Ordinate a, so ist

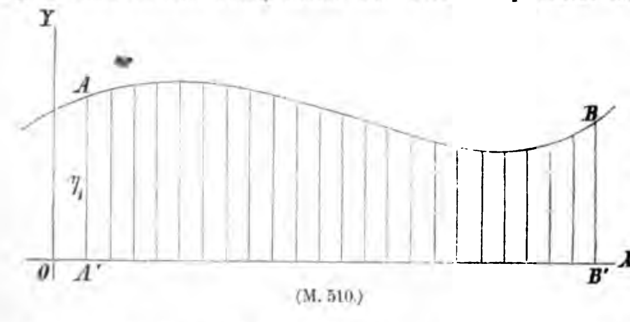
$$F' = P_1 Q_1 Q_3 P_3 = F + 2ad = \frac{d}{3}[(\eta_1 + a) + 4(\eta_2 + a) + (\eta_3 + a)].$$

Werden die Ordinaten im neuen Systeme mit η_1', η_2', η_3' bezeichnet, so hat man daher

$$F = \frac{d}{3}(\eta_1' + 4\eta_2' + \eta_3').$$

Durch drei Punkte und die Bedingung, dass die Hauptachse der Ordinatenachse parallel geht, ist eine Parabel eindeutig bestimmt. Hat man daher drei Punkte, P_1, P_2, P_3, und ist die Ordinate η_2 des mittleren Punktes P_2 gleich weit (um d) von den Ordinaten η_1, η_3 der andern entfernt, so schliessen die Abscissenachse, die Ordinaten η_1, η_3 und der Parabelbogen, der durch P_1, P_2, P_3 geht und dessen Hauptachse der Y-Achse parallel ist, die Fläche ein

$$F = \frac{d}{3}(\eta_1 + 4\eta_2 + \eta_3).$$



(M. 510.)

Es ist bemerkenswerth, dass dieser Ausdruck den Parameter und die Ordinaten des Scheitels nicht explicite enthält.

Man hat diese Formel dazu benutzt, den Inhalt einer Fläche angenähert zu bestimmen. Um die Fläche $AA'B'B$ angenähert zu erhalten, theile man $A'B'$ in $2n$ gleiche

Theile, und ziehe in allen Theilpunkten die Ordinaten, von $A'A$ aus begonnen seien dieselben $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots \eta_{2n+1}$.

Ersetzt man nun die Curve durch n Parabelbogen, die der Reihe nach von η_1 bis η_3, η_3 bis η_5, ... η_{2n-1} bis η_{2n+1} reichen und deren Achsen normal zur X-Achse sind, so ist die Summe der von diesen Bogen begrenzten Flächen, wenn $AB : 2n = d$ gesetzt wird,

$$F = \frac{d}{3}\left[(\eta_1 + 4\eta_2 + \eta_3) + (\eta_3 + 4\eta_4 + \eta_5) + \ldots\right]$$

$$= \frac{d}{3}\left[\eta_1 + 4(\eta_2 + \eta_4 + \eta_6 + \eta_{2n}) + 2(\eta_3 + \eta_5 + \eta_7 + \ldots + \eta_{2n-1}) + \eta_{2n+1}\right],$$

und dies kann als angenäherter Werth der gesuchten Fläche benutzt werden. Diese Formel ist unter dem Namen der SIMPSON'schen Regel bekannt*).

3. Für den zwischen zwei parallelen Sehnen AA_1 und BB_1 gelegenen Theil einer Kreisfläche ist

$$f = 2\int_a^b y\,dx.$$

Bezeichnet φ den Polarwinkel von P, und r den Radius des Kreises, so ist

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad dx = -r\sin\varphi\,d\varphi.$$

Sind ferner α und β die Centriwinkel der Sehnen AA_1 und BB_1, so entsprechen den Abscissen a und b die Werthe $\varphi_1 = \frac{1}{2}\alpha$, $\varphi_2 = \frac{1}{2}\beta$, und man hat daher

$$f = -2r^2\int_{\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}\beta} \sin^2\varphi\,d\varphi.$$

(M. 511.)

Da nun

$$\int \sin^2\varphi\,d\varphi = \int \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} + C,$$

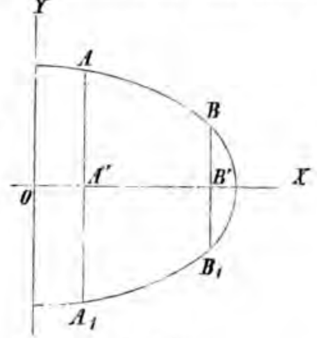
so folgt

$$f = \frac{r^2}{2}(\alpha - \beta - \sin\alpha + \sin\beta).$$

Hieraus ergiebt sich die ganze Kreisfläche, wenn man $\beta = 0$ und $\alpha = 2\pi$ setzt.

4. Für den Theil einer Ellipsenfläche, der zwischen zwei zu einer Hauptachse normalen Sehnen liegt, ist

$$f = 2\int_a^b y\,dx,$$



(M. 512.)

sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Halbachsen, so kann man $x = \mathfrak{a}\cos\varphi$, $y = \mathfrak{b}\sin\varphi$ setzen, mithin ist $dx = -\mathfrak{a}\sin\varphi\,d\varphi$.

Gehören zu den Punkten A und B die Werthe $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$ und $\varphi = \frac{1}{2}\beta$, so erhält man

$$f = -2\mathfrak{a}\mathfrak{b}\int_{\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}\beta} \sin^2\varphi\,d\varphi,$$

daher folgt schliesslich

$$f = \frac{1}{2}\mathfrak{a}\mathfrak{b}(\alpha - \beta - \sin\alpha + \sin\beta).$$

*) Ueber den Genauigkeitsgrad der SIMPSON'schen Regel vergleiche man SCHLOEMILCH, Compendium d. höh. Analysis, 4. Aufl., Bd. I., § 82.

Die ganze Ellipsenfläche F folgt hieraus, wenn man $\beta = 0$, $\alpha = 2\pi$ setzt, zu

$$F = \pi \cdot ab\,.$$

5. Die Hyperbelfläche, die von der Hyperbel und einer zur Hauptachse normalen Sehne begrenzt wird, beträgt, wenn x die Abscisse der begrenzenden Sehne ist, und a und b die Halbachsen der Hyperbel sind,

$$f = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\, dx\,.$$

Nun ist, wie sich nach § 4, No. 4 leicht ergiebt,

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 l(x + \sqrt{x^2 - a^2})\right] + C.$$

Daher hat man

$$f = \frac{b}{2a}\left(x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 l \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right).$$

Hierfür kann man setzen

$$f = \frac{1}{2}\left[xy - \frac{b}{a} l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\right].$$

Wählt man die Asymptoten zu Coordinatenachsen, so ist die Hyperbelgleichung

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}\,.$$

Ist α der halbe Winkel der Asymptoten, so ist

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha = \frac{2 \tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}\,.$$

Daher liegt zwischen zwei Ordinaten η_1 und η_2, die dasselbe Vorzeichen haben, die Fläche

$$f = \sin 2\alpha \cdot \frac{a^2 + b^2}{4}\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dx}{x} = \frac{ab}{2}\, l\frac{\xi_2}{\xi_1}\,.$$

6. Die Gleichungen einer Cycloide seien

$$x = a(\varphi - \sin\varphi)\,, \quad y = a(1 - \cos\varphi)\,.$$

Alsdann ist $\quad dx = a(1 - \cos\varphi)\, d\varphi\,,$

und für die Fläche, die von dem im Nullpunkte beginnenden Cycloidenbogen und den Coordinaten des Cycloidenpunktes P eingeschlossen wird, ergiebt sich

$$f = \int_0^x y\, dx = a^2 \int_0^\varphi (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi\,.$$

Da nun

$$(1 - \cos\varphi)^2 = 1 - 2\cos\varphi + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$$
$$= \tfrac{3}{2} - 2\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi\,,$$

so ist

$$\int_0^\varphi (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3\varphi}{2} - 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\,.$$

(M. 513.)

Folglich hat man

$$1. \qquad f = \frac{a^2}{4}(6\varphi - 8\sin\varphi + \sin 2\varphi)\,.$$

Die von PP', $P'M'$ und dem Bogen PM' des erzeugenden Kreises eingeschlossene Fläche ist

$$f_1 = \frac{PP' + MM'}{2} \cdot P'M' - \frac{a^2\varphi}{2} = \frac{a^2}{2}(2\sin\varphi - \cos\varphi \sin\varphi - \varphi)\,.$$

Daher hat man für die von der Abscissenachse, dem Cycloidenbogen OP und dem Kreisbogen PM' eingeschlossene Fläche

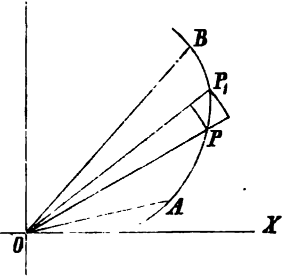
2. $$OPM' = f + f_1 = a^2(\varphi - \sin\varphi) = a \cdot OP'.$$

Also ist diese Fläche gleich dem Rechtecke aus dem Halbmesser des erzeugenden Kreises und der Abscisse des Punktes P.

Aus 1. erhält man für $\varphi = 2\pi$ die Fläche, die von dem zu einer vollen Umdrehung gehörigen Cycloidenbogen und der Abscissenachse eingeschlossen wird

3. $$f = 3\pi a^2 .$$

7. Ist die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten
$$r = f(\varphi),$$
so lässt sich leicht der Sector angeben, der von den Radien zweier zu den Polarwinkeln α und β gehöriger Curvenpunkte A und B und dem Curvenbogen AB begrenzt wird.



(M. 514)

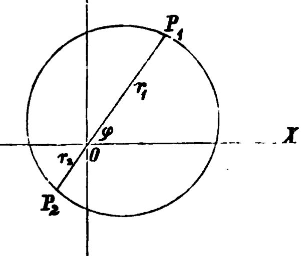
Haben P und P_1 die Coordinaten φ, r und $\varphi + \Delta\varphi$, $r + \Delta r$, so kann $\Delta\varphi$ immer so klein genommen werden, dass der Curvensector $OPP_1 = \Delta\varphi$ zwischen den Kreissectoren enthalten ist, die den Centriwinkel $\Delta\varphi$ und die Radien r und $r + \Delta r$ haben; alsdann ist

wenn $\Delta r > 0$: $\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi < \Delta S < \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2\Delta\varphi$,

" $\Delta r < 0$: $\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi > \Delta S > \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2\Delta\varphi$.

Dividirt man Glied für Glied durch $\Delta\varphi$ und geht zur Grenze $\Delta\varphi = 0$ über, so convergiren beide Begrenzungen des Quotienten $\Delta S : \Delta\varphi$ gegen den Grenzwerth $\frac{1}{2}r^2$; daher hat man
$$\frac{dS}{d\varphi} = \lim \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{1}{2}r^2 .$$

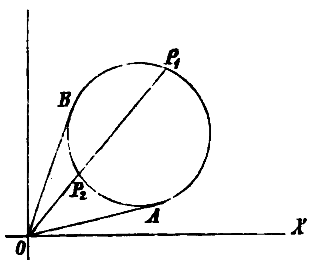
Hieraus folgt unter der Voraussetzung, dass der Curvenbogen AB continuirlich ist und ganz im Endlichen liegt, und dass φ nur wächst, wenn ein Punkt ohne umzukehren den Bogen von A bis B durchläuft
$$S = \frac{1}{2}\int_\beta^\alpha r^2\, d\varphi .$$



(M. 515.)

Für den Inhalt einer geschlossenen Curve, welche von den Radien in zwei realen Punkten geschnitten wird, hat man, wenn der Nullpunkt im Innern der Fläche liegt,
$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\varphi .$$

Sind r_1 und r_2 die beiden Radien, welche zum Polarwinkel φ gehören, und ist r_1 positiv, so ist r_2 negativ; für die Fläche F hat man alsdann auch
$$S = \frac{1}{2}\int_0^\pi r_1^2\, d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^\pi r_2^2\, d\varphi ,$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi (r_1^2 + r_2^2)\, d\varphi .$$



(M. 516.)

Liegt der Nullpunkt ausserhalb der gesuchten Fläche, so bestimme man die Winkel α und β, deren Radien die Curve berühren, zwischen denen also die Fläche gelegen ist; gehören nun zu φ die Radien r_1 und r_2, und ist $r_1 > r_2$, so ist die gesuchte Fläche

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r_1^2 d\varphi - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r_2^2 d\varphi,$$

also
$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r_1^2 - r_2^2) d\varphi.$$

8. Die Gleichung der Fusspunktcurve der Ellipse ist

$$r^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi.$$

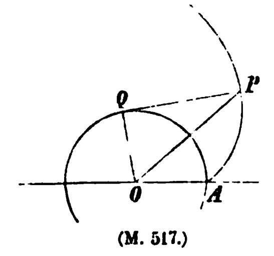
Daher hat man für einen an der X-Achse beginnenden Sector dieser Curve

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\varphi (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\varphi [a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\varphi]\, d\varphi$$
$$= \frac{a^2 + b^2}{4}\varphi + \frac{c^2}{8}\sin 2\varphi.$$

Einen Quadranten erhält man für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$S = \frac{a^2 + b^2}{8}\pi,$$

die ganze Fläche ist daher das arithmetische Mittel der beiden über den Hauptachsen construirten Kreise.



(M. 517.)

9. Für die Kreisevolvente hat man, wenn AOQ mit ω und der Halbmesser des Kreises mit a bezeichnet werden

$$r^2 = a^2(1 + \omega^2), \quad tang(\omega - \varphi) = \omega.$$

Aus der letzteren Gleichung folgt

$$d\omega - d\varphi = \cos^2(\omega - \varphi)\, d\omega,$$

mithin
$$d\varphi = \frac{\omega^2}{1 + \omega^2}\, d\omega.$$

Daher ist der Sector AOP

$$S = \frac{1}{2} a^2 \int_0^\omega \omega^2 d\omega = \frac{1}{6} a^2 \omega^3.$$

10. Legt man bei einer Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt den Nullpunkt in den Doppelpunkt, so ist die Gleichung der Curve von der Form

1. $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = Dx^3 + Ex^2y + Fxy^2 + Gy^3,$$

die Glieder ersten und nullten Grades fehlen.

Setzt man $tang\,\varphi = t$, so ist $y = xt$, $r^2 = x^2(1 + t^2)$,

$$d\varphi = \frac{dt}{1 + t^2},$$

und daher die Fläche des Sectors, für dessen Endpunkte t die Werthe a und b hat

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b x^2 dt.$$

Führt man $y = tx$ in 1. ein, so entsteht für x die lineare Gleichung

$$A + Bt + Ct^2 = (D + Et + Ft^2 + Gt^3)\cdot x.$$

Hier setzen wir zur Abkürzung

$$A + Bt + Ct^2 = T, \quad D + Et + Ft^2 + Gt^3 = \mathrm{T},$$

und erhalten somit

$$x = \frac{T}{\mathrm{T}};$$

daher ergiebt sich für den Curvensector

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{T^2}{\mathrm{T}^2}\,dt.$$

Dieses Integral kann in jedem Falle nach den Regeln über die Integration echt gebrochener rationaler Functionen ausgeführt werden. Es ist bemerkenswerth, dass diese Sectoren mithin durch algebraische Functionen, Logarithmen und Arcustangens ausgedrückt werden können.

Wählt man bei einer symmetrischen Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt die Symmetrieachse zur Y-Achse, so ist die Gleichung für x geraden Grades, mithin

$$B = D = F = 0,$$

und die Gleichung 1. reducirt sich auf

2. $$Ax^2 + Cy^2 = Ex^2y + Gy^3.$$

Die Richtungen der Asymptoten bestimmen sich aus der cubischen Gleichung

$$Et + Gt^3 = 0;$$

diese ergiebt eine der X-Achse parallele Asymptote $t = 0$ und die beiden Asymptotenrichtungen

$$t = \sqrt{-E:G}.$$

Setzt man zur Bestimmung der Ordinate k der erstern Asymptote $y = k$ in 2., so folgt

$$(A - Ek)x^2 = Gk^3 - Ck^2.$$

Hieraus folgen für x zwei unendlich grosse Wurzeln, wenn

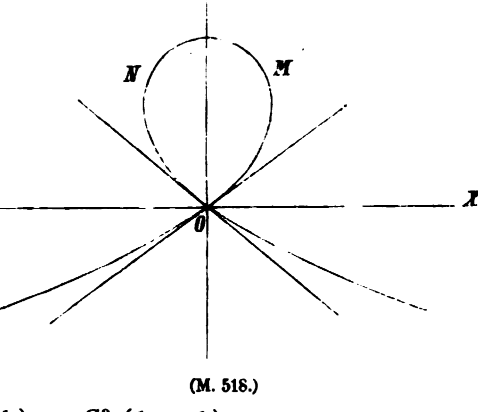
$$k = A:E.$$

Die in diesem Abstande der X-Achse parallele Gerade hat also mit der Curve drei unendlich ferne Punkte gemein, ist somit Wendetangente mit unendlich fernem Wendepunkte.

Diese Wendetangente wird selbst unendlich fern, und gleichzeitig auch die anderen beiden Asymptoten, wenn $E = 0$.

Da G alsdann von Null verschieden sein muss, sobald es sich um eine eigentliche Curve dritter Ordnung handelt, so kann man die Gleichung durch G dividiren und in der Form angeben

$$Ax^2 + Cy^2 = y^3.$$



(M. 518.)

Für diese Curve hat man nun

$$T = A + Ct^2, \quad \mathrm{T} = t^3,$$

$$S = \frac{1}{2}\int_a^t \frac{(A + Ct^2)^2}{t^6}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^t \left(\frac{A^2}{t^6} + \frac{2AC}{t^4} + \frac{C^2}{t^2}\right)dt$$

$$= \frac{A^2}{10}\left(\frac{1}{a^5} - \frac{1}{t^5}\right) + \frac{AC}{3}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{t^3}\right) + \frac{C^2}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{t}\right).$$

Für die Doppelpunktstangenten hat man die Gleichung

$$A + Ct^2 = 0.$$

Haben A und C verschiedene Vorzeichen, so sind die Tangenten real und man hat für den zwischen ihnen liegenden Curvensector, für die Schleife OMN,

$$S = 2\sqrt{-\frac{C}{A}}\left[\frac{A^2}{10}\cdot\left(-\frac{C}{A}\right)^2 + \frac{AC}{3}\cdot\left(-\frac{C}{A}\right) + \frac{C^2}{2}\right],$$
$$= \frac{8}{15}C^2\sqrt{-\frac{C}{A}}.$$

Es ist hervorzuheben, dass die Sectoren dieser Curven rationale algebraische Functionen des Parameters t sind.

---

11. Das Differential ds eines Bogens der Curve $y = f(x)$ ist bekanntlich
$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\cdot dx.$$
Daher ist der Bogen zwischen den Punkten A und B, deren Abscissen a und b sind
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$
Hierbei wird ein rechtwinkeliges Coordinatensystem vorausgesetzt. In einem schiefwinkeligen Parallel-Coordinatensysteme mit dem Achsenwinkel erscheint ds als der Grenzwerth der Seite eines Dreiecks, das die Seiten Δx und Δy und den von ihnen eingeschlossenen Winkel $\pi - \alpha$ hat; daher ist
$$\frac{ds}{dx} = \lim \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + 2\Delta x \Delta y \cos\alpha}{\Delta x^2}$$
$$= 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\cos\alpha,$$
und man hat somit
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + 2y'\cos\alpha + y'^2}\, dx.$$

12. Für einen im Scheitel anfangenden Bogen der Parabel
$$y = \frac{x^2}{2p}$$
ist
$$y' = \frac{x}{p}, \quad \text{und daher}$$

1. $$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2}\, dx = \frac{1}{p}\int_0^x \sqrt{p^2 + x^2}\, dx$$
$$= \frac{x}{2p}\sqrt{p^2 + x^2} + \frac{p}{2}\, l\,\frac{x + \sqrt{p^2 + x^2}}{p}.$$

Für die Ellipse ist
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$
Bezeichnet man die numerische Excentricität mit ε, so erhält man für einen auf der Y-Achse beginnenden Bogen

2. $$s = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx.$$

Dieses Integral ist irreductibel.

Für die Hyperbel ist
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}.$$
Bezeichnet man auch hier die numerische Excentricität durch ε, so ergiebt sich für einen im Scheitel beginnenden Bogen

3. $$s = \int_0^x \sqrt{\frac{\varepsilon^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}} \cdot dx.$$

Auch dieses Integral ist irreductibel; beide Integrale gehören zur Klasse der elliptischen Integrale, auf die wir im II. Theile der Integralrechnung eingehen werden.

13. Für die Cycloide ist

$$x = a(t - sin t), \quad y = a(1 - cos t).$$

Nimmt man t zur unabhängigen Variabeln, so ist

$$dx = a(1 - cos t) dt, \quad dy = a sin t\, dt$$

und daher ein im Nullpunkte beginnender Bogen

$$s = \int_0^x \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= a\int_0^t \sqrt{(1 - cos t)^2 + sin^2 t}\, dt = 2a\int_0^t sin \frac{t}{2} dt.$$

Dies ergiebt

$$s = 4a\left(1 - cos \frac{t}{2}\right).$$

Die Länge der ganzen Cycloide erhält man hieraus für $t = 2\pi$; sie ergiebt sich zu

$$s = 8a.$$

14. Für die Curve dritter Ordnung

$$Ax^2 + Cy^2 = y^3$$

ist, wenn man wieder $y = tx$ setzt,

$$x = \frac{A + Ct^2}{t^3}, \quad dx = -\frac{3A + Ct^2}{t^4} dt, \quad dy = t dx + x dt = -\frac{2A}{t^3}.$$

Folglich ist für einen zwischen den Richtungen $t = a$ und $t = b$ liegenden Curvenbogen

$$s = \int_a^b \frac{1}{t^4} \sqrt{(Ct^2 + 3A)^2 + 4A^2 t^2}\, dt.$$

Dieses Integral ist im Allgemeinen elliptisch. Ist $C = 0$, so erhält man die Neil'sche oder semicubische Parabel $Ax^2 = y^3$ und hat

$$s = A\int_a^b \frac{\sqrt{9 + 4t^2}}{t^4} dt.$$

Hierbei ist $y = tx$, mithin

$$x = \frac{A}{t^3}, \quad y = \frac{A}{t^2}.$$

Setzt man in dem Integrale $t = 1 : z$, so erhält man

1. $$s = A\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \sqrt{9z^2 + 4} \cdot z dz.$$

Nun ist bekanntlich

$$\int \sqrt{9z^2 + 4} \cdot z dz = \frac{1}{27}(9z^2 + 4)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Ersetzt man hier

$$z^2 = \frac{1}{t^2} = \frac{y}{A},$$

und führt die Grenzen 0 und y ein, so erhält man schliesslich

$$s = \frac{1}{27\sqrt{A}}\left[\sqrt{(9y+4A)^3} - 8\sqrt{A^3}\right].$$

15. Will man Polarcoordinaten verwenden, so macht man die Substitutionen

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi.$$

Daher ist $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$, und man hat

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi.$$

16. Die Spirale des Archimedes hat die Gleichung

$$r = a\varphi;$$

hier ist $r' = a$, und man erhält den vom Nullpunkt an gerechneten Bogen

$$s = a\int_0^{\varphi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi$$

$$= \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + l(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1})\right].$$

Für die hyperbolische Spirale ist

$$r = \frac{a}{\varphi}, \quad r' = -\frac{a}{\varphi^2}, \quad s = a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sqrt{\varphi^2+1}}{\varphi^2}\, d\varphi.$$

Daher ist nach § 4, No. 4,

$$s = a\left[{}_{\varphi_1}^{\varphi_2}\; l(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}) - \frac{1}{\varphi}\sqrt{\varphi^2+1}\right],$$

wobei durch das Zeichen

$$\left[{}_{\varphi_1}^{\varphi_2}\; f(\varphi)\right]$$

die Differenz $f(\varphi_2) - f(\varphi_1)$ angedeutet werden soll.

17. Aus den Gleichungen der Kreisevolvente (No. 9) ergiebt sich

$$r\,d\varphi = \frac{a^2\omega^2}{r}\, d\omega, \quad dr = \frac{a^2\omega}{r}\, d\omega, \quad ds = a\omega\, d\omega$$

und man erhält daher für den Bogen, dessen Endpunkte den Wälzungswinkeln 0 und ω zugehören

$$s = \tfrac{1}{2}a\omega^2.$$

---

18. Das Bogendifferential einer Raumcurve ist (Differentialrechn. § 6, No. 8)

1. $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Sind die Gleichungen der Horizontal- und der Verticalprojection gegeben

$$y = f_1(x), \quad z = f_2(x),$$

so hat man

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\cdot dx;$$

daher ist der zwischen den Abscissen x_1 und x_2 enthaltene Bogen

2. $$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\cdot dx.$$

Sind die Coordinaten eines Curvenpunktes als Functionen eines Parameters t gegeben, so ist

$$3. \qquad s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt .$$

19. Sind die Curvengleichungen

$$y^2 = 2ax , \qquad z^2 = 2bx ,$$

so ist die Curve der Durchschnitt zweier parabolischen Cylinder, und es ergiebt sich

$$y' = \sqrt{\frac{a}{x}}, \qquad z' = \sqrt{\frac{b}{x}};$$

Rechnet man den Bogen vom gemeinsamen Scheitel der beiden Cylinder aus, so hat man

$$s = \int_0^x \sqrt{\frac{x + a + b}{x}}\, dx .$$

Setzt man $x = u^2$, so folgt

$$s = 2\int_0^u \sqrt{u^2 + a + b}\, du .$$

Daher erhält man schliesslich

$$s = \sqrt{x(x + a + b)} + \sqrt{a + b}\; l \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x + a + b}}{\sqrt{a + b}} .$$

20. Die Raumcurve dritter Ordnung

$$x = at , \qquad y = bt^2 , \qquad z = ct^3$$

ist der gemeinsame Durchschnitt der Flächen zweiter Ordnung, deren Gleichungen durch Elimination von t aus den drei Gleichungen erhalten werden:

$$bx^2 - a^2 y = 0 , \qquad b^2 xz - acy^2 = 0 , \qquad cxy - abz = 0 ;$$

dieselben stellen einen parabolischen Cylinder, einen Kegel und ein hyperbolisches Paraboloid dar.

Aus den Curvengleichungen erhält man

$$\frac{dx}{dt} = a , \qquad \frac{dy}{dt} = 2bt , \qquad \frac{dz}{dt} = 3ct^2 ,$$

daher ist die Länge eines im Nullpunkte beginnenden Bogens

$$1. \qquad s = \int_0^t \sqrt{a^2 + 4b^2 t^2 + 9c^2 t^4}\, dt .$$

Dieses Integral ist im Allgemeinen elliptisch; es wird algebraisch, wenn

$$4b^4 - 9a^2 c^2 = 0 .$$

Setzt man $2b^2 = 3ac$ voraus, so nimmt der Kegel die besondere Gleichung an

$$3xz - 2y = 0 ,$$

während die beiden anderen Flächen keine Besonderheiten erhalten.

Das Integral 1. wird jetzt

$$s = \int_0^t (a + 3ct^2) dt = at + ct^3 = x + z .$$

---

21. Schneidet man aus einem begrenzten Volumen durch zwei zu derselben Geraden G normale Ebenen Q und Q_1 eine Schicht ΔV, und ist die Schnitt-

ebene Q von einem gewissen Nullpunkte auf der Geraden um p, die andere Q_1 um $p + \Delta p$ entfernt, hat ferner die Schnittfläche auf Q den Inhalt q, so ist das Volumen der Schicht ΔV von dem Cylinder $q \cdot \Delta p$ um so weniger verschieden, je kleiner Δp ist, und stimmt mit dem Cylinder bis zu jedem Genauigkeitsgrade überein, wofern nur Δp hinlänglich klein ist; daher ist

$$lim \frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{dV}{dp} = q .$$

Hieraus folgt durch Integration für das Volumen, das zwischen den Querschnitten liegt, die die Abstände $p = a$ und $p = b$ vom Nullpunkte haben

$$V = \int_a^b q\,dp .$$

Sind insbesondere die Querschnitte normal zur X-Achse und bezeichnet man den Querschnitt in diesem Falle mit q_x, so hat man

$$V = \int_{x_1}^{x_2} q_x\,dx .$$

Um die zwischen zwei Parallelkreisen enthaltene Schicht eines Rotationskörpers zu erhalten, lässt man G mit der Rotationsachse zusammenfallen; ist nun die Gleichung eines Meridians, in einem orthogonalen Systeme, dessen Achsen G und normal zu G sind, und in welchem die zu G normale Coordinate mit r bezeichnet wird,

$$r = f(p) ,$$

so ist das Volumen der Schicht

$$V = \pi \int_a^b r^2\,dp .$$

22. Ein zur X-Achse normaler Querschnitt q_x des dreiachsigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ist eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} , \qquad \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2} .$$

Daher ist die Fläche desselben

$$q_x = \pi \frac{bc}{a^2} (a^2 - x^2) ;$$

mithin hat man für das Volumen einer Schicht, die von der YZ-Ebene und einer dazu parallelen begrenzt wird

$$V = \pi \frac{bc}{a^2} \int_0^x (a^2 - x^2)\,dx$$

$$= \pi \frac{bc}{a^2} (a^2 x - \tfrac{1}{3} x^3).$$

Das Volumen des ganzen Ellipsoids ist

$$V = \pi \frac{bc}{a^2} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\,dx = 2\pi \frac{bc}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)\,dx$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot abc .$$

Schneidet man das einschalige Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

normal zur Z-Achse, so ist der Querschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen $a\sqrt{z^2 + c^2} : c$ und $b\sqrt{z^2 + c^2} : c$. Das Volumen einer Schicht zwischen der XY-Ebene und einer parallelen Ebene ist daher

$$V = \pi \frac{ab}{c^2} \int_0^z (z^2 + c^2)\, dz,$$

$$= \pi \frac{ab}{c^2} (\tfrac{1}{3} z^3 + c^2 z).$$

Die Schicht zwischen den Ebenen $z = -c$ und $z = c$ beträgt

$$\frac{8\pi}{3} abc,$$

und ist daher doppelt so gross, wie ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c.

Im zweischaligen Hyperboloide

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

legen wir einen Querschnitt normal zur X-Achse; derselbe ist eine Ellipse mit den Halbachsen $b\sqrt{x^2 - a^2} : a$ und $c\sqrt{x^2 - a^2} : a$. Das vom Scheitel bis zu einem Querschnitte reichende Volumen ist daher

$$V = \pi \frac{bc}{a^2} \int_a^x (x^2 - a^2)\, dx,$$

$$= \pi \cdot \frac{bc}{a^2} (\tfrac{1}{3} x^3 - a^2 x + \tfrac{2}{3} a^3).$$

23. Das elliptische Paraboloid

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0$$

hat normal zur Z-Achse einen elliptischen Querschnitt mit den Halbachsen $\sqrt{2az}$ und $\sqrt{2bz}$. Daher ist das normal zur Achse abgeschnittene Segment

$$V = 2\pi \sqrt{ab} \int_0^z z\, dz,$$

$$= \pi \sqrt{ab} \cdot z^2.$$

Ist F die Fläche der das Segment begrenzenden Ellipse, so ist

$$F = 2\pi \sqrt{ab} \cdot z,$$

und man hat daher

$$V = \tfrac{1}{2} Fz,$$

also die Hälfte des Cylinders von der Basis F und der Höhe z.

Vom hyperbolischen Paraboloide

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0$$

berechnen wir das oberhalb der XY-Ebene entlang der positiven X-Achse sich erstreckende und von einem Querschnitte normal zur X-Achse begrenzte Volumen.

Eine Normalebene zur X-Achse schneidet die Fläche in einer Parabel, deren Scheitel in der Höhe $x^2 : 2a$ über der XY-Ebene liegt, und die von der XY-Ebene in einer Sehne von der Länge $2\sqrt{b : a} \cdot x$ geschnitten wird. Der Inhalt dieses parabolischen Querschnitts ist daher

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} x^3 ;$$

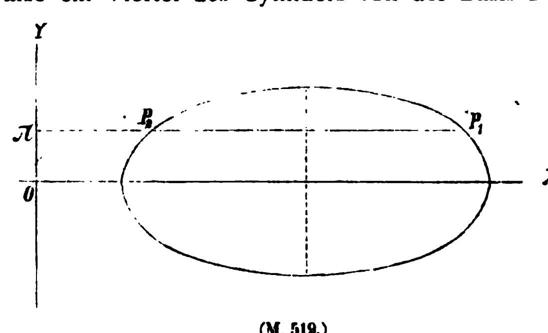
mithin ist die gesuchte Schicht

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \int_0^x x^3 \, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \frac{x^4}{4},$$

oder, wenn mit F der das Volumen begrenzende Querschnitt bezeichnet wird

$$V = \tfrac{1}{4} F \cdot x,$$

also ein Viertel des Cylinders von der Basis F und der Höhe x.



(M. 519.)

24. Rotirt eine Ellipse um eine Achse OY, die in der Ebene der Ellipse liegt, parallel zu einer Hauptachse der Ellipse ist, und die Ellipse nicht schneidet, so entsteht ein doppelsymmetrischer Ring. Ein Querschnitt q dieses Ringes, der durch Π normal zur Drehungsachse gelegt wird, ist die Differenz der beiden Kreise, deren Halbmesser ΠP_1 und ΠP_2 sind; daher ist, wenn e den Abstand des Ellipsenmittelpunktes von der Rotationsachse bezeichnet

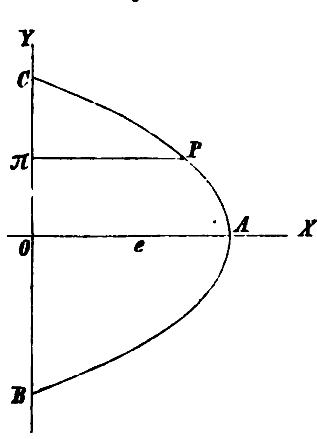
$$q = \pi \cdot (\Pi P_1 + \Pi P_2)(\Pi P_1 - \Pi P_2),$$
$$= \frac{4\pi a e}{b} \sqrt{b^2 - y^2}.$$

Folglich ist das Ringvolumen

$$V = \frac{4\pi a e}{b} \int_{-b}^{b} \sqrt{b^2 - y^2} \, dy = \frac{8\pi a e}{b} \int_0^b \sqrt{b^2 - y^2} \, dy.$$

Setzt man $y = b \cos \varphi$, so erhält man

$$\int_0^b \sqrt{b^2 - y^2} \, dy = b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4} b^2 \quad (\S\ 7,\ \text{No. } 9,\ 1).$$



(M. 520.)

Hieraus folgt

$$V = 2\pi^2 \cdot a b e.$$

Bezeichnet E die Fläche der rotirenden Ellipse und w den Perimeter des von ihrem Mittelpunkte beschriebenen Kreises, so ist

$$V = E \cdot w.$$

Dieselbe Formel gilt auch, wie man sofort sieht, für jeden zwischen zwei Meridianen gelegenen Sector dieses Ringes, sobald w den innerhalb des Sectors gelegenen Theil des vom Mittelpunkte beschriebenen Weges bezeichnet.

Rotirt ein Parabelsegment ABC um die zur Parabelachse normale Ordinate BC, und ist die Parabelgleichung $y^2 = 2a(e - x)$, so ist die Fläche des zur Ordinate $O\Pi = y$ gehörigen Parallelkreises

$$q = \pi x^2 = \frac{\pi}{4a^2}(2ae - y^2)^2 .$$

Daher ist das Ringvolumen

$$V = \frac{\pi}{4a^2}\int_{-\sqrt{2ae}}^{\sqrt{2ae}}(2ae - y^2)^2 dy = \frac{\pi}{2a^2}\int_0^{\sqrt{2ae}}(2ae - y^2)^2 dy ,$$

$$= \frac{16\pi}{15} e^2 \sqrt{2ae} .$$

Bezeichnet F die rotirende Fläche, so ist

$$F = \frac{4}{3} e\sqrt{2ae} ;$$

daher hat man

$$V = \frac{4\pi}{5} eF .$$

---

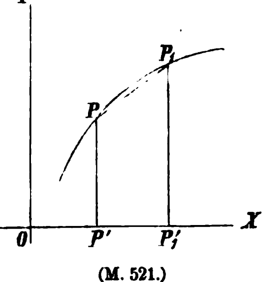
25. Wir beschliessen diesen Abschnitt mit Formeln und Beispielen über den Inhalt von Rotationsflächen.

Um eine zwischen zwei Parallelkreisen enthaltene Zone einer Rotationsfläche zu berechnen, die durch Umdrehung der Curve $y = f(x)$ um die X-Achse entsteht, betrachten wir zwei auf einem Meridiane gelegene Punkte P und P_1 mit den Coordinaten x, y und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$. Die Kegelzone, welche die Sehne PP_1 beschreibt, hat den Inhalt

$$\Delta S = 2\pi \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\,(y + \tfrac{1}{2}\Delta y) .$$

Die zwischen denselben Parallelkreisen enthaltene Flächenzone sei ΔF. Nähert sich Δx dem Grenzwerthe Null, so nähert sich der Quotient $\Delta F : \Delta x$ dem Grenzwerthe von $\Delta S : \Delta x$; daher hat man

$$\frac{dF}{dx} = lim \frac{\Delta F}{\Delta x} = lim \frac{\Delta S}{\Delta x} = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} .$$



(M. 521.)

Hiernach ergiebt sich für die Zone, deren Parallelkreise die Abscissen a und b haben,

$$F = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx .$$

26. Rotirt die Parabel $y^2 = 2px$ um die X-Achse, so ist der vom Scheitel bis zu einem Parallelkreise sich erstreckende Theil des Rotationsparaboloids

$$F = 2\pi \int_0^x \sqrt{2px}\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx ,$$

$$= 2\pi\sqrt{p}\int_0^x \sqrt{2x + p}\, dx ,$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2x + p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right] .$$

Rotirt diese Parabel um die Y-Achse, so entsteht eine Rotationsfläche vierten Grades, die im Nullpunkte eine Spitze hat. Für die von der Spitze bis zu einem Parallelkreise reichende Zone derselben ist

$$F = 2\pi \int_0^y x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \frac{\pi}{p^2} \int_0^y y^2 \sqrt{p^2 + y^2}\, dy.$$

Nun ist (§ 4, No. 4)

$$\int y^2 \sqrt{p^2 + y^2}\, dy = \frac{1}{8}(2y^3 + p^2 y)\sqrt{p^2 + y^2} - \frac{p^4}{8} \int \frac{dy}{\sqrt{p^2 + y^2}}.$$

Daher ist

$$F = \frac{\pi}{8p^2}(2y^3 + p^2 y)\sqrt{p^2 + y^2} - \frac{\pi p^2}{8} l \frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}.$$

27. Für die Oberfläche des Ellipsoids, das durch Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

um die X-Achse entsteht, hat man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{b}{a^2} \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{y}.$$

Daher ist eine in der YZ-Ebene beginnende Zone des Rotationsellipsoids

$$F = \frac{2\pi b}{a^2} \int_0^x \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}\, dx.$$

Nach § 4, No. 4 ist

$$\int \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} + \frac{a^4}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}.$$

Ist $a > b$, das Ellipsoid also durch Rotation um die grosse Achse entstanden, so ist, wenn c die Excentricität des Meridians bezeichnet,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^4 - c^2 x^2}} = \frac{1}{c} \arcsin \frac{cx}{a^2} + C;$$

Ist dagegen $a < b$, so hat man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^4 + c^2 x^2}} = \frac{1}{c}\, l(cx + \sqrt{a^4 + c^2 x^2}) + C.$$

Daher ergiebt sich schliesslich,

wenn $a > b$,

$$F = \frac{\pi b}{a^2} x \sqrt{a^4 - c^2 x^2} + \frac{\pi a^2 b}{c} \arcsin \frac{cx}{a^2};$$

wenn $a < b$,

$$F = \frac{\pi b}{a^2} x \sqrt{a^4 + c^2 x^2} + \frac{\pi a^2 b}{c} l \frac{cx + \sqrt{a^4 + c^2 x^2}}{a^2}.$$

Die ganze Oberfläche erhält man, wenn man x durch a ersetzt und mit 2 multiplicirt

$$F = 2\pi b \left(b + \frac{a^2}{c} \arcsin \frac{c}{a}\right), \quad a > b;$$

$$F = 2\pi b \left(b + \frac{a^2}{c} l \frac{b + c}{a}\right), \quad a < b.$$

28. Rotirt die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

um die X-Achse, so ist die von einem Scheitel bis zu einem Parallelkreise sich erstreckende Fläche des zweischaligen Rotationshyperboloids, wenn die Excentricität wieder mit c bezeichnet wird

$$1.\quad F = \frac{2\pi b}{a^2}\int_a^x \sqrt{c^2x^2 - a^4}\, dx$$
$$= \frac{\pi b}{a^2}\left[x\sqrt{c^2x^2 - a^4} - a^2 b - \frac{a^4}{c}\, l\,\frac{cx + \sqrt{c^2x^2 - a^4}}{a(c+b)}\right].$$

Rotirt dieselbe Hyperbel um die X-Achse, so entsteht ein einschaliges Rotationshyperboloid. Für eine von der XY-Ebene bis zu einem Parallelkreise reichende Zone desselben ist

$$F = 2\pi\int_0^y x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy.$$

Da nun

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}, \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{ay}{b\sqrt{b^2+y^2}}, \qquad \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{a\sqrt{b^4 + c^2y^2}}{b^2 x}c,$$

so hat man

$$2.\quad F = \frac{2\pi a}{b^2}\int_0^y \sqrt{b^4 + b^2y^2}\, dy,$$
$$= \frac{\pi a}{b^2}\left(y\sqrt{b^4 + c^2y^2} + \frac{b^4}{c}\, l\,\frac{cy + \sqrt{b^4 + c^2y^2}}{b^2}\right).$$

29. Bezeichnet ds das Bogendifferential eines Meridians, so kann man die Zone der Rotationsfläche kürzer in der Form angeben

$$F = 2\pi\int y\,ds.$$

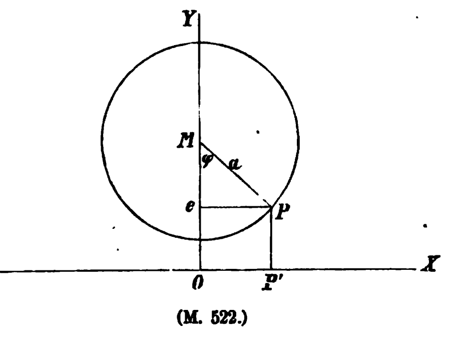
Hier erscheint s als die Integrationsvariable, und y ist durch s auszudrücken. Statt dessen kann man unter Umständen auch y und ds durch eine andere unabhängige Variable t ausdrücken; die Grenzen des Integrals sind dann die Werthe von t, welche für die Endpunkte des Meridians der Zone gelten.

Rotirt ein Kreis mit dem Halbmesser a um eine Gerade OX, die in seiner Ebene um e vom Centrum entfernt liegt, und nimmt man den Winkel φ zur unabhängigen Variabeln, so ist

$$y = e - a\cos\varphi, \qquad ds = a\,d\varphi.$$

Will man die ganze Oberfläche des Ringes berechnen, so gelten für φ die Grenzen 0 und 2π; daher ist

$$F = 2\pi a\int_0^{2\pi}(e - a\cos\varphi)\,d\varphi = 4\pi^2 a e.$$



(M. 522.)

§ 9. Bestimmte Doppelintegrale.

1. Das einfache bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

haben wir als den Grenzwerth definirt, dem sich die Summe

$$\sum_0^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n}$$

nähert, wenn n unendlich wächst, und haben, wenn $a < b$, diesen Grenzwerth als den Inhalt der Fläche erkannt, die von der Curve $y = f(x)$, der X-Achse und den zu den Abscissen a und b gehörigen Ordinaten $f(a)$ und $f(b)$ eingeschlossen wird. Die Abscissendifferenz $b - a$ erscheint dabei in n gleiche Theile getheilt, ein solcher Theil ist $(b - a) : n$ und der Functionswerth

$$f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

ist die Ordinate, die zum $k$ten Theilpunkte gehört.

Setzen wir

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x, \quad f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = y,$$

so haben wir einfacher

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \Sigma y \,\Delta x\,.$$

Die Voraussetzungen, dass alle Δx gleich sind und dass die y die zu den Theilpunkten gehörigen Ordinaten sind, können aufgegeben werden; theilt man die Differenz $b - a$ in n Theile $\Delta_1 x,\ \Delta_2 x,\ \ldots\ \Delta_n x$ von beliebigem Verhältniss und ist y_k eine Ordinate der Curve $y = f(x)$, die zu einem innerhalb $\Delta_k x$ gelegenen Punkte der Abscissenachse gehört, so ist

$$\lim \Sigma y_k \,\Delta_k x$$

ebenfalls die obige Fläche.

Ist nämlich die Curve $y = f(x)$ zwischen A und B beständig steigend oder beständig fallend, und bezeichnet man mit η_k und Y_k die grösste und kleinste innerhalb $\Delta_k x$ fallende Ordinate, und mit F die Fläche $AA'B'B$, so gelten die Begrenzungen

$$\Sigma \eta_k \Delta_k x < F < \Sigma Y_k \Delta_k x,$$
$$\Sigma \eta_k \Delta_k x < \Sigma y_k \Delta_k x < \Sigma Y_k \Delta_k x\,.$$

Der Unterschied der Grenzen ist

$$\Sigma Y_k \Delta_k x - \Sigma \eta_k \Delta_k x = \Sigma (Y_k - \eta_k) \Delta_k x\,.$$

Bezeichnet Δ den grössten der Theile

$$\Delta_1 x,\ \Delta_2 x,\ \Delta_3 x,\ \ldots\ \Delta_n x,$$

so ist offenbar

$$\Sigma (Y_k - \eta_k)\,\Delta_k x < \Delta \cdot \Sigma (Y_k - \eta_k)\,.$$

Da die Curve nach der Voraussetzung nur steigt oder fällt, so sind Y_k und η_k die beiden Ordinaten in den Endpunkten von $\Delta_k x$; im ersten Falle ist daher $\eta_k = y_{k-1}$, $Y_k = y_k$; im andern umgekehrt $\eta_k = y_k$, $Y_k = y_{k-1}$.

Folglich ist im ersten Falle

$$\sum_1^n (Y_k - \eta_k) = (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \ldots + y_n - y_{n-1} = y_n - y_0,$$

im letzten

$$\sum_1^n (Y_k - \eta_k) = (y_0 - y_1) + (y_1 - y_2) + (y_2 - y_3) + \ldots + (y_{n-1} - y_n) = y_0 - y_n.$$

Sind nun die Ordinaten alle endlich, so verschwindet das Produkt

$$\Delta \cdot \Sigma (Y_k - \eta_k) = \pm\, \Delta \cdot \Sigma (y_n - y_0)$$

mit Δ zugleich; daher hat man in der That

$$F = \lim \Sigma y_k \Delta_k x\,,$$

oder kürzer mit Hinweglassung des Index k

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \Sigma y\,\Delta x\,,$$

wobei man zu merken hat, dass die Summe über alle innerhalb der Begrenzung liegenden x zu erstrecken ist,

$$a \leqq x \leqq b\,.$$

Wenn die Curve abwechselnd steigt und fällt, so kann man die soeben durchgeführten Betrachtungen mit den für denselben Fall in § 1, No. 5 angestellten combiniren; man kommt dadurch zu der Erkenntniss, dass auch für diesen Fall

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \Sigma y\,\Delta x\,,$$

wenn nur y_k für alle zwischen den Grenzen a und b enthaltene Werthe von x endlich bleibt.

Anstatt dieses Integral als das zwischen den Grenzen a und b genommene Integral von $f(x)dx$ zu bezeichnen, kann man es geometrisch anschaulicher das über die Strecke $A'B'$ ausgedehnte Integral von $f(x)dx$ nennen.

2. Ist z eine Function zweier Variabeln, $z = \varphi(x, y)$ und betrachten wir x und y als rechtwinkelige Coordinaten eines Punktes der Ebene, so gehört zu jedem Punkte der Ebene ein bestimmter Werth von z. Ist nun in der Ebene eine begrenzte Fläche f gegeben, und theilen wir dieselbe in beliebig gestaltete kleine Theile Δf, multipliciren jeden Theil $\Delta_k f$ mit einem z_k, welches zu irgend einem innerhalb Δf gelegenen Punkte gehört, so verstehen wir unter dem über die Fläche f ausgedehnten Integrale

$$\int z\,df$$

den Grenzwerth, gegen den die Summe

$$\Sigma z_k \Delta_k f$$

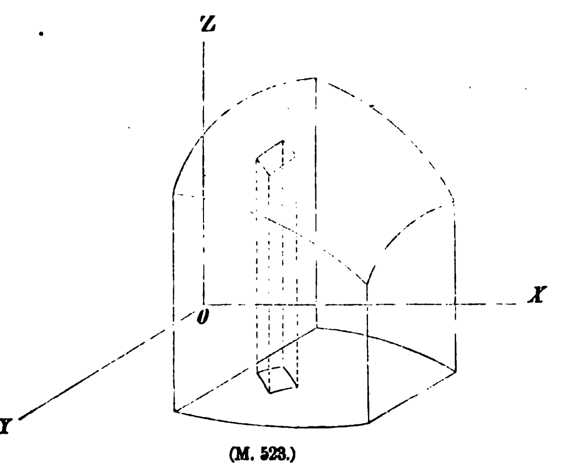
convergirt, wenn sämmtliche $\Delta_k f$ verschwinden; hierbei ist die Summe über alle im Innern von f liegende Flächentheile Δf zu erstrecken; man hat also

$$\int z\,df = \lim \Sigma z_k \Delta_k f\,.$$

Dieser Begriff eines über eine Fläche erstreckten Integrals wird geometrisch am anschaulichsten, wenn wir die Oberfläche F

$$z = \varphi(x, y)$$

construiren, und diese Fläche mit dem verticalen Cylinder durchschneiden, auf dem die entlang des Perimeters von f errichteten z Ordinaten liegen.



(M. 523.)

Bezeichnen ζ_k und Z_k die grösste und kleinste Ordinate der Fläche $z = \varphi(x, y)$, deren Fusspunkte innerhalb $\Delta_k f$ liegen und V den Theil des Cylinders zwischen der XY-Ebene und der Fläche F, so ist

$$\Sigma \zeta_k \Delta_k f < V < \Sigma Z_k \Delta_k f$$
$$\Sigma \zeta_k \Delta_k f \leqq \Sigma z_k \Delta_k f \leqq \Sigma Z_k \Delta_k f .$$

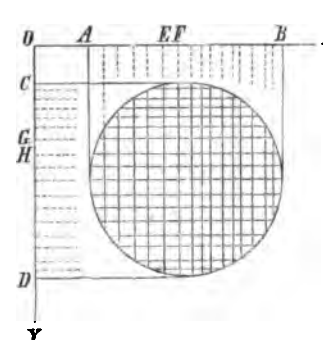
Geht man zur Grenze für verschwindend kleine Δf über, so fallen die Begrenzungen

$$\Sigma \zeta_k \Delta_k f \quad \text{und} \quad \Sigma Z_k \Delta_k f$$

zusammen; daher ist

$$\int z df = \lim \Sigma z_k \Delta_k f = V .$$

3. Wenn man die Differenz AB der äussersten Abscissen der Fläche F in kleine Theile $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots \Delta_m x$ und die Differenz der äussersten Ordinaten CD in kleine Theile $\Delta_1 y, \Delta_2 y, \Delta_3 y \ldots \Delta_n y$ theilt, und durch die Theilpunkte Parallelen zu den Achsen zieht, so entstehen mn Rechtecke, von denen ein Theil ganz ins Innere der Fläche f fällt. Die Summe dieser letzteren Rechtecke ist kleiner, als f und convergirt gegen den Grenzwerth f, wenn die Δx und Δy verschwindend klein werden; man kann daher in der Gleichung



(M. 524.)

1. $$\int z df = \lim \Sigma z_k \Delta_k f$$

diese Rechtecke als die Flächentheile Δf benutzen, also, wenn man den Index weglässt, Δf durch $\Delta x \Delta y$ ersetzen. Um den Uebergang zur Grenze anzudeuten, hat man Δf, Δx und Δy gegen df, dx und dy zu vertauschen und gewinnt so für 1. die besondere Darstellung

2.. $$\int z df = \int z dx dy = \lim \Sigma z \Delta x \Delta y .$$

Die Berechnung des Grenzwerthes kann geordnet in folgender Weise geschehen: Man addire zunächst die Elemente der Summe, die zu demselben $\Delta x = EF$ gehören, also zwischen zwei benachbarten Ordinaten liegen; für diese Summanden ist Δx ein gemeinsamer Faktor, und x kann in Rücksicht auf den vorzunehmenden Grenzübergang in dem Faktor $z = \varphi(x, y)$ constant gleich OE (oder OF) genommen werden. Deutet man diese Summation bei unveränderlichem x durch das Zeichen Σ_1 an, so ist die Summe dieser Elemente

$$\Delta x \cdot \Sigma_1 z \Delta y .$$

Geht man hier zur Grenze für verschwindende Δy über, so entsteht

$$\Delta x \lim \Sigma_1 z \Delta y .$$

Nun ist aber der Grenzwerth das bestimmte Integral von $z dy$, ausgedehnt über den im Innern der Fläche f liegenden Theil der in E (oder F) errichteten Ordinate; unter Berücksichtigung dieser Grenzen ist daher

$$\Delta x \lim \Sigma_1 z \Delta y = \Delta x \cdot \int z dy .$$

Setzt man hierin für Δx der Reihe nach alle Theile von AB, addirt die so erhaltenen Produkte, und geht dann zur Grenze für verschwindende Δx über, so erhält man

$$\lim \Sigma z \Delta x \Delta y = \lim \Sigma \Delta x \lim \Sigma_1 z \Delta y$$
$$= \lim \Delta x \int z dy .$$

Das innerhalb der angegebenen Grenzen genommene Integral

$$\int z dy$$

ist eine Function von x allein; der Grenzwerth rechts ist das von der kleinsten biz zur grössten Abscisse der Fläche f erstreckte Integral

$$\int \left(\int z dy \right) dx .$$

Es ist gebräuchlich die Klammern wegzulassen und das Differential der Variabeln, nach welcher zuerst integrirt wird, an die letzte Stelle zu setzen.

Das über eine begrenzte Fläche f erstreckte Integral

$$\int \varphi(x, y)\, df$$

wird daher durch zweimalige Integration gefunden; man denke sich zunächst x constant und berechne das bestimmte Integral

$$\int \varphi(x, y)\, dy,$$

erstreckt über den Theil der durch das Ende von x gehenden Normalen zu OX, der innerhalb der Fläche f liegt; dieses Integral ist eine Function von x allein; hierauf berechne man das Integral

$$\int \left[\int \varphi(x, y)\, dy\right] dx$$

erstreckt von der kleinsten bis zur grössten Abscisse der Fläche f.

Man kann in dieser Betrachtung die Coordinaten x und y gegen einander vertauschen und gewinnt dann die folgende Regel: Um das über die Fläche f erstreckte Integral

$$\int \varphi(x, y)\, df$$

zu erhalten, denke man sich zunächst y constant (z. B. gleich OG) und berechne das bestimmte Integral

$$\int \varphi(x, y)\, dx,$$

erstreckt über den Theil der zu y gehörigen Normalen zu OY, der innerhalb f liegt; dieses Integral ist eine Function von y allein; hierauf berechne man das Integral

$$\int \left[\int \varphi(x, y)\, dx\right] dy,$$

erstreckt von der kleinsten bis zur grössten Ordinate der Fläche f.

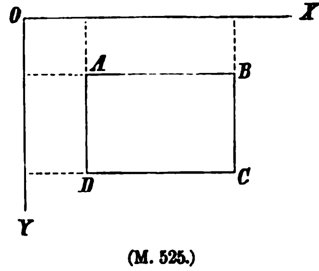
Da die über Flächen erstreckten Integrale durch zweimalige bestimmte Integration gefunden werden, so bezeichnet man sie als bestimmte Doppelintegrale.

4. Wir wollen nun an einigen Beispielen die Grenzen der aufeinander folgenden Integrationen bestimmen.

A. Ist die Fläche f ein Rechteck $ABCD$, dessen Seiten den Coordinatenachsen parallel sind, und in welchen AD und BC die Abscissen a und a_1, AB und DC die Ordinaten b und b_1 haben, so ist

$$\int z\, df = \int_a^{a_1}\int_b^{b_1} z\, dx\, dy,$$

$$= \int_b^{b_1}\int_a^{a_1} z\, dy\, dx.$$



(M. 525.)

Wenn beide Integrationen zwischen constanten Grenzen erfolgen, so kann daher die Reihenfolge der Integrationen ohne Aenderung der Grenzen gewechselt werden.

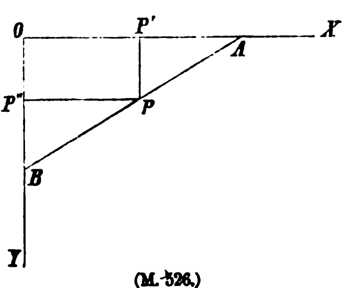
Die Bedingung, dass das Doppelintegral über die Fläche des Rechtecks ausgedehnt werden soll, kann durch die Ungleichungen ersetzt werden

$$a \leqq x \leqq a_1; \quad b \leqq y \leqq b_1.$$

B. Ist die Fläche f das Dreieck OAB, dessen Hypotenuse AB die Gleichung hat

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$

so gehört zu einer gegebenen Abscisse die Ordinate



(M. 526.)

$$y = \frac{b}{a}(a - x),$$

zu einer gegebenen Ordinate die Abscisse

$$x = \frac{a}{b}(b - y).$$

Integrirt man zuerst nach y bei unverändertem x, so hat sich diese Integration über die $P'P$ zu erstrecken, also $y = 0$ bis $y = b(a - x) : a$; die nachfolgende Integration in Bezug auf x erstreckt sich über OA, also von $x = 0$ bis $x = a$; daher hat man

$$\int z\,df = \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} z\,dx\,dy.$$

Integrirt man dagegen zuerst nach x bei unverändertem y, so erstreckt sich diese Integration über die Strecke $P''P$, und die darauf folgende Integration nach y über die Strecke OB; folglich ist

$$\int z\,df = \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} z\,dx\,dy = \int_0^b \int_0^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} z\,dy\,dx.$$

Um den Spielraum für x und y analytisch zu definiren, bemerken wir, dass die Function

$$T(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1$$

für alle Punkte auf derselben Seite der Geraden AB dasselbe Vorzeichen hat, also für alle mit O auf derselben Seite liegenden Punkte negativ ist, da für die Coordinaten des Nullpunkts sich $T(0, 0) = -1$ ergiebt. Die Bedingung, dass das Doppelintegral

$$\iint z\,dx\,dy$$

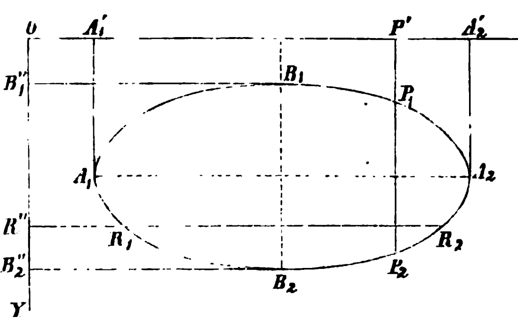
über die Dreiecksfläche OAB auszudehnen ist, kann also durch die Bedingung ersetzt werden, dass x und y alle positiven Werthe annehmen, für welche

$$-1 \leqq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \overline{\lessgtr} 0,$$

oder

$$0 \leqq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \overline{\lessgtr} 1.$$

C. Ist das Integral $\int z\,df$ über eine Ellipse erstreckt, deren Halbachsen a und b den Coordinatenachsen parallel sind und deren Centrum die Coordinaten γ und δ hat, und beginnt man die Berechnung mit der Integration nach y, so erstreckt sich dieselbe über P_1P_2, und die nachfolgende Integration nach x über $A_1'A_2'$. Beginnt man dagegen mit der Integration in Bezug auf x, so erstreckt sich diese über R_1R_2 und die dann eintretende Integration nach y über $B_1''B_2''$. Da nun



(M. 527.)

$$P'P_1 = \delta - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x - \gamma)^2}, \quad P'P_2 = \delta + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x - \gamma)^2},$$

$$R''R_1 = \gamma - \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - (y - \delta)^2}, \quad R''R_2 = \gamma + \frac{a}{b}\sqrt{a^2 - (y - \delta)^2},$$

wobei die Wurzeln positiv zu rechnen sind, so ergeben sich die Grenzen

$$\int z\,df = \int\limits_{\gamma-a}^{\gamma+a}\int\limits_{\delta-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-\gamma)^2}}^{\delta+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-\gamma)^2}} z\,dx\,dy\,,$$

$$= \int\limits_{\delta-b}^{\delta+b}\int\limits_{\gamma-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-(y-\delta)^2}}^{\gamma+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-(y-\delta)^2}} z\,dy\,dx\,.$$

Für alle Punkte des Perimeters von f ist

$$\varphi(x, y) = \frac{(x-\gamma)^2}{a^2} + \frac{(y-\delta)^2}{b^2} - 1 = 0\,;$$

für alle Punkte ausserhalb der geschlossenen Ellipsenfläche hat die Function φ dasselbe Zeichen, für alle Punkte innerhalb das entgegengesetzte. Da nun für das Centrum der Ellipse $\varphi(\gamma, \delta) = -1$ ist, so folgt, dass φ für alle Punkte im Innern von f negativ ist. Beachten wir ferner, dass φ im Centrum den kleinsten Werth hat, so haben wir für das Doppelintegral die analytische Begrenzung

$$-1 \leqq \frac{(x-\gamma)^2}{a^2} + \frac{(y-\delta)^2}{b^2} - 1 \leqq 0\,.$$

D. Wird die Fläche f von den Coordinatenachsen, von einer zur Abscisse $OA = a$ gehörigen Parallelen zur Y-Achse und von einer Parabel begrenzt, die den Scheitel B, die Achse OY und den Parameter p hat, so ist

$$P'P = b - \frac{x^2}{2p}\,.$$

Folglich ist

$$\int z\,df = \int\limits_0^a\int\limits_0^{b-\frac{x^2}{2p}} z\,dx\,dy\,.$$

Will man zuerst nach x integriren, so zerlegt man die Fläche f in das Rechteck $OACD$, dessen Seiten sind

$$OA = a\,, \quad OD = AC = b - \frac{a^2}{2p}\,,$$

und in das Parabelsegment DBC; man hat nun

(M. 528.)

$$\int z\,df = \int\limits_0^{b-\frac{a^2}{2p}}\int\limits_0^a z\,dy\,dx + \int\limits_{b-\frac{a^2}{2p}}^{b}\int\limits_0^{\sqrt{2p(b-y)}} z\,dy\,dx\,.$$

Die Function

$$x^2 - 2p(b-y)$$

verschwindet für die Punkte der Parabel, und ist für alle Punkte im Innern der Fläche f grösser, als für O, und von demselben Vorzeichen; statt anzugeben, dass das Doppelintegral $\int\int z\,dy\,dx$ über die Fläche $OACB$ zu erstrecken ist, hat man daher die Bedingungen

$$0 \leqq x \leqq a\,; \quad y > 0\,; \quad -2pb \leqq x^2 - 2p(b-y) \leqq 0\,.$$

---

5. Wir beschäftigen uns nun mit der **Einführung neuer Variabeln in Doppelintegrale**, und beginnen diese Untersuchung mit einem besonders einfachen Beispiele. Will man in das Doppelintegral

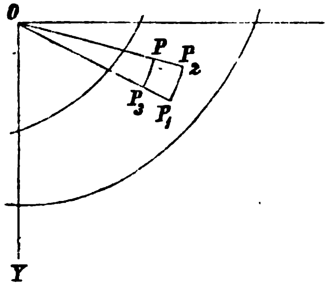
$$\int\int z\,dx\,dy$$

Polarcoordinaten r und φ einführen, so hat man in z die rechtwinkeligen Coordinaten x und y durch r und φ nach den bekannten Gleichungen zu ersetzen

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,.$$

Ferner hat man das Flächendifferential df durch r und φ auszudrücken,

Haben P und P_1 die Polarcoordinaten r, φ und $r + \Delta r$, $\varphi + \Delta\varphi$, so ist das kleine Flächenstück $PP_2P_1P_3$



(M. 529.)

$$\Delta f = \tfrac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\varphi - \tfrac{1}{2}r^2\Delta\varphi$$
$$= \left(r + \frac{\Delta r}{2}\right) \Delta r \Delta\varphi .$$

Geht man zur Grenze für verschwindende Δr und $\Delta\varphi$ über, so erhält man

$$df = r dr d\varphi .$$

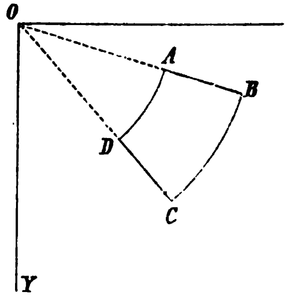
Daher ist

$$1. \qquad \iint z dx dy = \iint z r d\varphi dr .$$

Will man, wie hier angedeutet, zuerst nach r integriren, so hat man das Integral über die Strecke P_1P_2 (Fig. 530) des Strahles OP_2 auszudehnen, die im Innern von f liegt; die Grenzen für die darauf folgende Integration nach φ sind der grösste und kleinste Werth von φ, die bei f vorkommen, also die Arcus der Winkel AOX und BOX.

(M. 530.)

Ist f ein Sector eines Kreisringes $ABCD$ mit Centrum O, dessen äusserste Radien und Polarwinkel a, a_1 und β, β_1 sind, so wird die Integration nach y und x wegen der Begrenzung von f sehr unbequem; man müsste das Integral in drei Theile zerfällen; für Polarcoordinaten wird die Arbeit viel einfacher, denn man hat



$$\int z df = \int_{\beta}^{\beta_1}\int_{a}^{a_1} z r d\varphi dr .$$

Ist f eine Kreisfläche O mit dem Radius a, so hat man

$$\int z df = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} z r d\varphi dr .$$

(M. 531.)

6. Die Transformationsgleichung No. 5, 1 kann auch unabhängig von geometrischen Betrachtungen in folgender Weise hergestellt werden.

In dem gegebenen Integrale ersetze man die Variable y, mit der die Integration beginnen soll, durch die neue Variable r. Die Substitutionsformel für y wird aus den beiden Gleichungen

$$x = r \cos\varphi , \qquad y = r \sin\varphi$$

durch Elimination von φ gewonnen.

Wenn x und y sich um dx und dy ändern, so hat man für die zugehörigen Aenderungen von r und φ

$$1. \qquad dx = \cos\varphi\, dr - r \sin\varphi\, d\varphi ,$$
$$2. \qquad dy = \sin\varphi\, dr + r \cos\varphi\, d\varphi .$$

Bei der Integration nach y bleibt x unverändert, daher hat man in 1. $dx = 0$ zu nehmen, und aus den beiden Gleichungen

$$0 = \cos\varphi\, dr - r \sin\varphi\, d\varphi ,$$
$$dy = \sin\varphi\, dr + r \cos\varphi\, d\varphi$$

das Differential $d\varphi$ zu eliminiren; man erhält

$$3. \qquad \sin\varphi\, dy = dr , \qquad dy = dr : \sin\varphi .$$

Setzt man dies in das gegebene Integral, so entsteht

4. $$\int\int z\,dx\,dy = \int\int z\cdot\frac{1}{sin\varphi}\,dx\,dr\,,$$

wobei man sich $sin\varphi$ durch x und r ausgedrückt denken muss. Die Grenzen der Integration nach r sind hier den Grenzen der Integration nach y entsprechend zu nehmen; der analytische Spielraum für x und r ergiebt sich aus der Ungleichung bez. den Ungleichungen, die den Spielraum von x und y angeben, indem in denselben y durch r und x ausdrückt.

In dem Integrale

$$\int\int z\frac{1}{sin\varphi}\,dx\,dr$$

ändere man nun die Anordnung der Integrationen und bestimme der neuen Anordnung entsprechend die Grenzen; in dem somit erhaltenen Integrale

$$\int\int z\cdot\frac{1}{sin\varphi}\,dr\,dx$$

ersetze man x durch r und φ. Da bei der Integration nach x die Variable r ungeändert bleibt, so hat man für dx den Werth zu setzen, der sich aus der Substitutionsformel

$$x = r\,cos\varphi$$

unter Voraussetzung eines constanten r ergiebt, also

5. $$dx = -\,r\,sin\varphi\,d\varphi\,.$$

Die Grenzen der Integration nach φ sind denen für die Integration nach x entsprechend zu bestimmen. Man gewinnt somit

6. $$\int\int z\,dx\,dy = -\int\int z\,r\,d\varphi\,dr\,.$$

Aus 5. geht hervor, dass im Quadranten XOY bei unverändertem r die Variable φ abnimmt, wenn x wächst; dem grössten Werthe von x entspricht daher der kleinste von φ und umgekehrt. Nach dem Begriffe des über eine Fläche genommenen Integrals werden die unteren Grenzen kleiner vorausgesetzt als die oberen. Vertauscht man im letzten Integrale die Grenzen für φ, so hat man das Vorzeichen zu wechseln. Unter dieser Voraussetzung erhält man nun in Uebereinstimmung mit No. 5, 1

$$\int\int z\,dx\,dy = \int\int z\,r\,d\varphi\,dr\,.$$

6. Wir wenden uns nun zu den allgemeinen Transformationsformeln für Doppelintegrale.

Um für x und y neue Variable λ und μ einzuführen, die mit x und y durch die Gleichungen zusammenhängen

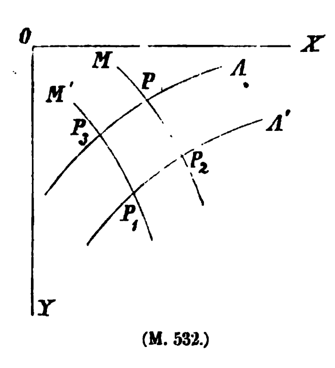
1. $$x = \psi(\lambda, \mu)\,, \quad y = \chi(\lambda, \mu)\,,$$

betrachten wir die Curven, für deren Punkte λ, bez. μ constant sind; die Gleichung einer Curve der ersten Art erhalten wir, indem wir μ aus 1. eliminiren, die einer Curve der zweiten Art durch Elimination von λ. Diese Curven bezeichnen wir als die Parametercurven λ und μ, und die Werthe λ und μ, die einem gegebenen Punkte P entsprechen, als die Parameter (oder Coordinaten im weitesten Sinne) des Punktes.

Für Polarcoordinaten r und φ sind die Parametercurven λ Strahlen durch den Nullpunkt und die Parametercurven μ Kreise um den Nullpunkt.

Wir werden nun unsere Betrachtungen auf solche Transformationen beschränken, bei denen im Allgemeinen zu jedem realen Werthepaare x, y ein und nur ein reales Werthepaar λ, μ gehört, bei welchen also jeder Punkt einen realen Parameter λ und einen realen Parameter μ besitzt. Alsdann geht durch jeden

Punkt P im Allgemeinen eine Parametercurve λ und eine Parametercurve μ; dies mögen die Curven Λ und M sein. Wächst λ um $\Delta\lambda$ und μ um $\Delta\mu$, so erhält man zwei neue Parametercurven Λ' und M'; da nach der Voraussetzung zu jedem P nur ein λ und μ gehört, so schneiden sich Λ und Λ' nicht, ebensowenig M und M'. Geht man nun für $\Delta\lambda$ und $\Delta\mu$ zur Grenze Null über, so wird $PP_2P_1P_3$ ein verschwindend kleines Viereck, und die Curvenbögen können mit den Sehnen verwechselt werden. Da PP_3 und P_2P_1, sowie PP_2 und P_3P_1 dabei zu unendlich nahen Geraden werden, und sich nicht schneiden, so folgt, dass $PP_2P_1P_3$ beim Uebergange zur Grenze ein verschwindend kleines Parallelogramm wird. Der Inhalt desselben ist



(M. 532.)

$$df = \sin\tau\, d\rho\, d\varsigma,$$

wenn man mit τ den Winkel bezeichnet, unter dem sich die Parametercurven in P durchschneiden, und mit $d\rho$ und $d\varsigma$ die an P liegenden Bogenelemente von Λ und M.

Die unendlich kleinen Aenderungen, welche den Coordinaten von P ertheilt werden müssen, um zum Punkte P_3 zu gelangen, gehen durch Differentiation aus 1. hervor unter der Voraussetzung, dass λ constant ist. Man hat daher

2. $$dx = \frac{\partial\psi}{\partial\mu}d\mu, \quad dy = \frac{\partial\chi}{\partial\mu}d\mu.$$

Sind ferner $\mathfrak{d}x$ und $\mathfrak{d}y$ die unendlich kleinen Aenderungen, welche man den Coordinaten von P ertheilen muss, um zu P_2 zu gelangen, so hat man

3. $$\mathfrak{d}x = \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}d\lambda, \quad \mathfrak{d}y = \frac{\partial\chi}{\partial\lambda}d\lambda.$$

Ferner ist

4. $$d\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad d\varsigma = \sqrt{\mathfrak{d}x^2 + \mathfrak{d}y^2}, \quad \sin\tau = \frac{dy}{d\rho}\cdot\frac{\mathfrak{d}x}{d\varsigma} - \frac{dx}{d\varsigma}\cdot\frac{\mathfrak{d}y}{d\varsigma}.$$

Hieraus folgt weiter

$$df = \sin\tau\, d\rho\, d\varsigma = dx\,\mathfrak{d}y - dy\,\mathfrak{d}x,$$

und daher mit Hülfe der Werthe 2. und 3.

$$df = \pm\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\mu} - \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}\right)d\mu\, d\lambda.$$

Da df positiv ist, so ist das obere oder untere Vorzeichen anzuwenden, je nachdem der Klammerinhalt positiv oder negativ ist.

Damit erhalten wir schliesslich die Transformationsformel

$$\iint z\,dx\,dy = \pm\iint z\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\mu} - \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}\right)d\lambda\, d\mu.$$

Beginnt man, wie hier angedeutet, mit der Integration nach μ, so hat man die Grenzen so zu bestimmen, dass sie dem innerhalb f liegenden Theile einer Parametercurve Λ entsprechen; für die nachfolgende Integration nach λ sind die Grenzen der kleinste und grösste auf f vorkommende Werth von λ.

8. Zur weiteren Erläuterung führen wir die Substitution elliptischer Coordinaten aus (vergl. Differentialrechnung § 5, No. 14).

Sind a und b positive Zahlen und ist $a > b$, so genügen der Gleichung

$$\frac{x^2}{a+\tau} + \frac{y^2}{b+\tau} - 1 = 0$$

bekanntlich zwei reale Werthe von τ, von denen der eine λ zwischen $-a$ und $-b$ liegt, und der andere μ grösser ist als $-b$.

Nimmt man λ und μ als neue Variable, so sind die Parametercurven Kegelschnitte, die der Ellipse

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 = 0$$

confocal sind; und zwar sind die Curven Λ Hyperbeln, die Curven M Ellipsen. Die Parameter λ, μ eines Punktes hängen mit den Coordinaten x, y durch die Gleichungen zusammen

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1, \qquad \frac{x^2}{a+\mu} + \frac{y^2}{b+\mu} = 1.$$

Aus ihnen ergeben sich die Substitutionsformeln

$$x = \sqrt{\frac{(a+\lambda)(a+\mu)}{a-b}}, \quad y = \sqrt{\frac{(b+\lambda)(b+\mu)}{b-a}}.$$

Für die Punkte der Y-Achse ist $x = 0$ und daher ist $\lambda = -a$, hat also den kleinsten vorkommenden Werth; der andere Parameter μ ergiebt sich aus der Gleichung $y = \sqrt{b+\mu}$; für die Punkte der X-Achse ist $y = 0$, $\lambda = -b$; μ ergiebt sich aus $x = \sqrt{a+\lambda}$.

Für ein Bogendifferential auf Λ hat man

$$d\rho^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2\right] d\mu^2 = \frac{d\mu^2}{4} \cdot \frac{\mu - \lambda}{(a+\mu)(b+\mu)};$$

für ein Bogendifferential auf M

$$d\varsigma^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2\right] d\lambda^2 = \frac{d\lambda^2}{4} \cdot \frac{\lambda - \mu}{(a+\lambda)(b+\lambda)}.$$

Da die Parametercurven Λ und M sich unter rechten Winkeln schneiden, so ist ein beliebiges Bogendifferential

$$ds^2 = d\rho^2 + d\varsigma^2 = \frac{\lambda - \mu}{4} \cdot \left[\frac{d\lambda^2}{(a+\lambda)(b+\lambda)} - \frac{d\mu^2}{(a+\mu)(b+\mu)}\right],$$

und das Flächendifferential

$$df = d\rho\, d\varsigma = \frac{1}{4} \cdot \frac{(\lambda - \mu)\, d\mu\, d\lambda}{\sqrt{-(a+\mu)(b+\mu)(a+\lambda)(b+\lambda)}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel hat man hier übereinstimmend mit dem Vorzeichen von $\lambda - \mu$ zu wählen.

Man hat daher die Transformation

$$\text{1.} \quad \iint \varphi(x, y)\, dx\, dy = \frac{1}{4}\iint \varphi\left(\sqrt{\frac{(a+\lambda)(a+\mu)}{a-b}}, \sqrt{\frac{(b+\lambda)(b+\mu)}{b-a}}\right)$$
$$\times \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{-(a+\mu)(b+\mu)(a+\lambda)(b+\lambda)}}\, d\lambda\, d\mu.$$

Soll das Integral über den innerhalb XOY liegenden Quadranten der Ellipse

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 = 0$$

ausgedehnt werden, und beginnt man mit der Integration nach λ, so hat man dieselbe über den Quadranten der Ellipse zu erstrecken

$$\frac{x^2}{a+\mu} + \frac{y^2}{b+\mu} - 1 = 0.$$

Dem auf der X-Achse liegenden Scheitel dieser Ellipse gehört der Parameter $\lambda = -b$, dem auf der Y-Achse liegenden $\lambda = -a$ zu; die Integration nach λ erfolgt daher zwischen den Grenzen $-a$ und $-b$. Da ferner für die an die

X-Achse sich anschmiegende Curve M der Parameter $\mu = -b$ und für die begrenzende Curve $\mu = 0$ ist, so hat man die Transformation

$$2. \quad \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \varphi dx\, dy = \frac{1}{4}\int_{-b}^{0}\int_{-a}^{-b} \varphi \cdot \frac{\mu - \lambda}{\sqrt{-(a+\mu)(b+\mu)(a+\lambda)(b+\lambda)}} d\mu\, d\lambda .$$

Da innerhalb des ganzen Integrationsgebiets $\lambda < \mu$, so ist statt des Zählers $\lambda - \mu$ in 1. hier $\mu - \lambda$ gesetzt worden; in Uebereinstimmung hiermit ist die Wurzel im Nenner positiv zu rechnen.

---

9. Berechnung von Oberflächen. Um das Stück F der Oberfläche $\varphi(x, y, z) = 0$ zu erhalten, das eine gegebene Horizontalprojection f hat, zerlegen wir f in kleine Theile Δf und durchschneiden F durch die Mäntel der parallel der Z-Achse erstreckten Cylinder, welche Δf zu Normalschnitten haben; hierdurch zerfällt F in ebensoviel Theile wie f, die wir mit ΔF bezeichnen. Legen wir nun in irgend einem Punkte innerhalb jedes ΔF eine Tangentenebene an F und bezeichnen das Stück derselben, dessen Horizontalprojection mit Δf zusammenfällt, mit ΔT, so stimmen die Summen $\Sigma \Delta F$ und $\Sigma \Delta T$ um so genauer überein, je kleiner die Normalschnitte Δf sind. Geht man zur Grenze für verschwindend kleine Δf über, so erhält man

$$F = lim\, \Sigma \Delta F = lim\, \Sigma \Delta T .$$

Ist τ der Winkel, unter dem ΔT gegen die XY-Ebene geneigt ist, so ist bekanntlich

$$\Delta T = \frac{\Delta f}{cos\,\tau},$$

daher hat man

$$F = lim\, \Sigma \frac{\Delta f}{cos\,\tau},$$

oder

$$1. \quad F = \int \frac{1}{cos\,\tau} \cdot df = \int\int \frac{1}{cos\,\tau}\, dx\, dy .$$

Ist die Gleichung der Fläche $z = \varphi(x, y)$, so ist (Differentialrechnung § 6, No. 1)

$$cos\,\tau = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

und daher

$$2. \quad F = \int\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy .$$

Aus der Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ folgt

$$cos\,\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial z} : \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2},$$

$$3. \quad F = \int\int \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \cdot dx\, dy .$$

10. Für das elliptische Paraboloid ist

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{b},$$

$$\frac{1}{\cos\tau} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

$$F = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Führt man neue Variable durch die Gleichungen ein

$$x = a\lambda \cos\mu, \quad y = b\lambda \sin\mu,$$

so sind die Parametercurven Λ Ellipsen

$$\left(\frac{x}{a\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y}{b\lambda}\right)^2 = 1,$$

und die Curven M sind Strahlen durch den Nullpunkt, deren Winkel ψ mit der X-Achse sich ergiebt aus

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{b}{a} \operatorname{tang}\mu.$$

Nimmt man als Horizontal-Projection f einen Quadranten der Parametercurve $\lambda = k$ so sind die Grenzbedingungen für x und y

$$0 \leqq \frac{x^2}{k^2 a^2} + \frac{y^2}{k^2 b^2} \leqq 1, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0.$$

Die Grenzbedingung für λ ist

$$0 \leqq \lambda \leqq k.$$

Die Grenzen für ψ sind 0 und $\frac{\pi}{2}$; dieselben Grenzen ergeben sich für μ.

Ferner ist

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = a\cos\mu, \quad \frac{\partial x}{\partial \mu} = -a\lambda\sin\mu,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = b\sin\mu, \quad \frac{\partial y}{\partial \mu} = b\lambda\cos\mu,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial x}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda} = ab\lambda.$$

Daher hat man für die gesuchte Fläche

$$F = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^k \sqrt{1+\lambda^2}\cdot\lambda\, d\mu\, d\lambda,$$

$$= \frac{\pi}{6}\, ab\left[(1+k^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

Für das hyperbolische Paraboloid ist

$$z = \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2b}$$

und daher

$$\frac{1}{\cos\tau} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

$$F = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Hieraus erkennt man: Tangentenebenen, welche die beiden Paraboloide

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0, \quad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0$$

in Punkten berühren, die dieselbe Projection auf die XY-Ebene haben, sind gleich geneigt gegen die XY-Ebene. Flächenstücke beider Paraboloide, welche dieselbe Projection auf die XY-Ebene haben, sind gleich.

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \cos\mu \frac{\partial r}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \mu} = \cos\mu \frac{\partial r}{\partial \mu} - r \sin\mu,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \sin\mu \left(\cos\lambda \frac{\partial r}{\partial \lambda} - r \sin\lambda\right), \qquad \frac{\partial y}{\partial \mu} = \sin\lambda \left(\sin\mu \frac{\partial r}{\partial \mu} + r \cos\mu\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = \sin\mu \left(\sin\lambda \frac{\partial r}{\partial \lambda} + r \cos\lambda\right), \qquad \frac{\partial z}{\partial \mu} = \sin\lambda \left(\sin\mu \frac{\partial r}{\partial \mu} + r \cos\mu\right).$$

Hieraus ergeben sich folgende Werthe für die Determinanten L, M, N:

$$L = - r \sin\mu \left(\sin\mu \frac{\partial r}{\partial \mu} + r \cos\mu\right),$$

$$M = r \left[\left(\cos\mu \frac{\partial r}{\partial \mu} - r \sin\mu\right) \sin\mu \cos\lambda - \sin\lambda \frac{\partial r}{\partial \lambda}\right],$$

$$N = r \left[\left(\cos\mu \frac{\partial r}{\partial \mu} - r \sin\mu\right) \sin\mu \sin\lambda + \cos\lambda \frac{\partial r}{\partial \lambda}\right].$$

Hieraus erhält man zunächst

$$M^2 + N^2 = r^2 \left[\left(\cos\mu \frac{\partial r}{\partial \mu} - r \sin\mu\right)^2 \sin^2\mu + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2\right],$$

und dann weiter

$$L^2 + M^2 + N^2 = r^2 \left\{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \mu}\right)^2 + r^2\right] \sin^2\mu + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2\right\}.$$

Daher ist schliesslich

$$1. \qquad F = \iint \sqrt{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \mu}\right)^2 + r^2\right] \sin^2\mu + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2} \cdot r\, d\lambda\, d\mu.$$

Die Cosinus der Winkel der Normalen der Fläche mit den Achsen sind bekanntlich (Differentialrechnung § 6, No. 1)

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Ersetzt man die partialen Differentialquotienten durch L, M, N, so entsteht

$$- \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad - \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad - \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

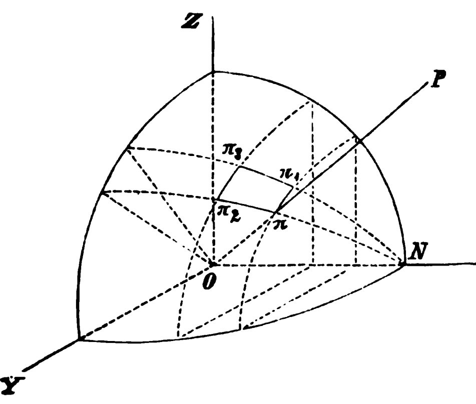
Hieraus ergiebt sich für den Winkel ν, den die Normale mit dem Radiusvector bildet,

$$\cos\nu = - \frac{xL + yM + zN}{r\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}} = \frac{r^2 \sin\mu}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

Man hat daher

$$2. \qquad F = \iint \frac{r^2}{\cos\nu} \sin\mu\, d\lambda\, d\mu.$$

Zu dieser Formel gelangt man auch durch folgende geometrische Betrachtung.



(M. 583.)

Beschreibt man um den Nullpunkt eine Kugel, deren Radius $= 1$ ist, bezeichnet ihren Schnittpunkt N mit der X-Achse als Pol und zählt die Meridiane von der XY-Ebene an, so ist μ die Poldistanz und λ die Länge der Centralprojection Π des Punktes P

auf die Kugel. Das kleine Flächenstück $\Pi\Pi_1\Pi_3\Pi_2$ der Kugel, das zwischen den Meridianen λ und $\lambda + \Delta\lambda$ und den Breitenkreisen μ und $\mu + \Delta\mu$ liegt, nähert sich beim Uebergange zu verschwindend kleinen $\Delta\lambda$ und $\Delta\mu$ einem Rechtecke aus den Seiten

$$\lim \Pi\Pi_1 = \sin\mu\, d\lambda, \quad \lim \Pi\Pi_2 = d\mu .$$

Wir projiciren dieses Kugelelement $\Delta S = \Pi\Pi_1\Pi_3\Pi_2$ von O aus auf die Tangentenebene der Fläche im Punkte P und auf eine Ebene, die durch Π parallel zu dieser Tangentenebene gelegt ist; die erstere Projection sei ΔF, die letztere $\Delta\Phi$; diese beiden Projectionen hängen durch die Gleichung zusammen

$$\Delta F = r^2 \cdot \Delta\Phi .$$

Geht man nun zur Grenze für verschwindend kleine ΔS über, so kann man ΔF mit einem Elemente der gegebenen Oberfläche, und ΔS mit der Normalprojection der Fläche $\Delta\Phi$ auf die Tangentenebene der Kugel in Π verwechseln; man hat daher

$$d\Phi = \frac{dS}{\cos\nu} = \frac{1}{\cos\nu}\sin\mu\, d\lambda\, d\mu ,$$

folglich

$$dF = \frac{r^2}{\cos\nu}\sin\mu\, d\lambda\, d\mu ,$$

und schliesslich

$$3. \qquad F = \iint \frac{r^2}{\cos\nu}\sin\mu\, d\lambda\, d\mu .$$

§ 10. Dreifache bestimmte Integrale.

1. Ein gegebenes begrenztes Volumen v theilen wir auf irgend welche Weise in kleine Theile

$$\Delta_1 v, \quad \Delta_2 v, \quad \Delta_3 v, \quad \ldots \Delta_k v \ldots ,$$

und bezeichnen mit $f_k(x, y, z)$ den Werth, den die Function $f(x, y, z)$ für irgend einen im Innern von Δv gelegenen Punkt annimmt.

Unter dem über das Volumen v erstreckten Integrale

$$\int f(x, y, z)\, dv$$

verstehen wir alsdann den Grenzwerth, gegen den die Summe

$$\Sigma f_k(x, y, z)\, \Delta_k v$$

für verschwindend kleine Werthe der Δv convergirt, wenn dabei die Summation über alle in v enthaltenen Volumenelemente ausgedehnt wird. Es ist also

$$1. \qquad \int f(x, y, z)\, dv = \lim \Sigma f(x, y, z)\, \Delta v ,$$

wobei rechts der Index k unterdrückt worden ist.

Dieses Integral hat eine einfache mechanische Bedeutung. Unter dem specifischen Gewichte eines homogenen Körpers (d. i. bei welchem gleiche Volumina gleiche Gewichte haben) versteht man den Quotienten aus Gewciht und Volumen; das Gewicht eines gegebenen Volumens eines homogenen Körpers ist daher das Produkt aus dem Volumen und dem specifischen Gewichte. Ist ein Körper nicht homogen, so versteht man unter dem an einem Punkte x, y, z vorhandenen specifischen Gewichte den Grenzwerth des Quotienten

$$\Delta\gamma : \Delta v .$$

Hierbei bedeutet Δv einen kleinen Theil des Körpers, in welchem der Punkt x, y, z liegt, und $\Delta\gamma$ das Gewicht dieses Theiles.

Es bedeute nun die Function $f(x, y, z)$ das specifische Gewicht im Punkte

x, y, z eines Körpers vom Volumen v; ferner bedeute $\mathfrak{f}_k(x, y, z)$ das kleinste und $\mathfrak{F}_k(x, y, z)$ das grösste innerhalb $\Delta_k v$ vorhandene specifische Gewicht. Ist nun G das Gewicht des Körpers, so hat man die Begrenzungen

$$\Sigma \mathfrak{f}_k(x, y, z) \Delta_k v < G < \Sigma \mathfrak{F}_k(x, y, z) \Delta_k v ,$$

$$\Sigma \mathfrak{f}_k(x, y, z) \Delta_k v < \Sigma f_k(x, y, z) \Delta_k v < \Sigma \mathfrak{F}_k(x, y, z) \Delta_k v .$$

Verschwinden die Δv, so gehen die Grenzen in einander über, und man hat daher

$$\int f(x, y, z)\, dv = \lim \Sigma f(x, y, z) \Delta v = G .$$

Das über ein Volumen v erstreckte bestimmte Integral $\int f dv$ giebt also das Gewicht eines Körpers an, der das Volumen v erfüllt, und dessen specifisches Gewicht an jedem Punkte gleich dem Werthe ist, den die Function f für diesen Punkt hat.

Ueber ein Volumen erstreckte Integrale kommen aber auch in mehrfach anderer Bedeutung in der Mechanik vor, von denen wir nur noch eine andeuten wollen. Die Anziehung, die ein Körperelement auf einen Massenpunkt in einer bestimmten Richtung ausübt, ist proportional dem Gewichte des Elements und einer Function φ der Coordinaten desselben, welche die besondere Art der Anziehung charakterisirt. Ist nun f das Produkt aus dem specifischen Gewichte und der Function φ, so giebt $\int f dv$ bis auf einen vom anziehenden Körper unabhängigen auf physikalischem Wege zu ermittelnden Faktor die Gesammtanziehung an, die der angezogene Punkt in der gegebenen Richtung von dem im Volumen v enthaltenen Körper erleidet.

2. Das Integral $\int f dv$ kann je nach der Art, wie man das Volumen V eintheilt, auf sehr verschiedenen Wegen, und zwar immer durch drei aufeinander folgende einfache Integrationen berechnet werden.

Durch Parallelebenen zu den Coordinatenebenen zerfällt v in rechtwinkelige Parallelepidede; sind Δx, Δy, Δz die den Achsen parallel gemessenen Kanten des Volumentheils, in dessen Innern der Punkt x, y, z liegt, so hat man

$$\int f(x, y, z)\, dv = \lim \Sigma f(x, y, z) \Delta z \Delta y \Delta x .$$

Addirt man zunächst die Elemente, die zwischen zwei folgenden Normalebenen zur X-Achse liegen, so haben dieselben Δx gemeinsam, und angesichts des Grenzübergangs hat x in der Function f für alle diese Elemente denselben Werth, ist also bei dieser Addition constant. Dieser Theil der Summe ist daher

$$\Delta x \cdot \lim \Sigma f \cdot \Delta z \Delta y = \Delta x \int\int f dy\, dz .$$

Dabei ist das Integral über den Querschnitt des Volumens v zu erstrecken, der die Abscisse x hat.

Man hat nun weiter

$$\lim \Sigma f \cdot \Delta z \Delta y \Delta x = \lim \Sigma \left(\int\int f dy\, dz\right) \Delta x = \int \left(\int\int f dy\, dz\right) dx .$$

Die Grenzen des Integrals sind dabei die grösste und kleinste Abscisse, zwischen denen das Volumen v enthalten ist.

Unter Einhaltung der angegebenen Grenzen ist daher

$$\int f(x, y\, z)\, dv = \int\int\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz .$$

3. Ist das Volumen v ein Parallelepiped, das zwischen den Ebenen $x = a_0$, $x = a_1$, $y = b_0$, $y = b_1$, $z = c_0$, $z = c_1$ enthalten ist, so sind diese Coordinaten die Grenzen der Integrale, es ist

$$\int f dv = \int_{a_0}^{a_1} \int_{b_0}^{b_1} \int_{c_0}^{c_1} f dx\, dy\, dz .$$

Ordnet man in

$$\Sigma f \Delta z \Delta y \Delta x$$

die Reihenfolge der Addition anders, z. B. so, dass man erst die zwischen zwei Normalebenen zur Y-Achse enthaltenen Volumenelemente addirt, so ergiebt diese Theilsumme

$$\Delta y \Sigma f \Delta z \Delta x .$$

Hierbei ist y in $f(x, y, z)$ constant. Der Uebergang zur Grenze für verschwindende Δz und Δx liefert

$$\Delta y \int_{a_0}^{a_1} \int_{c_0}^{c_1} f dx dz .$$

Hieraus ergiebt sich weiter

$$\int f dv = lim \Sigma \Delta y \int_{a_0}^{a_1} \int_{c_0}^{c_1} f dx dz = \int_{b_0}^{b_1} \int_{a_0}^{a_1} \int_{c_0}^{c_1} f dy dx dz .$$

Es ist daher

$$\int_{a_0}^{a_1} \int_{b_0}^{b_1} \int_{c_0}^{c_1} f dx dy dz = \int_{b_0}^{b_1} \int_{a_0}^{a_1} \int_{c_0}^{c_1} f dy dx dz .$$

Auf diesem Wege gewinnt man den Satz: Wenn die Grenzen constant sind, so kann die Reihenfolge der Integrationen geändert werden, ohne dass die Grenzen sich ändern.

Sind die Grenzen nicht constant, so ändern sich mit der Reihenfolge der Integrationen auch die Grenzen.

4. Um die Integration $\int f dv$ in Polarcoordinaten auszuführen, ersetzen wir in f die Coordinaten x, y, z gemäss der Gleichungen

$$x = \rho cos \mu , \quad y = \rho sin \mu cos \lambda , \quad z = \rho sin \mu sin \lambda .$$

Wir construiren Kugeln S um den Nullpunkt, und bezeichnen mit $\Delta \rho$ die in Richtung eines Radius gemessene Dicke der Schicht zwischen zwei auf einander folgenden Kugeln; hierauf Rotationskegel C, welche OX zur Achse haben und bezeichnen mit $\Delta \mu$ den Winkel der derselben Meridianebene angehörigen Mantellinien zweier auf einander folgenden Kegel; schliesslich Ebenen E durch die X-Achse und bezeichnen mit $\Delta \lambda$ den Winkel zweier auf einander folgenden Ebenen.

Durch den Kegel, dessen Meridian den Winkel μ mit der Achse bildet, wird auf der Kugelfläche mit dem Radius ρ eine Calotte begrenzt, welche die Höhe $\rho(1 - cos \mu)$ hat; also ist der auf dieser Calotte stehende Kugelsector

$$1. \qquad 2\pi\rho \cdot \rho(1 - cos \mu) \cdot \frac{\rho}{3} = \frac{2\pi}{3} \rho^3 (1 - cos \mu).$$

Wächst μ um $\Delta \mu$, so wächst dieser Sector um

$$\frac{2\pi}{3} \rho^3 [1 - cos(\mu + \Delta \mu) - (1 - cos \mu)] = \frac{2\pi}{3} \rho^3 [cos \mu - cos(\mu + \Delta \mu)] .$$

Behält man angesichts des Grenzübergangs nur Glieder mit der ersten Potenz von $\Delta \mu$ bei, so erhält man

$$2. \qquad \frac{2\pi}{3} \rho^3 sin \mu \Delta \mu .$$

Wächst ferner ρ um $\Delta \rho$, so wächst dieses Volumen um den Ring

$$\frac{2\pi}{3} sin \mu \Delta \mu [(\rho + \Delta \rho)^3 - \rho^3] ;$$

behält man hier von dem Klammerinhalte nur Glieder mit der ersten Potenz von $\Delta \rho$, so entsteht

$$3. \qquad 2\pi \rho^2 sin \mu \Delta \mu \Delta \rho .$$

Der Theil dieses Ringes, der zwischen zwei benachbarten Ebenen E liegt,

ist eines von den Volumenelementen, in welche wir jetzt v zertheilt haben; es hat zum Ringvolumen 3. das Verhältniss $\Delta\lambda : 2\pi$; mithin folgt

$$\Delta v = \rho^2 \sin\mu \Delta\mu \Delta\lambda \Delta\rho .$$

Somit ergiebt sich schliesslich

$$\int f dv = \int\int\int f \cdot \rho^2 \sin\mu d\rho d\lambda d\mu .$$

Die Grenzen sind hier dem Volumen v entsprechend zu bestimmen.

5. Drückt man x, y, z durch drei neue variable Parameter ρ, λ, μ aus

1. $$x = \varphi(\rho, \lambda, \mu), \quad y = \psi(\rho, \lambda, \mu), \quad z = \chi(\rho, \lambda, \mu),$$

und wählt die Parameter so, dass im Allgemeinen zu jedem Punkte des Volumens v ein und nur ein reales Parametersystem ρ, λ, μ gehört, so kann man die Integration auch in den neuen Variabeln ρ, λ, μ durchführen.

Denkt man sich in den Gleichungen 1. den Parameter ρ gegeben und eliminirt λ und μ, so erhält man eine Gleichung in x, y, z, die ρ enthält; die Fläche, welche diese Gleichung darstellt, enthält alle die Punkte, denen der gegebene Parameterwerth ρ zugehört; wir wollen sie die Parameterfläche P nennen. In gleicher Weise erhalten wir die Parameterflächen Λ und M, welche die Punkte enthalten, denen dasselbe λ oder μ zugehört.

Der Voranssetzung nach schneiden sich zwei Parameterflächen derselben Art nicht; folglich kann das Volumenelement, das von den drei Paar Parameterflächen der Parameter ρ, $\rho + \Delta\rho$, λ, $\lambda + \Delta\lambda$, μ, $\mu + \Delta\mu$ eingeschlossen wird, für verschwindende Werthe von $\Delta\rho$, $\Delta\lambda$, $\Delta\mu$ als Parallelepiped betrachtet werden.

Die drei dem Punkte P benachbarten Ecken P_1, P_2, P_3 dieses Volumenelements erreicht man durch Verschiebungen von P, wenn dabei der Reihe nach λ und μ, μ und ρ, ρ und λ ungeändert bleiben.

Bezeichnet man die Coordinaten von P_i mit $x + \Delta_i x$, $y + \Delta_i y$, $z + \Delta_i z$, so ist daher

$$\Delta_1 x = \frac{\partial x}{\partial \rho}\Delta\rho, \quad \Delta_1 y = \frac{\partial y}{\partial \rho}\Delta\rho, \quad \Delta_1 z = \frac{\partial z}{\partial \rho}\Delta\rho;$$

$$\Delta_2 x = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\Delta\lambda, \quad \Delta_2 y = \frac{\partial y}{\partial \lambda}\Delta\lambda, \quad \Delta_2 z = \frac{\partial z}{\partial \lambda}\Delta\lambda;$$

$$\Delta_3 x = \frac{\partial x}{\partial \mu}\Delta\mu, \quad \Delta_3 y = \frac{\partial y}{\partial \mu}\Delta\mu, \quad \Delta_3 z = \frac{\partial z}{\partial \mu}\Delta\mu .$$

Das Volumen eines Tetraëders, dessen Ecken die Coordinaten $x_i y_i z_i$ haben, stimmt bekanntlich dem absoluten Werthe nach überein mit

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} .$$

Subtrahirt man die erste Zeile von jeder folgenden, so erhält man

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_0, & y_1 - y_0, & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0, & y_2 - y_0, & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0, & y_3 - y_0, & z_3 - z_0 \end{vmatrix} .$$

Lässt man hier $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x$, $\Delta_3 x$, $\Delta_1 y, \ldots \Delta_3 z$ an die Stelle der Coordinatendifferenzen treten, so erhält man für das Parallelepiped aus den Kanten PP_1, PP_2, PP_3

$$\Delta v = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{vmatrix} \cdot \Delta\mu \Delta\lambda \Delta\rho .$$

Ersetzt man schliesslich in f die rechtwinkeligen Coordinaten durch ρ, λ, μ, so hat man die Transformation

$$\iiint f\,dx\,dy\,dz = \pm \iiint f\cdot J\cdot d\rho\,d\lambda\,d\mu\,,$$

wobei

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{vmatrix}.$$

Die Grenzen sind hierbei wieder dem Volumen v entsprechend zu bestimmen und das Vorzeichen so zu wählen, dass es mit dem von J übereinstimmt.

6. Man kann die Transformation auch unabhängig von geometrischen Betrachtungen durchführen. Aus den Gleichungen

$$x = \varphi(\rho, \lambda, \mu)\,, \quad y = \psi(\rho, \lambda, \mu)$$

berechne man ρ und λ und substituire diese Werthe in

$$z = \chi(\rho, \lambda, \mu)\,;$$

dadurch erhält man z als Function von x, y und μ. Nimmt man nun x, y und μ als neue Variable für die Integration, so hat man dz durch μ auszudrücken. Bei der ersten Integration bleiben y und x unverändert; unter dieser Voraussetzung gewinnt man durch Differentiation der Substitutionsgleichungen

$$0 = \frac{\partial x}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial x}{\partial \lambda}d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu}d\mu\,,$$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial y}{\partial \lambda}d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \mu}d\mu\,,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial z}{\partial \lambda}d\lambda + \frac{\partial z}{\partial \mu}d\mu\,.$$

Hieraus folgt

$$dz = \frac{J}{J_1}\,d\mu\,,$$

wobei

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{vmatrix}.$$

Daher hat man zunächst

$$\iiint f\,dx\,dy\,dz = \iiint f\,\frac{J}{J_1}\,dx\,dy\,d\mu\,,$$

wobei man die Grenzen der Integration nach μ nach den Grenzen für z zu bestimmen hat.

Hierauf ändert man die Ordnung der Integrationen; nachdem ersten beiden die Grenzen entsprechend bestimmt worden sind, erhält man

$$\iiint f\cdot\frac{J}{J_1}\cdot dx\,d\mu\,dy\,.$$

Nun eliminire man aus den beiden ersten Substitutionsgleichungen ρ und drücke y als Function von λ, μ und x aus. Führt man durch diese Gleichung λ statt y in das Integral ein, so hat man dy durch $d\lambda$ zu ersetzen; dabei ist aber zu berücksichtigen, dass μ und x unverändert bleiben.

Unter dieser Voraussetzung erhält man

$$0 = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda,$$

und hat demnach

$$dy = \frac{J_1}{\frac{\partial x}{\partial \rho}} d\lambda,$$

und daher die zweite Umformung

2. $$\iiint f\,dx\,dy\,dz = \iiint f \cdot \frac{J}{\frac{\partial x}{\partial \rho}} dx\,d\mu\,d\lambda,$$

wobei die Grenzen für λ denen für y entsprechen müssen.

Hier ändert man nochmals die Ordnung der Integrationen und beginnt mit der nach x, bildet also, indem man die neuen Grenzen gehörig bestimmt,

$$\iiint f \frac{J}{\frac{\partial x}{\partial \rho}} d\mu\,d\lambda\,dx.$$

Nun kann man x durch ρ gemäss der ersten Substitutionsgleichung

$$x = \varphi(\rho, \lambda, \mu)$$

ersetzen; da bei der Integration nach x die beiden Variabeln λ und μ ungeändert bleiben, so hat man

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho.$$

Bestimmt man nun die Grenzen der Integration nach ρ entsprechend denen für x, so hat man schliesslich

3. $$\iiint f\,dx\,dy\,dz = \iiint f \cdot J \cdot d\mu\,d\lambda\,d\rho,$$

in Uebereinstimmung mit dem Resultat in 5., da die Ordnung der Integrationen unwesentlich ist.

Die in No. 5 gegebene Vorzeichenregel kommt zu Stande, wenn wir, wie in No. 5, die Bedingung stellen, dass die unteren Grenzen der transformirten Integrale, wie im ursprünglichen, kleiner als die oberen sind. Aus den bei der Transformation verwendeten Formeln

$$dz = \frac{J}{J_1} d\mu, \qquad dy = \frac{J_1}{\frac{\partial x}{\partial \rho}} \cdot d\lambda, \qquad dx = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho$$

erkennt man leicht, dass zu positiven $d\mu$, $d\lambda$, $d\rho$ drei positive oder ein positiver und zwei negative Werthe dz, dy, dx gehören, sobald $J > 0$; hingegen zwei positive und ein negativer oder drei negative, sobald $J < 0$. Ist nun z. B. dz negativ, so folgt, dass wachsenden z abnehmende μ entsprechen, dass also die auf μ bezügliche obere Grenze in 1. kleiner ist, als die untere, wenn im gegebenen Integrale alle untern kleiner sind als die obern. Will man daher in 1. die untere Grenze für μ kleiner haben als die obere, so muss man die Grenzen und damit das Vorzeichen des Integrals wechseln.

Hieraus folgt, dass wenn in 3. schliesslich alle untern Grenzen kleiner als die obern sein sollen, das Integral 3. noch mit ± 1 zu multipliciren ist, je nachdem $J \gtrless 0$.

7. Das Quadrat der Functionaldeterminante J ist

$$J^2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & b_0 & b_1 \\ a_2 & b_1 & c_0 \end{vmatrix},$$

wobei abkürzend gesetzt ist

$$a_0 = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2, \quad a_1 = \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \lambda},$$

$$b_0 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2, \quad a_2 = \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \mu},$$

$$c_0 = \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2, \quad b_1 = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu}.$$

Für die verschwindend kleinen Verschiebungen PP_1, PP_2, PP_3 (No. 5) ist nun

$$PP_1 = \sqrt{a_0}\,d\rho, \quad PP_2 = \sqrt{b_0}\,d\lambda, \quad PP_3 = \sqrt{c_0}\,d\mu.$$

$$PP_1 \cdot PP_2 \cdot \cos P_1 PP_2 = a_1\,d\rho\,d\lambda,$$

$$PP_1 \cdot PP_3 \cdot \cos P_1 PP_3 = a_2\,d\rho\,d\mu,$$

$$PP_2 \cdot PP_3 \cdot \cos P_2 PP_3 = b_1\,d\lambda\,d\mu.$$

Wenn sich je drei Parameterflächen P, Λ, M orthogonal schneiden, so sind $P_1 PP_2$, $P_1 PP_3$, $P_2 PP_3$ rechte Winkel; man hat daher $a_1 = a_2 = b_1 = 0$. Die Determinante J^2 reducirt sich alsdann auf ihr Diagonalglied, es ist

$$J = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2}.$$

Dieser Fall tritt bei den gewöhnlichen räumlichen Polarcoordinaten (No. 4) ein.

8. Ein weiteres Beispiel für orthogonale Parameterflächen geben die elliptischen Raumcoordinaten.

Sind x, y, z die Coordinaten eines Punktes, und ist $a > b > c > 0$, so hat die cubische Gleichung der Unbekannten ν

$$1. \qquad \frac{x^2}{a+\nu} + \frac{y^2}{b+\nu} + \frac{z^2}{c+\nu} - 1 = 0$$

immer drei reale Wurzeln. Beseitigt man nämlich die Nenner, so erhält man

$$2. \qquad F(\nu) = x^2(b+\nu)(c+\nu) + y^2(a+\nu)(c+\nu) + z^2(a+\nu)(b+\nu) \\ - (a+\nu)(b+\nu)(c+\nu) = 0.$$

Setzt man für ν der Reihe nach die Werthe $-a$, $-b$, $-c$, ∞, so erhält man

$$F(-a) = x^2(b-a)(c-a), \qquad F(-b) = y^2(a-b)(c-b),$$

$$F(-c) = z^2(a-c)(b-c), \qquad F(\infty) = \infty.$$

Die Wurzeln der Gleichung 1. liegen daher zwischen den Grenzen ∞ und $-c$, $-c$ und $-b$, $-b$ und $-a$; wir bezeichnen sie der Reihe nach mit ρ, λ, μ. Die Gleichungen der Parameterflächen sind

$$3. \qquad \begin{aligned} \mathrm{P} &\equiv \frac{x^2}{a+\rho} + \frac{y^2}{b+\rho} + \frac{z^2}{c+\rho} - 1 = 0, \\ \mathrm{M} &\equiv \frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} - 1 = 0, \\ \Lambda &\equiv \frac{x^2}{a+\mu} + \frac{y^2}{b+\mu} + \frac{z^2}{c+\mu} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Die Flächen P sind dreiachsige Ellipsoide, Λ sind einschalige und M sind zweischalige Hyperboloide. Da ρ, λ, μ die Wurzeln der Gleichung 2. sind, so gilt die Identität

$$(a+\nu)(b+\nu)(c+\nu) - x^2(b+\nu)(c+\nu) - y^2(a+\nu)(b+\nu) - z^2(a+\nu)(b+\nu) \\ \equiv (\nu-\rho)(\nu-\lambda)(\nu-\mu).$$

Ersetzt man hier ν der Reihe nach durch $-a$, $-b$, $-c$, so erhält man die Substitutionsgleichungen

$$4.\quad x^2 = \frac{(a+\rho)(a+\lambda)(a+\mu)}{(b-a)(c-a)}, \quad y^2 = \frac{(b+\rho)(b+\lambda)(b+\mu)}{(a-b)(c-b)}, \quad z^2 = \frac{(c+\rho)(c+\lambda)(c+\mu)}{(a-c)(b-c)}.$$

Durch Subtraction je zweier der Gleichungen 3. erhält man die Gleichungen

$$5.\quad \begin{aligned} \frac{x^2}{(a+\rho)(a+\lambda)} + \frac{y^2}{(b+\rho)(b+\lambda)} + \frac{z^2}{(c+\rho)(c+\lambda)} &= 0, \\ \frac{x^2}{(a+\rho)(a+\mu)} + \frac{y^2}{(b+\rho)(b+\mu)} + \frac{z^2}{(c+\rho)(c+\mu)} &= 0, \\ \frac{x^2}{(a+\lambda)(a+\mu)} + \frac{y^2}{(b+\lambda)(b+\mu)} + \frac{z^2}{(c+\lambda)(c+\mu)} &= 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu_0, \mu_1, \mu_2$ die Cosinus der Stellungswinkel der Tangentenebenen der Flächen P, Λ, M im Punkte P, so ist bekanntlich

$$6.\quad \begin{aligned} \rho_0 : \rho_1 : \rho_2 &= \frac{x}{a+\rho} : \frac{y}{b+\rho} : \frac{z}{c+\rho}, \\ \lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 &= \frac{x}{a+\lambda} : \frac{y}{b+\lambda} : \frac{z}{c+\lambda}, \\ \mu_0 : \mu_1 : \mu_2 &= \frac{x}{a+\mu} : \frac{y}{b+\mu} : \frac{z}{c+\mu}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 5. sagen daher aus, dass diese Tangentenebenen normal zu einander sind, dass sich also die durch P gehenden Parameterflächen P, Λ, M normal schneiden.

Aus den Gleichungen 4. ergiebt sich

$$\begin{aligned} &2\frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{x}{a+\rho}, \quad 2\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{y}{b+\rho}, \quad 2\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{z}{c+\rho}; \\ &2\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{x}{a+\lambda}, \quad 2\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{y}{b+\lambda}, \quad 2\frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{z}{c+\lambda}; \\ &2\frac{\partial x}{\partial \mu} = \frac{x}{a+\mu}, \quad 2\frac{\partial y}{\partial \mu} = \frac{y}{b+\mu}, \quad 2\frac{\partial z}{\partial \mu} = \frac{z}{c+\mu}; \end{aligned}$$

hieraus folgt weiter

$$7.\quad \begin{aligned} J = \frac{1}{8}&\sqrt{\frac{x^2}{(a+\rho)^2} + \frac{y^2}{(b+\rho)^2} + \frac{z^2}{(c+\rho)^2}} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{(a+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c+\lambda)^2}} \\ &\cdot \sqrt{\frac{x^2}{(a+\mu)^2} + \frac{y^2}{(b+\mu)^2} + \frac{z^2}{(c+\mu)^2}}. \end{aligned}$$

Die Radicanden, die wir der Reihe nach mit $1 : R^2$, $1 : L^2$, $1 : M^2$, bezeichnen wollen, kann man in folgender Weise bestimmen. Für die in 6. enthaltenen Cosinus hat man die Werthe

$$8.\quad \begin{aligned} \rho_0 &= \frac{Rx}{a+\rho}, \quad \rho_1 = \frac{Ry}{b+\rho}, \quad \rho_2 = \frac{Rz}{c+\rho}, \\ \lambda_0 &= \frac{Lx}{a+\lambda}, \quad \lambda_1 = \frac{Ly}{b+\lambda}, \quad \lambda_2 = \frac{Lz}{c+\lambda}, \\ \mu_0 &= \frac{Mx}{a+\mu}, \quad \mu_1 = \frac{My}{b+\mu}, \quad \mu_2 = \frac{Mz}{c+\mu}. \end{aligned}$$

Aus diesen Werthen und mit Rücksicht auf die Gleichungen 3. ergiebt sich

$$9.\quad \begin{aligned} \rho_0 x + \rho_1 y + \rho_2 z &= R, \\ \lambda_0 x + \lambda_1 y + \lambda_2 z &= L, \\ \mu_0 x + \mu_1 y + \mu_2 z &= M. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lehren (vergl. Analyt. Geom. des Raumes, § 2, No. 4),

dass R, L, M die Coordinaten von P in einem Systeme sind, dessen Ebenen durch O parallel zu den Tangentenebenen der Parameterflächen P, Λ, M, gelegt sind.

Bildet man in bekannter Weise die Formeln, welche x, y, z in den neuen Coordinaten R, L, M ausdrücken, so erhält man

$$\begin{aligned} x &= \rho_0 R + \lambda_0 L + \mu_0 M, \\ y &= \rho_1 R + \lambda_1 L + \mu_1 M, \\ z &= \rho_2 R + \lambda_2 L + \mu_2 M. \end{aligned} \tag{10.}$$

Hierin ersetzen wir nun die $\rho_0 \ldots \mu_2$ durch die Werthe 8.; dadurch entsteht

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{a+\rho} + \frac{L^2}{a+\lambda} + \frac{M^2}{a+\mu} &= 1, \\ \frac{R^2}{b+\rho} + \frac{L^2}{b+\lambda} + \frac{M^2}{b+\mu} &= 1, \\ \frac{R^2}{c+\rho} + \frac{L^2}{c+\lambda} + \frac{M^2}{c+\mu} &= 1. \end{aligned} \tag{11.}$$

Diese Gleichungen lehren, dass die cubische Gleichung

$$\frac{R^2}{u+\rho} + \frac{L^2}{u+\lambda} + \frac{M^2}{u+\mu} = 1$$

die Wurzeln a, b, c hat. Beseitigt man in dieser Gleichung die Nenner und wechselt die Zeichen, so erhält man

$$(u+\rho)(u+\lambda)(u+\mu) - R^2(u+\lambda)(u+\mu) - L^2(u+\rho)(u+\mu) - M^2(u+\rho)(u+\lambda) = 0.$$

Man hat daher die Identität

$$(u+\rho)(u+\lambda)(u+\mu) - R^2(u+\lambda)(u+\mu) - L^2(u+\rho)(u+\mu) - M^2(u+\rho)(u+\lambda) \equiv (u-a)(u-b)(u-c).$$

Setzen wir in diese identische Gleichung für u der Reihe nach $-\rho$, $-\lambda$, $-\mu$, so erhalten wir sofort

$$\begin{gathered} R^2 = \frac{(\rho+a)(\rho+b)(\rho+c)}{(\lambda-\rho)(\mu-\rho)}, \quad L^2 = \frac{(\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c)}{(\rho-\lambda)(\mu-\lambda)}, \\ M^2 = \frac{(\mu+a)(\mu+b)(\mu+c)}{(\rho-\mu)(\lambda-\mu)}. \end{gathered} \tag{12.}$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergiebt sich schliesslich die gesuchte Transformation

$$\iiint f\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{8}\iiint f \cdot \frac{(\rho-\lambda)(\lambda-\mu)(\mu-\rho)}{\sqrt{-ABC}}\,d\rho\,d\lambda\,d\mu$$

wobei zur Abkürzung gesetzt worden ist

$$A \equiv (\rho+a)(\rho+b)(\rho+c), \quad B \equiv (\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c), \quad C \equiv (\mu+a)(\mu+b)(\mu+c).$$

Wir wollen diese Formel anwenden, um einen Octanten des Ellipsoids zu berechnen, dessen Oberfläche die Gleichung hat

$$E \equiv \frac{x^2}{a+\rho_0} + \frac{y^2}{b+\rho_0} + \frac{z^2}{c+\rho_0} - 1 = 0.$$

Das Doppelintegral nach μ und λ hat sich hierbei über alle Punkte des Octanten eines mit E confocalen Ellipsoids zu erstrecken, mithin über alle Werthe von μ und λ; daher sind für μ die Grenzen $-a$ und $-b$, und für λ sind sie $-b$ und $-c$. Betreffs der Grenzen für ρ genügen die Bemerkungen, dass die Achsen der Parameterfläche mit ρ wachsen, und dass E selbst eine der Parameterflächen P ist, nämlich für den besonderen Werth $\rho = \rho_0$; die Flächen P, die innerhalb E liegen, gehören daher zu den Werthen $\rho = -c$ bis $\rho = \rho_0$.

Da es sich nur um eine Addition der Volumenelemente handelt, so ist $f = 1$. Verwendet man ferner die bekannte Formel für den Inhalt eines dreiachsigen Ellipsoids, so erhält man schliesslich die bemerkenswerthe Integralformel

$$\frac{4}{3}\pi\sqrt{a+\rho_0}\sqrt{b+\rho_0}\sqrt{c+\rho_0}=\int\limits_{-c}^{\rho_0}\int\limits_{-b}^{-c}\int\limits_{-b}^{-a}\frac{(\rho-\lambda)(\lambda-\mu)(\mu-\rho)}{\sqrt{-ABC}}\,d\rho\,d\lambda\,d\mu.$$

§ 11. Die periodischen Reihen und die FOURIER'schen Integrale.

1. Die unendlichen Reihen, die wir in der Differentialrechnung kennen gelernt haben, waren Potenzreihen, d. i. Reihen, welche nach den steigenden Potenzen der Variabeln fortschreiten. In diesem Abschnitte werden wir eine andere Gattung unendlicher Reihen untersuchen, nämlich Reihen, welche eine der beiden allgemeinen Formen haben

1. $$A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + A_3 \cos 3u + \ldots$$
2. $$B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_3 \sin 3u + \ldots$$

welche also nach dem Cosinus und Sinus der ganzzahligen Vielfachen des Bogens u fortschreiten.

Wenn die Reihen innerhalb der Grenzen 0 und π convergiren*), so stellen sie Functionen von u dar; setzt man in diesem Falle

$$A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \ldots = f(u),$$

so ist offenbar

$$f(\pi + v) = f(\pi - v).$$

Die Werthe, welche die Function von $u = 0$ bis $u = \pi$ annimmt, wiederholen sich also in umgekehrter Reihenfolge, wenn die Variabele von $u = \pi$ bis $u = 2\pi$ wächst. Beachtet man ferner, dass die Faktoren $\cos mu$ ihre Werthe nicht ändern, wenn u um ein ganzes Vielfaches von 2π zu oder abnimmt, so erkennt man, dass

$$f(u + 2k\pi) = f(u).$$

Die Summe der Reihe ist daher eine periodische Function von u. Ebenso erkennt man sofort, dass auch die Reihe 2. eine periodische Function von u ist. Beide Reihen werden daher als periodische Reihen bezeichnet.

Hierin unterscheiden sich diese Reihen wesentlich von den Potenzreihen.

Potenzreihen sind innerhalb des Convergenzgebiets Functionen der Variabeln; an der Grenze der Convergenz treten im Allgemeinen Discontinuitäten auf; und für alle Werthe der Variabeln, die ausserhalb des Convergenzgebietes liegen, ist die Summe der Reihe unendlich gross. Die periodischen Reihen 1. und 2. dagegen sind für alle Werthe von u convergent, wenn sie für das Intervall 0 bis π convergiren, und sind periodische Functionen von u mit der Periode 2π.

2. Ist $f(u)$ eine Function, die innerhalb des Intervalls 0 und π endlich bleibt, so kann man die Coefficienten $A_0, A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$, bez. $B_1, B_2, B_3, \ldots B_n$ so bestimmen, dass die Gleichungen

1. $$f(u) = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + A_{n-1} \cos(n-1)u$$
2. $$f(u) = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_3 \sin 3u + \ldots + B_n \sin nu$$

für n verschiedene innerhalb des Intervalls 0 und π liegende übrigens willkürlich gewählte Werthe von u erfüllt werden. Denn setzt man die gegebenen Werthe von u z. B. in 1. ein, so erhält man n Gleichungen, welche die n unbekannten Coefficienten $A_0, A_1 \ldots A_{n-1}$ linear enthalten, aus denen die A also eindeutig bestimmt werden können.

Die Summen der endlichen Reihen

*) Ueber die Convergenzbedingungen vergl. u. A. SCHLOEMILCH, Compendium der höhern Analysis, 4. Aufl., Bd. I. pag. 40.

$$S_n = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \ldots + A_{n-1} \cos(n-1)u$$
$$\Sigma_n = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + \ldots + B_n \sin nu$$

stimmen also dann für die gegebenen n Werthe der Variabeln u mit der Function $f(u)$ überein.

Vermehrt man nun die Zahl n, so wächst die Anzahl der Pnnkte, welche die Curven S_n, Σ_n und $f(u)$ — u dabei als Abscisse und S_n, Σ_n bez. $f(u)$ als Ordinate betrachtet — gemein haben; wird n unendlich gross, so haben die Curven S_n und $f(u)$, bez. Σ_n und $f(u)$ unendlich viele Punkte innerhalb des Abscissenintervalls 0 und π gemein. Es wird daher jedenfalls möglich sein, die Coefficienten A_0, A_1, A_2 ... bez. B_1, B_2, B_3 ... der unendlichen Reihen

$$A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \ldots$$
$$B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + \ldots$$

so zu bestimmen, dass für alle Werthe von u innerhalb 0 und π die Reihen eine gegebene, innerhalb der Grenzen endlich bleibende Function $f(u)$ darstellen.

3. Angenommen, es gelte die Entwicklung

$$1. \quad f(u) = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \ldots.$$

so kann man die Coefficienten leicht auf folgendem Wege bestimmen.

Man multiplicire 1. mit du und integrire zwischen den Grenzen 0 und π. Da für jede ganze Zahl k

$$\int_0^\pi \cos ku\, du = 0,$$

so erhält man

$$\int_0^\pi f(u)\, du = \pi A_0,$$

mithin

$$2. \quad A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(u)\, du.$$

Zur Bestimmung der andern Coefficienten machen wir von der Integralformel Gebrauch

$$\int_0^\pi \cos ku \cos nu\, du = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^\pi \cos(k-n)u\, du + \int_0^\pi \cos(k+n)u\, du\right)$$
$$= \begin{cases} \tfrac{1}{2}\pi, & \text{wenn } k = n \\ 0, & \;\;\text{„} \;\; k \gtrless n. \end{cases}$$

Multiplicirt man 1. mit $\cos ku\, du$ und integrirt zwischen den Grenzen 0 und π, so erhält man hiernach

$$\int_0^\pi f(u) \cos ku\, du = \tfrac{1}{2}\pi A_k,$$

mithin

$$3. \quad A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(u) \cos ku\, du.$$

Durch ein ähnliches Verfahren erhält man die Coefficienten der Reihe

$$4. \quad f(u) = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_0 \sin 3u + \ldots$$

Multiplicirt man beide Seiten mit $\sin ku\, du$ und integrirt zwischen den Grenzen 0 und π, indem man dabei von der Formel Gebrauch macht

$$\int_0^\pi \sin ku \sin nu\, du = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^\pi \cos(k-n)u\, du - \int_0^\pi \cos(k+n)u\, du\right)$$
$$= \begin{cases} \tfrac{1}{2}\pi, & \text{wenn } k = n, \\ 0, & \;\;\text{"} \;\; k \gtrless n, \end{cases}$$

so erhält man

$$\int_0^\pi f(u) \sin ku\, du = \tfrac{1}{2}\pi B_k,$$

und daher

5. $$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(u) \sin ku\, du.$$

4. Hierbei ist vorausgesetzt worden, dass die Entwicklungen

1. $$f(u) = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + A_3 \cos 3u + \ldots$$
2. $$f(u) = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_3 \sin 3u + \ldots$$

zulässig sind, und unter dieser Voraussetzung sind die Coefficienten bestimmt worden. Es ist nun noch zu untersuchen, welche Beschaffenheit eine Function $f(u)$ haben muss, um innerhalb des Intervalls 0 und π in eine periodische Reihe 1. oder 2. entwickelbar zu sein.

Um diese Frage zu entscheiden, summiren wir die endlichen Reihen, die aus 1. und 2. hervorgehen, wenn man die gefundenen Coefficienten einsetzt und bei dem Gliede mit dem Index n abbricht,

3. $$S_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_0^\pi f(v)dv + \int_0^\pi f(v)\cos v \cos u\, dv + \int_0^\pi f(v)\cos 2v \cos 2u\, dv\right.$$
$$\left. + \int_0^\pi f(v)\cos 3v \cos 3u\, dv + \ldots + \int_0^\pi f(v)\cos nv \cos nu\, dv\right];$$

4. $$\Sigma_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^\pi f(v)\sin v \sin u\, dv + \int_0^\pi f(v)\sin 2v \sin 2u\, dv\right.$$
$$\left. + \int_0^\pi f(v)\sin 3v \sin 3u\, dv + \ldots + \int_0^\pi f(v)\sin nv \sin nu\, du\right].$$

Vereint man alle Integrale in jeder Summe zu einem einzigen, so erhält man

5. $$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(v)(1 + 2\cos v \cos u + 2\cos 2v \cos 2u + \ldots + 2\cos nv \cos nu)\, dv,$$

6. $$\Sigma_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(v)(2\sin v \sin u + 2\sin v 2v \sin 2u + 2\sin 3v \sin 3u + \ldots + 2\sin nv\, snin u)\, dv.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$R_1 = \cos(v-u) + \cos 2(v-u) + \cos 3(v-u) + \ldots + \cos n(v-u),$$
$$R_2 = \cos(v+u) + \cos 2(v+u) + \cos 3(v+u) + \ldots + \cos n(v+u),$$

so erhält man

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(v)(1 + R_1 + R_2)dv, \quad \Sigma_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(v)(R_1 - R_2)\, dv.$$

Die goniometrischen Reihen R_1 und R_2 lassen sich leicht summiren. Multiplicirt man nämlich die Reihe

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cos 4a + \ldots + \cos na$$

mit $2\sin\frac{1}{2}a$, und macht in jedem Gliede von der Formel Gebrauch

$$2\sin\tfrac{1}{2}a\cdot\cos ka = \sin(k+\tfrac{1}{2}a) - \sin(k-\tfrac{1}{2}a),$$

so erhält man sofort

$$2\sin\tfrac{1}{2}a(\cos a + \cos 2a + \ldots + \cos na)$$
$$= \sin\tfrac{3}{2}a - \sin\tfrac{1}{2}a + \sin\tfrac{5}{2}a - \sin\tfrac{3}{2}a + \ldots + \sin(n+\tfrac{1}{2})a - \sin(n-\tfrac{1}{2})a\,.$$

Hieraus folgt

$$\cos a + \cos 2a + \ldots + \cos na = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})a}{2\sin\frac{1}{2}a}\,.$$

Daher ist

$$R_1 = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(v-u)}{2\sin\frac{1}{2}(v-u)}, \quad R_2 = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(v+u)}{2\sin\frac{1}{2}(v+u)},$$

und schliesslich

$$7.\quad S_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(v)\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(v-u)}{\sin\frac{1}{2}(v-u)}\,dv + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(v)\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(v+u)}{\sin\frac{1}{2}(v+u)}\,dv,$$

$$8.\quad \Sigma_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(v)\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(v-u)}{\sin\frac{1}{2}(v-u)}\,dv - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(v)\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(v+u)}{\sin\frac{1}{2}(v+u)}\,dv\,.$$

In diesen Gleichungen lassen wir nun n unendlich wachsen. Ob dabei S_n und Σ_n sich bestimmten endlichen Grenzen nähern und welches diese Grenzen gegebenenfalls sind, das hängt davon ab, was aus den beiden Integralen

$$\int_0^\pi f(v)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(v-u)}{\sin\frac{1}{2}(v-u)}\,dv \quad\text{und}\quad \int_0^\pi f(v)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(v+u)}{\sin\frac{1}{2}(v+u)}\,dv$$

wird, wenn n unendlich wächst.

Statt mit diesen beiden Integralen, werden wir uns zunächst mit dem Grenzwerthe eines etwas einfacheren beschäftigen.

5. **Grenzwerth des Integrales** $\int_0^\alpha \frac{\sin mu}{u}F(u)\,du$, wenn m die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchlaufend unendlich wächst, und α positiv ist.

Wir theilen den Betrag $m\alpha$ in q ganze Vielfache von π und einen Rest ρ, der kleiner als π ist, so dass also

$$m\alpha = q\pi + \rho, \quad \alpha = \frac{q\pi+\rho}{m},$$

und zerlegen das gegebene Integral in

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}}\frac{\sin mu}{u}F(u)\,du + \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{2\pi}{m}}\frac{\sin mu}{u}F(u)\,du + \int_{\frac{2\pi}{m}}^{\frac{3\pi}{m}}\frac{\sin mu}{u}F(u)\,du + \ldots$$
$$\ldots + \int_{\frac{(q-1)\pi}{m}}^{\frac{q\pi}{m}}\frac{\sin mu}{u}F(u)\,du + \int_{\frac{q\pi}{m}}^{\frac{q\pi}{m}+\frac{\rho}{m}}\frac{\sin mu}{u}F(u)\,du\,.$$

Jedes dieser Integrale transformiren wir durch eine geeignete Substitution; in dem zwischen den Grenzen

$$\frac{k\pi}{m} \quad \text{und} \quad \frac{(k+1)\pi}{m}$$

genommenen Integrale setzen wir

$$u = v + \frac{k\pi}{m},$$

und in dem letzten Integrale

$$u = v + \frac{q\pi}{m}.$$

Hierdurch erhalten alle transformirten Integrale, bis auf das letzte, die gemeinsamen Grenzen 0 und $\frac{\pi}{m}$; sie lassen sich daher in ein Integral vereinen, und es entsteht

$$\begin{aligned} 1. \quad \int_0^\alpha \frac{\sin mu}{u} F(u)\,du = \int_0^{\frac{\pi}{m}} \Bigg\{ & \frac{F(v)}{v} - \frac{F\left(v+\frac{\pi}{m}\right)}{v+\frac{\pi}{m}} + \frac{F\left(v+\frac{2\pi}{m}\right)}{v+\frac{2\pi}{m}} - \ldots \\ & \ldots \pm \frac{F\left(v+\frac{(q-1)\pi}{m}\right)}{v+\frac{(q-1)\pi}{m}} \Bigg\} \sin mv\,dv \pm \int_0^{\frac{\rho}{m}} \frac{F\left(v+\frac{q\pi}{m}\right)}{v+\frac{q\pi}{m}} \sin mv\,dv. \end{aligned}$$

Ersetzt man hier mv durch ω, so erhält man

$$\begin{aligned} 2. \quad \int_0^\alpha \frac{\sin mu}{u} F(u)\,du = \int_0^\pi \Bigg[& \frac{F\left(\frac{\omega}{m}\right)}{\omega} - \frac{F\left(\frac{\omega+\pi}{m}\right)}{\omega+\pi} + \frac{F\left(\frac{\omega+2\pi}{m}\right)}{\omega+2\pi} - \ldots \\ & \ldots \pm \frac{F\left(\frac{\omega+(q-1)\pi}{m}\right)}{\omega+(q-1)\pi} \Bigg] \sin\omega\,d\omega \pm \int_0^\rho \frac{F\left(\frac{\omega+q\pi}{m}\right)}{\omega+q\pi} \sin\omega\,d\omega. \end{aligned}$$

Wir nehmen nun zunächst für $F(u)$ den einfachsten Fall an und setzen $F(u) = 1$; dann entsteht aus 2., indem wir sogleich zur Grenze für $m = \infty$ übergehen

$$\begin{aligned} lim \int_0^\alpha \frac{\sin mu}{u} du = lim \int_0^\pi & \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega+\pi} + \frac{1}{\omega+2\pi} - \frac{1}{\omega+3\pi} + \ldots\right) \sin\omega\,d\omega \\ & \pm lim \int_0^\rho \frac{1}{\omega+q\pi} \sin\omega\,d\omega. \end{aligned}$$

Da $\rho < \pi$, so ist die unter dem letzten Integralzeichen stehende Function innerhalb des ganzen Intervalls positiv, und daher das Integral kleiner als

$$\int_0^\rho \frac{1}{\omega+q\pi}\,d\omega = l\left(1+\frac{\rho}{q\pi}\right).$$

Wird m unendlich gross, so wird auch $q = \infty$; da nun

$$lim\, l\left(1+\frac{\rho}{q\pi}\right) = 0, \quad q = \infty,$$

so folgt, dass um so mehr

$$lim \int_0^\rho \frac{1}{\omega + q\pi} sin\,\omega\, d\omega = 0, \quad q = \infty.$$

Der Grenzwerth der Function unter dem ersten Integralzeichen rechts

$$\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \pi} + \frac{1}{\omega + 2\pi} - \frac{1}{\omega + 3\pi} + \frac{1}{\omega + 4\pi} - \ldots\right) sin\,\omega\, d\omega$$

ist für alle innerhalb der Integrationsgrenzen 0 und π liegenden Werthe von ω endlich. Denn für $\omega = 0$ ist zwar das erste Glied der eingeklammerten Summe unendlich gross, das Produkt mit dem verschwindenden $sin\,\omega$ ist aber $= 1$; alle andern Bestandtheile des Produkts verschwinden mit $sin\,\omega$. Für jeden positiven Werth von ω enthält die Reihe

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \pi} + \frac{1}{\omega + 2\pi} - \frac{1}{\omega + 3\pi} + \ldots$$

Glieder, welche unbegrenzt abnehmen; daher hat die Reihe einen endlichen Grenzwerth.

Hieraus folgt, dass der Grenzwerth des Integrales

$$\int_0^\pi \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \pi} + \frac{1}{\omega + 2\pi} - \ldots\right) sin\,\omega\, d\omega$$

eine endliche bestimmte Grösse ist; wird dieselbe mit C bezeichnet, so haben wir schliesslich

$$lim \int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} du = C.$$

Wir werden sehr bald Gelegenheit finden C zu bestimmen.

6. Wir wenden uns nun zur Gleichung 2. der vorigen Nummer zurück und setzen voraus, dass $F(u)$ innerhalb der Integrationsgrenzen 0 und α endlich bleibt.

Unter dieser Voraussetzung ist in dem Grenzwerthe

$$lim \int_0^\rho \frac{F\left(\frac{\omega + q\pi}{m}\right)}{\omega + q\pi} sin\,\omega\, d\omega$$

der Zähler des hinter dem Integralzeichen stehenden Bruches endlich, während der Nenner unendlich gross ist; da nun auch ρ eine endliche Grösse, nämlich $< \pi$ ist, so folgt

$$lim \int_0^\rho \frac{F\left(\frac{\omega + q\pi}{m}\right)}{\omega + q\pi} sin\,\omega\, d\omega = 0.$$

Daher verbleibt

$$lim \int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} F(u)\, du = lim \int_0^\pi \left[\frac{F\left(\frac{\omega}{m}\right)}{\omega} - \frac{F\left(\frac{\omega + \pi}{m}\right)}{\omega + \pi} + \frac{F\left(\frac{\omega + 2\pi}{m}\right)}{\omega + 2\pi} - \ldots\right] sin\,\omega\, d\omega.$$

Die Summe S der eingeklammerten Reihe wollen wir zunächst unter der Voraussetzung bilden, dass $F(\omega)$ innerhalb des Intervalles 0 und α endlich und positiv ist und ununterbrochen abnimmt. Alsdann enthält die Reihe Glieder, die zur Grenze Null abnehmen, und ist daher convergent. Die Summe der Reihe liegt zwischen den Summen der ersten $2k$ und der ersten $2k + 1$ Glieder, also zwischen

$$S_{2k} = \frac{F\left(\frac{\omega}{m}\right)}{\omega} - \frac{F\left(\frac{\omega+\pi}{m}\right)}{\omega+\pi} + \ldots - \frac{F\left(\frac{\omega+(2k-1)\pi}{m}\right)}{\omega+(2k-1)\pi}$$

und

$$S_{2k+1} = \frac{F\left(\frac{\omega}{m}\right)}{\omega} - \frac{F\left(\frac{\omega+\pi}{m}\right)}{\omega+\pi} + \ldots - \frac{F\left(\frac{\omega+(2k-1)\pi}{m}\right)}{\omega+(2\pi-1)\pi} + \frac{F\left(\frac{\omega+2k\pi}{m}\right)}{\omega+2k\pi}.$$

Wir können nun k unendlich gross voraussetzen, doch so, dass k zu m ein unendlich kleines Verhältniss hat; alsdann ist

$$lim\, S_{2k} = F(0)\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega+\pi} + \frac{1}{\omega+2\pi} - \frac{1}{\omega+3\pi} + \ldots\right),$$

$$lim(S_{2k+1} - S_{2k}) = lim \frac{F\left(\frac{\omega+2k\pi}{m}\right)}{\omega+2k\pi} = 0.$$

Da nun S zwischen S_{2k} und S_{2k+1} enthalten ist, so folgt

$$S = F(0)\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega+\pi} + \frac{1}{\omega+2\pi} - \frac{1}{\omega+3\pi} + \ldots\right).$$

Hieraus ergiebt sich

$$1.\qquad lim \int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} F(u)\, du = C \cdot F(0).$$

Nimmt $F(u)$ von 0 bis α ab, ohne dabei immer positiv zu bleiben, so ist $F(u) - F(\alpha)$ immer positiv, und erfüllt daher die Voraussetzungen, für welche die Gleichung 1. gilt. Folglich ist

$$lim \int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} [F(u) - F(\alpha)]\, du = C[F(0) - F(\alpha)].$$

Da nun

$$2.\qquad lim \int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} F(\alpha)\, du = C \cdot F(\alpha),$$

so folgt

$$lim \int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} F(u)\, du = C \cdot F(0),$$

so dass nun diese Gleichung für jede von 0 bis α abnehmende Function gilt.

Nimmt $F(u)$ von 0 bis α ununterbrochen zu, so nimmt $F(\alpha) - F(u)$ ununterbrochen ab; es ist daher

$$lim \int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} [F(\alpha) - F(u)]\, du = C \cdot [F(\alpha) - F(0)].$$

In Rücksicht auf 2. folgt hieraus

$$lim \int_0^\alpha \frac{sin\, mu}{u} F(u)\, du = C \cdot F(0).$$

Wenn $F(u)$ von $u = 0$ bis $u = \alpha$ abwechselnd steigt und fällt, so kann man immer zwei Curven $F_1(u)$ und $F_2(u)$ angeben, von denen die erste innerhalb desselben Intervalls nur steigt, die zweite nur fällt; für welche $F_1(0) = F_2(0)$ $= F(0)$; und dass ferner für jedes zwischen 0 und α gelegene u

$$F(u) = \tfrac{1}{2}[F_1(u) + F_2(u)].$$

Steigt nämlich die Curve F zwischen $u = \beta$ und $u = \gamma$, so nehme man in diesem Intervalle F_2 beliebig fallend, und bestimme darnach F_1; und wenn F zwischen δ und ε fällt, so nehme man F_1 beliebig steigend und bestimme darnach F_2.

Alsdann ist

$$\lim \int_0^\alpha \frac{\sin mu}{u} F(u)\, du = \lim \int_0^\alpha \frac{\sin mu}{u} \cdot \frac{F_1(u) + F_2(u)}{2} du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim \int_0^\alpha \frac{\sin mu}{u} F_1(u)\, du + \lim \int_0^\alpha \frac{\sin mu}{u} F_2(u)\, du\right]$$

$$= C \cdot F(0).$$

Hiernach gilt 1. für jede Function F, die zwischen $u = 0$ und $u = \alpha$ endlich bleibt. Aus

$$\lim \int_0^\alpha \frac{\sin mu}{u} F(u)\, du = C \cdot F(0) \quad \text{und}$$

$$\lim \int_0^\beta \frac{\sin mu}{u} F(u)\, du = C \cdot F(0)$$

folgt sofort durch Subtraction

$$3. \qquad \lim \int_\alpha^\beta \frac{\sin mu}{u} F(u)\, du = 0,$$

wobei α und β zwei beliebige reale Zahlen, auch von verschiedenen Zeichen, sein können, wie man leicht erkennt; wenn nur $F(u)$ innerhalb der Grenzen endlich bleibt.

Um die Constante C zu bestimmen, wird man $F(u)$ so wählen, dass das Integral direkt ausgeführt werden kann. Wir setzen $F(u) = u : \sin u$ und erhalten

$$\int_0^\alpha \frac{\sin mu}{\sin u} F(u)\, du = \int_0^\alpha \frac{\sin mu}{\sin u} du.$$

Nun ist bekanntlich

$$\frac{\sin (2n+1)a}{\sin a} = 1 + 2(\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \ldots + \cos 2na).$$

Setzen wir m ungerade voraus und nehmen $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so entsteht

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin mu}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

Da nun in unserem Falle $F(0) = 1$, so folgt

$$C = \frac{\pi}{2}.$$

Daher ist für jede innerhalb der Integrationsgrenzen endlich bleibende Function $F(u)$ und für ein positives α

$$\lim \int_0^\alpha \frac{\sin mu}{u} F(u)\, du = \frac{\pi}{2} F(0).$$

7. Aus dem soeben gewonnenen Grenzwerthe ergiebt sich nun auch der Grenzwerth des Integrales

$$\int_0^\alpha \frac{\sin mu}{\sin u} f(u)\,du$$

durch die Substitution

$$F(u) = \frac{u}{\sin u} f(u).$$

Dieselbe ist zulässig, sobald $f(u)$ innerhalb der Grenzen 0 und α endlich bleibt und α kleiner als π ist. Man erhält

1. $$\lim \int_0^\alpha \frac{\sin mu}{\sin u} f(u)\,du = \frac{\pi}{2} f(0), \qquad 0 < \alpha < \pi.$$

Liegen α und β zwischen 0 und π, so ist

$$\lim \int_\alpha^\beta \frac{\sin mu}{\sin u} f(u)\,du = \lim \int_0^\beta \frac{\sin mu}{\sin u} f(u)\,du - \lim \int_0^\alpha \frac{\sin mu}{\sin u} f(u)\,du.$$

Daher folgt

2. $$\lim \int_\alpha^\beta \frac{\sin mu}{\sin u} f(u)\,du = 0.$$

Diese Ergebnisse setzen uns in den Stand, die in No. 4 abgebrochene Untersuchung zu Ende zu führen. Es handelte sich dort um die Grenzwerthe der beiden Integrale

$$J_1 = \int_0^\pi f(v) \frac{\sin \frac{1}{2}(2n+1)(v-u)}{\sin \frac{1}{2}(v-u)} dv \quad \text{und} \quad J_2 = \int_0^\pi f(v) \frac{\sin \frac{1}{2}(2n+1)(v+u)}{\sin (v+u)} dv.$$

Setzt man in dem ersten $v - u = 2w$, in dem zweiten $v + u = 2w$, so erhält man

$$J_1 = 2\int_{-\frac{u}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u)\,dw, \qquad J_2 = 2\int_{\frac{u}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w-u)\,dw.$$

Unter der Voraussetzung $0 < u < \pi$ zerlegen wir weiter

$$J_1 = 2\int_{-\frac{u}{2}}^{0} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u)\,dw + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u)\,dw.$$

Für das zweite Integral ergiebt sich nach 1. sofort

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u)\,dw = \frac{\pi}{2} f(u).$$

Im ersten ersetzen wir w durch $-w$ und erhalten

$$\lim \int_{-\frac{u}{2}}^{0} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u)\,dw = \lim \int_0^{\frac{u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(u-2w)\,dw = \tfrac{1}{2}\pi f(u).$$

Folglich ist

3. $$J_1 = 2\pi f(u).$$

Wird $f(u)$ für einen Werth von u discontinuirlich, so ist, wie man aus den beiden Bestandtheilen von J_1 sofort erkennt, für diesen Werth von u

$$J_1 = \pi[f(u-0) + f(u+0)],$$

wenn man mit $f(u-0)$ und $f(u+0)$ die Grenzwerthe bezeichnet, welche $f(u-x)$ und $f(u+x)$ erreichen, wenn die positive Zahl x zur Grenze Null abnimmt.

Für $u = 0$ fallen die Grenzen des ersten Theiles von J_1 zusammen, derselbe verschwindet daher und es bleibt

$$J_1 = \pi f(+0), \quad \text{wenn} \quad u = 0.$$

Für $u = \pi$ fallen die Grenzen des zweiten Theils zusammen und es wird daher

$$J_1 = \pi f(\pi - 0), \quad \text{wenn} \quad u = \pi.$$

Das Integral J_2 verschwindet nach 2., sobald

$$0 < u < \pi;$$

ist $u = 0$, so ergiebt sich

$$J_2 = \pi f(+0).$$

Der Fall $u = \pi$ bedarf aber noch einer besonderen Untersuchung. In diesem Falle ist

$$J_2 = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w - \pi)\, dw.$$

Setzt man nun $w = \pi - x$, so erhält man

$$J_2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(\pi - x)\, dx.$$

Daher ist

4. $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w-\pi)\, dw = \frac{\pi}{2} f(\pi).$$

Sollte $f(u)$ an der Stelle $u = \pi$ discontinuirlich sein, so hat man, wie aus der Herleitung sofort erkannt wird, für $f(\pi)$ in dieser Gleichung den Grenzwerth $f(\pi - 0)$ zu nehmen.

Führt man diese Ergebnisse in No. 5, 7. und 8. ein, so erhält man schliesslich die beiden Sätze*): Die periodische unendliche Reihe

$$A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + A_3 \cos 3u + \ldots,$$

in welcher

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(v)\, dv, \qquad A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(v) \cos kv\, dv,$$

und $f(v)$ eine innerhalb der Integrationsgrenzen 0 und π endliche Function ist, hat für jeden Werth von u von 0 bis π einschliesslich beider Grenzen die Summe $f(u)$, sobald $f(u)$ continuirlich ist; erleidet $f(u)$ Unterbrechungen der Continuität, so dass für einen (oder einige) Werthe von u die Grenzwerthe $f(u-0)$ und $f(u+0)$ von einander

*) LEJEUNE-DIRICHLET, Crelle, Bd. 4, pag. 94. SCHLOEMILCH, Compendium, 2. Bd., 2. Aufl., pag. 123.

verschieden sind, so ergiebt für diese Werthe von u die Summe der Reihe das arithmetische Mittel dieser beiden Grenzwerthe.

Die periodische unendliche Reihe

$$B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_1 \sin 3u + \ldots,$$

in welcher

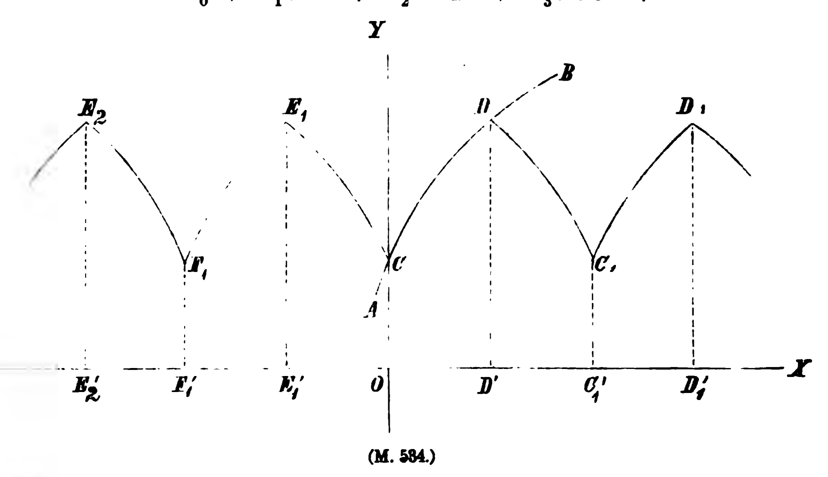
$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(v) \sin kv\, dv,$$

und $f(v)$ eine innerhalb 0 und π endliche Function ist, hat für jeden Werth von u von 0 bis π, ausschliesslich beider Grenzen, den Werth $f(u)$, sobald $f(u)$ continuirlich ist; an Stellen, wo $f(u)$ discontinuirlich wird, ergiebt sie das arithmetische Mittel aus $f(u-0)$ und $f(u+0)$; für die Grenzen $u = 0$ und $u = \pi$ verschwindet die Reihe.

Durchläuft u die Werthe von π bis 2π, so nimmt die Cosinusreihe in umgekehrter Reihenfolge dieselben Werthe, die Sinusreihe die entgegengesetzt gleichen an, wie von 0 bis π; innerhalb der Intervalle für u von 2π bis 4π, 4π bis 6π u. s. w., sowie -6π bis 0, -4π bis -2π, -6π bis -4π u. s. w. wiederholen sich für beide Reihen die Werthe des Intervalles 0 und 2π.

Ist AB die Curve $y = f(x)$ und $OD' = D'C_1' = C_1'D'_1 + \ldots = E_1'O = F_1'E_1' = E_2'F_1' = \ldots = \pi$, so fällt die Curve

$$Y = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + A_3 \cos 3u + \ldots$$



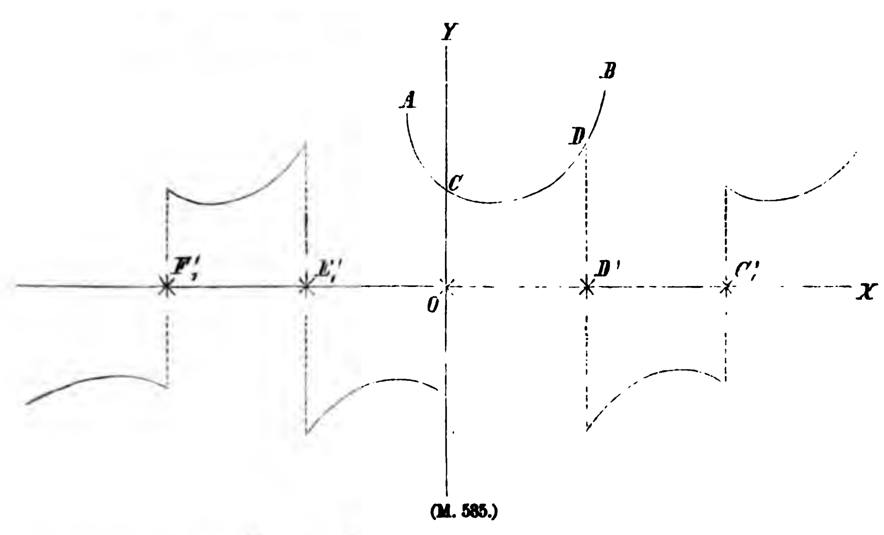
(M. 584.)

innerhalb der Punkte C und D mit der Curve AB zusammen; ihr weiterer Verlauf besteht aus den Bögen DC_1, C_1D_1, $D_1C_2 \ldots$, CE_1, E_1F_1, $F_1E_2 \ldots$, von denen je zwei benachbarte zu der gemeinsamen Ordinate symmetrisch liegen. Die Curve (Fig. 535)

$$Y = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_3 \sin 3u + \ldots$$

fällt innerhalb der Punkte C und D ebenfalls mit AB zusammen, hat aber in O und D' zwei isolirte Punkte, ebenso in C'_1, D'_1, $C'_2 \ldots$ sowie in E'_1, F'_1 $E'_2 \ldots$ Die zu OD', $D'C'_1$, $C'_1D'_1 \ldots OE_1$, $E'_1F'_1 \ldots$ gehörenden Curvenbogen decken sich ohne vorherige Umwendung und liegen abwechselnd auf verschiedenen Seiten der Abscissenachse.

8. Ehe wir zu Anwendungen übergehen, wollen wir noch in Kürze entscheiden, ob, bez. unter welchen Umständen es gestattet ist, aus den beiden Gleichungen



(M. 585.)

1. $$f(u) = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \dots$$
2. $$f(u) = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + \dots$$
durch Differentiation beider Seiten neue Gleichungen abzuleiten.

Die Differentiation der Cosinusreihe ergiebt

$$f'(u) = - A_1 \sin u - 2A_2 \sin 2u - 3A_3 \sin 3u \dots$$

Soll diese Gleichung gelten, so muss $f'(u)$ in eine Sinusreihe entwickelt werden können; es muss daher $f'(u)$ endlich sein von 0 bis π und die Cofficienten müssen die Werthe haben

3. $$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(v) \sin kv \, dv = - kA_k .$$

Durch theilweise Integration erhält man

$$\int f'(v) \sin kv \, dv = f(v) \sin kv - k\int f(v) \cos kv \, dv .$$

Werden die Integrale von 0 bis π erstreckt, so folgt

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(v) \sin kv \, dv = - \frac{2k}{\pi}\int_0^\pi f(v) \cos kv \, dv .$$

Es ist daher in der That die Gleichung 3. erfüllt. **Die beiden Seiten der Gleichung 1. dürfen daher differentiirt werden, sobald $f'(u)$ innerhalb des Intervalls 0 bis π endlich bleibt.**

Aus der Sinusreihe erhält man

$$f'(u) = B_1 \cos u + 2B_2 \cos 2u + 3B_3 \cos 3u + \dots$$

Es muss daher $f'(u)$ in einer Cosinusreihe entwickelbar sein, deren erstes Glied verschwindet. Dazu gehört, dass $f(u)$ von 0 bis π endlich bleibt, dass das Integral, welches das erste Glied der Reihe ergiebt,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f'(u) \, du .$$

verschwindet, und dass

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(u) \cos ku \, du = kB_k .$$

Aus der Bedingung

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f'(u)\,du = \frac{1}{\pi}\,[f(\pi) - f(0)] = 0$$

ergiebt sich $f(\pi) = f(0)$.

Das die übrigen Coefficienten bestimmende Integral ergiebt durch theilweise Integration

$$\int f'(u)\cos ku\,du = f(u)\cos ku + k\int f(u)\sin ku\,du,$$

mithin ist

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(u)\cos ku\,du = \frac{2}{\pi}\,[f(\pi)\cos k\pi - f(0)] + kB_k.$$

Die beiden Seiten der Sinusreihe darf man also nur dann differentiiren, wenn $f'(u)$ innerhalb der Grenzen 0 und π endlich ist, und wenn $f(\pi) = f(0) = 0$.

9. Entwicklung einiger Functionen in periodischen Reihen.

A. Durch die Sinusreihe kann eine constante Grösse dargestellt werden. Setzt man $f(x) = 1$, so erhält man

$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin kv\,dv = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos k\pi}{k} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } k \text{ gerade,} \\ \dfrac{4}{\pi k}, & \text{,, ungerade,} \end{cases}$$

und daher

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7}\ \ldots,$$
$$0 < x < \pi.$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ erhält man hieraus die LEIBNITZ'sche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

B. Für die Entwicklung von $f(x) = x$ nach der Cosinusreihe ergiebt sich

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^\pi,$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos k\pi}{k^2} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } k \text{ gerade,} \\ \dfrac{4}{\pi k^2}, & \text{,, } k \text{ ungerade;} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \ldots\right).$$

Hierfür kann man setzen

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \ldots$$
$$0 \leqq x \leqq \pi.$$

An den Grenzen der Gültigkeit, für $x = 0$ und $x = \pi$ erhält man gleichmässig

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

Setzt man $f(x) = x$ in die Sinusreihe ein, so entsteht

$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin kx dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^\pi,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{k}, & \text{wenn } k \text{ ungerade,} \\ -\dfrac{2}{k}, & \quad " \quad k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Daher hat man

$$\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} - \ldots$$

Ersetzt man hier x durch $-x$, so wechseln beide Seiten der Gleichung das Vorzeichen; die Gleichung gilt also ebensoweit für negative x, wie für positive, und man hat daher für dieselbe die Gültigkeitsgrenzen

$$-\pi < x < \pi.$$

Wir bemerken, dass dieselben Gültigkeitsgrenzen der Sinusreihe für jede Function von x bestehen, die für $x = 0$ verschwindet und mit x das Vorzeichen wechselt.

C. Setzt man in der Cosinusreihe $f(x) = \cos\mu x$, wobei μ keine ganze Zahl bezeichnen mag, so ist

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\mu x dx = \frac{\sin\mu\pi}{\mu\pi},$$

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\mu x \cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(k+\mu)x + \cos(k-\mu)x]\, dx,$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k+\mu)x}{k+\mu} + \frac{\sin(k-\mu)x}{k-\mu}\right]_0^\pi = (-1)^{k+1}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\mu\sin\mu\pi}{k^2-\mu^2}.$$

Daher ergiebt sich

$$\frac{\pi}{2\mu}\cdot\frac{\cos\mu x}{\sin\mu\pi} = \frac{1}{2\mu^2} + \frac{\cos x}{1^2-\mu^2} - \frac{\cos 2x}{2^2-\mu^2} + \frac{\cos 3x}{3^2-\mu^2} - \ldots$$

$$0 \leqq x \leqq \pi.$$

D. Um $f(x) = \sin\mu x$ in eine Sinusreihe zu entwickeln, hat man

$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\mu x \sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(k+\mu)x - \cos(k-\mu)x]\, dx,$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k+\mu)x}{k+\mu} - \frac{\sin(k-\mu)x}{k-\mu}\right]_0^\pi = (-1)^{k+1}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{k\sin\mu\pi}{k^2-\mu^2}.$$

Mithin ist

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\mu x}{\sin\mu\pi} = \frac{\sin x}{1^2-\mu^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2-\mu^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2-\mu^2} - \frac{5\sin 5x}{5^2-\mu^2} + \ldots$$

Macht man in C und D die Substitutionen $x = 0$, $x = \pi$ und $x = \frac{1}{2}\pi$, so entsteht

$$\frac{\pi}{2\mu}\cdot\frac{1}{\sin\mu\pi} = \frac{1}{2\mu^2} + \frac{1}{1^2-\mu^2} - \frac{1}{2^2-\mu^2} + \frac{1}{3^2-\mu^2} - \ldots$$

$$\frac{1}{2\mu^2} - \frac{\pi}{2\mu}\cdot\cot\mu\pi = \frac{1}{1^2-\mu^2} + \frac{1}{2^2-\mu^2} + \frac{1}{3^2-\mu^2} + \ldots$$

$$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\mu\pi} = \frac{1}{1^2-\mu^2} - \frac{3}{3^2-\mu^2} + \frac{5}{5^2-\mu^2} - \frac{7}{7^2-\mu^2} + \ldots,$$

die für jeden Werth von μ gelten.

E. Für die Function $x \sin x$ hat man

$$\int_0^\pi x \sin x \cos kx\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi x \sin(k+1)x\, dx - \tfrac{1}{2}\int_0^\pi x \sin(k-1)x\, dx\,,$$

$$\int_0^\pi x \sin(k \pm 1)x\, dx = \left[\frac{-x\cos(k\pm 1)x}{k \pm 1} + \frac{\sin(k\pm 1)x}{(k\pm 1)^2}\right]_0^\pi, \quad \text{also}$$

$$\int_0^\pi x \sin x \cos kx\, dx = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{k^2 - 1}\,.$$

Auf den Fall $k = 1$ ist diese Formel nicht anwendbar; man findet hier direkt

$$\int_0^\pi x \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi x \sin 2x\, dx = -\frac{\pi}{4}\,.$$

Fügt man hierzu noch

$$\int_0^\pi x \sin x\, dx = \pi\,,$$

so gewinnt man die Entwicklung

$$\frac{1}{2}x \sin x = \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{4} - \frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 3x}{2\cdot 4} - \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \cdots$$

Die beiden Seiten dieser Gleichung ändern sich nicht, wenn x das Vorzeichen wechselt; daher gilt diese Entwicklung zwischen den Grenzen

$$-\pi \leqq x \leqq \pi\,.$$

Dieselben Gültigkeitsgrenzen für die Cosinusreihe treten für jede Function ein, die für entgegengesetzt gleiche x gleiche Werthe hat.

F. Bekanntlich ist (§ 5, No. 9)

$$\int e^{\mu x} \cos kx\, dx = \frac{e^{\mu x}}{\mu^2 + k^2}(\mu \cos kx + k \sin kx) + C\,,$$

$$\int e^{\mu x} \sin kx\, dx = \frac{e^{\mu x}}{\mu^2 + k^2}(\mu \sin kx - k \cos kx) + C\,.$$

Daher hat man

$$\int_0^\pi e^{\mu x} \cos kx\, dx = \frac{\mu}{\mu^2 + k^2}(e^{\mu\pi} \cos k\pi - 1)\,,$$

$$\int_0^\pi e^{-\mu x} \cos kx\, dx = -\frac{\mu}{\mu^2 + k^2}(e^{-\mu\pi} \cos k\pi - 1)\,,$$

$$\int_0^\pi e^{\mu x} \sin kx\, dx = \frac{k}{\mu^2 + k^2}(1 - e^{\mu\pi} \cos k\pi)\,,$$

$$\int_0^\pi e^{-\mu x} \sin kx\, dx = \frac{k}{\mu^2 + \pi^2}(1 - e^{-\mu\pi} \cos k\pi)\,.$$

Mit Hülfe dieser Integrale erhält man leicht die beiden Entwicklungen

$$\frac{\pi}{2\mu}\cdot\frac{e^{\mu x} + e^{-\mu x}}{e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}} = \frac{1}{2\mu^2} - \frac{\cos x}{1^2 + \mu^2} + \frac{\cos 2x}{2^2 + \mu^2} - \frac{\cos 3x}{3^2 + \mu^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\mu x} - e^{-\mu x}}{e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}} = \frac{\sin x}{1^2 + \mu^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2 + \mu^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2 + \mu^2} - \cdots$$

10. Es ist nicht nöthig, dass die Function $f(x)$, welche in eine Cosinus- bez. Sinusreihe verwandelt wird, innerhalb des ganzen Intervalles 0 und π nach dem-

selben Gesetze gebildet sei; man kann vielmehr die Curve CD (Fig. 534) aus einzelnen Stücken zusammensetzen, deren jedes einer andern Gleichung entspricht. Gilt

$$\begin{array}{llllll} \text{von } 0 & \text{bis } x_1 & \text{die Function } f_1(x), \\ \text{,, } x_1 & \text{,, } x_2 & \text{,, ,, } f_2(x), \\ \text{,, } x_2 & \text{,, } x_3 & \text{,, ,, } f_3(x), \\ \dots & \dots & \dots \\ \text{,, } x_{r-1} & \text{,, } \pi & \text{,, ,, } f_r(x), \end{array}$$

so hat man jedes bei der Berechnung der Coefficienten $A_0 A_1 A_2 \ldots B_1 B_2 \ldots$ vorkommende von 0 bis π erstreckte Integral in folgender Weise zu zerlegen

$$\int_0^\pi f(x) \cos kx dx = \int_0^{x_1} f_1(x) \cos kx dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) \cos kx dx$$
$$+ \int_{x_2}^{x_3} f_3(x) \cos kx dx + \ldots + \int_{x_{r-1}}^{\pi} f_r(x) \cos kx dx.$$

und die einzelnen Theilintegrale zu berechnen.

Um hierfür ein einfaches Beispiel zu haben, wollen wir annehmen, es soll für $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}\pi$ eine beliebige, endlich bleibende Function $\varphi(x)$ und von $\frac{1}{2}\pi$ bis π die Function $\varphi(\pi - x)$ gelten; für $x = \frac{1}{2}\pi$ ergeben beide Functionen den gemeinsamen Werth $\varphi(\frac{1}{2}\pi)$, so dass an der Uebergangsstelle keine Unterbrechung der Continuität eintritt. Für die Entwicklung in eine Sinusreihe hat man

$$B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x) \sin kx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(\pi - x) \sin kx dx.$$

Substituirt man im zweiten Integrale $\pi - x = \xi$, so erhält man

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(\pi - x) \sin kx dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\xi) \sin k(\pi - \xi) d\xi = - \cos k\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\xi) \sin k\xi d\xi.$$

Da bei bestimmten Integralen auf die Bezeichnung der Integrationsvariabeln nichts ankommt, so kann man hier ξ wieder durch x ersetzen, und erhält

$$B_k = 0, \quad \text{wenn } k \text{ gerade,}$$
$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x) \sin kx dx, \quad \text{wenn } k \text{ ungerade.}$$

Daher hat man die Entwicklung

$$\varphi(x) = B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + B_5 \sin 5x + \ldots,$$

wobei
$$B_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x) \sin kx dx,$$

und x auf den Spielraum von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ angewiesen ist.

Setzt man $\varphi(x) = x$, so erhält man

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2k+1)x dx = \frac{4}{\pi} \left[- \frac{x \cos(2k+1)x}{2k+1} + \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(2k+1)\pi}{(2k+1)^2}.$$

Daher hat man in Uebereinstimmung mit No. 9, B

$$\frac{\pi}{4}\cdot x = \sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \ldots,$$

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

11. Nimmt man ferner von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ die Function $\varphi(x) = x^2$ von $\frac{1}{2}\pi$ bis π aber $\varphi(x) = 0$, so hat die Curve CD an der Stelle $x = \frac{1}{2}\pi$ eine Unterbrechung der Continuität, es ist nämlich

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi^2}{4}, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 0.$$

Entwickelt man für diese Function die Cosinusreihe, so erhält man, da die von $\frac{1}{2}\pi$ bis π erstreckten Theile der Coefficientenintegrale wegen $\varphi(x) = 0$ verschwinden

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{24},$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot A_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos kx\,dx = \left[\frac{x^2 \sin kx}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin kx\,dx,$$

$$= \left[\frac{x^2 \sin kx}{k} + \frac{2x\cos kx}{k^2} - \frac{2\sin kx}{k^3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{k^2\pi^2 - 8}{4k^3}\sin\dfrac{k\pi}{2}, & \text{wenn } k \text{ ungerade},\\[2ex] \dfrac{\pi}{k^2}\cos\dfrac{k\pi}{2}, & \text{wenn } k \text{ gerade}. \end{cases}$$

Daher hat man die von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ gültige Reihe

$$x^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{12} + \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \ldots\right)$$
$$- \frac{4}{\pi}\left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3^3} + \frac{\cos 5x}{5^3} - \frac{\cos 7x}{7^3} + \ldots\right)$$
$$- 2\left(\frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \frac{\cos 6x}{6^2} - \frac{\cos 8x}{8^2} + \ldots\right).$$

Setzen wir zur Prüfung dieser Entwicklung auf der rechten Seite $x = \frac{1}{2}\pi$, so muss sich das arithmetische Mittel aus $\varphi(\frac{1}{2}\pi - 0)$ und $\varphi(\frac{1}{2}\pi + 0)$, d. i. $\frac{1}{8}\pi^2$ ergeben. Wir erhalten, da die Cosinus aller ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$ verschwinden,

$$\frac{\pi^2}{24} + 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots\right).$$

Die eingeklammerte Reihe ist der vierte Theil von

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

Bezeichnet man diese Summe mit S, so hat man

$$S = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right).$$

Der erste Theil der rechten Seite ist $\frac{1}{8}\pi^2$ (No. 9, B); der zweite ist $\frac{1}{4}S$; daher hat man

$$\frac{3}{4}S = \frac{1}{8}\pi^2,$$

folglich ist

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Mithin ergiebt sich in der That

$$\frac{\pi^2}{24} + 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{8}.$$

12. Durch eine einfache Substitution kann man aus den Reihen

1. $$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots$$

2. $$f(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots$$

neue periodische Reihen ableiten, deren Gültigkeit nicht auf das Gebiet 0 bis π beschränkt ist.

Macht man in einer für $0 < x < a$ endlichen Function $\varphi(x)$ die Substitution

$$x = \frac{ay}{\pi},$$

so erhält man

$$\varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right),$$

und diese Function von y ist endlich von $y = 0$ bis $y = \pi$. Man kann sie daher nach 1. und 2. entwickeln und erhält

3. $$\varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right) = A_0 + A_1 \cos y + A_2 \cos 2y + \dots, \quad 0 \leqq y \leqq \pi,$$

4. $$\varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right) = B_1 \sin y + B_2 \sin 2y + B_3 \sin 3y + \dots, \quad 0 < y < \pi.$$

Die Coefficienten haben hier die Werthe

5. $$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right), \quad A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right) \cos ky\, dy,$$
$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right) \sin ky\, dy.$$

Substituirt man nun in 3., 4. und 5. wieder x für y, so erhält man die Reihen

6. $$\varphi(x) = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{a} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{a} + A_3 \cos\frac{3\pi x}{a} + \dots,$$
$$0 \leqq x \leqq a, \quad A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a \varphi(x)dx, \quad A_k = \frac{2}{a}\int_0^a \varphi(x) \cos\frac{k\pi x}{a} dx;$$

7. $$\varphi(x) = B_1 \sin\frac{\pi x}{a} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{a} + B_3 \sin\frac{3\pi x}{a} + \dots,$$
$$0 < x < a, \quad B_k = \frac{2}{a}\int_0^a \varphi(x) \sin\frac{k\pi x}{a} dx.$$

13. Ist $F(x)$ eine beliebige, von $x = 0$ bis $x = a$ endliche Function, so theilt die Function $F(x) + F(-x)$ diese Eigenschaft und nimmt für entgegengesetzt gleiche Werthe von x gleiche Werthe an; da die letztere Eigenschaft auch der Cosinusreihe 6. zukommt, so gilt für diese Function die Reihe 6. auch noch zwischen den Grenzen 0 und $-a$. Für die Coefficienten findet sich

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx + \frac{1}{a}\int_0^a F(-x)dx,$$

$$A_k = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\frac{k\pi x}{a}dx + \frac{2}{a}\int_0^a F(-x)\cos\frac{k\pi x}{a}dx.$$

Ersetzt man in den $F(-x)$ enthaltenden Integralen x durch $-x$ so erhält jedes die Grenzen 0 und $-\pi$ und lässt sich mit dem vorhergehenden vereinigen; es entsteht

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_{-a}^a F(x)dx, \quad A_k = \frac{2}{a}\int_{-a}^a F(x)\cos\frac{k\pi x}{a}dx.$$

Für diese Werthe der Coefficienten ist also

1. $$F(x) + F(-x) = A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{a} + A_2\cos\frac{2\pi x}{a} + \ldots$$
$$-a \leqq x \leqq a.$$

Die Function $F(x) - F(-x)$ verschwindet für $x = 0$ und wechselt mit x das Zeichen. Entwickelt man sie daher nach No. 12, 7, so gilt die Reihe von $-a$ bis $+a$. Für die Coefficienten ergiebt sich

$$B_k = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\frac{k\pi x}{a}dx - \frac{2}{a}\int_0^a F(-x)\sin\frac{k\pi x}{a}dx = \frac{2}{a}\int_{-a}^a F(x)\sin\frac{k\pi x}{a}dx.$$

Bei diesen Werthen der Coefficienten ist

2. $$F(x) - F(-x) = B_1\sin\frac{\pi x}{a} + B_2\sin x\frac{2\pi x}{a} + B_3\sin\frac{3\pi x}{a} + \ldots$$
$$-a < x < a.$$

Nimmt man die halbe Summe der Gleichungen 8. und 9., so erhält man schliesslich

3. $$F(x) = A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{a} + A_2\cos\frac{2\pi x}{a} + A_3\cos\frac{3\pi x}{a} + \ldots$$
$$+ B_1\sin\frac{\pi x}{a} + B_2\sin\frac{2\pi x}{a} + B_3\sin\frac{3\pi x}{a} + \ldots$$
$$-a < x < a,$$

wobei die Coefficienten die Werthe haben

$$A_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^a F(x)dx, \quad A_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^a F(x)\cos\frac{k\pi x}{a}dx, \quad B_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^a F(x)\sin\frac{k\pi x}{a}dx.$$

Da man für a beliebig grosse Werthe nehmen kann, so folgt, dass jede Function innerhalb eines beliebig grossen Gebiets durch eine periodische Cosinus-Sinus-Reihe von der Form 3. dargestellt werden kann, wenn sie nur innerhalb dieses Gebietes endlich bleibt.

Soll eine gegebene Function $f(x)$ für alle zwischen $-a$ und a liegenden Werthe der Variabeln durch die Reihe 3. dargestellt werden, so ist nur eine solche Darstellung möglich; wenn dagegen die Forderung gestellt wird, dass die Reihe 3. nur für die zwischen b und c enthaltenen Werthe der Variabeln mit $f(x)$ übereinstimmen soll, wobei $-a < b < c < a$, so kann man unzählig viele Entwicklungen angeben; denn man kann dann für die nicht zwischen b und c enthaltenen Werthe der Variabeln, die bei b und c abgebrochene Function

$f(x)$ durch beliebige endlich bleibende Functionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ fortsetzen (vergl. No. 10).

14. Die in No. 12 entwickelten Reihen gestatten eine werthvolle Anwendung auf das Problem der Umkehrung der Functionen*).

Dieses Problem besteht darin, y aus der Gleichung $x = \varphi(y)$ als Function von x, oder allgemeiner irgend eine Function $F(y)$ als Function von x auszudrücken.

Da $F(y)$ eine Function von x ist, so lässt sich $F(y)$ innerhalb gewisser Grenzen durch eine Cosinusreihe ausdrücken

$$1. \qquad F(y) = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{a} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{a} + A_3 \cos\frac{3\pi x}{a} + \dots$$
$$0 < x < a.$$

Die Coefficienten sind

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a F(y)\,dx, \qquad A_k = \frac{2}{a}\int_0^a F(y)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx.$$

Durch theilweise Integration folgt hieraus zunächst

$$A_0 = \frac{1}{a}\Big[xF(y)\Big]_0^a - \frac{1}{a}\int_{y_0}^{y_1} xF'(y)\,dy,$$

$$A_k = \frac{2}{k\pi}\Big[F(y)\sin\frac{k\pi x}{a}\Big]_0^a - \frac{2}{k\pi}\int_{y_0}^{y_1} F'(y)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dy,$$

wenn $x = 0$ und a die Werthe $y = y_0$ und y_1 entsprechen; hieraus folgt weiter

$$2. \qquad A_0 = F(y_1) - \frac{1}{a}\int_{y_0}^{y_1} \varphi(y)F'(y)\,dy, \qquad A_k = -\frac{2}{k\pi}\int_{y_0}^{y_1} F'(y)\sin\frac{k\pi x}{a}\varphi(y)\,dy.$$

Betreffs der Integrationsgrenzen ist hier Folgendes zu bemerken. Die nach x genommenen Coefficientenintegrale waren von 0 bis zu der positiven Zahl a erstreckt, und es war dabei vorausgesetzt, dass x von 0 bis a stetig wachse. Will man nun x durch y ersetzen, so hat man zunächst die Gleichung

$$0 = \varphi(y)$$

aufzulösen; eine reale Wurzel β dieser Gleichung ist dann die der Grenze $x = 0$ entsprechende Grenze für y. Im Allgemeinen wechselt $\varphi(y)$ das Zeichen, wenn y durch den Werth β hindurchgeht; damit nun x von 0 bis zu der noch unbestimmten oberen Integralgrenze wachse, muss man y vom Werthe $y = \beta$ zunehmen oder abnehmen lassen, je nachdem $\varphi(y)$ von $\varphi(\beta) = 0$ aus mit y zugleich wächst oder nicht, und darf die Integration nach y nicht weiter ausdehnen, als bis zu einem solchen Werthe von y, für welchen das Wachsthum von $\varphi(y)$ in eine Abnahme übergeht, d. i. bis zu dem Werthe $y = \beta_1$, welchem das dem Werthe β der Variabeln y zunächst liegende Maximum der Function $\varphi(y)$ zugehört. Somit ist also die obere Grenze a der Reihe 1. nicht ganz willkürlich, sondern a darf nicht grösser sein, als $\varphi(\beta_1)$.

Ist nun b eine zwischen β und β_1 liegende Zahl, so hat man in den obigen Formeln a, y_0, y_1 durch $\varphi(b)$, β, b zu ersetzen und gewinnt mithin

$$F(y) = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{\varphi(b)} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{\varphi(b)} + \dots$$
$$0 \leq x \leq \varphi(b).$$

*) SCHLOEMILCH, Compendium 2. Bd. 2. Aufl. pag. 152.

$$A_0 = F(b) - \frac{1}{\varphi(b)}\int_\beta^b F'(y)\varphi(y)dy, \quad A_k = -\frac{2}{k\pi}\int_\beta^b F'(y)\sin\frac{k\pi\varphi(y)}{\varphi(b)}dy.$$

Zu jeder realen Wurzel β der Gleichung

$$\varphi(y) = 0$$

erhält man hiernach eine besondere Umkehrungsreihe; die Gültigkeitsgebiete dieser Reihen in Bezug auf y schliessen einander aus.

Für die Grenzbestimmungen wollen wir ein Beispiel geben. Wir wählen hierzu die Aufgabe, aus der Gleichung

$$x = ye^{-y}$$

y durch x auszudrücken. Die Function ye^{-y} verschwindet für $y = 0$ und für $y = \infty$.

Zur Bestimmung der eminenten Werthe ist die Gleichung aufzulösen

$$e^{-y} - ye^{-y} = 0.$$

Sie liefert $y = 1$; das zugehörige Maximum von x ist $1:e$. Man kann daher eine Umkehrung für das Gebiet $y = 0$ bis $y = 1$, und eine zweite für $y = \infty$ bis $y = 1$ entwickeln.

Für die erste erhält man

$$y = A_0 + A_1 \cos\pi ex + A_2 \cos 2\pi ex + \ldots$$

$$0 \leqq x \leqq \frac{1}{e},$$

$$A_0 = 1 - e\int_0^1 ye^{-y}dy, \quad A_k = -\frac{2}{k\pi}\int_0^1 \sin(k\pi eye^{-y})\,dy.$$

Für die zweite Umkehrung ist $\beta = \infty$; um die Gültigkeit möglichst weit zu erstrecken, wollen wir $b = 1$ nehmen. Dann haben wir

$$Y = A_0 + A_1 \cos\pi ex + A_2 \cos 2\pi ex + \ldots$$

$$0 \leqq x \leqq \frac{1}{e},$$

$$A_0 = 1 + e\int_1^\infty ye^{-y}dy, \quad A_k = \frac{2}{k\pi}\int_0^\infty \sin(k\pi eye^{-y})\,dy.$$

Die Integrale zur Bestimmung der Coefficienten können hier wie in den meisten Anwendungen der Umkehrungsreihen nur durch unendliche Reihen berechnet werden.

Man kann auch mit Hülfe der Sinusreihe das Umkehrungsproblem lösen; die Entwicklung bietet keine neuen Schwierigkeiten; wir sehen daher davon ab, sie hier mitzutheilen.

---

15. Die für jede zwischen $x = -a$ und $+a$ endliche Function $F(x)$ gültige Gleichung

$$F(x) = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{a} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{a} + A_3 \cos\frac{3\pi x}{a} + \ldots$$

$$+ B_1 \sin\frac{\pi x}{a} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{a} + B_3 \sin\frac{3\pi x}{a} + \ldots$$

1.

$$A_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^a F(t)dt, \quad A_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^a F(t)\cos\frac{k\pi t}{a}dt, \quad B_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^a F(t)\sin\frac{k\pi t}{a}dt,$$

kann man auch in der Form schreiben

$$F(x) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} F(t)\,dt + \sum_{1}^{\infty}{}^{k} \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} F(t)\left(\cos\frac{k\pi t}{a}\cos\frac{k\pi x}{a} + \sin\frac{k\pi t}{a}\sin\frac{k\pi x}{a}\right)dt,$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} F(t)\,dt + \sum_{1}^{\infty}{}^{k} \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} F(t)\cos\frac{k\pi}{a}(t-x)\,dt.$$

Da die unter dem Summenzeichen stehende Function für entgegengesetzt gleiche k gleiche Werthe hat, so hat man

$$\sum_{1}^{\infty} = \sum_{-\infty}^{-1};$$

man kann die Summe daher nach dem Schema zerlegen

$$\sum_{1}^{\infty} = \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} + \tfrac{1}{2}\sum_{-\infty}^{-1}.$$

Da ferner die Function für $k = 0$ in $F(t)dt$ übergeht, so erhält man schliesslich die Zuzammenfassung

$$2. \qquad F(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}{}^{k} \frac{\pi}{a}\int_{-a}^{a} F(t)\cos k\frac{\pi}{a}(t-x)\,dt.$$

Ist a eine sehr grosse Zahl, so werden die mit Cosinus multiplicirten Glieder der Reihe 1. nahezu constant, während die Glieder des zweiten Theils wegen der Sinus gegen den ersten Theil unbeträchtlich klein werden. Da nun die Reihe nach wie vor die Function $F(x)$ ausdrückt, so folgt, dass die Anzahl der Glieder, durch die man eine hinlängliche Annäherung erzielt, im Verhältniss zu a sehr gross sein muss. Lässt man in 2. die Zahl a unendlich wachsen, so hat man daher daran festzuhalten, dass die äussersten Grenzen für k zu dem unendlichen a ein unendlich grosses Verhältniss haben.

Ist a unendlich, so ist $\pi : a$ unendlich klein. Bezeichnet man $k\pi : a$ durch u, so wächst u nach der über k soeben gemachten Bemerkung von $-\infty$ bis $+\infty$, die Grösse $\pi : a$ ist ein verschwindend kleiner Theil von u und kann mit Δu bezeichnet werden.

Damit geht aus 2. hervor

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}{}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\cos u(t-x)\,dt\right]\Delta u.$$

Aus dem Begriffe des bestimmten Integrals folgt, dass man hierfür setzen kann

$$3. \qquad F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\cos u(t-x)\,du\,dt.$$

Hierbei gilt die von den periodischen Reihen her bekannte Beschränkung, dass $F(x)$ innerhalb des ganzen realen Gebiets nicht unendlich gross werden darf; ferner, dass das Doppelintegral

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\cos u(t-x)\,dt\,du$$

für solche Werthe von x, für welche $F(x-0)$ von $F(x+0)$ verschieden sind, das arithmetische Mittel dieser beiden Grenzwerthe ergiebt.

Wie bekannt, ist es nicht nöthig, dass die Function $F(x)$ innerhalb des ganzen Intervalls von $-\infty$ bis ∞ immer dasselbe Gezetz befolgt; es steht vielmehr vollkommen frei, die Curve

$$y = F(x)$$

aus ganz beliebig gewählten Theilen verschiedener Curven zusammenzusetzen; dabei kann man nach Willkür die einzelnen Theile continuirlich zusammenhängen lassen, oder an den Uebergangsstellen Discontinuitäten anordnen.

Von besonderem Interesse ist es, die Function von $-\infty$ bis zu einer beliebigen Grenze $x = b$ constant $= 0$ zu nehmen, von b bis β mit einer gegebenen Function $F(x)$ zusammenfallen zu lassen, und von $x = \beta$ bis $x = \infty$ wieder constant $= 0$ vorauszusetzen. Das nach t genommene Integral in 3. verschwindet alsdann für die beiden Intervalle $-\infty$ bis b und β bis ∞, und es bleibt

$$4. \qquad F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t) \cos u(t-x)\, du\, dt,$$

$$b < x < \beta.$$

An den Grenzen b und β gilt 4. nicht mehr; es ist vielmehr, da hier die dargestellte Function discontinuirlich ist,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t) \cos u(t-b)\, du\, dt = \tfrac{1}{2} F(b),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t) \cos u(t-\beta)\, du\, dt = \tfrac{1}{2} F(\beta).$$

Für jedes x, das kleiner als b oder grösser als β ist, hat man

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t) \cos u(t-x)\, du\, dt = 0.$$

Die FOURIER'schen Doppelintegrale*) 3. und 4. gewähren das hohe Interesse, dass sie willkürliche endlich bleibende Functionen von x darstellen; und zwar 3. innerhalb des ganzen realen Gebiets, 4. innerhalb eines beliebig gewählten, während ausserhalb desselben das Integral verschwindet.

16. Dieselben Betrachtungen, die wir im vorigen Abschnitte auf die Cosinus-Sinus-Reihe angewendet haben, sind auch für die Cosinusreihe und für die Sinusreihe verwendbar; leichter gelangen wir zu denselben Ergebnissen, wenn wir das Integral No. 15, 3 zum Ausgangspunkte nehmen. Wir transformiren dasselbe zunächst in

$$1. \qquad F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \left[\cos xu \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos ut\, dt + \sin ux \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \sin ut\, dt\right].$$

Wir wollen nun für $F(x)$ innerhalb der Grenzen 0 bis ∞ eine willkürliche Function nehmen, für negative x aber die Function so fortsetzen, dass $F(-x) = F(x)$.

Unter dieser Voraussetzung ist

*) FOURIER, Théorie analytique de la chaleur. Paris 1822.

$$\int_{-\infty}^{0} F(t) \sin ut\, dt = -\int_{0}^{\infty} F(t) \sin ut\, dt, \quad \int_{-\infty}^{0} F(t) \cos ut\, dt = \int_{0}^{\infty} F(t) \cos ut\, dt$$

und daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \sin ut\, dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos ut\, dt = 2\int_{0}^{\infty} F(t) \cos ut\, dt.$$

Demnach ist schliesslich

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} F(t) \cos xu \cos ut\, du\, dt, \quad 0 \leqq x \leqq \infty.$$

Da das Produkt $\cos xu \cos ut$ unverändert bleibt, wenn u das Zeichen wechselt, so kann man hierfür noch einfacher setzen

$$2. \qquad F(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} F(t) \cos xu \cos ut\, du\, dt$$

$$0 \leqq x \leqq \infty.$$

Wählt man hier wieder die Function gleich Null von $x = 0$ bis $x = b$, willkürlich von b bis β, und gleich Null von β bis ∞, so erhält man

$$3. \qquad F(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t) \cos xu \cos ut\, du\, dt,$$

$$0 < b < x < \beta.$$

Für die Grenzen ist

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t) \cos bu \cos ut\, du\, dt = \tfrac{1}{2} F(b), \quad \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t) \cos \beta u \cos ut\, du\, dt = \tfrac{1}{2} F(\beta);$$

ist $0 < x < b$, oder $b < x$, so ist

$$\int_{0}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t) \cos xu \cos ut\, dt\, du = 0.$$

17. Nimmt man $F(x)$ willkürlich für das Gebiet 0 bis ∞, setzt aber die Function für negative x so fort, dass $F(-x) = -F(x)$, so hat man

$$\int_{-\infty}^{0} F(t) \cos ut\, dt = -\int_{0}^{\infty} F(t) \cos ut\, dt, \quad \int_{-\infty}^{0} F(t) \sin ut\, dt = \int_{0}^{\infty} F(t) \sin ut\, dt,$$

und daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos ut\, dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \sin ut\, dt = 2\int_{0}^{\infty} F(t) \sin ut\, dt.$$

Die Gleichung No. 16, 1. ergiebt daher

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} F(t) \sin xu \sin ut\, du\, dt, \quad 0 < x < \infty.$$

Da das Produkt $\sin xu \sin ut$ für entgegengesetzt gleiche u gleiche Werthe hat, so hat man einfacher

$$1. \qquad F(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} F(t) \sin xu \sin ut\, du\, dt,$$

$$0 < x < \infty.$$

Hierbei gelten für den Fall, dass $F(x)$ Discontinuitäten hat, die bereits wiederholt gemachten Bemerkungen.

Nimmt man $F(x) = 0$ von $x = 0$ bis $x = b$, willkürlich von b bis β, und Null von β bis ∞, so erhält man

2. $$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_b^\beta F(t) \sin xu \sin ut\, du\, dt,$$
$$0 < b < x < \beta.$$

Ferner ist

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_b^\beta F(t) \sin bu \sin ut\, du\, dt = \tfrac{1}{2}F(b), \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_b^\beta F(t) \sin\beta u \sin ut\, du\, dt = \tfrac{1}{2}F(\beta),$$

und für $0 < x < b$ oder $\beta < x$

$$\int_0^\infty\int_b^\beta F(t) \sin xu \sin ut\, dt\, du = 0.$$

18. Die Fourier'schen Doppelintegrale sind eine sehr ergiebige Quelle zur Berechnung von einfachen bestimmten Integralen. Ist man im Stande, bei den Doppelintegralen in No. 15, 16 und 17 die Integrale auszuführen

$$\int F(t) \cos u(t - x)\, dt, \quad \int F(t) \cos ut\, dt, \quad \int F(t) \sin ut\, dt,$$

so hat man dann ohne Weiteres den Werth der Doppelintegrale selbst.

A. Nimmt man in No. 16, 3. $b = 0$, und $F(x) = 1$, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{\cos xu \sin\beta u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqq x < \beta,$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos xu \sin\beta u}{u}\, du = 0, \quad \beta < x.$$

B. Setzt man in No. 16, 3. $b = 0$, und $F(x) = x$ und bemerkt, dass

$$\int_0^\beta t \cos ut\, dt = \left[\frac{t \sin ut}{u} + \frac{\cos ut}{u^2}\right]_0^\beta = \frac{\beta \sin u\beta}{u} + \frac{\cos u\beta - 1}{u^2},$$
$$= \frac{\beta \sin u\beta}{u} - 2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}u\beta}{u^2},$$

so erhält man

$$x = \frac{2\beta}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu \sin\beta u}{u}\, du - \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu \sin^2 \frac{1}{2}\beta u}{u^2}.$$

Setzt man für das erste Integral den soeben gefundenen Werth und vertauscht noch β mit 2β, so erhält man schliesslich

$$\int_0^\infty \frac{\cos xu \sin^2 \beta u}{u^2}\, du = \frac{\pi}{4}(2\beta - x)$$
$$0 \leqq x \leqq 2\beta.$$

C. Durch theilweise Integration findet man

$$\int_0^\infty e^{-t}\cos ut\,dt = \left[\frac{e^{-t}\sin ut}{u}\right]_0^\infty + \frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-t}\sin ut\,dt,$$

$$\int_0^\infty e^{-t}\sin ut\,dt = -\left[\frac{e^{-t}\cos ut}{u}\right]_0^\infty - \frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-t}\cos ut\,dt.$$

Hieraus ergiebt sich leicht

$$\int_0^\infty e^{-t}\cos ut\,dt = \frac{1}{1+u^2}, \qquad \int_0^\infty e^{-t}\sin ut\,dt = \frac{u}{1+u^2}.$$

Daher gewinnt man aus No. 16, 2 und No. 17, 2 die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos xu}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}e^{-x}, \qquad x \geqq 0.$$

$$\int_0^\infty \frac{u\sin xu}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}e^{-x}, \qquad x > 0.$$

Ersetzt man hier u durch $\frac{u}{\alpha}$ und x durch αx so erhält man die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos xu}{\alpha^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha x}, \qquad \alpha > 0, \qquad x \geqq 0,$$

$$\int_0^\infty \frac{u\sin xu}{\alpha^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha x}, \qquad \alpha > 0, \qquad x > 0.$$

Bemerkung. Die auf pag. 673 gegebene Herleitung des Resultates 3. stimmt im Wesentlichen mit FOURIER's Deduction überein; sie gestattet aber einige Zweifel und bedarf daher einer genaueren Untersuchung, bezüglich deren wir auf SCHLOEMILCH's »Compendium der höheren Analysis«, Bd. II, verweisen.

II. Theil. Functionen einer complexen Variabeln.

§ 12. Algebraische Functionen einer complexen Variabeln.

1. Durch Vereinigung einer realen Zahl a mit einer imaginären bi entsteht die complexe Zahl $a + bi$.

Alle zu dem realen Bestandtheile a gehörigen complexen Zahlen werden erhalten, wenn b die reale Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft; hieraus entstehen weiter alle complexen Zahlen überhaupt, wenn a die ganze reale Zahlenreihe durchläuft. Bezeichnet ∞ die Menge der realen Zahlen, so ist die der complexen ∞^2. Zur geometrischen Darstellung bedürfen daher die complexen Zahlen eines Gebietes zweier Dimensionen, einer Fläche. Wählt man hierzu die Ebene, so hat man sich zunächst darüber schlüssig zu machen, wie die positive und negative imaginäre Einheit darzustellen sind, und wie man den geometrischen Begriff der Summe*) auf die Summe einer realen und imaginären Zahl auszudehnen hat.

Die imaginäre Einheit i wird man als eine Strecke darstellen von derselben Länge, wie die reale Einheit, nur von anderer Richtung. Beachtet man nun, dass $1 \cdot i = i$, $i \cdot i = -1$, dass also die negative reale Einheit aus der positiven imaginären durch dieselbe arithmetische Operation hervorgeht, wie die positive imaginäre aus der positiven realen, und dass bei einer geschickt gewählten geometrischen Darstellung gleichen arithmetischen Operationen auch in bestimmter Hinsicht gleiche geometrische entsprechen müssen, so entsteht nun die Forderung, die Richtung der imaginären Einheit so zu wählen, dass der Winkel zwischen $+1$ und $+i$ gleich dem Winkel zwischen $+i$ und -1 ist, also so, dass sie mit der positiven realen Einheit einen rechten Winkel bildet.

Die positive imaginäre Zahl bi wird durch die Strecke OQ dargestellt, die der Strecke b gleich und mit der imaginären Einheit OJ gleichgerichtet ist; ferner die negative imaginäre Zahl $-bi$ durch eine Strecke, die der Strecke bi entgegengesetzt gleich ist. Die Gerade OX (Fig. 536) wird als die reale, OY als die imaginäre Achse bezeichnet.

2. Den geometrischen Begriff der Summe dehnen wir auf reale und imaginäre Summanden aus, und bezeichnen mit der Summe $a + bi$ die Strecke OB, welche erhalten wird, wenn man OA gleich und gleichgerichtet mit a, und

*) Um zwei (reale) Zahlen zu addiren, die durch die vom Nullpunkte O ausgehenden (auf der realen Achse enthaltenen) Strecken OA und OB dargestellt sind, construire man die Strecke AC, welche der Richtung und Länge nach mit OB übereinstimmt; alsdann ist

$$OA + OB = OC.$$

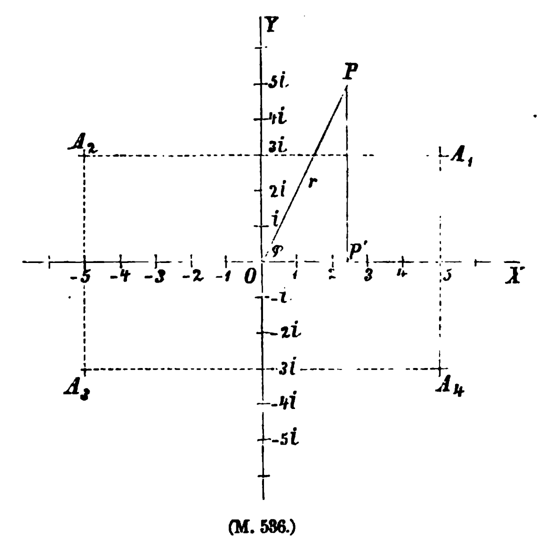
Diese Definition umfasst zunächst die Addition realer positiver und negativer Zahlen. Lässt man die eingeklammerten Beschränkungen weg, so wird sie für das ganze complexe Zahlengebiet verwendbar.

AB gleich und gleichgerichtet mit bi macht. Demnach sind die Strecken OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 der Reihe nach die Repräsentanten der complexen Zahlen

$$5 + 3i, \quad -5 + 3i, \quad -5 - 3i, \quad 5 - 3i,$$

und die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 werden als die Zahlpunkte $\pm 5 \pm 3i$ bezeichnet. Ist P' die Projection von P auf OX und ist $OP' = x$, $P'P = y$, so ist P der Zahlpunkt

$$x + yi.$$



(M. 536.)

Ferner ist

$$OP = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

wobei wir die Wurzel positiv rechnen wollen; wird XOP mit φ bezeichnet, so ist

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r},$$

$$x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Die Grössen r und φ werden als Modul und Amplitude der complexen Zahl $x + iy$ bezeichnet.

Die complexen Zahlen

$$\cos\varphi + i\sin\varphi,$$

deren Modul gleich der Einheit ist, bezeichnet man als complexe Einheiten; die Einheitspunkte liegen auf einem Kreise, der um den Nullpunkt mit der Längeneinheit als Halbmesser beschrieben ist. Zahlen $a + ib$, für welche a und b dasselbe Verhältniss haben, besitzen dieselbe Amplitude oder um π verschiedene Amplituden; sie liegen daher auf derselben durch den Nullpunkt gehenden Geraden.

3. Die geometrischen Definitionen der Summe und Differenz übertragen wir nun auch auf complexe Zahlen. Ist PR gleich OQ und gleichgerichtet, so setzen wir

$$OR = OP + OQ;$$

und ist PS gleich OQ, aber von entgegengesetzter Richtung, so ist

$$OS = OP - OQ.$$

Werden durch die Punkte P und Q die Zahlen $a + bi$, $c + di$ repräsentirt, so ist daher

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

(M. 537.)

4. Dem Principe der Continuität der Rechenregeln folgend, wird das Produkt complexer Zahlen durch die Gleichung definirt

$$(a + bi)\cdot(c + di) = ac + bc\cdot i + ad\cdot i + bd\cdot i\cdot i = ac - bd + (bc + ad)i.$$

Ist $a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\quad c + di = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, so ist der Modul R des Produkts

$$R = \sqrt{(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2}$$
$$= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = r\cdot r_1.$$

Für die Amplitude Φ des Produkts hat man

$$\cos\Phi = \frac{ab - cd}{R} = \frac{a}{r}\cdot\frac{b}{r_1} - \frac{c}{r}\cdot\frac{d}{r_1} = \cos(\varphi + \varphi_1),$$

$$\sin\Phi = \frac{ac+bd}{R} = \frac{a}{r}\cdot\frac{c}{r_1} + \frac{b}{r}\cdot\frac{d}{r_1} = \sin(\varphi+\varphi_1).$$

Daher folgt: Complexe Zahlen werden multiplicirt, indem man ihre Moduln multiplicirt und die Amplituden addirt. Ist in complexen Zahlen

$$OR = OP\cdot OQ,$$

und ist ferner $OE = 1$, so besteht zwischen den vier Strecken OE, OP, OQ und OR die Proportion

$$OE : OQ = OP : OR;$$

ferner ist $EOR = EOP + EOQ$, also $POR = EOQ$.

Daher sind die Dreiecke EOQ und POR gleichsinnig ähnlich.

(M. 538.)

Für den Quotienten zweier complexen Zahlen

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

folgt durch Umkehrung der Multiplication

$$1. \qquad \frac{z}{z_1} = \frac{r}{r_1}[\cos(\varphi-\varphi_1) + i\sin(\varphi-\varphi_1)].$$

Insbesondere ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)] = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

5. Haben die complexen Zahlen $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ die Moduln $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$ und die Amplituden $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_n$, so ist nach 3.

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_n = r_1 r_2 r_3 \ldots r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)].$$

Ist insbesondere $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_n$, so ergiebt sich

$$1. \qquad z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Aus

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$$

folgt

$$z^{-n} = r^{-n}[\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)].$$

Daher gilt die Regel: Eine complexe Zahl wird mit einem ganzzahligen Exponenten potenzirt, indem man den Modul potenzirt und die Amplitude mit dem Exponenten multiplicirt.

Die Aufgabe: Die $n$te Wurzel einer complexen Zahl $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ zu bestimmen, ist nun sofort gelöst; die n verschiedenen Lösungen sind

$$\sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2 \ldots (n-1).$$

Insbesondere sind die complexen $n$ten Wurzeln der positiven realen Einheit

$$\varepsilon_k = \cos k\frac{2\pi}{n} + i\sin k\frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots (n-1).$$

Die complexen $n$ten Wurzeln von z können dargestellt werden, indem man die Wurzel

$$\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right), \quad \varphi < 2\pi$$

mit den complexen $n$ten Wurzeln der Einheit der Reihe nach multiplicirt. Ferner folgt noch, dass die oben gegebene Regel für die Potenz einer complexen Zahl auch für gebrochene Exponenten gilt.

Ein irrationaler Exponent p ist Grenzwerth einer Reihe von rationalen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ und man hat

$$p = \alpha_n + \rho_n,$$

wobei ρ_n sich der Grenze Null nähert, wenn n unendlich wächst.

Wendet man die Regel $z^{\alpha+\rho} = z^\alpha \cdot z^\rho$ auch auf ein irrationales ρ an, so ist

$$z^p = r^{\alpha_n}(\cos \alpha_n \varphi + i \sin \alpha_n \varphi) \cdot z^{\rho_n}.$$

Geht man zur Grenze $n = \infty$ über, so verschwindet ρ_n; da nun

$$\lim z^{\rho_n} = 1, \quad \lim \alpha_n = p,$$

so folgt

$$z^p = r^p(\cos p\varphi + i \sin p\varphi).$$

Die Regel für die Potenz einer complexen Zahl gilt also auch für irrationale Exponenten. Die Ausdehnung des Begriffes Potenz auf complexe Exponenten wird erst im Verlaufe späterer Betrachtungen gewonnen werden.

6. Das bisher Mitgetheilte gestattet uns, den Begriff einer algebraischen Function einer complexen Variabeln zu bilden. Unter einer ganzen rationalen algebraischen Function $n$ten Grades der complexen Variabeln z versteht man die Grösse

$$s = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$

wobei $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ gegebene reale oder complexe Zahlen sind. Unter einer algebraischen Function von z im weitesten Sinne versteht man eine Grösse s, deren Zusammenhang mit z durch das Verschwinden einer in Bezug auf s und z ganzen und rationalen Function hergestellt wird. Eine algebraische Function wird also durch eine Gleichung von der Form definirt

$$\varphi(s, z) \equiv A_0 s^n + A_1 s^{n-1} + A_2 s^{n-2} + \ldots + A_{n-1} s + A_n = 0,$$

wo $A_0, A_1 \ldots A_n$ ganze rationale Functionen der Variabeln z sind. Man sieht hieraus sofort: Ist s eine algebraische Function von z, so ist auch z eine algebraische Function von s.

7. Ist die Gleichung

$$\varphi(s, z) = 0$$

in Bezug auf s vom Grade n, so gehören zu jedem Werthe von z n im Allgemeinen von einander verschiedene Werthe von s.

Dieser algebraische Fundamentalsatz wird in den Elementen der Algebra gewöhnlich nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass die Coefficienten A_0, $A_1 \ldots A_n$ reale Zahlen sind; da wir ihn im Folgenden ganz allgemein zu verwenden haben, so mag ein von der genannten Beschränkung befreiter Beweis hier statt haben.

Man denke sich für z in die Function $\varphi(s, z)$ einen gegebenen Werth $a + bi$ eingesetzt. Setzt man nun für s einen veränderlichen Werth

$$s = \xi + \eta i,$$

so erhält man

$$\varphi(s) = M + Ni;$$

hierbei sind M und N Functionen von ξ und η. Das Quadrat des Modul von $\varphi(s)$, $M^2 + N^2$, kann nicht negativ werden, muss also für einen oder mehr als einen Werth von s einen Minimalwerth erhalten, der Null oder positiv ist; die diesem Minimalwerthe zugehörigen Werthe von M, N, ξ und η seien M_0, N_0, ξ_0, η_0. Es sei nun ρ eine Wurzel einer Einheit, und ω eine reale Zahl; man ersetze in $\varphi(s)$ die Zahl s durch $\xi_0 + i\eta_0 + \rho\omega$ und erhalte dadurch

$$\varphi(\xi_0 + i\eta_0 + \rho\omega) = P + Qi.$$

Dieser Ausdruck ist in Bezug auf $\rho\omega$ eine ganze Function $n$ten Grades; er enthält in jedem Falle das Glied $\rho^n\omega^n$; ob auch die Glieder mit $\rho\omega$, $\rho^2\omega^2$, $\rho^3\omega^3 \ldots$

$\rho^{n-1}\omega^{n-1}$ vollzählig vorhanden sind, hängt von besonderen Umständen ab; es können im gegebenen Falle sehr wohl einige davon, — oder auch alle — fehlen. Gesetzt nun, es sei $\rho^k\omega^k$ die niedrigste Potenz von $\rho\omega$, welche in dieser Entwicklung vorkommt, so erhält man für $\rho\,(\xi_0 + \eta_0 i + \rho\omega)$ einen Ausdruck von der Form

$$M_0+N_0 i+(M_k+N_k i)(\rho\omega)^k+(M_{k+1}+N_{k+1}i)(\rho\omega)^{k+1}+\ldots+(M_n+N_n i)(\rho\omega)^n.$$

Den Anfang macht $M_0 + N_0 i$, da $\varphi\,(s)$ nach der Voraussetzung diesen Werth annimmt, wenn man $\omega = 0$ setzt.

Wir setzen nun zunächst $\rho^k = \varepsilon$, wobei wir unter ε eine reale Einheit verstehen wollen, und dann $\rho^k = \varepsilon i$. Diese Substitutionen liefern die Resultate

$$M_0 + \varepsilon M_k\omega^k + \ldots + i(N_0 + \varepsilon N_k\omega^k + \ldots),$$

bez.

$$M_0 - \varepsilon N_k\omega^k + \ldots + i(N_0 + \varepsilon M_k\omega^k + \ldots),$$

wobei die nur angedeuteten Glieder Potenzen von ω enthalten, deren Exponenten grösser als k sind. Die Quadrate der Moduln dieser beiden complexen Grössen sind, nach Potenzen von ω geordnet.

$$M_0^2 + N_0^2 + 2\varepsilon(M_0 M_k + N_0 N_k)\omega^k + \ldots$$

bez.

$$M_0^2 + N_0^2 + 2\varepsilon(N_0 M_k - M_0 N_k)\omega^k + \ldots$$

Man wähle nun ε in jeder der beiden Entwicklungen so, dass die mit ω^k multiplicirten Glieder negativ ausfallen. Angenommen, die beiden Binome

$$M_0 M_k + N_0 N_k \text{ und } N_0 M_k - M_0 N_k$$

wären von Null verschieden, so könnte man die reale Zahl ω immer so klein wählen, dass die Polynome

$$2\varepsilon(M_0 M_k + N_0 N_k)\,\omega^k + \ldots \text{ und } 2\varepsilon(N_0 M_k - M_0 N_k)\,\omega^k + \ldots$$

dieselben Vorzeichen haben, wie ihre ersten Glieder

$$2\varepsilon(M_0 M_k + N_0 N_k)\,\omega^k \quad \text{bez.} \quad 2\varepsilon(N_0 M_k - M_0 N_k)\,\omega^k,$$

also negativ sind. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass

$$M_0^2 + N_0^2$$

der kleinstmögliche Werth des Quadrats des Modul von $\varphi(s)$ ist. Folglich können $M_0 M_k + N_0 N_k$ und $M_0 N_k - N_0 M_k$ nicht von Null verschieden sein. Aus

$$M_0 M_k + N_0 N_k = 0, \quad M_0 N_k - N_0 M_k = 0$$

folgt

$$(M_0 M_k + N_0 N_k)^2 + (M_0 N_k - N_0 M_k)^2 = (M_0^2 + N_0^2)\cdot(M_k^2 + N_k^2) = 0.$$

Da nun nach der Voraussetzung $M_k^2 + N_k^2$ von Null verschieden ist, so folgt schliesslich

$$M_0^2 + N_0^2 = 0.$$

Es giebt daher wenigstens einen Werth von s, für welchen der Modul von $\varphi(s)$, d. i. $\varphi(s)$ selbst verschwindet.

Sei σ_1 eine Wurzel der Gleichung

$$\varphi(s) = 0;$$

bildet man die Identität

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \varphi(s) - \varphi(\sigma_1)\\ &= A_1(s^n - \sigma_1^n) + A_2(s^{n-1} - \sigma_1^{n-1}) + \ldots + A_{n-1}(s - \sigma_1),\end{aligned}$$

so erkennt man, dass $\varphi(s)$ durch die Differenz $s - \sigma_1$ ohne Rest theilbar ist; man hat daher

$$\varphi(s) = (s - \sigma_1)(B_0 s^{n-1} + B_1 s^{n-2} + B_2 s^{n-3} + \ldots + B_{n-1}),$$

worin $B_0, B_1, \ldots B_{n-1}$ aus $A_0, A_1, \ldots A_n$ und σ_1 zusammengesetzt sind. Jede ganze Function $n$ten Grades von s lässt sich also in das Produkt einer linearen Function und einer ganzen Function $(n-1)$ten Grades zerfällen. Zerfällt man unter Anwendung dieses Satzes die ganze Function

$$B_0 s^{n-1} + B_1 s^{n-2} + B_2 s^{n-3} + \ldots + B_{n-1}$$

u. s. f., so erhält man: Jede ganze algebraische Function $n$ten Grades einer Variabeln ist das Produkt von n linearen Functionen.

Der soeben gegebene Satz ist von dem folgenden nicht verschieden: Jede Gleichung $n$ten Grades mit einer Unbekannten hat n Wurzeln, von denen mehrere zusammenfallen können.

Aus der Zerlegung der Function $n$ten Grades $\varphi(s)$ in n lineare Faktoren erkennt man zugleich, dass die Gleichung $\varphi(s) = 0$ nicht mehr als n reale oder complexen Wurzeln haben kann.

Wenn eine Gleichung $n$ten Grades nur reale Coefficienten hat und eine complexe Wurzel zulässt, so hat sie bekanntlich auch die conjugirt complexe Wurzel. Dieser Satz gilt für Gleichungen mit complexen Coefficienten nicht. Man übersieht dies sofort, wenn man in der Gleichung $n$ten Grades

$$(s-a)(s-b) \ldots . (s-n) = 0$$

für die n Grössen $a, b, c \ldots n$ beliebig gewählte reale oder complexe Zahlen setzt; denn man erhält dann eine Gleichung $n$ten Grades für s, deren complexe Wurzeln in keiner Weise von einander abhängig sind.

8. Wir schliessen hieran eine Bemerkung über die Zerlegung einer echt gebrochenen Function in Partialbrüche.

In § 3, No. 2 ist die Zerlegung einer echt gebrochenen realen Function gezeigt worden, unter der Voraussetzung, dass der Nenner keine mehrfachen Faktoren hat. Das dort gewonnene Resultat

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{x-\xi_1} + \frac{A_2}{x-\xi_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-\xi_n}, \qquad A_k = \frac{\psi(\xi_k)}{\varphi'(\xi_k)},$$

lässt sich ohne Weiteres auf den Fall complexer Functionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ ausdehnen. Dasselbe gilt von der Zerlegungsmethode § 3, No. 3, für den Fall, dass $\varphi(x)$ mehrfache Faktoren hat.

Die in § 3, No. 4 gegebene Methode für den Fall mehrfacher complexer Wurzeln hat bei complexen Functionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ keine Anwendung; es bewendet hier bei der in No. 3 gegebenen Zerlegung.

9. Alle weiteren Functionen, die wir betrachten, werden in bestimmter Weise aus algebraischen Functionen abgeleitet. Einige auf Functionen einer complexen Variabeln bezügliche Sätze, die wir nun mittheilen wollen, gelten für alle diese Functionen unabhängig von ihrer besonderen Natur.

10. Bevor wir zu diesen Sätzen übergehen, muss noch eine andere wichtige Frage erledigt werden.

Die geometrische Darstellung einer realen Function $f(x)$ einer realen Variabeln x erfolgt, indem man x als Abscisse und $f(x)$ als Ordinate am einfachsten in einem rechtwinkeligen Coordinatensysteme betrachtet; die Curve $y = f(x)$ giebt dann ein anschauliches, viele Untersuchungen wesentlich erleichterndes Bild des Functionsverlaufs. Eine dem entsprechende Darstellung complexer Functionen einer complexen Variabeln ist offenbar nicht möglich; denn die complexe Variable ist nicht auf einer Geraden, sondern nur auf einem Gebiete zweier Dimensionen darstellbar, und eine Function derselben ist im Allgemeinen wieder complex (nur für einzelne Werthe real oder rein imaginär), also wieder von zwei Dimensionen. Um den Zusammenhang einer complexen Function mit der Variabeln anschaulich zu machen, hat man folgenden Weg eingeschlagen.

Man verwendet zwei Ebenen, eine Variabelnebene und eine Functionsebene. Die Punkte der ersteren stellen die Werthe der Variabeln dar;

durchläuft die Variable z eine Reihe von complexen Werthen, so durchläuft der zugehörige Punkt der Variabelnebene, den wir der Einfachheit wegen auch mit z bezeichnen wollen, eine gewisse Curve. Zu jedem Werthe der Variabeln z gehört ein oder gehören einige bestimmte Werthe der Function $w = f(z)$. Den Zahlpunkt w, bez. die Gruppe von Zahlpunkten w suche man nun auf der Functionsebene auf; man erhält so einen Functionspunkt, oder eine Gruppe von Functionspunkten, die wir als dem variabeln Punkte z entsprechend bezeichnen. Bewegt sich nun z auf der Variabelnebene, so bewegen sich die entsprechenden Functionspunkte auf der Functionsebene; während aber die Bewegung von z ganz willkürlich ist, hängen die Wege der Functionspunkte von den Wegen von z und dem Functionszusammenhange $\varphi(z)$ ab.

Die Punkte der Variabelnebene und die Punkte der Functionsebene stehen somit in einer geometrischen Verwandtschaft.

Aus rein geometrischem Interesse haben wir einen einfachen Fall punktverwandter Ebenen schon kennen gelernt, die Collineation, und ihre besondern Fälle, die Affinität und die Aehnlichkeit. Die complexen Functionen geben zur Untersuchung mannigfaltiger Punktverwandtschaften Veranlassung; es wird sich beiläufig zeigen, dass die allgemeine Collineation unter diesen Verwandtschaftsarten sich nicht befindet, wohl aber die Affinität.

11. Wir geben hierzu zwei einfache Beispiele.

A. Ist

$$w = \frac{1}{z},$$

und sind x, y die Coordinaten des Punktes z in der Variabelnebene, u, v die Coordinaten von w in der Functionsebene, so ist

$$u + vi = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}.$$

Also ist

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Um eine Vorstellung von der Verwandtschaft der beiden Ebenen zu erhalten, wollen wir in der Functionsebene die Linien aufsuchen, die den Parallelen zur realen und imaginären Achse in der Variabelnebene entsprechen, d. i. die Curven, welche der Punkt w zurücklegt, wenn z die Parallelen zu den Achsen durchläuft. Für eine Parallele zur imaginären Achse ist x constant, y willkürlich; daher erfüllen u und v die Gleichung

$$1. \qquad \frac{u}{u^2 + v^2} = x, \quad \text{oder} \quad u^2 + v^2 - \frac{1}{x}u = 0,$$

worin x eine gegebene Zahl ist.

Für eine Parallele zur Abscissenachse ist y constant; die Coordinaten der zugehörigen Functionspunkte erfüllen also die Gleichung

$$2. \qquad -\frac{v}{u^2 + v^2} = y, \quad \text{oder} \quad u^2 + v^2 + \frac{1}{y}v = 0.$$

Die Curven 1. bilden ein Kreisbüschel, dessen Centrale die U-Achse ist und dessen Kreise die V-Achse berühren; die Curven 2. bilden ebenfalls ein Kreisbüschel, die Centrale ist die V-Achse und die Kreise berühren die U-Achse. Die Büschel sind orthogonal, d. h. jeder Kreis des einen wird von jedem des andern unter rechten Winkeln geschnitten.

Sind Modul und Amplitude von s und z die Grössen R, Φ, r, φ, so ist

$$R = \frac{1}{r}, \quad \Phi = -\varphi.$$

Einem constanten Werthe von r entspricht ein constanter von R, d. i.: Einem Kreise um den Nullpunkt in der Variabelnebene entspricht ein Kreis um den Nullpunkt in der Functionsebene; die Radien zweier entsprechenden Kreise sind reciprok. Einem Strahle durch den Nullpunkt in der variabeln Ebene entspricht ein Strahl durch den Nullpunkt in der Functionsebene; zwei entsprechende Strahlen bilden entgegengesetzt gleiche Winkel mit den realen Achsen.

B. Ist $w = z^2$, also $u + vi = x^2 - y^2 + 2xyi$, so ist

$$3. \qquad u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Durchläuft z eine Parallele zur Y-Achse, so ist x constant und y veränderlich. Die Gleichungen 3. ergeben die Gleichung der entsprechenden Curve der Functionsebene, wenn y aus beiden Gleichungen eliminirt wird. Man erhält

$$4. \qquad v^2 = 4x^2(x^2 - u).$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel; die Symmetrieachse derselben fällt in die u-Achse, der Brennpunkt in den Nullpunkt, der Parameter ist $2x^2$, und die Parabel erstreckt sich entlang der negativen Seite der u-Achse.

Einer Parallelen zur realen Achse der Variabelnebene entspricht in der Functionsebene eine Curve, deren Gleichung aus 3. erhalten wird, wenn man y constant annimmt und die Variable x eliminirt; es ergiebt sich

$$5. \qquad v^2 = 4y^2(y^2 + u).$$

Dies ist eine Parabel, deren Achse ebenfalls mit der u-Achse, deren Brennpunkt mit dem Nullpunkte zusammenfällt; der Parameter ist $2y^2$; die Parabel erstreckt sich in der Richtung der positiven u-Achse.

Die Parabelschaaren 4. und 5. sind confocal; jede Parabel der einen Schaar wird von jeder der andern Schaar unter rechten Winkeln geschnitten.

Modul und Amplitude von s hängen jetzt mit dem Modul und der Amplitude der Variabeln durch die Gleichungen zusammen

$$R = r^2, \quad \Phi = 2\varphi.$$

Einem Kreise um den Nullpunkt in der z-Ebene entspricht also ein Kreis um den Nullpunkt in der w-Ebene; einem Strahle durch den Nullpunkt in der z-Ebene entspricht ein Strahl durch den Nullpunkt der w-Ebene; der Winkel, den letzterer mit der ξ-Achse bildet, ist doppelt so gross als der Winkel des entsprechenden Strahls mit der x-Achse.

12. Jede Function von $z = x + iy$ kann man auf die Form bringen

$$w = \varphi(z) = u + vi,$$

wobei u und v reale Functionen von x und y sind. Aber nicht jeder Ausdruck $u + vi$, worin u und v Functionen x und y sind, ist eine Function der complexen Variabeln $z = x + yi$. Man hat nämlich

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz}$$

und

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dw}{dz} i,$$

mithin ist

$$1. \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x},$$

d. i.

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = i \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vergleicht man beiderseits die realen und imaginären Bestandtheile, so erhält man die Gleichungen

2. $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Diese Gleichungen sind also erfüllt, wenn $u + vi$ eine Function der complexen Variabeln z ist.

Es lässt sich leicht umgekehrt zeigen, dass jeder Ausdruck $u + vi$, welcher der Gleichung 1. genügt, eine Function von z ist.

Gesetzt, $w = u + vi$ erfüllt die Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Man ersetze x in w durch $z - yi$; das Ergebniss dieser Substitution werde mit (w) bezeichnet. Alsdann ist

$$\frac{\partial(w)}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}.$$

Aus $x = z - yi$ folgt $\partial x : \partial y = -i$; daher erhält man

$$\frac{\partial(w)}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} - i\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Da nun 1. erfüllt ist, so hat man

$$\frac{\partial(w)}{\partial y} = 0.$$

Folglich ist (w) von y unabhängig, mithin eine Function von z, d. i. von $x + yi$. Wir schliessen daher: Die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass der complexe x und y enthaltende Ausdruck $w = u + iv$ eine Function von $z = x + yi$ ist, wird durch die Gleichung ausgesprochen

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}.$$

13. Ist w eine Function von z, und W eine Function von w, so ist W eine Function von z.

Da W nach der Voraussetzung nur von w abhängt, so ist

1. $$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{dW}{dw} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{dW}{dy} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Da ferner nach der Voraussetzung w eine Function von z ist, so ist

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x};$$

führt man dies in 1. ein, so erhält man

$$\frac{\partial W}{\partial y} = i\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

14. Ist w eine Function von z, so ist umgekehrt auch z eine Function von w.

Das vollständige Differential von w ist

1. $$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy.$$

Da nun $\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}$, so erhält man aus 1.

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}(dx + idy) = \frac{\partial w}{\partial x} dz.$$

Daher ist

2. $$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = i\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Hieraus folgt

$$dz = \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial x}} dw = \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial x}} (du + i dv).$$

Mithin hat man für die partialen Differentialquotienten von z nach u und v

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial x}}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = i \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial x}},$$

daher ist

$$\frac{\partial z}{\partial v} = i \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

15. Aus der Gleichung No. 14, 2. folgt der wichtige Satz, dass der Differentialquotient einer Function einer complexen Variabeln nicht von dem Verhältnisse abhängt, in welchem sich x und y ändern, denn $\frac{\partial w}{\partial x}$ enthält nur die Variabeln x und y, nicht aber das Verhältniss $dy : dx$.

Soll z eine verschwindend kleine Aenderung erfahren, so kann dies auf unendliche vielfache Weise geschehen, denn man kann den Punkt z nach allen möglichen Richtungen hin in der Functionsebene eine verschwindend kleine Verschiebung ertheilen. Zu jeder solchen unendlich kleinen Verschiebung dz von z gehört eine bestimmte, unendlich kleine Verschiebung dw des entsprechenden Punktes w in der Functionsebene; das Verhältniss $dw : dz$ ist aber von der Richtung der Verschiebung von z unabhängig.

16. Der Differentialquotient von w ist eine Function von z, denn es ist

$$\frac{\partial w'}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{dw}{dz} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{dw}{dz} = i \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Daher hat man

$$\frac{\partial w'}{\partial x} = i \frac{\partial w'}{\partial x}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

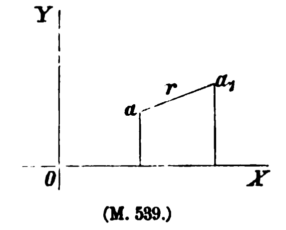
Man schliesst nun sofort weiter, dass auch alle höhern Differentialquotienten von w Functionen von z sind.

17. Setzt man

$$a = \alpha + \beta i \quad \text{und} \quad a_1 = \alpha_1 + \beta_1 i,$$

so ist

$$a_1 - a = \alpha_1 - \alpha + (\beta_1 - \beta) i.$$

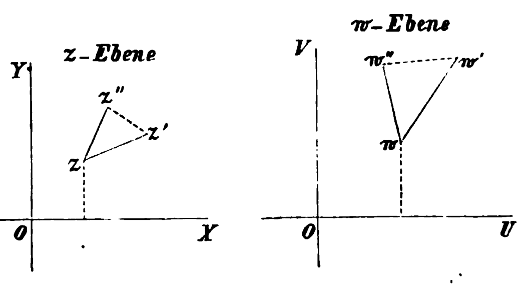


(M. 539.)

Der Modul der Differenz ist daher gleich dem Abstande r der Zahlpunkte a und a_1 und die Amplitude ist gleich der Winkel φ dieser Strecke mit der positiven realen Achse; man hat daher

$$a_1 = a + r(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Wir ertheilen nun der Variabeln z zwei verschiedene verschwindend kleine Verschiebungen, durch welche sie nach z' und z'' gelange; durch die entsprechenden Verschiebungen komme die Function von w nach w' und w''. Bezeichnet man die verschwindend kleinen Moduln der Differenzen $z' - z$,



(M. 540.)

$z'' - z$, $w' - w$, $w'' - w$ der Reihe nach mit r', r'', ρ', ρ'', die Amplituden mit φ', φ'', ψ', ψ'', so ist

$$z' - z = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'), \quad z'' - z = r''(\cos\varphi'' + i\sin\varphi''),$$
$$w' - w = \rho'(\cos\psi' + i\sin\psi'), \quad w'' - w = \rho''(\cos\psi'' + i\sin\psi'').$$

Da nun nach No. 14, 2 das Verhältniss einer unendlich kleinen Veränderung der Variabeln zu der zugehörigen Veränderung der Function von der Richtung, in der die Variable sich ändert, nicht abhängt, so ist

$$\frac{z' - z}{w' - w} = \frac{z'' - z}{w'' - w}, \quad \text{oder} \quad \frac{z' - z}{z'' - z} = \frac{w' - w}{w'' - w}.$$

Führt man hier die obigen Werthe ein, so ergiebt sich

$$\frac{r'}{r''}[\cos(\varphi' - \varphi'') + i\sin(\varphi' - \varphi'')] = \frac{\rho'}{\rho''}[\cos(\psi' - \psi'') + i\sin(\psi' - \psi'')].$$

Vergleicht man beiderseits das Reale und Imaginäre, so erhält man

$$r' : r'' = \rho' : \rho'', \quad \varphi' - \varphi'' = \psi' - \psi''.$$

Hieraus ergiebt sich, dass die verschwindend kleinen Dreiecke $zz'z''$ und $ww'w''$ gleichsinnig ähnlich sind.

Beschreibt die Variable um den Punkt z herum ein verschwindend kleines Polygon, so beschreibt die Function um den Punkt w herum ein entsprechendes Polygon; verbindet man die Ecken beider Polygone mit z bez. w, so zerfallen sie in lauter ähnliche Dreiecke und man erkennt, dass beide Polygone ähnlich sind. Man gewinnt so den Satz: Die Verwandtschaft der Variabelnebene mit der Functionsebene ist eine solche, dass entsprechende unendliche kleine Figuren beider Ebenen einander ähnlich sind. Insbesondere ergiebt sich hieraus, dass zwei Curven der z-Ebene sich unter denselben Winkeln schneiden, wie die entsprechenden Curven der w-Ebene.

18. Nur in einzelnen Punkten, für vereinzelte Werthe der Variabeln und der Function, erleiden diese Betrachtungen eine Ausnahme, nämlich in den Punkten z und w, für welche

$$\frac{dw}{dz} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{dw}{dz} = \infty;$$

denn aus keinem der beiden Gleichungspaare

$$\frac{w' - w}{z' - z} = 0, \quad \frac{w'' - w}{z'' - z} = 0,$$

bez.

$$\frac{w' - w}{z' - z} = \infty, \quad \frac{w'' - w}{z'' - z} = \infty$$

kann man den Schluss ziehen

$$\frac{w' - w}{w'' - w} = \frac{z' - z}{z'' - z}.$$

Ist z. B. $w = 1 : z$, so hat man $dw : dz = -1 : z^2$; dieser Ausdruck wird Null für $z = \infty$ und unendlich für $z = 0$. Die Aehnlichkeit unendlich kleiner Figuren findet also allenthalben statt, ausser in den Punkten der w-Ebene, die dem Nullpunkte und den unendlich fernen Punkten der z-Ebene entsprechen, es sind dies die unendlich fernen Punkte und der Nullpuukt der w-Ebene.

Für $w = z^2$ ist die derivirte Function $dw : dz = 2z$, und wird mit z Null und unendlich; in der unendlich nahen Nachbarschaft der jetzt sich entsprechenden unendlich fernen Punkte findet Aehnlichkeit nicht statt.

19. Wenn zu jedem Werthe der Variabeln z nur ein Werth der Function w gehört, so nennt man die Function einwerthig; aus diesem Begriffe folgt, dass eine einwerthige Function Unterbrechungen der Stetigkeit nur an solchen

Punkten erleiden kann, in denen sie unendlich gross wird. Einwerthig sind alle rationalen Functionen. Die ganzen rationalen Functionen werden unendlich nur wenn $z = \infty$ ist; die echt gebrochenen

$$w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

nur für solche Werthe von z, für welche der Nenner $\psi(z)$ verschwindet, die unecht gebrochenen ausserdem noch für $z = \infty$.

20. Gehören zu einem Werthe der Variabeln im Allgemeinen verschiedene Werthe von w, so heisst die Function mehrwerthig, und zwar zwei-, drei-, vierwerthig u. s. w., sobald zu einem z im Allgemeinen zwei, drei, vier u. s. w. verschiedene Werthe von w gehören. Mehrwerthig sind alle irrationalen Functionen; die durch die Gleichung $n$ten Grades für w

$$\varphi(w, z) = 0$$

definirte Function w ist $n$werthig.

Für einzelne Punkte $a_1, a_2, \ldots$ der zEbene können zwei oder mehrere Werthe einer $n$werthigen Function zusammenfallen; diese Punkte heissen die Verzweigungspunkte der mehrwerthigen Function.

Die Function

$$w = \sqrt{z - a}$$

ist zweiwerthig; für $z = a$ werden beide Werthe gleich Null, daher ist dieser Punkt ein Verzweigungspunkt. Die zweiwerthige Function

$$w = \sqrt{(z - a)\,(z - b)}$$

hat die Verzweigungspunkte a und b; die zweiwerthige

$$w = \sqrt{(z - a)(z - b)(z - c)(z - d)}$$

hat vier Verzweigungspunkte, a, b, c, d. Die sechswerthige

$$w = \sqrt[3]{z^2 + az + b} + \sqrt{z}$$

hat drei Verzweigungspunkte; einer ist der Nullpunkt, die andern beiden sind die Wurzeln der Gleichung

$$z^2 + az + b = 0;$$

für $z = 0$ fallen dreimal zwei Werthe von w zusammen, für die Wurzeln von $z^2 + az + b = 0$ zweimal drei Werthe.

21. Wir wollen nun die Variable von einem Anfangswerthe $z = a$ auf irgend einer Curve zu einem Endwerthe $z = b$ führen und die Wege beachten, welche die Function w in der w-Ebene dabei zurücklegt.

Ist w einwerthig, so gehört zu jedem Punkte der z-Ebene nur ein Punkt der w-Ebene, zu jeder Curve der z-Ebene nur eine Curve der w-Ebene. Entsprechen den Punkten a und b der z-Ebene die Punkte a' und b' der w-Ebene, und führt man z auf mehreren verschiedenen Curven von a nach b, so werden die zugehörigen Curven der w-Ebene alle in a' beginnen und b' endigen.

Ein wesentlich anderes Verhalten zeigen die mehrwerthigen Functionen. Sind a und b keine Verzweigungspunkte für die $n$werthige Function w, so gehören zu a und zu b je n verschiedene Punkte $a_1', a_2', \ldots a_n'$ bez. $b_1', b_2', \ldots b_n'$ der w-Ebene. Wird nun z von a entlang der Curve l nach b geführt, so rücken die zugehörigen n-Werthe der Function w von den Lagen $a_1', a_2', \ldots a_n'$ in die Lagen b_1' $b_2', \ldots b_n'$, es entstehen also n Curven, die in $a_1', \ldots a_n'$ beginnen und in $b_1', \ldots b_n'$ endigen; geht z auf einem andern Wege L von a nach b, so beschreibt das System der n Functionswerthe ein anderes System von n Curven, die dieselben Anfänge und dieselben Endpunkte haben, es ist aber sehr wohl möglich, dass die in einem bestimmten Punkte a_i' anfangende Curve bei der zweiten Ueberführung nach einem andern Punkte der Gruppe der b' geht, als

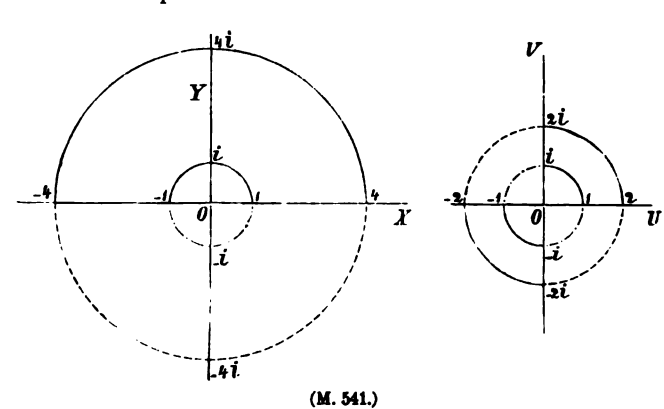
bei der ersten. Achtet man nur auf den Werth w_i der Function, welcher für $z = a$ mit a_i' zusammenfällt, so wird derselbe sich stetig ändern, sowohl wenn z von a auf l nach b, als wenn z auf L geht, im ersten Falle würde alsdann w_i einen andern Endwerth als im letzteren erhalten.

Ein einfaches Beispiel wird dies erläutern.

22. Wir betrachten die Function

$$w = \sqrt{z}.$$

Wie wir schon gesehen haben (No. 11), gehört zu jedem durch den Nullpunkt gehenden Strahle der z-Ebene ein eben solcher der w-Ebene, und jedem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise der z-Ebene entspricht ein Kreis der w-Ebene, der ebenfalls den Nullpunkt zum Centrum hat. Dem Punkte $z = 4$ entsprechen die Punkte $w_1 = 2$ und $w_2 = -2$. Wir führen nun z von 4 aus auf einem Halbkreise in positiver Drehrichtung um den Nullpunkt bis zum Punkte $z = -4$; alsdann geht w_1 auf einem Viertelkreise bis zu $2i$, und w_2 auf einem Viertelkreise bis zu $-2i$, beide in positiver Drehrichtung.



(M. 541.)

Hierauf gehe z von 4 bis -4 auf einem Halbkreise in negativer Drehrichtung. Die Amplituden von w_1 und w_2 ändern sich dann ebenfalls im Sinne der abnehmenden Winkel und es gelangt w_1 nach $-2i$, w_2 nach $2i$.

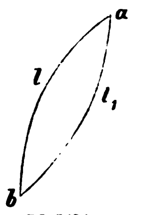
Je nachdem z also auf dem oberen oder dem unteren Halbkreise von $+4$ nach -4 geht, gelangt w_2 durch stetige Aenderungen von $+2$ nach $+2i$ oder $-2i$.

Führt man z in der Richtung der wachsenden Winkel entlang des ganzen Kreises von 4 bis zu 4 zurück, so geht w_1 in dem Halbkreise über $2i$ hinweg bis zu -2; einem geschlossenen Wege von z entspricht also ein nicht geschlossener von w_1. Geht z auf einem andern geeigneten Wege von 4 aus nach 4 zurück, so kann der zugehörige Weg von w_1 ein geschlossener sein. Dies ist z. B. der Fall, wenn z in positiver Drehrichtung den Halbkreis bis -4 zurücklegt, dann entlang der realen Achse bis -1 geht, hierauf in negativer Drehrichtung einen Halbkreis bis $+1$ beschreibt nnd dann auf der realen Achse nach $+4$ zurückkehrt. Denn dann geht w_1 in positiver Drehrichtung auf einem Viertelkreise bis $2i$, dann auf der imaginären Achse bis i, dann in negativer Drehrichtung in einem Viertelkreise bis $+1$, und endlich anf der realen Achse bis $+2$.

Gleichzeitig legt w_2 einen Viertelkreis bis $-2i$, dann die imaginäre Achse bis $-i$, dann einen Viertelkreis bis -1, und endlich die reale Achse bis -2 zurück.

Hätte man z den Halbkreis von -1 nach $+1$ in positiver Drehrichtung beschreiben lassen, so wären w_1 und w_2 von $+i$ und $-i$ auf Viertelkreisen um den Nullpunkt in positiver Drehrichtung weiter gegangen, und es wäre daher w_1 nach -2 und w_2 nach $+2$ gelangt, also n i c h t zu den Ausgangswerthen zurück.

23. Wird die Variable von a nach b entlang l_1 geführt und gelangt ein Functionswerth w_1 dabei von dem Anfangswerthe a' zu dem Endwerthe b', so kommt w_1 umgekehrt von b' nach a', wenn z den Weg l_1 rückwärts von b nach a durchläuft. Gesetzt nun, w_1 gelangt von a' nach b', gleichgültig ob z von a nach b die Wege l oder l_1 wählt. Lässt man dann z von a auf l bis b und dann auf l_1 zurück nach a gehen, so ändert sich w_1 von a' bis zu b' und nimmt am Schlusse wieder den Werth a' an; und umgekehrt: Gelangt w_1 vom Werthe a' aus wieder zu a' zurück, wenn z von a aus die Curven l und l_1 nach einander durchlaufend zu a zurückkehrt und hat w_1 dabei für $z = b$ den Werth b' angenommen, so gelangt w_1 rückwärts vom Werthe a' zum Werthe b', wenn z von a aus die Curve l_1 bis b durchläuft, w_1 nimmt also bei beiden Wegen l und l_1 der Variabeln denselben Endwerth an.



(M. 542.)

Um daher zu erfahren, welche Wege die Variable z von einem Anfangspunkte zu einem Zielpunkte zurücklegen muss, damit w_1 zu demselben oder zu verschiedenen Endwerthen gelange, genügt es, die geschlossenen Wege zu untersuchen.

Erhält w_1 denselben Werth wieder, wenn z auf der aus l und l_1 zusammengesetzten geschlossenen Curve von a ausgehend nach a zurückkehrt, so erhält auch w_1 denselben Werth, wenn z auf l oder auf l_1 von a nach b sich bewegt; und erhält w_1 nicht denselben Werth wieder, wenn z die geschlossene Curve durchläuft, so erhält w_1 einen andern Werth, wenn z von a nach b auf l_1, als wenn es auf l geht.

24. Um bei der irrationalen Function

$$w = \sqrt{z}$$

die geschlossenen Wege, welche die Variabele zurückzulegen hat, damit w_1 wieder zu seinem Ausgangswerthe zurückkehrt, von denen zu unterscheiden, für welche dies nicht der Fall ist, drückt man z durch Modulus und Amplitude aus. Der Modulus ist eine eindeutig bestimmte Zahl; die Amplitude dagegen ist unendlich vieldeutig; ist nämlich φ einer ihrer Werthe, so erhält man die anderen, wenn man φ um ganze Vielfache von 2π vermehrt oder vermindert.

Ist nun
$$z = r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$$
so ist
$$w = \sqrt{r}\cdot\left(cos\,\frac{\varphi}{2} + i\,sin\,\frac{\varphi}{2}\right)$$

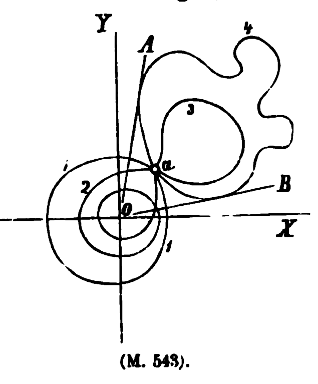
Zu jeder Amplitude gehört hiernach ein ganz bestimmter Werth von w; zu allen Amplituden, die um gerade Vielfache von 2π verschieden sind, gehört ein und derselbe Werth w_1 der zweideutigen Function w, zu den übrigen, die von den ersten um ungerade Vielfache von 2π abweichen, gehört der andere Werth w_2.

Geht nun z von einem Punkte a aus und auf einer beliebigen geschlossenen Curve (1) nach a so zurück, dass dabei die Amplitude um 2π zu- oder abgenommen hat, so hat z den Nullpunkt einmal umkreist, und w ist von dem Werthe

$$w_1 = \sqrt{r}\left(cos\,\frac{\varphi}{2} + i\,sin\,\frac{\varphi}{2}\right)$$

zu dem Werthe

$$\sqrt{r}\left(cos\,\frac{\varphi \pm 2\pi}{2} + i\,sin\,\frac{\varphi \pm 2\pi}{2}\right) = -\,w_1$$



(M. 543).

gelangt, also nicht zum Ausgangswerthe zurück. Läuft hingegen z auf einer geschlossenen Curve (2) so von a nach a zurück, dass die Amplitude um 4π zu oder abnimmt, so endigt w_1 mit dem Werthe

$$\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi\pm 4\pi}{2}+i\sin\frac{\varphi\pm 4\pi}{2}\right),$$

d. i. mit dem Anfangswerthe. Hieraus sieht man: Durchläuft z eine geschlossene Curve, die den Nullpunkt umgiebt, so kommt ein Functionswerth w_1 der zweideutigen Function $\sqrt{z}$ zu dem Ausgangswerthe zurück oder nicht, je nachdem der Weg der Variabeln den Nullpunkt eine gerade oder ungerade Anzahl Male umkreist.

Beschreibt z eine geschlossene Bahn, die den Nullpunkt nicht einschliesst (3, 4), so wächst φ bis zu einem grössten Werthe XOA, erlangt später einen kleinsten Werth XOB, und kehrt dann zum Anfangswerthe zurück; die End-Amplitude ist also mit der Anfangs-Amplitude identisch. Hieraus schliessen wir: Wenn z eine geschlossene Bahn durchläuft, die den Nullpunkt nicht einschliesst, so kehrt w_1 wieder zum Anfangswerthe zurück.

25. Die Thatsache, dass zu jedem Punkte der Variabelnebene zwei Werthe w gehören, und die damit zusammenhängende, dass geschlossene Wege des Variabelnpunkts die Function $\sqrt{z}$ zum Theil wieder zum Ausgangswerthe zurückführen, zum Theil aber nicht, erschweren die weiteren Betrachtungen. Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, hat RIEMANN*) für die mehrwerthigen Functionen statt der Variabelnebene mehrblätterige Flächen angewandt, die nach ihrem Erfinder als RIEMANN'sche Flächen bezeichnet werden.

Für die Function $w = \sqrt{z}$ wird die RIEMANN'sche Variabelnfläche folgendermassen erhalten. Man denke sich eine Schraubenfläche von sehr kleiner Ganghöhe; ihre Achse gehe durch O normal zur XY-Ebene, ihre Spur auf der XY-Ebene mag man sich mit der positiven realen Achse OX zusammenfallend denken. Auf dieser Schraubenfläche durchlaufe man in positiver Richtung von OX beginnend, den ersten und zweiten Umgang, alles andere denke man beseitigt. Der herausgeschnittene Theil hat dann zwei parallele Ränder, die sich von O aus ins Unendliche erstrecken, einer davon ist OX. Nun deuke man sich die Ganghöhe verschwindend klein, und deformire die Fläche an den beiden Rändern so, dass dieselben ihrer ganzen Länge nach vereinigt werden, und somit den ersten Umgang durchdringen. Dabei soll die Beschränkung gelten, dass ein Punkt diese Verwachsungslinie nur überschreiten darf, um vom Ende des zweiten Umgangs zum Anfange des ersten zu gelangen oder umgekehrt, nicht aber so, dass er vom Ende des ersten zum Anfange des ersten, oder umgekehrt, übergeht.

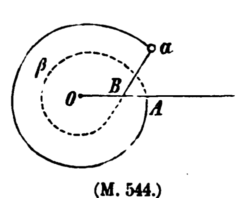
Man erhält somit eine zweiblätterige Fläche, welche die XY-Ebene doppelt bedeckt; die beiden Blätter sind längs der Geraden OX von O anfangend verwachsen; diese Linie darf ein Punkt nur so überschreiten, dass er von dem vorderen Theile des oberen Blattes in den hintern Theil des unteren oder von dem hintern Theile des obern in den vordern Theil des unteren übergeht oder umgekehrt. Jeder Punkt a der XY-Ebene ist die Projection zweier in verschiedenen Blättern

*) RIEMANN's gesammelte math. Werke, herausgeg. von H. WEBER, Leipzig 1876, Abhandlung I. und VI.; die Abhandl. VI. findet sich auch in CRELLE's Journal, Bd. 54 (1857), pag. 101; vergl. auch ROCH, Ueber Functionen complexer Grössen, SCHLOEMILCH's Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 8. (1863), pag. 12 u. 183.

liegenden Punkte α_1 und α_2 der zweiblätterigen Variabelnfläche; diese beiden Punkte haben denselben Modulus, ihre Amplituden sind um 2π verschieden*).

Will man von einem Punkte α des obern Blattes auf der Fläche nach einem Punkte β des untern gelangen, so muss man den Windungspunkt O wenigstens einmal umkreisen. Der Weg ist sichtbar bis zum Punkte A, wo er die Verwachsung überschreitet und ins andere Blatt gelangt; von da an ist er verdeckt.

Wenn man von α ausgeht und den Nullpunkt zweimal umkreist, so kommt man ins obere Blatt zurück. Will man von α ausgehend eine geschlossene Linie beschreiben, so darf dieselbe den Windungspunkt nicht einschliessen, oder muss ihn zweimal, oder viermal, oder überhaupt eine gerade Anzahl Male umkreisen.



(M. 544.)

Man setze nun fest, dass für irgend einen von O verschiedenen Punkt α der RIEMANN'schen Fläche die Function $w = \sqrt{\alpha}$ den einen ihrer Werthe w_1 (und nicht den entgegengesetzt gleichen w_2) haben soll; da nun jede geschlossene Curve auf der Fläche den Windungspunkt gar nicht oder eine gerade Anzahl Male umkreist, so folgt, dass der Werth, den $\sqrt{z}$ in jedem Punkte annimmt, unabhängig von dem Wege ist, auf welchem die Variable zu diesem Punkte von α ansgehend gelangt; die Function $\sqrt{z}$ ist also eine eindeutige Function der Punkte der zweiblätterigen Fläche.

Dieselbe Fläche dient dazu, die Function

$$w = \sqrt{az + b}$$

als eindeutige Function des Ortes in der Fläche darzustellen; nur hat man den Windungspunkt in den Punkt $-b:a$ zu verlegen.

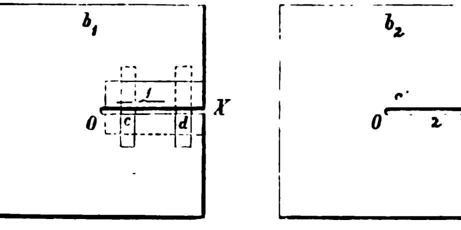
26. Wir construiren nun eine zweiblätterige RIEMANN'sche Variabelnfläche, für welche die Function

$$w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

eine eindeutige Function des Ortes in der Fläche ist; wir setzen dabei voraus, dass a und b verschieden sind. Bezeichnet man in der Variabelnebene die Abstände der Punkte a und b von dem variabeln Punkte z mit R und r und die Winkel dieser Geraden und der X-Achse mit Φ und φ, so ist

$$w = \sqrt{R}\left(\cos\frac{\Phi}{2} + i\sin\frac{\Phi}{2}\right)\cdot\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

*) Um ein anschauliches Modell eines Theiles dieser Fläche zu erhalten, schneide man zwei gleiche Stücke Papier b_1 und b_2 und zerschneide sie entlang OX; hierauf lege man sie so auf einander, dass die Schnitte sich decken, und verbinde durch Ueberkleben mit einem Streifen Papier den Rand 1. des obern Blattes mit 2. des unteren. An den Stellen c und d mache man entlang OX kleine Schnitte in den verbindenden Streifen, und schiebe durch dieselbe schmale Papierstreifchen, durch die man nun bei c und c' bez. d und d' durch Ankleben den vordern Rand des obern mit dem hintern Rande des untern verbindet. Die Vorschrift über das Ueberschreiten der Verwachsung findet dann ihren deutlichen Ausdruck darin, dass man auf dem langen Streifen nur von oben 1 nach unten 2, auf den schmalen Stegen nur von oben c und d nach unten c' und d', oder umgekehrt, gelangen kann.



(M. 545.)

Geht nun z von einem Punkte z_0 aus, und auf einer Curve wieder nach z_0 zurück, so erlangt der Faktor

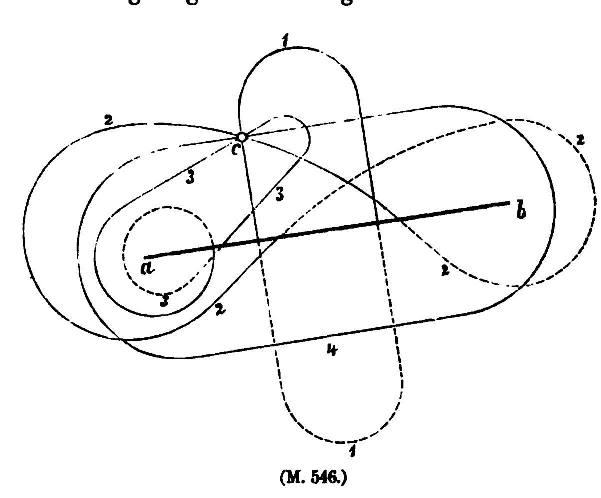
$$\sqrt{R}\cdot\left(\cos\frac{\Phi}{2}+i\sin\frac{\Phi}{2}\right)$$

seinen Ausgangswerth wieder, oder den entgegengesetzt gleichen, je nachdem der Weg des z den Punkt a eine gerade Anzahl Male (Null mit eingerechnet) umkreist, oder eine ungerade; ebenso erreicht dabei der andere Faktor

$$\sqrt{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

seinen Ausgangswerth oder nicht, je nachdem der Punkt b eine gerade oder ungerade Anzahl Male von z umkreist wird. Wenn beide Faktoren ihren Anfangswerth nicht erreichen, also beide am Ende des Weges Werthe angenommen haben, die den Anfangswerthen entgegengesetzt gleich sind, so hat sich ihr Produkt nicht geändert, w also den Ausgangswerth wieder erreicht. Daher erkennt man, dass w den Ausgangswerth wieder erreicht oder nicht, je nachdem der Weg der Variabeln die beiden Punkte a und b zusammengenommen eine gerade Anzahl Male umkreist, oder eine ungerade.

Hiernach ergiebt sich folgende dem Zwecke genügende RIEMANN'sche Variabelnfläche: Man decke zwei Ebenen auf einander und denke sich dieselben entlang der Geraden ab so verwachsen, dass man von einem Rande der Geraden auf den andern nicht übertreten kann, ohne dabei von dem obern Blatte ins untere zu gelangen oder umgekehrt. Auf dieser Fläche kann man von einem Punkte c aus nur auf solchen Wegen zu c zurückgelangen, die keinen der Windungspunkte a und b umkreisen (z. B. Weg 1), oder einen nach dem andern jeden einmal umkreisen (Weg 2), oder die einen zweimal umkreisen (Weg 3) oder die beide zusammen einmal umkreisen (Weg 4), oder auf Wegen, die sich aus Wegen dieser vier Arten zusammensetzen lassen; in jedem dieser Fälle erlangt w wieder seinen Ausgangswerth.



(M. 546.)

Ist nun festgesetzt, welchen Werth w für irgend einen Punkt z_0 der zweiblätterigen Fläche haben soll, so ist der Werth in jedem Punkt z_1 eindeutig bestimmt durch die Aenderung, die w erleidet, wenn z auf irgend welchem Wege auf der Fläche von z_0 nach z_1 geht.

27. Bezeichnet man für die Function

$$w=\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$$

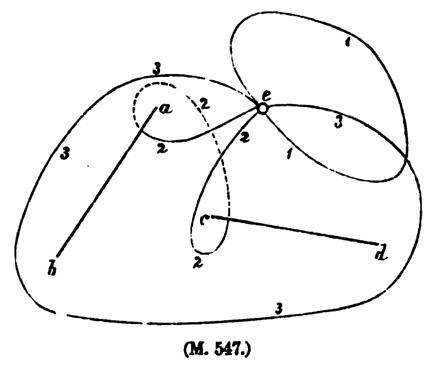
mit r_1, r_2, r_3, r_4 die Abstände der Punkte a, b, c, d vom variabeln Punkte z und mit φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 die Winkel der Geraden r_1, r_2, r_3, r_4 mit der positiven realen Achse, so ist

$$w = \sqrt{r_1}\left(\cos\frac{\varphi_1}{2} + i\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)\cdot\sqrt{r_2}\left(\cos\frac{\varphi_2}{2} + i\sin\frac{\varphi_2}{2}\right)$$
$$\cdot\sqrt{r_3}\left(\cos\frac{\varphi_3}{2} + i\sin\frac{\varphi_3}{2}\right)\cdot\sqrt{r_4}\left(\cos\frac{\varphi_4}{2} + i\sin\frac{\varphi_4}{2}\right).$$

Beschreibt z auf der Variabeln-Ebene von z_0 aus eine geschlossene Curve, die den Punkt a eine gerade bez. ungerade Anzahl Male umkreist, so bekommt der Faktor

$$\sqrt{r_1}\left(\cos\frac{\varphi_1}{2} + i\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)$$

seinen Ausgangswerth, bez. den entgegengesetzt gleichen, und umgekehrt; das Entsprechende gilt für die übrigen Faktoren von w. Wenn daher z eine Bahn beschreibt, die alle die vier Punkte zusammengenommen eine gerade Anzahl Male umkreist, so erlangt w wieder seinen Ausgangswerth; ist aber die Summe der Umkreisungen aller vier Punkte ungerade, so erlangt w nicht den Ausgangswerth wieder. Hieraus erkennt man, dass w eine eindeutige Function des Ortes der Variabelnfläche wird, wenn man dieselbe folgendermaassen construirt: Man legt zwei Ebenen auf einander, und lässt diese entlang einer Geraden verwachsen, die zwei von den Punkten a, b, c, d verbindet, sowie auf der Geraden zwischen den beiden andern; diese beiden Verwachsungen sollen so gewählt sein, dass sie sich nicht schneiden. Betreffs der Ueberschreitung der Verwachsungen sollen dieselben Bestimmungen gelten, wie bei den vorigen Beispielen.



(M. 547.)

Durchläuft man auf dieser Fläche von einem Punkte e des obern Blattes aus eine Curve, deren Grundriss geschlossen ist, und die keinen der Windungspunkte a, b, c, d umkreist, so führt diese Curve zu e selbst zurück, endet nicht in dem unter e im andern Blatte liegenden Punkte (Weg 1). Wenn man von e ausgehend einen Windungspunkt (a, Weg 2) einmal umkreist, so kommt man in das untere Blatt; um in das obere zurückzugelangen, muss man noch einen Windungspunkt (z. B. c) einmal umkreisen. Ein Weg, der zwei durch eine Verwachsung verbundene Windungspunkte oder alle vier umkreist, kann ganz im obern Blatte liegen (Weg 3)*).

Man überzeugt sich so, dass man in dieser Fläche nur solche wirklich geschlossene Linien ziehen kann, die die Windungspunkte zusammen eine gerade Anzahl Male umkreisen.

Ist daher festgesetzt, welchen der beiden möglichen Werthe w in einem Punkte dieser Fläche haben soll, so ist der Endwerth, den w erreicht, wenn z von diesem Punkte auf der Fläche zu einem andern geht, eindeutig bestimmt und vom Wege unabhängig.

Diese Beispiele genügen für die weiteren Betrachtungen, die wir hier durchführen werden.

*) Um sich diese Verhältnisse recht deutlich zu machen, zeichne man sich mehrere geschlossene Wege, die die Windungspunkte immer anders umkreisen, und achte darauf, die Wegtheile zu punktiren, soweit sie im untern Blatte liegen.

§ 13. Integrale complexer Functionen.

1. Es sei $f(z)$ eine Function der complexen Variabeln z, und für z eine RIEMANN'sche Variabelnfläche construirt, so dass $f(z)$ eine eindeutige Function der Punkte dieser Fläche ist; ferner seien zwei Punkte z_0 und Z dieser Fläche durch eine in der Fläche liegende Linie l verbunden, und diese Linie durch eine Anzahl Punkte $z_1, z_2, z_3 \ldots z_{n-1}$ getheilt, die in der Richtung von z_0 nach Z auf einander folgen; endlich werde mit $f(z_k)$ der Werth bezeichnet, den $f(z)$ für irgend einen Punkt innerhalb des Linienstücks $z_{k-1}z_k$ annimmt. Unter dem bestimmten Integrale

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$$

versteht man den Grenzwerth, gegen den die Summe

$$\sum_1^n f(z_k)\Delta z_k, \qquad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}, \qquad z_n = Z$$

convergirt, wenn sämmtliche Differenzen Δz_k verschwinden.

2. Wir werden nun zunächst zeigen, dass ein solcher Grenzwerth existirt. Setzen wir $z = x + iy$, so nimmt $f(z)$ nach Sonderung des Realen vom Imaginären die Form an $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ und es ist

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = x_k - x_{k-1} + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k.$$

Folglich haben wir, wenn wir die Indices unterdrücken

$$\Sigma f(z)\Delta z = \Sigma[\varphi(x, y)\,\Delta x - \psi(x, y)\,\Delta y] + i\Sigma[\varphi(x, y)\,\Delta y + \psi(x, y)\,\Delta x].$$

Aus der Gleichung der Curve l wollen wir nun y durch x und x durch y ausdrücken und diesen Werth für y bez. x in die mit Δx bez. mit Δy multiplicirten Functionen substituiren. Die ersteren werden dann Functionen von x allein, die letzteren Functionen von y; bezeichnen wir dieselben mit $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$, $\Psi(y)$, und $\Psi_1(y)$, so haben wir

$$\Sigma f(z)\,\Delta z = \Sigma[\Phi(x)\,\Delta x - \Psi(y)\,\Delta y] + i\Sigma[\Phi_1(x)\,\Delta x + \Psi_1(y)\,\Delta y].$$

Ist nun $Z = X + iY$, so ist

$$lim\,\Sigma\Phi(x)\,\Delta x = \int_{x_0}^{X}\Phi(x)\,dx, \qquad lim\,\Sigma\Psi(y)\,\Delta y = \int_{y_0}^{Y}\Psi(y)\,dy \quad \text{u. s. w.};$$

hieraus folgt

$$lim\,\Sigma f(z)\,\Delta z = \int_{x_0}^{X}\Phi(x)\,dx - \int_{y_0}^{Y}\Psi(y)\,dy + i\int_{x_0}^{X}\Phi_1(x)\,dx + i\int_{y_0}^{Y}\Psi_1(y)\,dy.$$

Hierdurch ist das Integral

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$$

durch bestimmte Integrale realer Functionen einer realen Variabeln ausgedrückt.

Wir schliessen hieran zwei Sätze, die sich aus der Definition des bestimmten Integrals ohne Weiteres ergeben.

Ist b ein Punkt, der auf dem Integrationswege, d. i. auf dem für die Variable angenommenen Wege, ac zwischen a und c liegt, so ist für die Integration auf dem angenommenen Wege

$$\int_a^b f(z)dz + \int_b^c f(z)dz = \int_a^c f(z)\,dz.$$

Ferner folgt

$$\int_a^b f(z)dz = -\int_b^a f(z)\,dz.$$

3. Wir haben nun zu untersuchen, welchen Einfluss die Wahl des Integrationsweges auf den Werth des bestimmten Integrals hat.

Es liegt die Vermuthung nahe, dass das zwischen den Grenzen a und b genommene Integral immer andere Werthe erhält, wenn man die Punkte a und b durch verschiedene Integrationswege verbindet; so dass es nöthig wäre, bei jedem Integrale den Ingrationsweg genau anzugeben. Wir werden indess zeigen, dass diess nicht der Fall ist; der Werth des bestimmten Integrals wird sich nur insofern abhängig vom Integrationswege erweisen, als bei gewissen Gruppen von Wegen das Integral um eine bestimmte additive Constante von dem auf andern Wegen erhaltenen Werthe abweicht.

Um zu diesen Ergebnissen zu gelangen, beweisen wir folgenden Satz: Sind X und Y zwei innerhalb eines vollständig begrenzten Theiles T einer RIEMANN'schen Fläche endliche und eindeutige Functionen des Ortes in der Fläche, so ist das über die Fläche T erstreckte Integral

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT$$

entgegengesetzt gleich dem über alle Punkte der Begrenzung von T ausgedehnten Integale

$$\int (X dx + Y dy),$$

wobei alle Theile der Begrenzung so durchlaufen werden sollen, dass die Fläche T gegen die Fortschreitung entlang der Grenze so liegt, wie der $+ i$ enthaltene Theil der Zahlenebene gegen die in der Richtung wachsender Zahlen durchlaufene reale Achse.

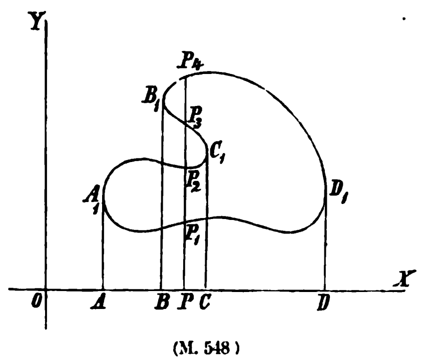
Wir wollen uns zunächst unter X und Y reale Functionen von x und y denken.

Wir betrachten zuerst ein Flächenstück T, das die Ebene nur einfach bedeckt und einfach zusammenhängend ist, d. i., dessen vollständige Begrenzung eine einzige geschlossene Curve bildet. Das über T ausgedehnte Integral zerlegen wir in die Differenz zweier Integrale

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT = \int \frac{\partial X}{\partial y} dT - \int \frac{\partial Y}{\partial x} dT,$$

und berechnen die Summanden einzeln. Nun ist

$$\int \frac{\partial X}{\partial y} dT = \int\int \frac{\partial X}{\partial y} dx dy.$$



(M. 548)

Hierbei ist die Integration nach y auf jeder Parallelen zur Y-Achse über die Strecken auszudehnen, die im Innern von T liegen, für $x = OP$ also über $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$. Sind die Werthe, welche die Function X in den Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 hat, der Reihe nach X_1, X_2, X_3, X_4, und bemerken wir, dass bei unbestimmter Integration

$$\int \frac{\partial X}{\partial y} dy = X + C,$$

so ergiebt sich für das über die Strecken $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$ ausgedehnte bestimmte Integral

$$\int \frac{\partial X}{\partial y} dy = X_2 - X_1 + X_4 - X_3.$$

Hierbei wird von der Voraussetzung Gebrauch gemacht, dass X für alle Punkte im Innern der Fläche endlich bleibt; denn wenn X z. B. für einen Punkt innerhalb der Strecke $P_1 P_2$ unendlich wird, so ist das über die Strecke ausgedehnte Integral im Allgemeinen nicht gleich $X_2 - X_1$.

Daher ist nun weiter

$$\int \frac{\partial X}{\partial y} dT = \int (X_2 - X_1 + X_4 - X_3)\, dx.$$

$$= -\int X_1 dx + \int X_2 dx - \int X_4 dx + \int X_3 dx.$$

Die Grenzen der einzelnen Integrale erhalten wir, indem wir die zur Y-Achse parallelen Tangenten der Umgrenzung ziehen; haben dieselben die Abscissen OA, OB, OC, OD, so ist

$$\int \frac{\partial X}{\partial y} dT = -\int_{OA}^{OD} X_1 dx + \int_{OA}^{OC} X_2 dx - \int_{OB}^{OC} X_3 dx + \int_{OB}^{OD} X_4 dx.$$

Im zweiten und vierten Integrale vertauschen wir die Grenzen und erhalten bei etwas veränderter Anordnung

$$1. \qquad \int \frac{\partial X}{\partial y} dT = -\left(\int_{OA}^{OD} X_1 dx + \int_{OD}^{OB} X_4 dx + \int_{OB}^{OC} X_3 dx + \int_{OC}^{OA} X_2 dx\right).$$

Durchläuft ein Punkt den Perimeter von T in positiver Richtung von A_1 anfangend, so erhält X auf dem Wege $A_1 D_1$ Werthe, die mit X_1 bezeichnet sind; die auf dem Wege $D_1 B_1$ sind mit X_4 bezeichnet, die auf $B_1 C_1$ mit X_3, die auf $C_1 A_1$ mit X_2. Wir können daher in 1. die Indices bei X_1, X_2, X_3, X_4 weglassen und alle Integrale vereinigen; hierdurch entsteht

$$2. \qquad \int \frac{\partial X}{\partial y} dT = -\int X dx,$$

wobei das Integral rechts also über den Perimeter von T auszudehnen und dabei der Perimeter in positiver Richtung zu durchlaufen ist. Durch geeignete Vertauschungen ergiebt sich aus 3.

$$3. \qquad \int \frac{\partial Y}{\partial x} dT = -\int Y dy,$$

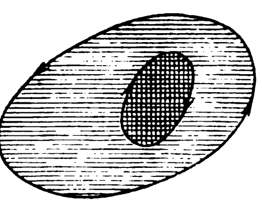
wobei rechts infolge der Vertauschung von x gegen y der Perimeter von T so zu durchlaufen ist, dass die Fläche T gegen die Richtung der Fortschreitung so liegt, wie der Winkel XOY gegen die in der Richtung der wachsenden y zurückgelegte Ordinatenachse. Diese Umlaufsrichtung ist der des Begrenzungsintegrals in 2. entgegensetzt. Wechseln wir in 3. die Umlaufsrichtung, so wechseln alle einzelnen Bestandtheile, aus denen dasselbe zu berechnen ist, (so wie $\int X dx$ sich nach Gleichung 1. berechnet) die Grenzen, nehmen also den entgegengesetzt gleichen Werth an; durchläuft man den Perimeter von T in positiver Richtung, so hat man daher

$$4. \qquad \int \frac{\partial Y}{\partial x} dT = \int Y dy.$$

Aus 2. und 4. folgt schliesslich

$$5. \qquad \int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT = -\int (X dx + Y dy), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Wir beweisen nun den Satz für eine die Ebene allenthalben einfach bedeckende Fläche T, deren Begrenzung aus mehreren getrennten Curven besteht. Wir denken uns aus der einfach zusammenhängenden (wagerecht schraffirten) Fläche T_1 eine einfach zusammenhängende (senkrecht schraffirte) T_2 herausgeschnitten. Wird die übrig bleibende, ringförmige Fläche mit T bezeichnet, so ist



(M. 549.)

$$\int_T \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT = \int_{T_1} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT - \int_{T_2} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT$$

wobei durch die Zeichen

$$\int_T, \int_{T_1}, \int_{T_2}$$

angedeutet wird, dass die Integration über die Flächen T, T_1, T_2 erstreckt werden soll. Nun ist nach dem vorigen Beweise

$$\int_{T_1} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT = -\int (Xdx + Ydy),$$

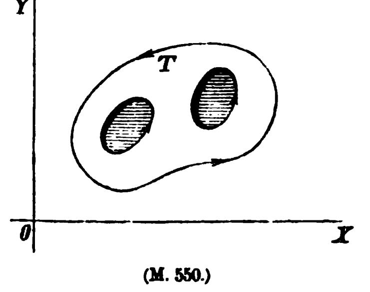
ausgedehnt über den Perimeter von T_1 in positiver Umlaufsrichtung; und

$$\int_{T_2} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT = \int (Xdx + Ydy)$$

ausgedehnt über den Perimeter von T_2 in negativer Umlaufsrichtung in Bezug auf T_2, mithin in positiver in Bezug auf die Ringfläche T_1, zu deren Begrenzung der Perimeter von T_2 gehört. Daher haben wir für T

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT = -\int (Xdy + Ydy)$$

wobei nun das Begrenzungsintegral rechts **über die ganze Begrenzung** von T in positiver Richtung (in Richtung der Pfeile) zu erstrecken ist.

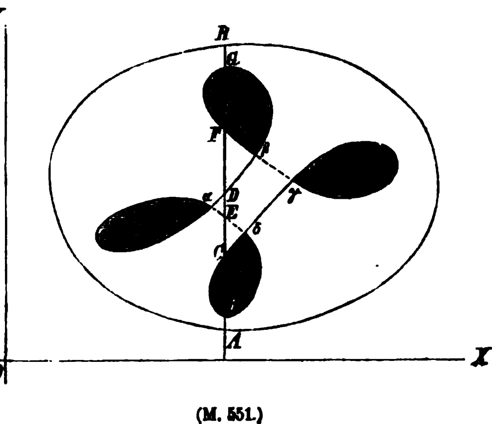


(M. 550.)

Wenn aus einer einfach zusammenhängenden, die Ebene allenthalben einfach bedeckenden Fläche mehrere Stücke herausgeschnitten werden, so findet man in gleicher Weise die Gültigkeit des Satzes.

Bei der unschraffirten Fläche T (Fig. 550) ist das Begrenzungsintegral über die drei Begrenzungscurven, bei jeder in der Pfeilrichtung, zu erstrecken.

Die Fläche T in Fig. 551 ist aus einer zweiblättrigen RIEMANN'schen Fläche mit vier Windungspunkten geschnitten (§ 12, No. 27); sie bedeckt zum Theil die Ebene doppelt, nämlich innerhalb des Grundrisses $\alpha\beta\gamma\delta$. Ist AH parallel der Y-Achse, so ist bei der Integration nach y das Integral über



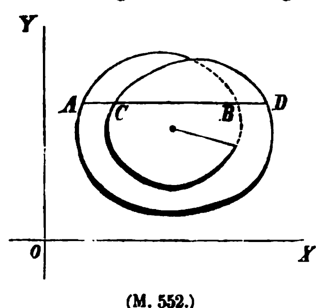
(M. 551.)

die Strecken AB, CD (im obern Blatte), EF und GH zu erstrecken; folglich ist

$$\int \frac{dX}{dy} dy = X_B - X_A + X_D - X_C + X_F - X_E + X_H - X_G;$$

es gelten daher ganz die vorigen Betrachtungen und Schlüsse.

Enthält T einen Windungspunkt einer zweiblätterigen Fläche und wird von einer einzigen Curve begrenzt, so ist für die Integration nach x entlang der Parallelen AD zur X-Achse das Integral im oberen Blatte über die Strecke CD, im untern über AB zu erstrecken, es ergiebt sich mithin



(M. 552.)

$$\int \frac{dy}{dx} dx = Y_B - Y_A + Y_D - Y_c;$$

alles Uebrige folgt dann wie vorher.

Wir können nun den Satz mit Leichtigkeit auf den Fall ausdehnen, dass X und Y complexe Functionen sind.

Haben wir $X = R + iS$, $Y = U + iV$, so ist

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT = \int \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x}\right) dT + i \int \left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) dT.$$

Wenden wir den Satz auf die realen Functionen R, S, U, V an, so erhalten wir

$$\int \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x}\right) dT = -\int (R dx + U dy), \quad \int \left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) dT = -\int (S dx + U dy).$$

Daher folgt schliesslich

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT = -\int [(R + iS) dx + (U + iV) dy], \quad \text{w. z. b. w.}$$

4. Wir wenden den soeben bewiesenen Satz auf das Integral einer complexen Function w an. Es sei

$$\int w\, dz$$

über den Perimeter einer Fläche T ausgedehnt, innerhalb welcher w eine endliche und eindeutige Function des Ortes in der Fläche ist; alsdann ist

$$\int w\, dz = \int (w\, dx + iw\, dy) = -\int \left(\frac{\partial w}{\partial y} - i\frac{\partial w}{\partial x}\right) dT.$$

Da nun

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x},$$

so verschwinden alle Elemente des Flächenintegrals, also auch das ihm gleiche Begrenzungsintegral. Dies ergiebt den Satz: Das Integral $\int w\,dz$, ausgedehnt in positiver Umlaufsrichtung über die vollständige Begrenzung einer Fläche, innerhalb deren w eindeutig und endlich ist, ist gleich Null.

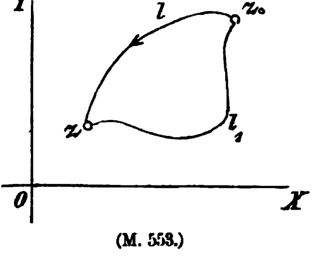
Enthält die Fläche T einen oder mehrere Unstetigkeitspunkte, für welchen die eindeutige Function w unendlich wird, so kann man dieselben durch klein geschlossene Perimeter α_1, α_2, ... umgeben, deren jeder nur einen Unstetigkeitspunkt enthält. Lässt man die von α_1, .. begrenzten Flächentheile aus T austreten, so ist nun innerhalb der Restfläche w endlich; mithin verschwindet $\int w\,dz$, wenn man es über die Begrenzung von T und über die Perimeter α_1, α_2 ... ausdehnt, in positivem Umlaufe in Bezug auf die Restfläche, also die über α_1, α_2, ... ausgedehnten Integrale in negativer Richtung bezüglich der ausgeschlossenen Flächen. Hieraus folgt: Wird das Integral $\int w\,dz$ über der

Perimeter einer Fläche T erstreckt, welche Unstetigkeitspunkte enthält, so ist der Werth dieses Integrals gleich der Summe von Integralen $\int w\,dz$, die in positiver Richtung um die Perimeter kleiner, je einen Unstetigkeitspunkt enthaltender Flächentheile erstreckt sind.

Dieser Satz lehrt $\int w\,dz$ für den Fall zu finden, dass T Unstetigkeitspunkte enthält; wir werden nämlich jeden solchen Punkt durch einen kleinen Kreis umgeben, wenn er kein Windungspunkt ist; ist er Windungspunkt einer zweiblätterigen RIEMANN'schen Fläche, so umgeben wir ihn mit einer geschlossenen Linie, deren Grundriss ein Kreis ist, die also von z beschrieben wird, wenn r constant ist und φ von 0 bis 4π wächst; zur Berechnung dieser Integrale können wir r so klein nehmen wie wir wollen, und daher insbesondere einen verschwindend kleinen Werth von r voraussetzen.

5. Wir kehren nun zum Ausgangspunkte unserer Untersuchung zurück, zu der Frage, welchen Einfluss die Wahl des Integrationsweges (N. 3) auf den Werth des Integrals

$$\int_{z_0}^{z} w\,dz$$



(M. 553.)

hat. Führt man die Variabele auf zwei Wegen l und l_1 von z_0 nach z, die einen Theil einer RIEMANN'schen Fläche vollständig begrenzen, innerhalb dessen keine Unstetigkeitspunkte liegen, so verschwindet das über die ganze Begrenzung genommene Integral. Dasselbe zerfällt in das in der Richtung $z_0 z$ über l und in das in der Richtung $z z_0$ über l_1 genommene. Deuten wir die Wege durch eingeklammerte Buchstaben vor dem Integralzeichen an, so ist also

$$1. \qquad (l)\int_{z_0}^{z} w\,dz + (l_1)\int_{z}^{z_0} w\,dz = 0\,.$$

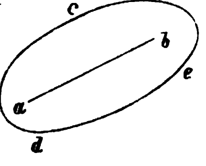
Da nun $\quad (l_1)\int_{z}^{z_0} w\,dz = -(l_1)\int_{z_0}^{z} w\,dz$, so folgt aus 1.:

$$(l)\int_{z_0}^{z} w\,dz = (l_1)\int_{z_0}^{z} w\,dz\,.$$

Wenn zwei Integrationswege einen Theil T einer RIEMANN'schen Fläche vollständig begrenzen und innerhalb desselben kein Unstetigkeitspunkt liegt, so hat das Integral für beide Wege denselben Werth.

Ferner erkennen wir sofort: Wenn T einen oder mehrere Unstetigkeitspunkte enthält, so sind die auf den Wegen l und l_1 gewonnenen Integrale um gewisse Constanten verschieden, nämlich um die Werthe von Integralen über die Perimeter hinlänglich kleiner Flächen, welche je einen Unstetigkeitspunkt enthalten.

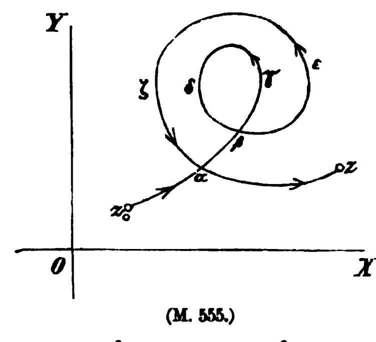
In einer einblätterigen ununterbrochenen Fläche begrenzt jede geschlossene Curve einen Theil der Fläche vollständig; in einer zweiblätterigen Fläche lassen sich geschlossene Linien ziehen, die für sich allein nicht die vollständige Begrenzung eines Theils der Fläche bilden.



(M. 554.)

Hat die zweiblätterige Fläche zwei Windungspunkte a und b und zwischen ihnen die Verwachungslinie, so kann man im oberen (oder im unteren) Blatte eine geschlossene Curve cde ziehen, die beide Windungspunkte einschliesst.

Diese Linie theilt die zweiblättrige Fläche in zwei Theile, die beide unendlich gross sind; der eine ist der ausserhalb cde liegende Theil des Blattes, der andere ist das untere Blatt vermehrt um den innerhalb cde liegenden Theil des oberen, der mit dem unteren entlang ab zusammenhängt. Bei beiden Theilen gehört zur vollständigen Begrenzung ausser cde noch eine die unendlich fernen Punkte enthaltende geschlossene Linie.



(M. 555.)

6. Wenn der Integrationsweg $z_0 z$ sich selbst ein- oder mehrmals schneidet, so kann man geeignete Zerlegungen vornehmen, die wir an einem Beispiele (Fig. 555) zeigen. Dabei wollen wir mit $\int(A, B, C \ldots N)$ das entlang einer vorgeschriebenen Curve $A, B, C \ldots N$ von A bis N erstreckte Integral von $w\,dz$ verstehen. Es ist

1. $$\int(z_0\gamma\delta\varepsilon\zeta z) = \int(z_0\alpha) + \int(\alpha\beta) + \int(\beta\gamma\delta\beta) + \int(\beta\varepsilon\zeta\alpha) + \int(\alpha z).$$

Nun kann man das erste und letzte, sowie das zweite und dritte Integral zu einfachen Begrenzungsintegralen zusammenfassen und hat

2. $$\int(z_0\gamma\delta\varepsilon\zeta z) = \int(z_0\alpha z) + \int(\alpha\beta\varepsilon\zeta\alpha) + \int(\beta\gamma\delta\beta).$$

Wenn nun der Weg $z_0\gamma\delta\varepsilon\zeta z$ keinen Unstetigkeitspunkt umkreist, innerhalb der Fläche $\alpha\beta\varepsilon\zeta$ also keiner liegt, so sind die Begrenzungsintegrale

3. $$\int(\alpha\beta\varepsilon\zeta\alpha) = \int(\beta\gamma\delta\beta) = 0,$$

und es ist daher

$$\int(z_0\gamma\delta\varepsilon\zeta z) = \int(z_0\alpha z).$$

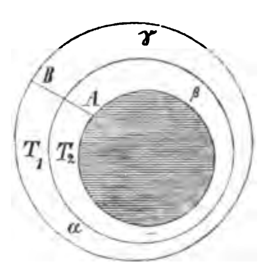
Wenn der Weg einen oder mehrere Unstetigkeitspunkte umkreist, so sind die Integrale 3. gleich Integralen, die in derselben Umlaufsrichtung über die Perimeter von beliebig kleinen je einen Unstetigkeitspunkt einschliessenden Flächen erstreckt sind.

Hieraus erkennt man: Wenn eine geschlossene Curve sich selbst schneidet, so ist das über dieselbe erstreckte Integral $\int w\,dz$ gleich Null, wenn die Curve keinen Unstetigkeitspunkt umkreist; werden von der Curve Unstetigkeitspunkte theils in positiver, theils in negativer Richtung umkreist, so ist das Integral gleich der Summe von Integralen, jedes über den Perimeter einer je einen Unstetigkeitspunkt enthaltenen beliebig kleinen Fläche in demselben Sinne erstreckt, in welchem die Curve den Punkt umkreist, mit der Anzahl der Umläufe multiplicirt, welche die Curve um den betreffenden Unstetigkeitspunkt macht.

7. Wir entwickeln nun einen Begriff, der für die weiteren Untersuchungen von Bedeutung wird, nämlich den des einfachen oder mehrfachen Zusammenhangs einer vollständig begrenzten Fläche (wobei Begrenzungen durch einen mit unendlich grossem Radius um ein im Endlichen liegendes Centrum beschriebenen Kreis nicht ausgeschlossen werden sollen).

Unter einer einfach zusammenhängenden Fläche verstehen wir nach Riemann eine Fläche, die durch jeden Querschnitt, d. i. durch jede zwischen zwei Punkten der Begrenzung verlaufende sich selbst nicht schneidende Linie in zwei vollständig getrennte Theile zerlegt wird. Einfach zusammenhängend ist z. B. eine Kreisfläche, ferner der Theil einer zweiblätterigen Fläche, der durch eine geschlossene sich selbst nicht schneidende Curve vollständig begrenzt wird.

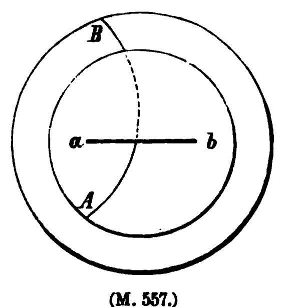
In einer einfach zusammenhängenden Fläche ist jede geschlossene Linie die vollständige Begrenzung eines Theils der Fläche. Denn gesetzt, die geschlossene Curve α zerlege die Fläche T in zwei Theile, T_1 und T_2, von deren keinen sie die vollständige Begrenzung bildet, so muss der eine T_2 noch eine innere β, der andere T_1 noch eine äussere Grenzcurve γ haben, die sich nicht treffen. Zieht man nun von einem Punkte A auf β nach einem Punkte B auf γ eine Linie auf der Fläche, die sich nicht schneidet, so wird durch dieselbe die Fläche nicht zerstückt, folglich kann T nicht einfach zusammenhängend sein.



(M. 556.)

Eine Fläche heisst zweifach zusammenhängend, wenn sie durch einen einzigen Querschnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden kann, z. B. die Fläche T in Fig. 556; denn sie wird durch AB in eine einfach zusammenhängende verwandelt.

Zweifach zusammenhängend ist ferner der Theil einer mit zwei Windungspunkten a und b versehenen zweiblätterigen Fläche, der von zwei geschlossenen Linien begrenzt wird, die in den beiden Blättern so liegen, dass jede die Verwachsungslinie einmal umkreist (Fig. 557); der Querschnitt AB verwandelt sie in eine einfach zusammenhängende.



(M. 557.)

Eine Fläche heisst drei-, vier- u. s. w. fach zusammenhängend, wenn sie durch zwei, drei u. s. w. Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden kann. Hierbei soll jeder bereits hergestellte Querschnitt zur Begrenzung der Fläche gerechnet, durch weitere Querschnitte also nicht überschritten werden.

Die Fläche in Fig. 551 ist dreifach zusammenhängend; denn zieht man im oberen Blatte den Querschnitt CD, und im unteren EF, so erhält man eine einfach zusammenhängende Fläche.

Wenn die Function w für alle Punkte einer einfach zusammenhängenden Fläche T eindeutig und endlich ist, so ist das über irgend eine geschlossene Curve der Fläche ausgedehnte Integral $\int w\,dz$ gleich Null, und das entlang irgend einer auf der Fläche liegenden Curve genommene Integral

$$\int_{z_0}^{z} w\,dz$$

ist unabhängig vom Integrationswege; ist z_0 eine absolute Constante, so ist das Integral daher eindeutig bestimmt für jeden (die obere Grenze bildenden) Punkt z der Fläche.

8. Wird der Integrationsweg l des Integrals

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

über den Endpunkt z hinaus bis zu einem in irgend welcher Richtung liegenden hinlänglich nahen Punkte $z + \Delta z$ so verlängert, dass die Zunahme des Wegs und die des Integrals mit Δz verschwindet (also innerhalb der Verlängerung kein Unstetigkeitspunkt umkreist oder getroffen wird), so hat man

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \lim\,[f(z_1)(z_1 - z_0) + f(z_2)(z_2 - z_1) + \ldots + f(z)(z - z_{n-1})],$$

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,dz = \lim\,[f(z_1)(z_1 - z_0) + f(z_2)(z_2 - z_1) + \ldots + f(z)(z - z_{n-1})$$

$$+ f(z + \Delta z)(z + \Delta z - z)]\,.$$

Bildet man die Differenz beider Werthe und geht zur Grenze für ein verschwindendes Δz über, so erhält man

$$\lim \left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z)\,dz - \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz\right] : \Delta z = f(z) \quad \text{d. i.}$$

$$1. \qquad \frac{d}{dz}\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = f(z)\,.$$

Der Differentialquotient des Integrals nach der oberen Grenze ist somit unabhängig von der Richtung, in welcher $z + dz$ gegen z liegt; wählt man diese Richtung einmal parallel der realen und dann parallel der imaginären Achse, so hat man nach 1., wenn man zur Abkürzung das Integral mit w bezeichnet,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z}\,,$$

also

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{\partial w}{\partial x}\,.$$

Hieraus folgt: Das Integral einer complexen Function ist eine complexe Function der oberen Grenze.

9. Wir wenden uns nun zu einer werthvollen Anwendung der entwickelten allgemeinen Sätze.

Es sei l die vollständige Begrenzung einer Fläche T, und im Innern von T sei die Function $f(z)$ eindeutig und endlich; ferner sei t ein im Innern dieser Fläche gelegener Punkt, der nicht zugleich Windungspunkt ist. Alsdann hat die Function

$$\frac{f(z)}{z - t}$$

auf T nur den einen Unstetigkeitspunkt t, in welchem sie unendlich gross wird. Das Integral

$$\int \frac{f(z)}{z - t}\,dz\,,$$

ausgedehnt über die Begrenzung von T, ist dann gleich dem Integrale derselben Function, ausgedehnt über die Begrenzung einer beliebig kleinen Fläche, innerhalb deren der Unstetigkeitspunkt t liegt. Wir wählen zu dieser kleinen Fläche einen Kreis mit hinlänglich kleinem Radius ρ und dem Centrum t, setzen für Punkte dieses Kreises

$$z - t = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

und gehen auf dem Kreise von z zu einem unendlich nahen Punkte $z + dz$ über; dann ist

$$\begin{aligned} dz &= \rho\,(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi\,, \\ &= i\,\rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,d\varphi\,, \\ &= i\,(z - t)\,d\varphi\,. \end{aligned}$$

Daher ist für die Integration entlang des Kreises

$$\int \frac{f(z)}{z-t} dz = i \int_0^{2\pi} f(z)\, d\varphi .$$

Nimmt ρ zur Grenze Null ab, so nähern sich alle Werthe, die $f(z)$ auf der Kreisperipherie hat, dem Werthe $f(t)$, den die Function im Centrum hat.

Daher ist

$$\lim \int \frac{f(z)}{z-t} dz = i f(t) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i \cdot f(t) .$$

Wir erhalten somit: Wird das Integral

$$\int \frac{f(z)}{z-t} dz$$

auf die vollständige Begrenzung einer Fläche T ausgedehnt, innerhalb welcher $f(z)$ eindeutig und endlich ist, so ist für jeden im Innern von T gelegenen Punkt t, der kein Windungspunkt ist,

1. $$\int \frac{f(z)}{z-t} dz = 2\pi i f(t) .$$

Hieraus folgt

2. $$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z-t} dz .$$

Der Werth, den eine Function für einen Punkt im Innern einer Fläche annimmt, auf welcher sie allenthalben endlich und eindeutig ist, lässt sich also durch ein Integral angeben, welches über die Begrenzung der Fläche erstreckt ist.

Differenzirt man beide Seiten von 2. nach t n mal, so erhält man

3. $$f^{(n)}t = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}} dt .$$

Da nun für die Umgrenzung von T die Function

$$\frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}}$$

allenthalben endlich ist, so folgt: Ist eine Function innerhalb einer Fläche T eindeutig und endlich, so gilt dasselbe auch von allen ihren Derivirten.

An die Formel 1. knüpft sich noch folgende Bemerkung. Um den Werth zu bestimmen, den das Integral

$$\int f(z)\, dz$$

hat, wenn man es über den Perimeter eines verschwindend kleinen Kreises erstreckt, für dessen Centrum a die Function $f(z)$ unendlich wird, während das Produkt $(z-a) f(z)$ endlich ist, setzen wir

$$\int f(z)\, dz = \int \frac{(z-a) f(z)}{z-a} dz$$

und erhalten daher nach 1., wenn a kein Windungspunkt ist,

4. $$\int f(z)\, dz = 2\pi i \lim_{(z=a)} (z-a) f(z) .$$

10. Die Formeln 1. und 2. führen zur Darstellung einer complexen Function in einer unendlichen Reihe nach steigenden oder fallenden Potenzen der Variabeln; wir schicken dieser Entwicklung einige allgemeine Bemerkungen über die Convergenz unendlicher Reihen mit complexen Gliedern voraus.

Ersetzen wir die Glieder einer unendlichen Reihe

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

durch $u_k = r_k(\cos\varphi_k + i \sin\varphi_k)$,

so folgt

$$S = r_1 \cos\varphi_1 + r_2 \cos\varphi_2 + \ldots + i\,(r_1 \sin\varphi_1 + r_2 \sin\varphi_2 + \ldots).$$

Hieraus ist sofort ersichtlich: Wenn die Reihe der Moduln der Glieder einer unendlichen Reihe convergirt, so convergirt auch die unendliche Reihe.

Sind die Glieder einer unendlichen Reihe Functionen von z, und convergirt die Reihe für jeden innerhalb eines Gebiets T liegenden Werth von z, so convergirt auch das Integral

$$\int(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots)\,dz$$

wenn man es über irgend einen auf T im Endlichen liegenden Weg erstreckt. Denn da nach der Voraussetzung für jeden Punkt auf T

$$\lim\,(u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots) = 0\,, \quad n = \infty\,,$$

so ist auch für irgend zwei auf T liegende Grenzen a und b

$$\lim \int_a^b (u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots)\,dz = 0\,.$$

Ist $f(z)$ der Grenzwerth der Reihe, so ist ersichtlich, dass

$$\int(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots)\,dz = \int f(z)\,dz\,.$$

Ist eine Reihe nach steigenden Potenzen (mit ganzen positiven Exponenten) der Variabeln z geordnet und sind für einen bestimmten Werth der Variabeln, dessen Modul r_0 ist, die Moduln aller Glieder der Reihe kleiner als eine gegebene Zahl, so convergirt die Reihe für jeden Werth von z, dessen Modul kleiner als r_0 ist.*)

Haben in der gegebenen Reihe

1. $$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots$$

die Coefficienten die Moduln $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$, so sind die Moduln der Glieder der Reihe

$$a_0,\ a_1 r,\ a_2 r^2,\ a_3 r^3,\ \ldots$$

Die Reihe der Moduln

2. $$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots$$

gewinnt man aus der Reihe

3. $$1 + \frac{r}{r_0} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \ldots$$

in dem man die Glieder dieser Reihe nach einander mit

4. $$a_0,\quad a_1 r_0,\quad a_2 r_0^2,\ \ldots$$

multiplicirt. Die Reihe 3. convergirt für jeden Werth r, der kleiner als r_0 ist und hat die Summe

$$\frac{r_0}{r_0 - r}.$$

Ist nun jede der Zahlen 4. kleiner als eine gegebene Zahl B, so ist die Summe 2. kleiner als

$$\frac{r_0}{r_0 - r}\,B\,,$$

folglich ist 2. convergent, wenn $r < r_0$, w. z. b. z.

*) Vergl. Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques, 2. éd. Paris 1875, pag. 77.

Wenn r unbegrenzt wächst, so wachsen alle Moduln a_0, $a_1 r$, $a_2 r^2$ .... Dabei sind nun zwei Fälle möglich: Entweder es bleiben für alle endlichen Werthe von r alle diese Moduln endlich, oder sie bleiben bis zu einem endlichen Werthe $r = R$ endlich, werden aber zum Theil für $r = R$, und somit auch für $r > R$, unendlich gross.

Im ersten Falle convergirt die Reihe

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots$$

für jedes endliche z; im letzteren convergirt sie für jedes z, dessen Modulus kleiner als R ist, also für alle Punkte der Ebene, die im Innern des mit dem Halbmesser R um den Nullpunkt beschriebenen Kreises liegen, und divergirt für alle auserhalb des Kreises liegende Punkte, da sie in denselben Glieder mit unendlichen Moduln erhält; für Punkte auf der Peripherie des Kreises mit Radius R, den wir den Convergenzkreis der Potenzreihe nennen, bleibt die Convergenz noch unentschieden und bedarf in jedem Falle einer besonderen Untersuchung.

11. Ist $f(z)$ endlich und eindeutig innerhalb eines Kreises, der auf der Variabelnfläche um das Centrum a beschrieben ist und der keinen Windungspunkt enthält, so ist für jeden Punkt t im Innern dieses Kreises

$$1. \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z - t} dz,$$

wobei das Integral über den Perimeter des Kreises auszudehnen ist. Für jeden Punkt z dieses Perimeters ist

$$mod\,(z - a) > mod\,(t - a),$$

daher hat man die convergente Reihenentwicklung

$$\frac{1}{z - t} = \frac{1}{z - a - (t - a)} = \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t - a}{z - a}}$$

$$= \frac{1}{z - a}\left[1 + \frac{t - a}{z - a} + \left(\frac{t - a}{z - a}\right)^2 + \left(\frac{t - a}{z - a}\right)^3 + \dots\right].$$

Setzt man dies in 1. ein und integrirt die einzelnen Glieder, was (nach 10) erlaubt ist, weil die Reihe für alle Punkte des Integrationsweges convergirt, und $f(z)$ innerhalb desselben nicht unendlich wird, so erhält man

$$2. \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z - a} dz + \frac{t - a}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z - a)^2} dz + \frac{(t - a)^2}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z - a)^3} dz + \dots$$

Die Integrale in dieser Reihenentwicklung sind in No. 9 bestimmt worden; wir haben dort gefunden

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz = \frac{f^{(k)}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$$

und erhalten daher aus 2.

$$3. \quad f(t) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(t - a) + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}(t - a)^2 + \frac{f'''(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(t - a)^3 + \dots$$

Dies ist die Verallgemeinerung der TAYLOR'schen Reihe: die Entwicklung ist für alle Punkte t im Innern eines um a geschlagenen Kreises gültig, wenn die Function f innerhalb dieses Kreises endlich und eindeutig ist und keinen Windungspunkt hat.

Will man diesen Gültigkeitsbereich so viel als möglich erweitern, so hat man die Windungspunkte und die Punkte zu bestimmen, in denen $f(t)$ unendlich wird. Der Kreis darf dann nicht weiter als bis zu demjenigen dieser Punkte ausgedehnt werden, der a am nächsten liegt.

Wir sehen somit, dass die Convergenzbedingungen der TAYLOR'schen Reihe in viel einfacherer Weise sich erledigen, als früher, wo wir nur reale Variabeln in Betracht ziehen konnten; die lästigen Betrachtungen über den Grenzwerth des Restes fallen hier ganz weg; es bedarf nur der Bestimmung der Punkte, in welchen die Function unendlich gross wird.

Lassen wir in 3. den Punkt a mit dem Nullpunkte zusammenfallen, so entsteht die MACLAURIN'sche Reihe

4. $$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} z + \frac{f''(0)}{1\cdot 2}\cdot z^2 + \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot z^3 + \ldots$$

12. Wir schliessen hieran noch eine Bemerkung über Reihenentwicklung von der Form

1. $$f(z) = A_0 + A_1\cdot\frac{1}{z} + A_2\cdot\frac{1}{z^2} + A_3\cdot\frac{1}{z^3} + \ldots$$

Ersetzen wir $1 : z$ durch ζ, so entsteht

2. $$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = A_0 + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + A_3\zeta^3 + \ldots$$

Daher ist

$$A_0 = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)_{\zeta=0} = f(\infty), \qquad A_k = \frac{1}{1\cdot 2\,..\,k}\left[\frac{d^k f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^k}\right]_{\zeta=0};$$

die Entwicklung ist für alle Werthe von ζ gültig, deren Modul kleiner ist als der kleinste Modul der ζ, für welchen $f(1:\zeta)$ unendlich wird; also gilt 2. für alle z, deren Modul grösser ist als der grösste Modul der z, welche $f(z)$ unendlich gross machen. Ist daher α der vom Nullpunkte entfernteste Punkt der Variabelnebene, für welchen $f(z)$ unendlich wird, so gilt die Reihe 1. für alle Punkte der Ebene, die ausserhalb des durch α um den Nullpunkt gezogenen Kreises liegen.

13. Wenn die Function $f(z)$ innerhalb und auf den Grenzen eines Ringes, der zwischen zwei um den Punkt a mit den Radien r_0 und r_1 geschlagenen Kreisen liegt, eindeutig und endlich ist, und die Variabelnfläche innerhalb der äusseren Begrenzung des Ringes keinen Windungspunkt hat, so ist das über die vollständige Begrenzung des Ringes erstreckte Integral

$$\int\frac{f(z)}{z-t}\,dz = 2\pi i f(t),$$

also

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{z-t}\,dz.$$

Das Begrenzungsintegral besteht aus den Integralen entlang der beiden Kreise; bezeichnen wir dieselben mit $\int\limits_{(r_0)}$ und $\int\limits_{(r_1)}$, so ist

1. $$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(r_1)}\frac{f(z)}{z-t}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(r_0)}\frac{f(z)}{z-t}\,dt.$$

Für das erste haben wir, da alle Punkte des Ringes im Innern des Kreises mit Radius r_1 liegen, nach No. 11

2. $$\int\limits_{(r_1)}\frac{f(z)}{z-t}\,dz = \sum_1^\infty u_{-n}(t-a)^{n-1}, \quad u_{-n} = \int\frac{f(z)}{(z-a)^n}\,dz,$$

wobei die Integrale u_{-n} über alle Punkte des Kreises r_1 im positiven Sinne zu erstrecken sind. Für die Punkte des Kreises r_0 ist

$$mod(z-a) < mod(t-a).$$

Daher haben wir die convergente Entwicklung

$$\frac{1}{z-t} = -\frac{1}{(t-a)-(z-a)} = -\frac{1}{t-a}\left[1+\frac{z-a}{t-a}+\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^2+\ldots\right].$$

Also ist

$$3. \qquad \int\limits_{(r_0)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz = -\sum_0^\infty u_n (t-a)^{-n-1}, \qquad u_n = \int\limits_{(r_0)} (z-a)^n f(z)\,dz.$$

Die Integrale u_n sind über den Kreis mit Radius r_0 im Sinne der abnehmenden Winkel (im positiven Sinne bezüglich der Ringfläche) zu erstrecken. Nimmt man sie ebenso, wie die u_{-n}, im Sinne wachsender Amplituden, so kann man 1., 2. und 3. folgendermassen vereinen

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{-\infty}^{\infty} u_n (t-a)^{-n-1}, \qquad u_n = \int f(z)(z-a)^n\,dz,$$

wobei alle Integrale über den Kreis mit Radius r_0 erstreckt werden können, weil für keinen Punkt der Ringfläche eine der Functionen

$$f(z)(z-a)^n$$

unendlich gross ist. Dies ergiebt: Eine Function einer complexen Variabeln, die innerhalb einer Ringfläche mit dem Centrum a eindeutig und endlich ist, kann für jeden im Innern des Ringes gelegenen Werth der Variabeln t in eine nach steigenden und fallenden Potenzen von $(t-a)$ fortschreitende Reihe entwickelt werden.

14. Wenn die Function $f(z)$ für die im Innern des Kreises r_0 gelegenen Punkte $\alpha_k, \alpha_l, \alpha_m, \ldots$ unendlich gross wird, und zwar im Punkte α_r so unendlich wie

$$\frac{F_r(z)}{(z-\alpha_r)^r},$$

d. h. so, dass

$$lim_{(z=\alpha)}(z-\alpha_r)^m f(z) = \begin{cases} \infty, & \text{wenn } m < r, \\ F_r(z), & \text{,, } m = r, \\ 0, & \text{,, } m > r, \end{cases}$$

wobei $F_r(z)$ eine im Punkte α_r endliche Function bezeichnet, so zerfallen die Integrale u_n in Integrale, die über verschwindend kleine Kreise um die Punkte $\alpha_k, \alpha_l, \alpha_m, \ldots$ und a erstreckt sind. Es ist z. B.

$$u_3 = k_3 + l_3 + m_3 + \ldots + a_3,$$

wobei

$$k_3 = \int f(z)(z-a)^3\,dz,$$

und das Integral über einen um α_k geschlagenen unendlich kleinen Kreis zu erstrecken ist. Für die Punkte dieses Kreises kann man setzen

$$f(z) = \frac{F_k(z)}{(z-\alpha_k)^k}, \qquad z-a = \alpha_k - a;$$

daher hat man

$$k_3 = (\alpha_k - a)^3 \int \frac{F_k(z)}{(z-\alpha_k)^k}\,dz.$$

Nach No. 9 ist unter der Voraussetzung, dass die α nicht Verzweigungspunkte sind,

$$\int \frac{F_k(z)}{(z-\alpha_k)^k}\,dz = \frac{2\pi i}{k!} F_k^{k-1}(\alpha_k),$$

wobei $F^{k-1}(\alpha_k)$ den Werth bezeichnet, den

$$\frac{d^{k-1}F(z)}{dz^{k-1}}$$

im Punkte α_k hat. Daher hat man schliesslich

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot u_3 = \frac{1}{k!}(\alpha_k - a)^3 F_k^{k-1}(\alpha_k) + \frac{1}{l!}(\alpha_l - a)^3 F_l^{l-1}(\alpha_l) + \ldots$$

§ 14. Logarithmus und Exponentialfunction, Arcustangens und Tangente.

1. Wir geben nun neue Definitionen des Logarithmus, der Exponentialfunction, der cyklometrischen und der goniometrischen Functionen, die in gleicher Weise für reale und complexe Variable gelten.

Den Logarithmus werden wir durch eine Functionalgleichung definiren; von dieser aus gelangen wir dazu, den Logarithmus durch ein bestimmtes Integral darzustellen. Die Functionen $arctang\, z$, $arcsin\, z$, $arccos\, z$ definiren wir direkt durch bestimmte Integrale. Die Exponentialgrösse und die goniometrischen Functionen werden als Umkehrungen des Logarithmus und der cyklometrischen Functionen definirt.

2. Den Logarithmus einer Zahl z definiren wir als die Function $f(z)$, welche die Eigenschaft hat

1. $$f(z \cdot z_1) = f(z) + f(z_1).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung folgt sofort

$$f(z \cdot z_1 \cdot z_2) = f(z) + f(z_1) + f(z_2),$$

2. $$f(z \cdot z_1 \cdot z_2 \ldots z_n) = f(z) + f(z_1) + f(z_2) + \ldots + f(z_n).$$

Setzen wir hierin $z = z_1 = z_2 \ldots$, so entsteht

3. $$f(z^m) = mf(z),$$

wobei m eine ganze positive reale Zahl ist.

Ferner folgt aus 1.

$$f(z) = f(zz_1) - f(z_1).$$

Ersetzen wir hier zz_1 durch z, so haben wir für z zu setzen $z : z_1$ und erhalten

4. $$f\left(\frac{z}{z_1}\right) = f(z) - f(z_1).$$

3. Differenziren wir die Gleichung

$$f(z \cdot t) = f(z) + f(t)$$

nach t, so entsteht

$$zf'(zt) = f'(t).$$

Hierin setzen wir $t = 1$ und erhalten

$$zf'(z) = f'(1).$$

Folglich ist

$$f'(z) = f'(1)\cdot\frac{1}{z},$$

und daher weiter

$$f(z) = f'(1)\int\frac{dz}{z}.$$

Da $f(z)$ für $z = 1$ verschwindet, so sind die Grenzen des Integrals 1 und z; wir haben also

$$f(z) = f'(1)\cdot\int_1^z\frac{dz}{z}.$$

Durch die Functionalgleichung

$$f(z \cdot z_1) = f(z) + f(z_1)$$

ist daher der Logarithmus bis auf einen constanten Faktor $\mu = f'(1)$ vollständig

bestimmt. Dieser Faktor bleibt willkürlich; je nach Wahl desselben erhält man verschiedene Logarithmensysteme; die Zahl μ heisst der Modul des Systems. Als das natürliche Logarithmensystem bezeichnen wir das, für welches $f'(1) = 1$ genommen wird. Führen wir statt des allgemeinen Functionszeichens $f(x)$ hierfür das besondere $L(x)$ ein, so ist also

1. $$L(x) = \int_1^z \frac{dz}{z}.$$

Werden die Logarithmen, für welche $f'(1)$ einer gegebenen Zahl μ gleich ist, mit $Log_\mu z$ bezeichnet, so ist

2. $$Log_\mu z = \mu L z.$$

Hiernach genügt es, ausschliesslich die Function $L(z)$ weiter zu untersuchen.

4. Die Function $1 : z$ ist eine eindeutige Function der Punkte der Variabelnebene und wird nur im Punkte $z = 0$ unendlich gross. Um den Einfluss zu erfahren, den der Integrationsweg auf das Integral

$$\int_1^z \frac{dz}{z}$$

hat, haben wir daher den Werth zu berechnen, den das Integral

$$\int \frac{dz}{z}$$

erhält, wenn es über den Perimeter eines den Nullpunkt umgebenden Kreises erstreckt wird. Setzen wir in § 13, No. 9

$$f(z) = 1 : z, \quad a = 0,$$

so ergiebt sich für das gesuchte Integral der Werth

1. $$2\pi i.$$

Hieraus folgt: Der natürliche Logarithmus ist eine unendlich vieldeutige Function; die demselben Punkte zugehörigen Werthe unterscheiden sich durch ganze Vielfache von $2\pi i$. Diese Grösse $2\pi i$ wird als der Periodicitätsmodul des Logarithmus bezeichnet.

Um den von z abhängigen Theil des Logarithmus zu bestimmen, wählen wir für das Integral

$$\int_1^z \frac{dz}{z}$$

einen Integrationsweg, durch den der reale und der imaginäre Theil der Function gesondert werden; wir integriren, wenn $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ und $0 < \varphi < 2\pi$ zunächst auf der realen Achse von 1 bis r und dann auf einem Kreise um den Nullpunkt weiter von r bis zu z. Das erste Integral ist, da für diesen Theil des Integrationsweges $y = 0$ ist

2. $$\int_1^r \frac{dx}{x} = lr,$$

wenn wir mit lr den realen Werth von Lr bezeichnen.

Für das zweite, das Kreisintegral, setzen wir

$$z = r(cos\varphi + isin\varphi);$$

da für diesen Theil des Weges r constant ist, so ist

$$dz = r(-sin\varphi + i\,cos\varphi)\,d\varphi = i \cdot z d\varphi;$$

das Integral erstreckt sich von $\varphi = 0$ bis zur Amplitude von z, daher ist dasselbe

3. $$\int_0^\varphi i\,d\varphi = i\varphi\,.$$

Aus 1., 2., 3. folgt schliesslich

4. $$Lz = Lr(\cos\varphi + i\sin\varphi) = lr + i\varphi + k\cdot 2\pi i\,.$$

5. Der Logarithmus ist eine unendlich vieldeutige Function; jede Umkreisung des Nullpunktes durch die Variable auf dem Integrationswege vermehrt oder vermindert den natürlichen Logarithmus um $2\pi i$, je nachdem die Umkreisung im positiven oder negativen Sinne erfolgt. Um die Function

$$w = Lz$$

als eindeutige Function der Punkte einer RIEMANN'schen Fläche zu erhalten, hat man für die Variable eine Windungsfläche zu benutzen, die sich um den Nullpunkt windet und aus unzählig vielen Blättern besteht, die ausser im Windungspunkte keine Verwachsung zeigen; diese Variabelnfläche ist als Schraubenfläche mit unendlich kleiner Ganghöhe aufzufassen. Wir wollen auf jeder Windung eine Gerade vom Nullpunkte aus in der Richtung der realen Achse ziehen; der durch zwei solche auf einander folgende Geraden begrenzte Theil der z-Fläche heisse ein Blatt derselben. Für einen bestimmten Punkt z der Variabelnfläche nehmen wir den Werth des Lz zu

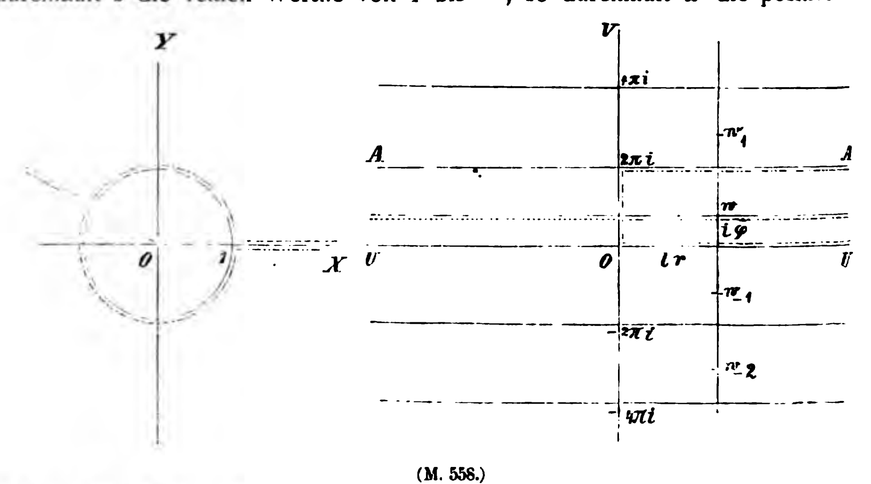
$$Lz = lr + i\varphi\,, \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

an; dann ist für alle Punkte desselben Blattes der Logarithmus durch dieselbe Formel dargestellt. Dieses Blatt heisse das Blatt 0, die darauf folgenden das Blatt 1, 2, 3, die vorhergehenden das Blatt — 1, — 2, — 3, . . . In das Blatt k gelangt man vom Punkte 1 des Blattes 0 durch $k$malige Umkreisung des Nullpunktes, wobei ein negatives k negativen Drehungssinn angiebt; daher ist für alle Punkte des Blattes k

$$Lz = lr + i\varphi + 2k\pi i\,, \quad 0 < \varphi < 2\pi\,.$$

6. Wir construiren nun zu den Punkten der z-Fläche die zugehörigen Punkte der w-Ebene, und beginnen zunächst mit den Punkten des Blattes 0.

Für den an der Grenze der Blätter 0 und — 1 liegenden Punkt 1 ist $w = l1 = 0$; durchläuft z die realen Werthe von 1 bis ∞, so durchläuft w die positive reale



(M. 558.)

Achse; durchläuft z die reale Strecke von 1 bis 0, so legt w die negative reale Achse zurück*). Beschreibt z von dem realen positiven Werthe r aus einen posi-

*) In beistehender Figur ist die w-Fläche in $\frac{1}{8}$ des Maassstabes ausgeführt, wie die z-Fläche.

tiven Kreisbogen φ, so bleibt der reale Theil von Lz ungeändert gleich lr und und es tritt nur der imaginäre Bestandtheil $i\varphi$ hinzu, w beschreibt also eine Normale zur realen Achse bis zum Abstande φ von derselben. Allen Punkten eines in 0 begrenzten Strahls in der z-Fläche entsprechen also die Punkte einer Parallelen zur realen Achse, die durch den Punkt $i\varphi$ geht; der negativen realen Achse der z-Fläche entspricht insbesondere die durch πi gehende Parallele zur realen Achse der w-Ebene. Die Punkte der Geraden, in welcher die Blätter 0 und 1 zusammenhängen (ihr Grundriss ist OX) haben die Amplitude 2π; dieser Grenzlinie entspricht daher die durch $2\pi i$ gehende Parallele zur realen Achse.

Allen Punkten des Blattes 0 der z-Fläche entsprechen daher die Punkte des Steifens $AAUU$ der w-Ebene; und umgekehrt, jedem Punkte w dieses Streifens entspricht eindeutig ein Punkt des Blattes 0 der z-Fläche, — der reale Theil von w ist nämlich der Logarithmus des Moduls von z, der imaginäre Theil von w ergiebt sofort die Amplitude.

Der Logarithmus w_1 eines Punktes z_1 des Blattes 1 weicht vom Logarithmus des Punktes z im Blatte 0, der mit ihm gleichen Grundriss hat, nur um $2\pi i$ ab. Hieraus erkennen wir sofort, dass die Punkte des Blattes 1 sich auf dem Streifen der w-Ebene abbilden, dessen Ränder parallel zu OU durch $2\pi i$ und $4\pi i$ gehen. Theilt man die w-Ebene von der realen Achse aus in Streifen von der Breite 2π, so entsprechen den aufeinander folgenden Blättern der z-Fläche der Reihe nach die Streifen der w-Ebene. Durch diese Streifen wird die ganze w-Ebene erfüllt; wir schliessen daher: Jede complexe Zahl ist der natürliche Logarithmus einer eindeutig bestimmten Zahl.

7. Aus der Gleichung

$$L(1+z) = \int_0^z \frac{dz}{1+z}$$

gewinnen wir mit Hülfe des TAYLOR'schen Satzes eine Potenzreihe für $L(1+z)$, Da die Variabelnfläche, von deren Punkten $L(1+z)$ eine eindeutige Function ist, im Punkte $1+z=0$, d. i. $z=-1$ einen Windungspunkt hat, und zugleich in diesem und in keinem andern Punkte, abgesehen von den Blättern $\pm\infty$, unendlich gross wird, so gilt die Entwicklung von $L(1+z)$ nach der TAYLOR'schen Reihe für alle Punkte im Innern des Kreises für welchen $mod z < 1$.

Wir haben nun

$$f(0) = k\cdot 2\pi i,\; f'(0) = +1,\; f''(0) = -1,\; f'''(0) = 1\cdot 2,\; f''''(0) = -1\cdot 2\cdot 3\ldots$$

und daher $$L(1+z) = k\cdot 2\pi i + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots.$$
$$mod z < 1.$$

Für die Punkte des Blattes 0 ist $k=0$ und daher

$$L(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$
$$mod z < 1.$$

8. Die natürliche Exponentialfunction. Als natürliche Exponentialfunction e^z der Variabeln z bezeichnen wir die Grösse, deren natürlicher Logarithmus z ist.

Es giebt nur eine Zahl, deren natürlicher Logarithmus einer gegebenen Zahl gleich ist; die natürliche Exponentialfunction e^z ist daher eine eindeutige Function von z.*)

*) Man müsste eigentlich die natürliche Exponentialfunction von der vieldeutigen $z$ten Potenz von e durch ein besonderes Symbol unterscheiden; es ist dies aber nicht üblich. Wo das Zeichen e^z eine vieldeutige Potenz bedeuten soll, muss dies besonders mitgetheilt werden.

Aus der Gleichung

$$L(a \cdot b) = La + Lb$$

folgt nach der Definition

$$a \cdot b = e^{(La + Lb)}$$

Setzen wir $La = z, \quad Lb = z_1$, so ist

$$a = e^z, \quad b = e^{z_1},$$

und damit ergiebt sich aus 1.

1. $$e^z \cdot e^{z_1} = e^{z + z_1}.$$

Da z und $z + k \cdot 2\pi i$ die Logarithmen desselben Logarithmanden sind, so folgt

2. $$e^{(z + k \cdot 2\pi i)} = e^z.$$

Die Exponentialfunction ändert sich also nicht, wenn die Variable um ganze Vielfache von $2\pi i$ zu- oder abnimmt. Sie ist daher ein periodische Function und hat die Periode $2\pi i$. Nach 1. und 2. ist

$$e^{(z + k \cdot 2\pi i)} = e^z \cdot e^{k \cdot 2\pi i} = e^z.$$

Für $z = 0$ folgt hieraus

3. $$e^{k \cdot 2\pi i} = e^0 = 1.$$

Setzen wir $e^z = w$, so ist $z = Lw$ und daher

$$\frac{de^z}{dz} = \frac{dw}{dLw}.$$

Da nun $$\frac{dLw}{dw} = \frac{1}{w} = \frac{1}{e^z},$$ so folgt

4. $$\frac{de^z}{dz} = e^z.$$

Da e^z eine eindeutige und für alle endlichen z endliche Function von z ist, so kann e^z nach dem Taylor'schen Satze in eine unendliche Reihe entwickelt werden, die für alle endlichen z convergirt; aus 4. folgt diese Reihe sofort zu

1. $$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots .$$

Wir sehen hieraus, dass diese Reihe, die in der Differentialrechnung für reale z abgeleitet wurde, auch für jedes endliche complexe z gilt.

Aus der Gleichung

$$Lr(\cos\varphi + i\sin\varphi) = lr + i\varphi,$$

bei welcher rechts die Vielfachen des Periodicitätsmoduls $2\pi i$ wegbleiben können, wenn φ nicht auf eine Umdrehung beschränkt, die Vieldeutigkeit also in die Amplitude φ verlegt wird, folgt sofort

6. $$e^{(lr + i\varphi)} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ersetzen wir lr und φ durch x und y, so erhalten wir

7. $$e^{(x + iy)} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Setzen wir ferner in 7. $r = 1$, so folgt insbesondere

8. $$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

9. Als Potenz a^z (für reale oder complexe a und z) definiren wir die Function

$$a^z = e^{zLa}.$$

Ist $a = \rho e^{i\alpha}$ und z real, so ist, wenn ρ^z real und positiv gerechnet wird,

$$a^z = e^{z(l\rho + i\alpha)} = \rho^z(\cos z\alpha + i\sin z\alpha);$$

für reale z führt die Definition somit auf den bereits bekannten Begriff der

Potenz eines beliebigen Dignanden mit realem Exponenten. Ist $z = x + iy$, so ergiebt sich

$$a^z = e^{(x+iy)(l\rho + i\alpha)}$$
$$= e^{(xl\rho - y\alpha)}\left[\cos(x\alpha + yl\rho) + i\sin(x\alpha + yl\rho)\right].$$

Diese Function ist unendlich vieldeutig, weil α um ganze Vielfache von 2π vermehrt oder vermindert werden kann. Nur dann, wenn y verschwindet und x rational ist, tritt eine auf eine endliche Anzahl Werthe beschränkte Vieldeutigkeit ein.

---

10. Die Function $Arctang z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}$.

Durch Zerlegung in Partialbrüche entsteht

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}\left(\int_0^z \frac{dz}{1+iz} + \int_0^z \frac{dz}{1-iz}\right).$$

Ersetzen wir im ersten Integrale $1 + iz$, im zweiten $1 - iz$ durch ζ, so ergiebt sich

$$\int_0^z \frac{dr}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\int_1^{1+iz} \frac{d\zeta}{\zeta} - \int_1^{1-iz} \frac{d\zeta}{\zeta}\right)$$

Daher folgt

1. $$Arc\,tang z = \frac{1}{2i} L \frac{1+iz}{1-iz}.$$

Die Function $Arctang z$ ist also unendlich vieldeutig, der Periodicitätmodul ist

$$\frac{1}{2i}\,2\pi i = \pi.$$

Die Gleichung 1. ergiebt nach der Fundamentaleigenschaft des Logarithmus

$$Arctang z + Arctang z_1 = \frac{1}{2i} L \frac{1+iz}{1-iz}\cdot\frac{1+iz_1}{1-iz_1}$$
$$= \frac{1}{2i} L \frac{1 - zz_1 + i(z+z_1)}{1 - zz_1 - i(z+z_1)}$$
$$= \frac{1}{2i} L \frac{1 + i\cdot\dfrac{z+z_1}{1-zz_1}}{1 - i\cdot\dfrac{z+z_1}{1-zz_1}}$$

Hieraus folgt

2. $$Arctang z + Arctang z_1 = Arctang \frac{z+z_1}{1-zz_1}.$$

Ist ferner $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so ist

$$1 + iz = 1 - y + ix, \quad 1 - iz = 1 + y - ix.$$

Folglich ist

$$L(1+iz) = l\sqrt{1 + r^2 - 2y} + i\,arctang\frac{x}{1-y} + k_1\cdot 2\pi i,$$

$$L(1-iz) = l\sqrt{1 + r^2 + 2y} + i\,arc\,tang\frac{x}{1+y} + k_2\cdot 2\pi i.$$

Daher ist weiter

$$Arctang(x+iy) = \frac{1}{2i}\,l\sqrt{\frac{1+r^2-2y}{1+r^2+2y}} + \frac{1}{2}\,arc\,tang\frac{x}{1-y} + \frac{1}{2}\,arc\,tang\frac{x}{1+y} + k\cdot\pi,$$

Die letzten beiden *arctang* lassen sich nach 2. vereinigen; dadurch entsteht

3. $$Arctang(x+iy) = \frac{1}{2}\, arc\,tang\,\frac{2x}{1-r^2} + \frac{1}{2i}\,l\sqrt{\frac{1+r^2-2y}{1+r^2+2y}} + k\cdot\pi$$

Die Function $1:(1+z^2)$ wird unendlich für $z = \pm i$; die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \dots$$

gilt daher innerhalb eines Kreises, der mit Halbmesser 1 um den Nullpunkt beschrieben ist. Aus dieser Reihe folgt durch Integration

$$Arctang\, z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots$$

$$mod\, z < 1$$

Diese Reihe giebt den Werth von $Arctang\, z$, der mit z verschwindet.

11. Die Function $tang\, w$ definiren wir als Umkehrung der Function $w = arctang\, z$. Aus der Vieldeutigkeit von $Arctang\, z$ folgt sofort: Die Function $tang\, w$ ist periodisch und hat die Periode π. Ferner folgt aus No. 10, 2

1. $$tang(w+w_1) = \frac{tang\, w + tang\, w_1}{1 - tang\, w\; tang\, w_1}.$$

Aus der Gleichung

$$Arctang\, z = \frac{1}{2i}\, L\frac{1+iz}{1-iz} = w$$

ergiebt sich zunächst

$$\frac{1+iz}{1-iz} = e^{2iw},$$

folglich ist

2. $$z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}}.$$

Ist nun $w = u + iv$, so ist

$$e^{iw} = e^{-v+iu} = e^{-v}(cos\, u + i\, sin\, u),$$
$$e^{-iw} = e^{v-iu} = e^{v}(cos\, u - i\, sin\, u).$$

Setzt man dies in 2. ein und erweitert mit $-i$, so folgt

3. $$tang(u+iv) = \frac{(e^v + e^{-v})\, sin\, u + i\,(e^v - e^{-v})\, cos\, u}{(e^v + e^{-v})\, cos\, u - i\,(e^v - e^{-v})\, sin\, u}.$$

Die Tangente wird Null für alle Werthe von u und v, welche den Gleichungen genügen

$$(e^v + e^{-v})\, sin\, u = 0, \quad (e^v - e^{-v})\, cos\, u = 0,$$

wenn für dieselben nicht zugleich der Nenner in $tang\, w$ verschwindet. Reale Lösungen dieser Gleichungen, die ausschliesslich in Betracht kommen, sind nur

$$v = 0, \quad u = k\pi.$$

Die Tangente wird unendlich, sobald die realen u und v den Gleichungen genügen

$$(e^v + e^{-v})\, cos\, u = 0, \quad (e^v - e^{-v})\, sin\, u = 0,$$

ohne dass zugleich der Zähler in 2. verschwindet, also für

$$v = 0, \quad u = (2k+1)\tfrac{1}{2}\pi.$$

Wir bemerken noch, dass das Integral jeder rationalen Function von z durch ein Aggregat einer rationalen Function und der natürlichen Logarithmen linearer Functionen, — die Logarithmen multiplicirt mit Coefficienten, unter denen auch i vorkommen kann — ausgedrückt wird.

§ 15. Arcussinus und Sinus, Arcuscosinus und Cosinus.

1. Wir untersuchen in diesem Abschnitte Integrale von der Form

$$\int f(z, \sqrt{R})\,dz, \qquad R = a + 2bz + cz^2$$

wenn f eine rationale Function von z und $\sqrt{R}$ ist.

In § 4. ist gezeigt worden, wie durch eine rationale Substitution ein solches Integral in das Integral einer rationalen Function reducirt werden kann; wir wollen indess von dieser Substitution hier keinen Gebrauch machen, sondern die Untersuchung ohne Beseitigung der Irrationalität führen. Jede rationale Function von z und $\sqrt{R}$ kann, wie leicht zu sehen ist, auf die Form gebracht werden

$$1. \qquad f(z, \sqrt{R}) = \frac{\varphi_1 + \psi_1\sqrt{R}}{\varphi + \psi\sqrt{R}}.$$

wobei φ, ψ, φ_1, ψ_1 rationale ganze Functionen von z sind. Aus 1. gewinnen wir durch Erweiterung mlt $\varphi - \psi\sqrt{R}$

$$f(z, \sqrt{R}) = \frac{\Phi + \Psi\cdot\sqrt{R}}{\varphi^2 - \psi^2 R} = \frac{\Phi}{\varphi^2 - \psi^2 R} + \frac{\Psi\cdot R}{\varphi^2 - \psi^2 R}\cdot\frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Hiernach zerfällt das vorgelegte Integral

$$\int f(z, \sqrt{R})dz = \int\frac{\Phi}{\varphi^2 - \psi^2 R}dz + \int\frac{\Psi\cdot R}{\varphi^2 - \psi^2 R}\cdot\frac{dz}{\sqrt{R}}.$$

Das erste Integral ist frei von Irrationalem und ist durch die Untersuchungen des vorigen Abschnitts erledigt. Im zweiten zerlegen wir den rationalen Faktor in die Summe einer ganzen und einer echt gebrochenen Function,

$$\frac{\Psi\cdot R'}{\varphi^2 - \psi^2 R} = \Lambda + \frac{M}{N},$$

wo Λ, M, N ganze Functionen sind, M von niederem Grade als N. Den Theil

$$\int\Lambda\cdot\frac{dz}{\sqrt{R}}$$

reduciren wir nach § 4, No. 4; den Bruch M : N zerlegen wir in Partialbrüche und wenden die in § 4, No. 5 angegebene Reduction an. Dies zusammenfassend erkennen wir: Das Integral

$$1. \qquad \int f(z, \sqrt{R})dz, \qquad R = a + 2bz + cz^2,$$

wobei f rational in Bezug auf z und $\sqrt{R}$ ist, zerfällt in eine rationale ganze Function von z, Logarithmen algebraischer Functionen von z, ein Produkt einer rationalen ganzen Function mit $\sqrt{R}$, und in Integrale der Form

$$2. \qquad \int\frac{dz}{\sqrt{R}}.$$

Wir zerlegen den Radicanden in seine lineare Factoren

$$a + 2bz + cz^2 = c(\alpha - z)(\beta - z) = -c(\alpha - z)(-\beta + z),$$

ersetzen

$$z = \frac{\alpha - \beta}{2}\cdot\zeta + \frac{\alpha + \beta}{2},$$

also

$$\alpha - z = \frac{\alpha - \beta}{2}(1 - \zeta), \qquad -\beta + z = \frac{\alpha - \beta}{2}(1 + \zeta),$$

und erhalten hierdurch

$$\sqrt{R} = \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sqrt{-c} \cdot \sqrt{1 - \zeta^2},$$

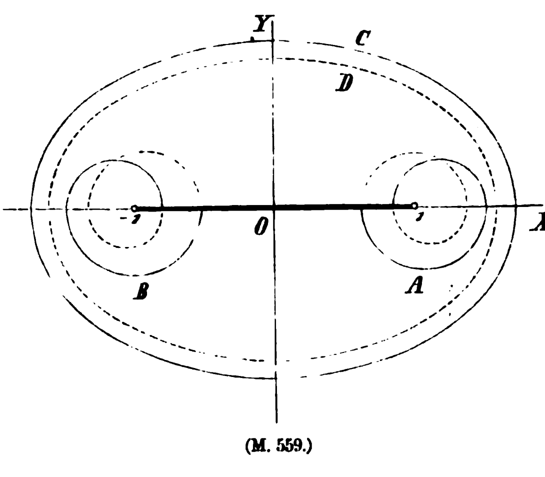
$$\int \frac{dz}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

2. Die Function $Arc\sin z$ definiren wir durch das bestimmte Integral

$$Arc\sin z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Die Function $1 : \sqrt{1 - z^2}$ ist eine eindeutige Function der Punkte einer zweiblätterigen RIEMANN'schen Fläche (§13, No. 26) welche die beiden Windungspunkte $+1$ und -1 hat und deren beide Blätter entlang der Geraden zwischen den Windungspunkten verwachsen sind; in beiden Windungspunkten wird die Function unendlich.

Um zu erfahren, welchen Einfluss der Integrationsweg auf das Integral hat, haben wir das Integral über die geschlossenen Wege zu erstrecken, welche Windungspunkte einschliessen. Diese Wege lassen sich auf folgende Arten von Wegen zurückführen: 1. Wege, die einen einzigen Windungspunkt umkreisen und daher sich in beide Blätter begeben müssen, 2. Wege, die beide Windungspunkte umkreisen und nur in einem Blatte verlaufen; zur ersten Art gehören die Wege Fig. 559, A und B, zur andern C und D.



(M. 559.)

Um die Umkreisungsintegrale der ersten Art zu erhalten, integriren wir über einen Weg, der einen constanten verschwindend kleinen Abstand von $+1$ hat. Bezeichnen wir mit r den Abstand des Punktes z von $+1$, und mit φ den Winkel der realen Achse mit r, so ist

$$z = 1 + r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$= 1 + re^{i\varphi},$$

daher ist zu untersuchen

$$\lim_{r=0} ir \int_0^{4\pi} \frac{e^{i\varphi}\, d\varphi}{\sqrt{-2re^{i\varphi} - r^2 e^{2i\varphi}}} = \lim \sqrt{r} \cdot \int_0^{4\pi} \frac{\sqrt{e^{i\varphi}}\, d\varphi}{\sqrt{2 + re^{i\varphi}}}.$$

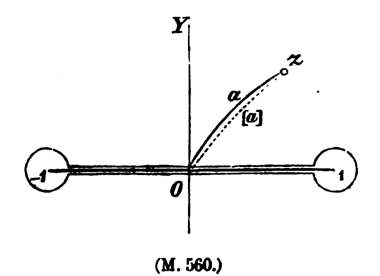
Nimmt r unendlich ab, so bleibt die unter dem Integralzeichen stehende Function, also auch das Integral selbst, endlich; da es mit einem verschwindenden Faktor multiplicirt wird, so ist der Grenzwerth Null. Wir sehen daher:

Das Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

ausgedehnt über eine geschlossene Curve, die nur einen Windungspunkt umkreist, ist Null.

Anders verhält es sich mit den Wegen der zweiten Art. Um über diese zu urtheilen, wollen wir C (Fig. 560) auf folgenden Weg zusammenziehen. Wir gehen vom Nullpunkte aus entlang der realen Achse bis dicht an $+1$, beschreiben dann um $+1$ einen verschwindend kleinen Kreis bis dicht an die Verwachsung (also ganz im oberen Blatte) gehen dann entlang der realen Achse bis dicht an -1, beschreiben einen verschwindend kleinen Kreis um -1, und kehren dann entlang der realen Achse zum Nullpunkte zurück. Die Kreisintegrale sind



(M. 560.)

$$\lim_{r=0} \sqrt{r} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{e^{i\varphi}}\, d\varphi}{\sqrt{2 + re^{i\varphi}}} \quad \text{und} \quad \lim_{r=0} \sqrt{r} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{e^{i\varphi}}\, d\varphi}{\sqrt{-2 + re^{i\varphi}}},$$

sie verschwinden beide. Für die geradlinigen Integrale von 0 bis 1, von 1 bis 0, von 0 bis -1 und von -1 bis 0 haben wir auf das Vorzeichen zu achten, das $\sqrt{1 - z^2}$ auf diesen Wegen hat. Wir wollen annehmen, im Nullpunkte des oberen Blattes sei die Wurzel $= +1$; alsdann ist sie auf dem ersten Theile des Weges, von 0 bis $+1$, positiv; durch einmaliges Umkreisen eines Windungspunktes wechselt die Wurzel das Vorzeichen, für den Weg von $+1$ über 0 bis -1 gilt also der negative Wurzelwerth; durch einmaliges Umkreisen des Windungspunktes -1 tritt dann nochmaliger Zeichenwechsel ein, auf dem Wege von -1 bis 0 zurück gilt daher wieder das positive Vorzeichen. Es ist daher das gesuchte Begrenzungsintegral, wenn überall die Wurzel positiv gerechnet wird,

$$J = \int_0^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \int_{+1}^{0} \frac{dx}{-\sqrt{1 - x^2}} + \int_0^{-1} \frac{dx}{-\sqrt{1 - x^2}} + \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ersetzt man im ersten und zweiten Integrale x durch $-x$, so erhält man

$$J = 4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 2\pi.$$

Integrirt man in der gleichen Richtung über den Weg, der im zweiten Blatte unter dem soeben beschriebenen liegt, so hat auf allen Punkten dieses Weges die Wurzel das andere Vorzeichen, also ist dieses Integral $J_1 = -2\pi$. Beachten wir, dass die soeben verwendete Integrationsrichtung negativ war, so folgt:

Das Integral $\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$ im positiven Sinne über eine geschlossene Curve erstreckt, die in einem Blatte liegt und beide Windungspunkte einmal umkreist, ist $\mp 2\pi$; das obere Zeichen gilt für das Blatt, in dessen Nullpunkte die Wurzel den Werth $+1$ hat.

Hieraus folgt weiter: Die Function $\operatorname{Arc\,sin} z$ ist unendlich vieldeutig, und hat den realen Periodicitätsmodul 2π.

3. Um das Integral $\operatorname{Arc\,sin} z$ auszuführen, benutzen wir die Differentialformel

$$\frac{d(z + \sqrt{z^2 - 1})}{z + \sqrt{z^2 - 1}} = \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{1}{i} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Aus dieser Formel folgt durch Integration von 0 bis z die Gleichung

1. $$Arcsin\, z = L\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{i}.$$

Durch diese Gleichung hätte die Untersuchung des $Arcsin\, z$ ebenso, wie die des $Arctang\, z$ direkt an den Logarithmus angeschlossen werden können; doch erschien es zweckmässiger, den Nachweis des Periodicitätsmoduls durch Betrachtung des Integrals $\int dz : \sqrt{1 - z^2}$ auf der zweiblätterigen Fläche zu gewinnen. Wir werden jetzt von 1. Gebrauch machen, um in $Arcsin\, z$ das Reale vom Imaginären zu sondern. Setzen wir

$$iL\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{i} = u + iv,$$

so ist
$$L\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{i} = v - iu,$$

mithin
$$z + \sqrt{z^2 - 1} = ie^v(\cos u - i\sin u)$$
$$= e^v(\sin u + i\cos u).$$

Der reciproke Werth ist
$$z - \sqrt{z^2 - 1} = e^{-v}(\sin u - i\cos u).$$

Addiren wir diese Gleichungen und ersetzen z durch $x + iy$, so ergiebt sich

2. $$\tfrac{1}{2}(e^v + e^{-v})\sin u = x, \quad \tfrac{1}{2}(e^v - e^{-v})\cos u = y.$$

Hieraus folgt weiter
$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}(e^{2v} + e^{-2v}) + \tfrac{1}{2}\sin^2 u - \tfrac{1}{2}\cos^2 u,$$

mithin ist
$$1 + x^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}(e^v + e^{-v})^2 + \sin^2 u,$$

und daher
$$(1 + x)^2 + y^2 = [\tfrac{1}{2}(e^v + e^{-v}) + \sin u]^2,$$
$$(1 - x)^2 + y^2 = [\tfrac{1}{2}(e^v + e^{-v}) - \sin u]^2.$$

Hieraus ergiebt sich

3. $$\tfrac{1}{2}(e^v + e^{-v}) + \sin u = \sqrt{(1 + x)^2 + y^2},$$
$$\tfrac{1}{2}(e^v + e^{-v}) - \sin u = \sqrt{(1 - x)^2 + y^2};$$

für reale v und u ist
$$\tfrac{1}{2}(e^v + e^{-v}) \geqq 1, \quad -1 \leqq \sin u \leqq 1;$$

daher gelten bei beiden Wurzeln nur die positiven Werthe. Benutzen wir die Abkürzungen
$$\tfrac{1}{2}[\sqrt{(1 + x)^2 + y^2} + \sqrt{(1 - x)^2 + y^2}] = \sigma,$$
$$\tfrac{1}{2}[\sqrt{(1 + x)^2 + y^2} - \sqrt{(1 - x)^2 + y^2}] = \tau,$$

so ergiebt sich aus 3.

4. $$\tfrac{1}{2}(e^v + e^{-v}) = \sigma,$$

5. $$\sin u = \tau.$$

Aus 5. folgt

6. $$u = Arcsin\, \tau.$$

Aus 4. ergiebt sich

7. $$e^v = \sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1},$$

8. $$v = l(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}).$$

Führen wir 6. und 8. in 1. ein, so erhalten wir
$$Arcsin\, z = Arcsin\, \tau + il(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}) + 2k\pi.$$

4. Wir haben noch zu entscheiden, welcher Werth von $Arcsin\, \tau$ und welches Vorzeichen von $\sqrt{\sigma^2 - 1}$ gilt.

Aus No. 3, 2 folgt, dass $\sin u$ dasselbe Vorzeichen hat, wie x.

Durch Subtraction der in No. 3 gegebenen Werthe für $z \pm \sqrt{z^2 - 1}$ folgt

1. $$\sqrt{1 - z^2} = \tfrac{1}{2}(e^v + e^{-v})\cos u - \tfrac{1}{2}i(e^v - e^{-v})\sin u.$$

Bezeichnet man die Abstände eines Punktes P des oberen Blattes von den Punkten $+1$ und -1 mit ρ und ρ_1, sowie mit φ den Winkel, um den ρ in positiver Richtung (entgegengesetzt den Uhrzeigern) gedreht werden muss, um mit der von $+1$ nach -1 sich erstreckenden Geraden zusammenzufallen, und mit φ_1 den kleinsten Winkel, um den ρ_1 zu drehen ist, um mit der von -1 nach $+1$ sich erstreckenden Geraden zusammenzufallen, rechnet φ_1 positiv oder negativ, je nachdem die Drehungsrichtung negativ oder positiv ist und nimmt für den Nullpunkt des obern Blattes $\sqrt{1-z^2} = +1$ (nicht -1) an, so ist für jeden Punkt des obern Blattes, wie man sich leicht überzeugt

2. $$\sqrt{1-z^2} = \sqrt{\rho\rho_1}\cdot[\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) + i\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)),$$

wodurch nun diese Wurzel ohne jede Zweideutigkeit bestimmt ist. Vergleicht man dies mit 1. und bemerkt, dass $\frac{1}{2}(e^v + e^{-v})$ positiv ist, so erkennt man, dass $\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)$ und $\cos u$ gleiche Zeichen haben.

Durch die beiden Bemerkungen, dass $\sin u$ mit x und $\cos u$ mit $\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)$ dem Vorzeichen nach übereinstimmt, ist u bis auf ein ganzes Vielfaches von 2π unzweideutig bestimmt. Die Untersuchung der Werthe von $\varphi+\varphi_1$ ergiebt ohne Schwierigkeit folgende Uebersicht

3. $$\begin{array}{llll} \text{Ist } & x>0, & y>0, & \text{so ist } 0<u<\tfrac{1}{2}\pi; \\ \text{"} & x>0, & y<0, & \text{" "} \tfrac{1}{2}\pi<u<\pi. \\ \text{"} & x<0, & y<0, & \text{" "} \pi<u<\tfrac{3}{2}\pi; \\ \text{"} & x<0, & y>0, & \text{" "} \tfrac{3}{2}\pi<u<2\pi; \end{array}$$

Aus 3. folgt, dass y dasselbe Vorzeichen hat, wie $\cos u$; da nun nach No. 3, 7

$$\tfrac{1}{2}(e^v - e^{-v}) = \sqrt{\sigma^2-1},$$

so ergiebt sich mit Rücksicht auf No. 3, dass $\sqrt{\sigma^2-1}$ für Punkte des obern Blattes positiv zu nehmen ist.

Bezeichnet (τ) den absoluten Werth von τ, so erhält man daher

$$Arc\sin z = \begin{Bmatrix} arc\sin(\tau) \\ \pi - arc\sin(\tau) \\ \pi + arc\sin(\tau) \\ 2\pi - arc\sin(\tau) \end{Bmatrix} + il(\sigma + \sqrt{\sigma^2-1}) + 2k\pi.$$

Die vier Zeilen gelten der Reihe nach für Punkte der Quadranten $+x, +y$; $+x, -y$; $-x, -y$; $-x, +y$; dabei ist zu beachten, dass die Verwachsung als Doppellinie aufzufassen ist, als Uebergang von der $(+Y)$-Seite des oberen Blattes zur $(-Y)$-Seite des unteren, so wie als Uebergang von der $(-Y)$-Seite des oberen zur $(+Y)$-Seite des unteren; für zwei Punkte der Verwachsung, die geometrisch identisch sind, aber als verschiedenen Uebergängen angehörig betrachtet werden, haben die zugehörigen Functionen $Arc\sin z$ die Differenz $\pm\pi$.

5. Um zu entscheiden, welche Werthe $Arc\sin z$ für einen Punkt des unteren Blattes hat, wollen wir einen solchen Punkt mit (z) bezeichnen, zum Unterschiede von dem im oberen Blatte über ihm liegenden Punkte z. Wir integriren nun auf irgend einem Wege (Fig. 560) im oberen Blatte von 0 bis z und erhalten

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = Arc\sin\tau + il(\sigma + \sqrt{\sigma^2-1}) + 2k\pi.$$

Um nun das Integral von 0 bis (z) zu erhalten, benutzen wir folgenden Integrationsweg: Wir gehen von 0 auf der realen Achse bis dicht vor $+1$, umgehen dann in einem verschwindenden Kreise den Punkt $+1$, kehren entlang der realen Achse bis zum Nullpunkte zurück, und verfolgen dann weiter bis (z)

den Weg (a), der im zweiten Blatte unter a liegt. Auf dem Wege (a) sind die Elemente des Integrals

$$\int_{(0)}^{(z)} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

den Elementen des über a erstreckten Integrals

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

entgegengesetzt gleich, wegen der entgegengesetzt gleichen Werthe, welche $\sqrt{1-z^2}$ in zwei unter einander liegenden Punkten hat; folglich ist entlang a und (a)

$$\int_{(0)}^{(z)} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Da nun das Kreisintegral verschwindet, und jedes der beiden entlang der realen Achse erstreckten den Werth $\frac{1}{2}\pi$ hat, so folgt

$$\int_0^{(z)} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi - Arc\sin z .$$

Daher ist für Punkte des unteren Blattes

12. $$Arc\sin(z) = \pi - Arc\sin z ,$$

wobei z den über dem Punkte (z) des unteren Blattes liegenden Punkt des oberen Blattes bezeichnet.

6. Die Function $(1+z)^m$, in welcher unter m ein realer echter oder unechter Bruch verstanden werden mag, hat einen Windungspunkt in $z = -1$, in dem sie unendlich wird, wenn $m < 0$; sie kann daher für alle Werthe, deren Modul < 1 ist, nach steigenden Potenzen von z entwickelt werden. Die binomische Reihe

1. $$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \dots$$

gilt daher für alle complexen z, deren Modul < 1.

Die linke Seite ist m-deutig, die rechte nur eindeutig. Die rechte Seite reducirt sich für $z = 0$ auf 1, und ändert sich mit z stetig. Construiren wir die m-blätterige RIEMANN'sche Fläche, für welche $(1+z)^m$ eine eindeutige Function des Ortes in der Fläche ist, so stellt die unendliche Reihe den Werth der Function für die Punkte im Innern des Kreises auf der Fläche dar, für dessen Centrum $(1+z)^m = 1$ ist; die Functionswerthe für die andern Blätter ergeben sich durch Multiplication der Reihe mit den $m$ten Wurzeln der Einheit.

Ersetzen wir in 1. z durch $-z^2$ und nehmen $m = -\frac{1}{2}$, so entsteht

2. $$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot z^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}z^6 + \dots$$
$$mod\, z < 1 .$$

Die Integration dieser Reihe liefert

3. $$Arc\sin z = \frac{z}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{z^7}{7} + \dots + 2k\pi$$
$$mod\, z < 1 .$$

Diese unendliche Reihe giebt die Werthe von $Arc\sin z$ für die Punkte z desselben Kreises, für welche die Reihe 2. die Werthe von $1:\sqrt{1-z^2}$ liefert. Wenn wir in der Gleichung

$$Arc\sin z = iL\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{i},$$

z durch iz ersetzen, so entsteht

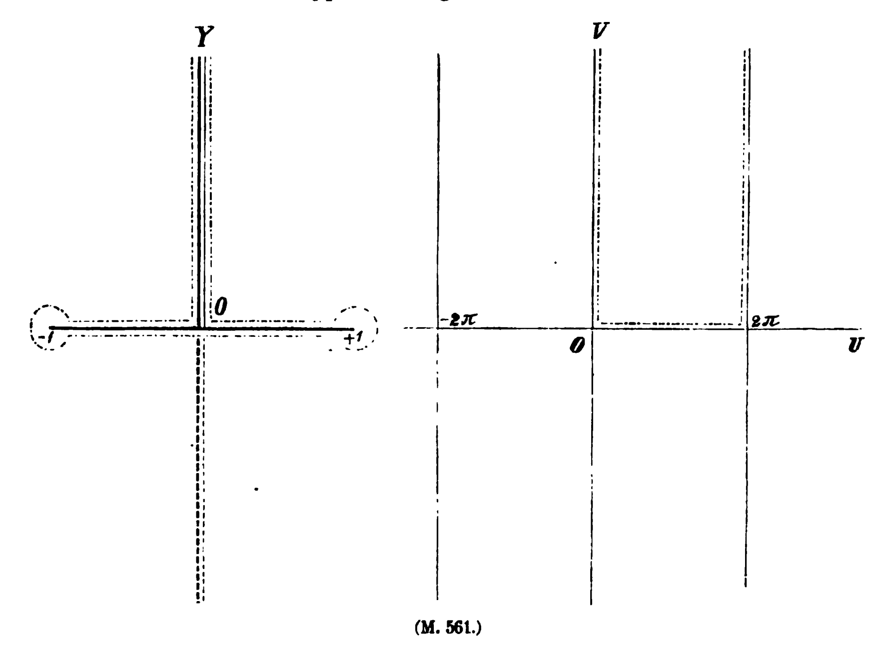
$$Arc\sin iz = iL(z+\sqrt{z^2+1});$$

wird dieselbe Substitution in 3. ausgeführt, so ergiebt sich

$$4. \quad L(z+\sqrt{z^2+1}) = \frac{z}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{z^7}{7} + i\cdot 2k\pi$$

$$mod\, z < 1.$$

7. Wollen wir $Arc\sin z$ als eindeutige Function des Ortes der für $1:\sqrt{1-z^2}$ construirten RIEMANN'schen Fläche darstellen, so muss die Fläche, die zweifach zusammenhängend ist, durch einen geeigneten Querschnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden. Zu diesem Zwecke zerschneiden wir die z-Fläche im oberen Blatte entlang der positiven imaginären Achse, und setzen diesen Schnitt über die Verwachsung hinweg ins untere Blatt fort. (In Fig. 561 ist der Schnitt durch eine Doppellinie angedeutet, durch welche die beiden Ränder



(M. 561.)

des Schnittes dargestellt werden sollen). Den Nullpunkt, von welchem die Integration ausgeht, nehmen wir, wie immer, im oberen Blatte, oberhalb der Verwachsung und rechts vem Querschnitte an.

Wird ferner angenommen, dass $Arc\sin z$ für den Nullpunkt den Werth $2k\pi$ hat, wo nun k eine bestimmte reale ganze Zahl bedeutet, so ist für jeden Punkt der z-Fläche die Function $Arc\sin z$ eindeutig bestimmt, wenn wir festsetzen, dass die z-Fläche durch die Ränder des Querschnitts begrenzt ist, dass also die Integrationscurve den Querschnitt nirgends überschreiten darf. Um von einem Punkte des Querschnitts zu dem auf dem andern Rande gegenüberliegenden Punkte zu gelangen, haben wir eine Curve zu beschreiben, die beide Windungs-

punkte umkreist; in zwei gegenüberliegenden Punkten des Querschnitts hat also *Arc sin z* Werthe, die um 2π von einander verschieden sind.

Nehmen wir zunächst $k = 0$ an, so entspricht dem Nullpunkte der z-Fläche der Nullpunkt der w-Ebene. Geht z von 0 entlang der Verwachsung bis 1, so durchläuft $w = arc\,sin\,z$ die reale Achse von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$; geht z (nach Umgehung des Windepunkts 1 in einem verschwindend kleinen Kreise) auf der andern Seite der Verwachsung bis -1, so geht w von $\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{3}{2}\pi$; kehrt z oberhalb der Verwachsung bis zu dem Punkte des Querschnitts zurück, der O gegenüberliegt, so geht w weiter bis zu 2π. Geht z entlang des Querschnitts von 0 bis $i\eta$, so ist

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = i\int_0^\eta \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = i\,l(\eta + \sqrt{1 + \eta^2}).$$

Dem positiven Theile des rechten Querschnittrandes entspricht daher die positive imaginäre Achse der w-Ebene, dem negativen Theile die negative. Dem andern Rande des Querschnitts entspricht die Gerade, welche die w-Werthe $2\pi + iv$ enthält, also im Abstande 2π zur imaginären Achse parallel ist. Der ganzen durch den Querschnitt begrenzten z-Fläche entspricht der von der v-Achse und der Parallelen $u = 2\pi$ begrenzte Streifen der w-Ebene. Die obere Hälfte des Streifens entspricht dem oberen Blatte, die untere dem unteren der z-Fläche.

8. Um die Beziehung der z-Fläche und dieses Streifens der w-Ebene vollständig aufzuhellen, wollen wir untersuchen, welchen Curven der z-Fläche die zu den Achsen parallelen Geraden der w-Ebene entsprechen.

Soll in $w = Arc\,sin\,z = u + iv$ der reale bez. der imaginäre Theil constant sein, so müssen τ, bez. σ constante Werthe haben. Gehören zu $u = u_0$ bez. $v = v_0$ die Werthe $\tau = \tau_0$, bez. $\sigma = \sigma_0$, so entspricht

$$1.\quad \begin{aligned} u = u_0 &\text{ den Punkten } \sqrt{(1+x)^2 + y^2} - \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \tau_0\,, \\ v = v_0 &\quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \sqrt{(1+x)^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sigma_0\,. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir in der z-Fläche die Windungspunkte -1 und $+1$ mit F und F_1 und den Punkt x, y mit P, so ist

$$PF = \sqrt{(1+x)^2 + y^2}\,, \quad PF = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}\,.$$

Die Gleichungen 1. gehen somit über in

$$PF - PF_1 = \tau_0\,, \quad PF + PF_1 = \sigma_0\,.$$

Hieraus folgt: Eine Parallele zur V-Achse ($u = u_0$) entspricht einem Hyperbelaste der z-Fläche; eine Parallele zur U-Achse ($v = v_0$) entspricht einer Ellipse der z-Fläche. Diese Ellipsen und Hyperbeln sind confocal, ihre gemeinsamen Brennpunkte sind die Windungspunkte. Eine innerhalb der obern (untern) Streifenhälfte liegende Parallele zur U-Achse entspricht einer Ellipse im obern (untern) Blatte der z-Fläche. Die beiden Aeste derselben Hyperbel gehören zwei entgegengesetzt gleichen Werthen von τ, mithin zwei Normalen der U-Achse zu, die gleichweit von den Rändern des Streifens in der w-Ebene abstehen; zwei Hyperbeläste, von denen der eine aus der obern Hälfte des ersten Blattes in die untere des zweiten Blattes sich fortsetzt, während der andere aus der untern Hälfte des ersten Blattes nach der obern des zweiten geht, und mit dem ersten Aste sich deckt, gehören zu zwei Normalen zur U-Achse, deren Abscissen den Bedingungen genügen

$$arc\,sin\,u = \tau_0\,, \quad 0 < u < 2\pi\,.$$

Hieraus folgt, dass die Abscissen u_0 und u_0' der Parallelen zur V-Achse, die zwei sich deckenden Hyperbeln entsprechen, die Summe π oder 3π haben.

Hieraus erkennen wir: Jedem Punkte des Streifens der w-Ebene entspricht ein und nur ein Punkt der z-Fläche.

Wenn wir nun die Function $Arc\,sin\,z$ im Nullpunkte statt mit dem Werthe Null mit den Werthen

$$\ldots -6\pi,\ -4\pi,\ -2\pi,\ +2\pi,\ +4\pi,\ +6\pi\ \ldots$$

beginnen lassen, so ist ersichtlich, dass den Punkten der z-Fläche immer andere Streifen der w-Ebene entsprechen, alle normal zur U-Achse und von der Breite 2π, so dass nun die ganze W-Ebene von solchen Streifen bedeckt wird.

9. Das Additionstheorem für den Arcussinus. Neben den Additionstheoremen für den Logarithmus und Arcustangens

$$Lz + L\zeta = L(z\zeta),$$

$$Arc\,tang\,z + Arc\,tang\,\zeta = Arc\,tang\frac{z+\zeta}{1-z\zeta},$$

existirt ein verwandtes Theorem für den Arcussinus, das für reale Werthe der Variabeln bereits aus den Elementen bekannt ist. Die Aufgabe, die Summe

$$Arc\,sin\,z + Arc\,sin\,\zeta$$

als einen Arcussinus einer Function von z und ζ darzustellen, kann geometrisch so gelöst werden: Sei

$$Arc\,sin\,z = u + iv, \qquad Arc\,sin\,\zeta = \mathfrak{u} + i\mathfrak{v},$$

so ist

$$Arc\,sin\,z + Arc\,sin\,\zeta = u + \mathfrak{u} + i(v + \mathfrak{v}).$$

Der Geraden der w-Ebene, die im Abstande $u + \mathfrak{u}$ zur V-Achse parallel ist, entspricht ein Hyperbelast der z-Fläche; der Geraden, die im Abstande $v + \mathfrak{v}$ der U-Achse parallel ist, entspricht eine Ellipse der z-Fläche; der Hyperbelast hat mit der Ellipse auf der z-Fläche nur einen wirklichen Schnittpunkt; wird dieser mit Z bezeichnet, so ist

$$Arc\,sin\,z + Arc\,sin\,\zeta = Arc\,sin\,Z,$$

also ist Z die Lösung der Aufgabe.

Frei von geometrischen Betrachtungen erreichen wir das Ziel folgendermassen: Wir bestimmen zunächst den Functionszusammenhang zwischen z und ζ, für welchen die Gleichung erfüllt ist

$$1. \qquad \int_0^z \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} + \int_0^\zeta \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} = c.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass unendlich kleine von z und ζ herrührende Zunahmen beider Integrale die Summe Null haben müssen, dass also

$$2. \qquad \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.$$

Werden die Nenner beseitigt, so entsteht

$$\sqrt{1-\zeta^2}\,dz + \sqrt{1-z^2}\,d\zeta = 0.$$

Hier integriren wir theilweis und erhalten

$$z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2} + \int z\zeta\left(\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right) = Const.$$

Das letzte Integral verschwindet gemäss der Gleichung 1., daher ergiebt sich der gesuchte Zusammenhang zu

$$3. \qquad z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2} = \gamma.$$

Um den Zusammenhang der Constanten γ und c zu erkennen, vergleichen

wir die unendlich kleinen Aenderungen, die γ und c erleiden, wenn z und ζ sich um verschwindende Beträge verändern. Wir erhalten aus 1. und 3.

$$dc = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}},$$

$$d\gamma = \sqrt{1-\zeta^2}\cdot dz + \sqrt{1-z^2}\cdot d\zeta - z\zeta\left(\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right),$$

$$= -\left(z\zeta - \sqrt{1-z^2}\cdot\sqrt{1-\zeta^2}\right)dc.$$

Nun ist

$$1-\gamma^2 = 1 - z^2 - \zeta^2 + 2z^2\zeta^2 + 2z\zeta\sqrt{1-z^2}\cdot\sqrt{1-\zeta^2},$$

$$= (1-z^2)(1-\zeta^2) + z^2\zeta^2 + 2z\zeta\sqrt{1-z^2}\cdot\sqrt{1-\zeta^2}.$$

Daher folgt

4. $$dc = \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}.$$

Für $x = y = 0$ verschwindet γ, und c hat einen der Werthe $k\cdot 2\pi$; hieraus und aus 4. folgt

$$c = \int_0^\gamma \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}}.$$

Wir haben daher das Additionstheorem

$$\int_0^z \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} + \int_0^\zeta \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} = \int_0^\gamma \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}},$$

$$\gamma = z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2};$$

oder kürzer

$$Arc\sin z + Arc\sin\zeta = Arc\sin\left(z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2}\right).$$

10. Als den Sinus der complexen Zahl $w = u + iv$ definiren wir die Zahl z, welche der Gleichung genügt

$$Arc\sin z = w.$$

Zu jedem Werthe von w gehört ein eindeutig bestimmtes z, die Function $\sin w$ ist also eine eindeutige Function der Variabeln w. Nimmt w alle Werthe an, die innerhalb des Streifens zwischen $u = 0$ und $u = 2\pi$ liegen, so durchläuft $z = \sin w$ alle möglichen Werthe; dabei nimmt $\sin w$ jeden Werth zweimal an, nämlich für $w = u + iv$ denselben wie für $w = \pi - (u+iv)$, es ist also

$$\sin w = \sin(\pi - w).$$

Für alle Zahlen w, die sich um gerade Vielfache von 2π unterscheiden, hat $\sin w$ denselben Werth, es ist

$$\sin w = \sin(w + 2k\pi).$$

Der Sinus ist somit eine periodische Function und hat die reale Periode 2π. Aus den Gleichungen No. 2, 4 und 5 ergiebt sich sofort

$$\sin(u+iv) = \frac{e^v + e^{-v}}{2}\sin u + i\frac{e^v - e^{-v}}{2}\cos u.$$

11. Die Function $Arc\cos z$ definiren wir durch die Gleichung

1. $$Arc\cos z = \frac{\pi}{2} - Arc\sin z.$$

Die Function $Arc\cos z$ ist daher unendlich vieldeutig und hat denselben Periodicitätsmodul 2π, wie $Arc\sin w$. Drückt man in dem Additionstheorem

$$Arc\sin\left(z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2}\right) - Arc\sin z = Arc\sin\zeta,$$

ζ durch $z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2} = z_1$ und z aus, so entsteht

2. $$Arc\sin z_1 - Arc\sin z = Arc\sin\left(z_1\sqrt{1-z^2} - z\sqrt{1-z_1^2}\right).$$

Schreibt man für 1.

$$Arc\cos z = Arc\sin 1 - Arc\sin z,$$

und benutzt 2. indem man z_1 durch 1 ersetzt, so folgt

3. $$Arc\cos z = Arc\sin\sqrt{1-z^2}.$$

Welchen Werth der Quadratwurzel man hierin zu nehmen hat, ist ebensowenig unbestimmt, wie bei den Quadratwurzeln im Additionstheorem.

Ist $Arc\cos z = w$, so gehört zu jedem w ein eindeutig bestimmtes z. Wir definiren die Function $z = \cos w$ als die Zahl, welche der Gleichung genügt

$$Arc\cos z = w;$$

es ist mithin $\cos w$ eine eindeutige Function von w. Aus der Vieldeutigkeit von $Arc\cos z$ folgt: Die Function $\cos w$ ist periodisch und hat die reale Periode 2π. Aus 3. folgt

4. $$\cos w = \sqrt{1-\sin^2 w}.$$

Schreibt man für 1.

$$Arc\sin z = \tfrac{1}{2}\pi - Arc\cos z,$$

und setzt $Arc\cos z = w$, so folgt $z = \sin(\frac{1}{2}\pi - w)$, oder

5. $$\cos w = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - w).$$

Durch 5. ist vollständig bestimmt, welcher Werth der Quadratwurzel in 4. zu nehmen ist. Ferner folgt aus 5. und No. 7

6. $$\cos(u+iv) = \frac{e^v + e^{-v}}{2}\cos u - i\frac{e^v - e^{-v}}{2}\sin u.$$

Setzt man im

$$Arc\sin z + Arc\sin\zeta = Arc\sin(z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2}),$$
$$Arc\sin z = w, \quad Arc\sin\zeta = \mathfrak{w},$$

so folgt

7. $$\sin(w+\mathfrak{w}) = \sin w\cos\mathfrak{w} + \cos w\sin\mathfrak{w},$$

und hieraus, wenn man w durch $\frac{1}{2}\pi - w$ ersetzt,

8. $$\cos(w-\mathfrak{w}) = \cos w\cos\mathfrak{w} + \sin w\sin\mathfrak{w}.$$

12. Ist $w = Arc\sin z$, so ist

$$dw = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

mithin
$$dz = \sqrt{1-z^2}\,dw,$$

d. i.
$$d\sin w = \cos w\,dw.$$

Hieraus folgt, dass die für reale w bewiesenen Differentialquotienten des Sinus und Cosinus auch für complexe w unverändert gelten. Da nun $\sin w$ und $\cos w$ für alle endlichen $w = u + iv$ endlich bleiben, so folgt, dass die TAYLORschen Reihen

$$\sin w = w - \frac{w^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{w^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots,$$
$$\cos w = 1 - \frac{w^2}{1\cdot 2} + \frac{w^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{w^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \ldots$$

für alle endlichen Werthe von w gültig sind.

§ 16. Definition des elliptischen Integrals, Reduction auf die Normalformen; Vieldeutigkeit elliptischer Integrale.

1. Unter einem elliptischen Integrale versteht man jedes Integral von der Form

$$\int f(z, \sqrt{az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e})\,dz,$$

wobei f eine rationale Function von z und der Quadratwurzel bezeichnet, unter

der Voraussetzung, dass sich das Integral nicht infolge besonderer Werthe der Coefficienten $a \dots e$ oder besonderer Art der Function f durch algebraische oder cyklometrische Functionen oder Logarithmen ausdrücken lässt.

2. Wir beschäftigen uns zunächst damit, die irrationale Grösse

$$\sqrt{az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e}$$

durch eine rationale Substitution zu transformiren. Zu diesem Zwecke zerlegen wir den Radicanden in seine linearen Faktoren; es sei

$$az^4 + \dots + e = a(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta).$$

Hierauf setzen wir

$$z = \frac{U}{V},$$

worin U und V Polynome einer neuen Variabeln ζ bezeichnen mögen, und zwar beide vom Grade p, oder U vom Grade p, V vom Grade $p-1$. Hierdurch erhalten wir

$$\sqrt{az^4 + \dots + e} = \frac{1}{V^2}\sqrt{(U-\alpha V)(U-\beta V)(U-\gamma V)(U-\delta V)}.$$

Soll nun der transformirte Ausdruck nicht wesentlich complicirter erscheinen als der ursprüngliche, so muss die rechts stehende Wurzel in das Produkt einer rationalen Function mit einer Wurzel aus einem Polynom vierten Grades zerfallen; es müssen daher in der Function

$$(U-\alpha V)(U-\beta V)(U-\gamma V)(U-\delta V)$$

alle linearen Faktoren doppelt vorkommen, ausgenommen vier, welche dann den Radicanden zusammensetzen.

Zwei der vier Functionen

$$U-\alpha V, \quad U-\beta V, \quad U-\gamma V, \quad U-\delta V$$

können nicht einen gemeinsamen linearen Faktor haben; denn derselbe würde dann auch gemeinsamer Faktor von U und V sein, während doch als selbstverständlich vorauszusetzen ist, dass U und V keinen gemeinsamen Faktor haben. Die noch unbestimmten Functionen U und V sind daher so zu wählen, dass ausser vier einfachen linearen Faktoren jede der Functionen $U-\alpha V$, $U-\beta V$, $U-\gamma V$, $U-\delta V$ nur lineare Faktoren doppelt enthält.

3. Es ist bemerkenswerth, dass durch jede solche Substitution das einfachste elliptische Differential, als welches

$$\frac{dz}{\sqrt{a(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}}$$

zu bezeichnen ist in

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{a_1\zeta^4 + b_1\zeta^3 + c_1\zeta^2 + d_1\zeta + e_1}},$$

also in ein Differential von derselben Form, transformirt wird.

Ist nämlich in Folge der Substitution

$$\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)} = \frac{M}{V^2}\sqrt{a_1\zeta^4 + \dots + e_1},$$

so ist

$$\frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}} = \frac{1}{M\sqrt{a_1\zeta^4 + \dots}}\left(V\frac{dU}{d\zeta} - U\frac{dV}{d\zeta}\right)d\zeta.$$

Jeden linearen Faktor, der in $U-\alpha V$ doppelt vorkommt, enthält M einfach; es lässt sich nun leicht nachweisen, dass jeder solche Faktor auch in $VU' - UV'$ aufgeht. Hierzu bemerken wir zunächst, dass, wenn die ganze Function $\varphi(\zeta)$ den linearen Faktor $m\zeta + n$ doppelt enthält, wenn also

$$\varphi(\zeta) = (m\zeta + n)^2 \cdot \psi(\zeta),$$

für den Differentialquotienten nach ζ sich ergiebt

$$\begin{aligned} \varphi' &= (m\zeta + n)^2 \cdot \psi' + 2m\,(m\zeta + n)\cdot\psi \\ &= (m\zeta + n)\,[(m\zeta + n)\,\psi' + 2m\psi]. \end{aligned}$$

Wir sehen daher: Jeder lineare Faktor, der in φ doppelt vorkommt, theilt auch φ'.

Da nun

$$VU' - UV' = V\cdot\frac{d(U-\alpha V)}{d\zeta} - (U-\alpha V)\,\frac{dV}{d\zeta},$$

und da nach dem soeben bewiesenen Satze jeder Doppelfaktor von $U-\alpha V$ auch ein Faktor von $d(U-\alpha V):d\zeta$ ist, so folgt, dass jeder Doppelfaktor von $U-\alpha V$ auch Faktor der Function $VU'-UV'$ ist.

Die Function M ist vom Grade $2p-2$. Sind U und V beide vom Grade p, etwa

$$\begin{aligned} U &= m\zeta^p + m_1\zeta^{p-1} + m_2\zeta^{p-2} + \ldots \\ V &= n\zeta^p + n_1\zeta^{p-1} + n_2\zeta^{p-2} + \ldots \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} VU' - UV' &= (n\zeta^p + n_1\zeta^{p-1} + ..)\cdot[pm\zeta^{p-1} + (p-1)m_1\zeta^{p-2} + ..) \\ &- (m\zeta^p + m_1\zeta^{p-1} + ..)\cdot[pn\zeta^{p-1} + (p-1)n_1\zeta^{p-2} + ..) \\ &= (mn_1 - nm_1)\zeta^{2p-2} + \ldots\ldots \end{aligned}$$

Ist V vom Grade $p-1$, etwa

$$V = n\zeta^{p-1} + n_1\zeta^{p-2} + \ldots$$

so ist

$$\begin{aligned} VU' - UV' &= (n\zeta^{p-1} + n_1\zeta^{p-2} + ..)\,[pm\zeta^{p-1} + (p-1)m_1\zeta^{p-2} + ..] \\ &- (m\zeta^p + m_1\zeta^{p-1} + \ldots)\,[(p-1)n\zeta^{p-2} + (p-2)n_1\zeta^{p-3} + ..) \\ &= mn\zeta^{2p-2} + \ldots\ldots \end{aligned}$$

In beiden Fällen hat also $VU'-UV'$ den Grad $2p-2$. Da nun M und $VU'-UV'$ gleichen Grades sind, und jeder Faktor von M auch in $VU'-UV'$ enthalten ist, so folgt, dass der Quotient

$$\frac{VU' - UV'}{M}$$

eine reine Zahl ist*).

4. Jede lineare Substitution

$$1.\qquad z = \frac{\lambda + \mu\zeta}{1 + \nu\zeta}$$

genügt den angegebenen Bedingungen in einfachster Weise; denn in diesem Falle ist

$$U = \lambda + \mu\zeta, \qquad V = 1 + \nu\zeta,$$

also sind $U-\alpha V \ldots$ sämmtlich linear. Man kann daher über die unbestimmten Zahlen λ, μ, ν so verfügen, dass der Radicand des transformirten Differentials

$$a_1\zeta^4 + b_1\zeta^3 + c_1\zeta + d_1\zeta + e_1$$

eine möglichst einfache Gestalt erhält, nämlich so, dass

$$a_1\zeta^4 + b_1\zeta^3 + .. + e_1 = A(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2),$$

worin k noch unbestimmt ist.

Alsdann hat $a_1\zeta^4 + ..$ die linearen Faktoren

$$\zeta - 1,\quad \zeta + 1,\quad \zeta - \frac{1}{k},\quad \zeta + \frac{1}{k}.$$

Den Werthen von z_1, für welche

$$(z-\alpha)\,(z-\beta)\,(z-\gamma)\,(z-\delta)$$

*) Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Regiomonti 1829. § 3, 4.

verschwindet, entsprechen die Werthe von ζ, für welche der transformirte Radicand verschwindet. Nehmen wir an, dass den Werthen $z = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Reihe nach die Werthe $\zeta = +1, -1, +1:k, -1:k$ entsprechen sollen, so haben wir zur Bestimmung der Substitutionscoefficienten λ, μ, ν und der Zahl k folgende Gleichungen, die sich durch Einsetzung der entsprechenden Werthe von z und ζ in die Substitutionsgleichung 1. ergeben,

$$2. \quad \alpha = \frac{\lambda + \mu}{1 + \nu}, \qquad 4. \quad \gamma = \frac{\lambda k + \mu}{k + \nu},$$

$$3. \quad \beta = \frac{\lambda - \mu}{1 - \nu}, \qquad 5. \quad \delta = \frac{\lambda k - \mu}{k - \nu}.$$

Durch Subtraction der Gleichungen 2. und 4., sowie der Gleichungen 3. und 4. erhalten wir leicht

$$6. \quad \alpha - \gamma = \frac{(\lambda\nu - \mu)(1 - k)}{(1 + \nu)(k + \nu)}, \qquad \beta - \gamma = \frac{(\lambda\nu - \mu)(1 + k)}{(1 - \nu)(k + \nu)}.$$

Hieraus folgt durch Division

$$7. \quad \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{1 - k}{1 + k}.$$

Vertauschen wir μ und ν mit $-\mu$ und $-\nu$, so gehen $\alpha - \gamma$ und $\beta - \gamma$ in $\beta - \delta$ und $\alpha - \delta$ über, wie man aus den Gleichungen 2. bis 5. erkennt; daher ist

$$8. \quad \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta} = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{1 + k}{1 - k}.$$

Aus 7. und 8. folgt zur Bestimmung von k

$$9. \quad \left(\frac{1 - k}{1 + k}\right)^2 = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \cdot \frac{\beta - \delta}{\alpha - \delta}.$$

Die beiden Werthe von k, die sich hieraus ergeben, sind reciprok; wir können daher immer k so wählen, dass der Modul von k ein echter Bruch ist.

Sind insbesondere $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sämmtlich real, und setzt man $\alpha > \beta > \gamma > \delta$ voraus, so ist k real.

Haben wir uns entschieden, welche Wurzel der Gleichung 9. für k genommen werden soll, so folgt der zugehörige Werth von ν eindeutig aus der Gleichung 7. Für λ und μ ergeben 2. und 3.

$$\lambda + \mu = \alpha(1 + \nu),$$
$$\lambda - \mu = \beta(1 - \nu);$$

also folgt

$$10. \quad \lambda = \tfrac{1}{2}[(\alpha + \beta) + \nu(\alpha - \beta)],$$
$$\mu = \tfrac{1}{2}[(\alpha - \beta) + \nu(\alpha + \beta)].$$

Führen wir die berechneten Werthe in die Substitutionsgleichung ein, so erhalten wir

$$11. \quad z = \frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{\nu + \zeta}{1 + \nu\zeta}.$$

Um die Grösse A zu bestimmen, bilden wir

$$z - \alpha = \frac{\lambda + \mu\zeta}{1 + \nu\zeta} - \alpha = \frac{\lambda - \alpha + (\mu - \alpha\nu)\zeta}{1 + \nu\zeta}$$

und ebenso $z - \beta$, $z - \gamma$, $z - \delta$.

Aus den Gleichungen 2. bis 5. folgt sofort

$$\mu - \alpha\nu = \alpha - \lambda, \qquad \mu - \gamma\nu = k(\gamma - \lambda),$$
$$\alpha - \beta\nu = \lambda - \beta, \qquad \mu - \delta\nu = k(\lambda - \delta).$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergeben sich

12.
$$z - \alpha = (\lambda - \alpha) \cdot \frac{1 - \zeta}{1 + \nu\zeta}, \qquad z - \gamma = (\lambda - \gamma) \cdot \frac{1 - k\zeta}{1 + \nu\zeta}$$
$$z - \beta = (\lambda - \beta) \cdot \frac{1 + \zeta}{1 + \nu\zeta}, \qquad z - \delta = (\lambda - \delta) \cdot \frac{1 + k\zeta}{1 + \nu\zeta}.$$

Hieraus folgt weiter die Transformation

13.
$$(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)(\lambda - \delta) \cdot \frac{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}{(1 + \nu\zeta)^4}.$$

Aus 10. folgt

14.
$$\lambda - \alpha = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)(\nu - 1), \qquad \lambda - \beta = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)(\nu + 1).$$

Aus 4. und 5. erhalten wir
$$\lambda = \frac{1}{2}\left[(\gamma + \delta) + \frac{\nu}{k}(\gamma - \delta)\right],$$
und hieraus weiter

15.
$$\lambda - \gamma = \frac{1}{2}(\gamma - \delta)\left(\frac{\nu}{k} - 1\right), \qquad \lambda - \delta = \frac{1}{2}(\gamma - \delta)\left(\frac{\nu}{k} + 1\right).$$

Somit ist

16.
$$(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)(\lambda - \delta) = \frac{1}{16}(\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2(1 - \nu^2)\left(1 - \frac{\nu^2}{k^2}\right).$$

Daher ergiebt sich schliesslich

17.
$$\sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta)} = \frac{1}{4}(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)\sqrt{(1 - \nu^2)\left(1 - \frac{\nu^2}{k^2}\right)} \cdot \frac{1}{(1 + \nu\zeta)^2} \cdot \sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}.$$

Durch Differentiation der Formeln 12. erhalten wir zunächst

18.
$$dz = -(\lambda - \alpha) \cdot \frac{1 + \nu}{(1 + \nu\zeta)^2} d\zeta, \qquad dz = -(\lambda - \gamma) \cdot \frac{k + \nu}{(1 + \nu\zeta)^2} d\zeta,$$
$$dz = (\lambda - \beta) \cdot \frac{1 - \nu}{(1 + \nu\zeta)^2} d\zeta, \qquad dz = (\lambda - \delta) \cdot \frac{k - \nu}{(1 + \nu\zeta)^2} d\zeta.$$

Durch Multiplication dieser Formeln ergiebt sich in Rücksicht auf 16.

19.
$$dz = \frac{1}{2}\sqrt{k(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)(1 - \nu^2)\left(1 - \frac{\nu^2}{k^2}\right)} \cdot \frac{d\zeta}{(1 + \nu\zeta)^2}.$$

Für das einfachste elliptische Differential haben wir somit die Transformation

20.
$$\frac{dz}{\sqrt{a(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta)}} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{a(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}.$$

5. Ist δ unendlich gross, so verschwindet in
$$az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$$
der Coefficient a und das Polynom reducirt sich somit auf ein Polynom dritten Grades
$$bz^3 + cz^2 + dz + e = b(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma).$$

Aus No. 4, 9 folgt für $\delta = \infty$

1.
$$\left(\frac{1 - k}{1 + k}\right)^2 = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}.$$

Ferner folgt aus No. 4, 5

2.
$$\nu = k.$$

In Rücksicht auf 2. haben wir an Stelle von No. 4, 13

3.
$$(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma) \cdot \frac{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}{(1 + k\zeta)^4},$$

und anstatt No. 4, 18

4.
$$dz = -(\lambda - \alpha)\frac{1+k}{(1+k\zeta)^2}d\zeta, \quad dz = (\lambda - \beta)\cdot\frac{1-k}{(1+k\zeta)^2},$$
$$dz = -(\lambda - \gamma)\frac{2k}{(1+k\zeta)^2}d\zeta.$$

Ersetzen wir in No. 4, 20 das Produkt $\alpha\delta$ durch $(-b)$ und gehen zur Grenze für $\delta = \infty$ über, so erhalten wir

5.
$$\frac{dz}{\sqrt{b(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{b(\alpha-\beta)}}\cdot\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}.$$

Die Resultate der beiden Nummern 4. und 5. können wir in dem Satze aussprechen: Die Quadratwurzel aus einem Polynome vierten oder dritten Grades in Bezug auf die Variable z kann man durch eine lineare Substitution in einen Ausdruck von der Form transformiren

$$\frac{1}{M}\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)},$$

worin der Modulus von k kleiner als 1 ist, und M eine Function zweiten Grades von ζ bezeichnet.

---

6. Für die Anwendungen der elliptischen Integrale in Geometrie und Mechanik ist insbesondere der Fall von Interesse, dass das Polynom $az^4 + bz^3 + \ldots + e$ nur reale Coefficienten hat und der Variabeln z nur solche realen Werthe beigelegt werden, für welche die Wurzel aus diesem Polynom reale Werthe erhält. Wir wollen nun zeigen, dass in diesem Falle sich jederzeit reale Substitutionen angeben lassen, durch welche

$$\int f(z, \sqrt{az^4 + \ldots})\,dz$$

durch algebraische Functionen, Logarithmen, cyklometrische Functionen und ein Integral von der Form ausgedrückt werden kann

$$\int\frac{F(\mathfrak{z})}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)}}\,d\mathfrak{z},$$

wobei $F(\mathfrak{z})$ eine rationale Function bezeichnet und k und $\mathfrak{z}$ reale echte Brüche sind. Diese Transformation lässt sich allerdings nicht immer durch eine rationale Substitution erreichen, wir müssen uns vielmehr dazu bequemen, irrationale, von sehr einfacher Art, zu verwenden.

Wir wenden zunächst die lineare Substitution an

1.
$$z = \frac{\lambda + \mu\zeta}{1+\zeta},$$

um dadurch die Transformation zu erhalten

$$a(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta) = \frac{a_1}{(1+\zeta)^4}(p^2-\zeta^2)(q^2-\zeta^2).$$

Entsprechen den Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Reihe nach die Wurzeln $p, -p, q, -q$, so erhalten wir aus 1. die vier Gleichungen

2.
$$\alpha = \frac{\lambda+\mu p}{1+p}, \quad \gamma = \frac{\lambda+\mu q}{1+q},$$
$$\beta = \frac{\lambda-\mu p}{1-p}, \quad \delta = \frac{\lambda-\mu q}{1-q}.$$

Durch Subtraction ergiebt sich

3.
$$\alpha - \gamma = \frac{(\lambda-\mu)(q-p)}{(1+p)(1+q)}.$$

Wechseln wir hier der Reihe nach das Vorzeichen von p, von q; von p und q, so erhalten wir

4. $$\beta - \gamma = \frac{(\lambda - \mu)(q + p)}{(1 - p)(1 + q)},$$

5. $$\alpha - \delta = \frac{-(\lambda - \mu)(q + p)}{(1 + p)(1 - q)},$$

6. $$\beta - \delta = \frac{-(\lambda - \mu)(q - p)}{(1 - p)(1 - q)}.$$

Aus 4., 5., 6. folgt weiter

7. $$\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} = -\frac{(1 - p)(1 - q)}{(1 + p)(1 + q)}, \quad \frac{\alpha - \delta}{\beta - \gamma} = -\frac{(1 - p)(1 + q)}{(1 + p)(1 - q)}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Multiplication und Division

8. $$\left(\frac{1 - p}{1 + p}\right)^2 = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \cdot \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta},$$

9. $$\left(\frac{1 - q}{1 + q}\right)^2 = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \delta} \cdot \frac{\beta - \gamma}{\beta - \delta}.$$

Sind α, β, γ, δ real und $\alpha > \beta > \gamma > \delta$, so folgen aus 8. und 9. reale Werthe für p und q. Sind α und β real, γ und δ conjugirt complex, so sind auch $\alpha - \gamma$ und $\alpha - \delta$, sowie $\beta - \gamma$ und $\beta - \delta$ conjugirt complex, mithin die rechte Seite in Gleichung 8. real und positiv, folglich p real. Ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 i$, $\delta = \gamma_1 - \gamma_2 i$, so ergiebt sich für die rechte Seite von 9.

$$\frac{\alpha - \gamma_1 - \gamma_2 i}{\alpha - \gamma_1 + \gamma_2 i} \cdot \frac{\beta - \gamma_1 - \gamma_2 i}{\beta - \gamma_1 + \gamma_2 i}.$$

Hierin sind Zähler und Nenner conjugirt complex; der Quotient der Quadratwurzeln ist mithin ebenfalls der Quotient zweier conjugirt Complexen, also erhält man aus 9. ein Resultat von der Form

$$\frac{1 - q}{1 + q} = \pm \frac{\rho - \sigma i}{\rho + \sigma i} = \frac{\rho - \sigma i}{\rho + \sigma i} \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma + \rho i}{\sigma - \rho i},$$

woraus sofort hervorgeht

10. $$q = \frac{\sigma}{\rho} i \quad \text{oder} \quad -\frac{\rho}{\sigma} i,$$

also ist q rein imaginär.

Sind α und β, sowie γ und δ conjugirt complex,

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i, \quad \beta = \alpha_1 - \alpha_2 i,$$

so ist

11. $$\left(\frac{1 - p}{1 + p}\right)^2 = \frac{(\alpha_1 - \gamma_1) + (\alpha_2 - \gamma_2) i}{(\alpha_1 - \gamma_1) - (\alpha_2 + \gamma_2) i} \cdot \frac{(\alpha_1 - \gamma_1) + (\alpha_2 + \gamma_2) i}{(\alpha_1 - \gamma_1) - (\alpha_2 - \gamma_2) i},$$
$$\left(\frac{1 - q}{1 + q}\right)^2 = \frac{(\alpha_1 - \gamma_1) + (\alpha_2 - \gamma_2) i}{(\alpha_1 - \gamma_1) + (\alpha_2 + \gamma_2) i} \cdot \frac{(\alpha_1 - \gamma_1) - (\alpha_2 + \gamma_2) i}{(\alpha_1 - \gamma_1) - (\alpha_2 - \gamma_2) i}.$$

Zähler und Nenner der rechten Seiten sind bei beiden Gleichungen conjugirt complex, daher folgen aus beiden rein imaginäre Werthe für p und q.

Setzen wir $$p^2 = b_1, \quad q^2 = b_2,$$

so haben wir

	wenn α, β, γ, δ real sind	$b_1 > 0$, $b_2 > 0$,
12.	„ nur α und β „ „	$b_1 > 0$, $b_2 < 0$,
	„ α und β, sowie γ und δ conjugirt complex	$b_1 < 0$, $b_2 < 0$.

Ist δ unendlich gross, reducirt sich also $\sqrt{R}$ auf

$$\sqrt{b(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)},$$

so folgt aus 8. und 9.

13. $$\left(\frac{1 - p}{1 + p}\right)^2 = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}, \quad q = 1.$$

Daher ist

$$\sqrt{R} = \sqrt{b(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)} = \frac{1}{(1+\zeta)^2}\sqrt{a_1(1-\zeta^2)(p^2-\zeta^2)}.$$

Ersetzt man hier p^2 durch b_2, so erhält man wie bei einem endlichen Werthe von δ für die transformirte Wurzel

$$\sqrt{a_1(b_1-\zeta^2)(b_2-\zeta^2)},$$

wobei $b_1 = 1$, $b_2 = p^2$ ist.

Führt man die lineare Substitution in

$$f(z, \sqrt{R})\,dz, \quad R = az^4 + bz^3 + \ldots$$

aus, so erhält man

$$f_1(\zeta, \sqrt{R_1})\,d\zeta,$$

wobei f_1 eine rationale Function von ζ und $R_1 = a_1(b_1-\zeta^2)(b_2-\zeta^2)$ bezeichnet. Diese Function lässt sich immer auf die Form bringen

$$14. \qquad f_1(\zeta, \sqrt{R_1}) = \frac{\varphi + \psi\sqrt{R_1}}{\varphi_1 + \psi_1\sqrt{R_1}},$$

worin φ, ψ, φ_1, ψ_1 ganze rationale Functionen von ζ sind. Macht man rechts den Nenner rational, so entsteht

$$f_1 = \frac{\Phi + \Psi\sqrt{R_1}}{L},$$

wo nun L, Φ, Ψ ganze Functionen von ζ sind. Daher ist schliesslich

$$\int f(z, \sqrt{R})\,dz = \int\frac{\Phi}{L}\,d\zeta = \int\frac{\Psi}{L}\sqrt{R_1}\,d\zeta.$$

Das erste Integral rechts enthält ein rationales Differential und führt daher auf algebraische Functionen und Logarithmen. Im zweiten schreiben wir

$$15. \qquad \int\frac{\Psi}{L}\sqrt{R_1}\cdot d\zeta = \int\frac{\Psi_1}{L\cdot\sqrt{R_1}}\cdot d\zeta,$$

worin $\Psi_1 = \Psi\cdot R_1$ ist.

7. Wir beschäftigen uns nun zunächst mit der Transformation des Ausdrucks

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{a_1(b_1-\zeta^2)(b_2-\zeta^2)}}.$$

A. Ist $a_1 > 0$, $b_1 > b_2 > 0$, so hat die Wurzel

$$\sqrt{a_1(b_1-\zeta^2)(b_2-\zeta^2)}$$

reale Werthe, sobald $b_2 > \zeta^2$ oder $b_1 < \zeta^2$. Im ersten Unterfalle setzen wir

$$\zeta = \sqrt{b_2}\cdot\mathfrak{z}, \quad k = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}},$$

und erhalten

$$\sqrt{R_1} = \sqrt{a_1 b_1 b_2}\cdot\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)},$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{a_1 b_1}}\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)}}.$$

Im zweiten Unterfalle nehmen wir

$$\zeta = \sqrt{b_1}\cdot\frac{1}{\mathfrak{z}}, \quad k = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}},$$

woraus folgt

$$\sqrt{R_1} = \sqrt{a_1 b_1 b_2}\cdot\frac{1}{\mathfrak{z}^2}\cdot\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)},$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = -\frac{1}{\sqrt{a_1 b_2}}\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)}}.$$

B. Ist $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 < 0$, so muss $\zeta^2 > b_1$ sein; wir setzen

$$\zeta = \frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{-b_2}{b_1 - b_2}},$$

und haben

$$\sqrt{R_1} = \sqrt{a_1 b_1 (b_1 - b_2)} \cdot \frac{\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}^3} \cdot \sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)},$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{a_1(b_1 - b_2)}} \cdot \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)}}.$$

C. Ist $a_1 > 0$, $b_1 < b_2 < 0$, so kann ζ alle realen Werthe annehmen. Die Substitution

$$\zeta = \sqrt{-b_2} \cdot \frac{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}}{\mathfrak{z}}, \quad k = \sqrt{\frac{b_1 - b_2}{-b_2}}$$

liefert

$$\sqrt{R_1} = \frac{b_2 \sqrt{a}}{\mathfrak{z}^2 \sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} \cdot \sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)},$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = -\frac{1}{\sqrt{-a_1 b_2}} \cdot \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)}}.$$

D. Ist $a_1 < 0$, $b_1 > b_2 > 0$, so muss ζ^2 zwischen b_1 und b_2 liegen. Durch

$$\zeta = \frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{1-k^2\mathfrak{z}^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{b_1 - b_2}{b_1}}$$

ergiebt sich

$$\sqrt{R_1} = k^2 \sqrt{-a_1 b_1 b_2} \cdot \frac{\mathfrak{z}}{\sqrt{1-k^2\mathfrak{z}^2}^3} \sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)},$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{-a_1 b_1}} \cdot \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)}}.$$

E. Ist $a_1 < 0$, $b_1 > 0$, $b_2 < 0$, so muss $\zeta^2 < b_1$ sein; wir substituiren

$$\zeta = \sqrt{1-\mathfrak{z}^2}, \quad k = \sqrt{\frac{b_1}{b_1 - b_2}},$$

und erhalten

$$\sqrt{R_1} = \sqrt{-a_1 b_1 (b_1 - b_2)} \cdot \frac{\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} \cdot \sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)},$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = -\frac{1}{\sqrt{-a_1(b_1 - b_2)}} \cdot \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)}}.$$

Im Falle $a_1 < 0$, $b_1 < b_2 < 0$ ist die Wurzel für jedes reale ζ imaginär. Führt man die Substitution A aus, so gelangt man zu denselben Formeln wie bei A, und erhält für k ebenfalls einen realen, echten Bruch.

8. Wir wenden uns nun zu dem Integrale No. 6, 15 zurück. Sondern wir in Ψ_1 und L die Glieder geraden Grades in Bezug auf ζ von den Gliedern ungeraden Grades, so erhalten wir

$$\frac{\Psi_1}{L} = \frac{M_1 + \zeta M_2}{L_1 + \zeta L_2}$$

worin M_1, M_2, L_1, L_2 nur Glieder mit geraden Exponenten enthalten.

Durch Erweiterung mit $L_1 - \zeta L_2$ beseitigen wir die ungeraden Potenzen des Nenners; es entsteht

$$\frac{\Psi_1}{L} = \frac{M_1 L_1 - \zeta^2 M_2 L_2}{L_1^2 - \zeta^2 L_2^2} + \frac{\zeta(M_2 L_1 - M_1 L_2)}{L_1^2 - \zeta^2 L_2^2}.$$

Daher haben wir

$$1.\qquad \int \frac{\Psi_1}{L} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = \int \frac{M_2 L_1 - M_1 L_2}{L_1^2 - \zeta^2 L_2^2} \cdot \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{R_1}} + \int \frac{M_1 L_1 - \zeta^2 M_2 L_2}{L_1^2 - \zeta^2 L_2^2} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}}.$$

Im ersten Integrale rechts setzen wir $\zeta^2 = \mathfrak{z}$ und erhalten dadurch ein Integral

$$\int \Pi \cdot \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(b_1 - \mathfrak{z})(b_2 - \mathfrak{z})}},$$

worin Π eine rationale Function von $\mathfrak{z}$ ist. Dieses Integral ist im vorigen Paragraphen behandelt worden. Im letzten Integrale von 1. führen wir eine der Substitutionen No. 7, A, B, C, D, E aus; da dieselben alle unter der Form enthalten sind

$$\zeta^2 = \frac{e_1 + e_2 \mathfrak{z}^2}{f_1 + f_2 \mathfrak{z}^2},$$

so geht die Function von ζ, die nur gerade Potenzen enthält, in eine eben solche Function von $\mathfrak{z}$ über. Wir behalten daher ein Integral übrig

$$\int \frac{N}{N_1} \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1 - \mathfrak{z}^2)(1 - k^2 \mathfrak{z}^2)}},$$

worin N und N_1 nur gerade Potenzen von $\mathfrak{z}$ enthalten.

Zerlegen wir $N : N_1$ in eine ganze Function und in Partialbrüche, und betrachten bei dieser Zerlegung $\mathfrak{z}^2$ als Variable, so sehen wir, dass das Integral 2. in Integrale von der Form zerfällt

$$\int \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1 - \mathfrak{z}^2)(1 - k^2 \mathfrak{z}^2)}}, \quad \int \frac{\mathfrak{z}^{2n} d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1 - \mathfrak{z}^2)(1 - k^2 \mathfrak{z})}},$$

$$\int \frac{d\mathfrak{z}}{(1 + \lambda \mathfrak{z}^2)^n \sqrt{(1 - \mathfrak{z}^2)(1 - k^2 \mathfrak{z}^2)}}.$$

Die letzten beiden Arten können noch weiter reducirt werden.

9. Betreffs des an zweiter Stelle aufgeführten Integrals wollen wir zeigen, wie jedes Integral

$$\int (A_1 z^{2n} + A_2 z^{2n-2} + A_3 z^{2n-4} + \ldots + A_n z^2) \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

auf einen algebraischen Theil und auf die Integrale

$$\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \text{ und } \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

reducirt werden kann, indem wir nachweisen, dass sich die unbekannten Zahlen B_1, B_2, B_3 ... B_{n-1}, C, D gemäss der Gleichung bestimmen lassen

$$\int (A_1 z^{2n} + \ldots + A_n z^2) \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$
$$= (B_1 z^{2n-3} + B_2 z^{2n-5} + \ldots + B_{n-1} z) \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}$$
$$+ C \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} + D \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

Durch Differentiation und nachfolgende Multiplication mit $\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}$ folgt aus dieser Gleichung

$$A_1 z^{2n} + A_2 z^{2n-2} + A_3 z^{2n-4} + \ldots + A_n z^2$$
$$= (B_1 z^{2n-3} + B_2 z^{2n-5} + \ldots + B_{n-1} z) [2 k^2 z^3 - (k^2 + 1) z]$$
$$+ [(2n - 3) B_1 z^{2n-4} + (2n - 5) B_2 z^{2n-6} + \ldots + B_{n-1}] \cdot [k^2 z^4 - (k^2 + 1) z^2 + 1]$$
$$+ C z^2 + D.$$

Vergleicht man beiderseits die gleich hohen Potenzen von z, so erhält man zur Bestimmung von $B_1, B_2, B_3, \ldots B_{n-1}, C, D$ die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
A_1 &= (2n-1)k^2 \cdot B_1\,,\\
A_2 &= (2n-3)k^2 \cdot B_2 - (2n-2)(k^2+1)B_1\,,\\
A_3 &= (2n-5)k^2 \cdot B_3 - (2n-4)(k^2+1)B_2 + (2n-3)B_1\,,\\
A_4 &= (2n-7)k^2 \cdot B_4 - (2n-6)(k^2+1)B_3 + (2n-5)B_2\,,\\
A_5 &= (2n-9)k^2 \cdot B_5 - (2n-8)(k^2+1)B_4 + (2n-7)B_3\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_{n-1} &= 3k^2 \cdot B_{n-1} - 4\cdot(k^2+1)B_{n-2} + 5\cdot B_{n-3}\,,\\
A_n &= \qquad 2\cdot(k^2+1)B_{n-1} + 3\cdot B_{n-2} + C\,,\\
0 &= B_{n-1} + D\,.
\end{aligned}$$

Aus den ersten n Gleichungen ergeben sich die n Unbekannten $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}, C$; aus der letzten folgt $D = -B_{n-1}$.

Statt des Integrales

$$\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

betrachten wir das folgende

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} - k^2 \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\,.$$

10. Das Integral

$$\int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)^n \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

lässt sich ebenfalls reduciren; man kann die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, C$ immer so bestimmen, dass

$$\int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)^n \sqrt{R}} = \frac{\sqrt{R}}{(1+\lambda z^2)^{n-1}}(A_1 z + A_2 z^3 + \ldots + A_{n-1} z^{2n-3})$$
$$+ \int \frac{(B_1 + B_2 z^2)\,dz}{\sqrt{R}} + C \int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)\sqrt{R}}\,.$$

Durch Differentiation erhält man

$$\frac{1}{(1+\lambda z^2)^n \sqrt{R}} = \left[\frac{2k^2z^3 - (k^2+1)z}{(1+\lambda z^2)^{n-1}\cdot\sqrt{R}} - \frac{2(n-1)\lambda z\cdot\sqrt{R}}{(1+\lambda z^2)^n}\right](A_1 z + A_2 z^3 + \ldots)$$
$$+ \frac{\sqrt{R}}{(1+\lambda z^2)^{n-1}}(A_1 + 3A_2 z^2 + \ldots) + \frac{B_1 + B_2 z^2}{\sqrt{R}} + \frac{C}{(1+\lambda z^2)\sqrt{R}}\,.$$

Beseitigt man die Nenner, so entsteht

$$1 = \big(-2k^2\lambda(n-2)z^5 + [2k^2 + \lambda(k^2+1)(2n-3)]z^3 - [k^2+1-2\lambda(n-1)]z\big)$$
$$\cdot(A_1 z + A_2 z^3 + \ldots + A_{n-1} z^{2n-3})$$
$$+ [k^2\lambda z^6 + (k^2 - \lambda k^2 - \lambda)z^4 + (\lambda - k^2 - 1)z^2 + 1][A_1 + 3A_2 z^2 + \ldots + (2n-3)A_{n-1} z^{2n-4}]$$
$$+ (B_1 + B_2 z^2)(1+\lambda z^2)^n + C(1+\lambda z^2)^{n-1}\,.$$

Diese Gleichung ist vom Grade $2n+2$; sie enthält nur Glieder gerader Potenz, die Zahl derselben ist also $n+2$; ebenso gross ist die Zahl der Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, B_1, B_2, C$. Man kann dieselben so wählen, dass die letzte Gleichung identisch erfüllt ist und hat zu ihrer Bestimmung $n+2$ lineare Gleichungen, deren Auflösung bei gegebenen Werthen von k, λ, n ohne Schwierigkeit erfolgt.

11. Hiernach sind alle elliptischen Integrale auf drei Normalintegrale zurückgeführt, nämlich auf

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R}}, \qquad \int \frac{(1-k^2z^2)dz}{\sqrt{R}}, \qquad \int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)\sqrt{R}},$$

Sie nehmen eine einfachere Gestalt an, wenn man z durch eine neue Variable φ ersetzt gemäss

$$z = \sin\varphi;$$

denn dann ist

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = d\varphi,$$

und die drei Integrale gehen über in

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi, \qquad \int \frac{d\varphi}{(1+\lambda\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Die Grösse $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ wird gewöhnlich mit $\Delta(\varphi)$ oder, wenn es der Unterscheidung wegen nöthig ist, mit $\Delta(k, \varphi)$ bezeichnet.

Werden die Integrale zwischen den Grenzen 0 und z, bez. φ genommen, so bezeichnet man sie nach Legendre*) als die elliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung; k heisst der Modulus, die obere Grenze φ die Amplitude, λ der Parameter; man benutzt die Functionszeichen

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F(\varphi, k), \qquad \int_0^\varphi \Delta(\varphi)d\varphi = E(\varphi, k), \qquad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+\lambda\sin^2\varphi)\Delta(\varphi)} = \Pi_0(\varphi, k, \lambda).$$

---

12. Wir transformiren nun das Integral erster Art durch eine Substitution zweiten Grades; es wird dadurch ein Integral erster Art mit anderm Modul und anderer Amplitude hervorgehen. An diese Transformation anknüpfend, werden wir später brauchbare Methoden zur numerischen Berechnung elliptischer Integrale finden. Damit durch die Substitution

$$z = U : V,$$

wo U und V quadratische Functionen der neuen Variabeln ζ sind, die Transformation erzielt werde

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{Ad\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\lambda^2\zeta^2)}},$$

ist nach den Entwicklungen in No. 3 nöthig und ausreichend, dass von den vier quadratischen Faktoren des Produkts

$$(V-U)(V+U)(V-kU)(V+kU)$$

zwei die zweiten Potenzen linearer Functionen in ζ sind, während die andern beiden die vier Faktoren liefern

$$(1-\zeta)(1+\zeta)(1-\lambda\zeta)(1+\lambda\zeta).$$

Man überzeugt sich leicht, dass nur folgende Fälle wesentlich von einander verschieden sind:

$$1. \begin{cases} V - U = a(1-\zeta)(1-\lambda\zeta), \\ V + U = (1+\zeta)(1+\lambda\zeta), \\ V - kU = b(1+m\zeta)^2, \\ V + kU = c(1+n\zeta)^2; \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} V - U = a(1-\zeta)(1-\lambda\zeta), \\ V - kU = (1+\zeta)(1+\lambda\zeta), \\ V + U = b(1+m\zeta)^2, \\ V + kU = c(1+n\zeta)^2; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} V - U = a(1-\zeta^2), \\ V + U = 1-\lambda^2\zeta^2, \\ V - kU = b(1+m\zeta)^2, \\ V + kU = c(1+n\zeta)^2; \end{cases} \qquad 4. \begin{cases} V - U = a(1-\zeta^2), \\ V - kU = 1-\lambda^2\zeta^2, \\ V + U = b(1+m\zeta)^2, \\ V + kU = c(1+n\zeta)^2. \end{cases}$$

*) Legendre, Traité des fonctions elliptiques, Paris 1825.

Aus den Beziehungen zwischen den linken Seiten dieser Gleichungen folgen Beziehungen zwischen den Grössen k, λ, a, b, c. Wir beschränken uns hier darauf, die aus 1. hervorgehenden Transformationsformeln aufzustellen.

13. Den Werthen

$$\zeta = 1\,, \quad -1\,, \quad \frac{1}{\lambda}\,, \quad -\frac{1}{\lambda}\,,$$

entsprechen
$$V = U\,, \quad -U\,, \quad U\,, \quad -U\,,$$
wie die ersten beiden Gleichungen lehren. Wir bilden

$$\frac{V - kU}{V + U} = \frac{b(1 + m\zeta)^2}{(1 + \zeta)(1 + \lambda\zeta)}$$

und ersetzen rechts ζ der Reihe nach durch 1 und $1:\lambda$, links V durch U; dadurch entsteht

$$\frac{1 - k}{2} = b \cdot \frac{(1 + m)^2}{2(1 + \lambda)}\,, \qquad \frac{1 - k}{2} = b \cdot \frac{\lambda\left(1 + \frac{m}{\lambda}\right)^2}{2(1 + \lambda)}\,.$$

Hieraus ergiebt sich für m und λ die Gleichung

$$\lambda\left(1 + \frac{m}{\lambda}\right)^2 = (1 + m)^2\,,$$

aus welcher folgt

$$m = \sqrt{\lambda}\,.$$

Ersetzen wir in gleicher Weise in dem Quotienten

$$\frac{V + kU}{V + U} = \frac{c(1 + n\zeta)^2}{(1 + \zeta)(1 + \lambda\zeta)}\,,$$

rechts ζ durch 1 und $1:\lambda$, links V durch U, so erhalten wir

$$n = \sqrt{\lambda}\,.$$

Da m und n nicht gleich sein können, so wählen wir

$$m = -\sqrt{\lambda}\,, \quad n = \sqrt{\lambda}\,,$$

wobei von nun an die Wurzel positiv gerechnet wird. Aus den Gleichungen No. 12, 1 folgt weiter, wenn für m und n die gefundenen Werthe benutzt werden,

1.
$$\frac{V - kU}{V + kU} = \frac{b}{c}\left(\frac{1 - \sqrt{\lambda}\cdot\zeta}{1 + \sqrt{\lambda}\cdot\zeta}\right)^2\,.$$

Ersetzen wir hier rechts ζ der Reihe nach durch 1 und -1, links V durch U und $-U$, so entstehen die Gleichungen

$$\frac{1 - k}{1 + k} = \frac{b}{c}\cdot\left(\frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}}\right)^2\,,$$

$$\frac{1 + k}{1 - k} = \frac{b}{c}\cdot\left(\frac{1 + \sqrt{\lambda}}{1 - \sqrt{\lambda}}\right)^2\,.$$

Hieraus folgt durch Multiplication

$$\frac{b^2}{c^2} = 1\,.$$

Da in den vorigen Gleichungen beiderseits positive Werthe stehen, so haben wir $b = c$ zu nehmen. Hiernach ergiebt sich weiter

$$\frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{1 - k}{1 + k}}\,;$$

daher ist

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{1 + k} - \sqrt{1 - k}}{\sqrt{1 + k} + \sqrt{1 - k}}\,.$$

Macht man den Nenner rational, so folgt

2. $$\sqrt{\lambda} = \frac{1-k'}{k}, \quad \lambda = \frac{1-k'}{1+k'}, \quad k' = \sqrt{1-k^2}.$$

Dividirt man in 1. links Zähler und Nenner durch z, so erhält man die Substitutionsgleichung

3. $$\frac{1-kz}{1+kz} = \left(\frac{1-\sqrt{\lambda}\cdot\zeta}{1+\sqrt{\lambda}\cdot\zeta}\right)^2.$$

Hieraus ergiebt sich leicht mit Berücksichtigung von 2.

$$z = \frac{(1+\lambda)\zeta}{1+\lambda\zeta^2}, \quad dz = (1+\lambda)\cdot\frac{1-\lambda\zeta^2}{(1+\lambda\zeta^2)^2}d\zeta,$$

4. $$\sqrt{1-z^2} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\cdot\sqrt{1-\lambda^2\zeta^2}}{1+\lambda\zeta^2}, \quad \sqrt{1-k^2z^2} = \frac{1-\lambda\zeta^2}{1+\lambda\zeta^2},$$

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = (1+\lambda)\cdot\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\lambda^2\zeta^2)}}.$$

Der Grenze $z = 0$ entspricht $\zeta = 0$; es ist daher

4. $$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = (1+\lambda)\int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\lambda^2\zeta^2)}}.$$

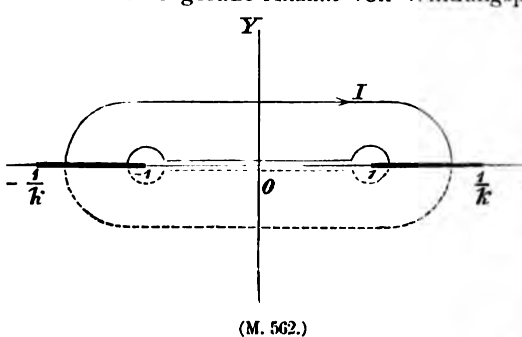
Diese Transformation ist deswegen besonders verwendbar, weil auch transformirten Integrale die untere Grenze Null ist.

---

14. Um die zweideutige irrationale Grösse

$$\sqrt{R} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

als eine eindeutige Function des Ortes in der Fläche darzustellen, haben wir eine zweiblätterige RIEMANN'sche Fläche zu construiren, die vier Windungspunkte hat: $z = -1:k, \; -1, \; +1, \; +1:k$; entlang der Strecken von $-1:k$ bis -1 und von $+1$ bis $+1:k$ mögen die beiden Blätter verwachsen sein. Jeder Weg, der, auf das obere Blatt projicirt, eine ungerade Anzahl von Windungspunkten eine ungerade Anzahl Male umkreist, führt aus einem Blatte ins andere; wird hingegen eine ungerade Anzahl von Windungspunkten eine gerade Anzahl Male oder eine gerade Anzahl von Windungspunkten umkreist, so liegen Anfang und Ende des Weges in demselben Blatte.



(M. 562.)

Wir nehmen an, dass im Nullpunkte des oberen Blattes $\sqrt{R}$ den Werth $+1$ hat; für den des unteren Blattes ist alsdann $\sqrt{R} = -1$. Auf der realen Achse des oberen Blattes nimmt $\sqrt{R}$ von $z = 0$ bis $z = +1$ die Werthe von $+1$ bis 0, von $z = 0$ bis $z = -1$ ebenfalls die Werthe von $+1$ bis 0, und in den entsprechenden Punkten der realen Achse des unteren Blattes die entgegengesetzt gleichen Werthe an.

15. Wir untersuchen nun die Werthe, um welche das Integral erster und das zweiter Art sich ändern, wenn z einen Theil eines verschwindend kleinen Kreisbogens beschreibt, der einen Windungspunkt zum Centrum hat.

Ist z auf einem Kreise gelegen, der a zum Centrum und ρ zum Radius hat, so ist

$$z = a + \rho e^{i\varphi},$$

wobei φ den Winkel bezeichnet, um den ρ gedreht werden muss, um aus der Richtung der positiven realen Achse in die Richtung az überzugehen.

Aus 1. ergiebt sich

2. $$dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi .$$

Ferner ist

3. $$\sqrt{(a-z)(b-z)(c-z)(d-z)} = i\sqrt{\rho e^{i\varphi}(b-a-\rho e^{i\varphi})(c-a-\rho e^{i\varphi})(d-a-\rho e^{i\varphi})} .$$

Daher ist

4. $$\frac{dz}{\sqrt{(a-z)(b-z)(c-z)(d-z)}} = \frac{\sqrt{\rho}\cdot e^{i\frac{\varphi}{2}} d\varphi}{\sqrt{(b-a-\rho e^{i\varphi})(c-a-\rho e^{i\varphi})(d-a-\rho e^{i\varphi})}} ,$$

5. $$\sqrt{(a-z)(b-z)(c-z)(d-z)}\, dz = -\rho^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3\varphi}{2}} \sqrt{(b-a-\rho e^{i\varphi})\ldots}\, d\varphi .$$

Wird ρ verschwindend klein, so ist

$$lim \sqrt{(b-a-\rho e^{i\varphi})\ldots} = \sqrt{(b-a)(c-a)(d-a)}$$

Setzen wir a, b, c, d als endliche, von einander verschiedene Zahlen voraus, so ist dieser Grenzwerth weder unendlich gross, noch verschwindend klein. Integrirt man die Differentiale 4. und 5. unter der Voraussetzung eines verschwindend kleinen ρ zwischen den Grenzen φ_0 und φ_1, so erhält man

6. $$lim \sqrt{\rho}\cdot\frac{1}{A}\cdot\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} e^{\frac{1}{2}i\varphi} d\varphi , \quad \text{bez.} \quad - lim \sqrt{\rho^3}\cdot A\cdot\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} e^{\frac{3}{2}i\varphi} d\varphi .$$

Hierin sind die Integrale endlich, die Faktoren $1 : A$ und A nicht unendlich, während die Grenzwerthe von $\sqrt{\rho}$ und $\sqrt{\rho^3}$ verschwinden. Dies ergiebt: Werden die Integrale

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} \quad \text{und} \quad \int \Delta(\varphi)\, d\varphi$$

über Wege erstreckt, die einem einzigen Windungspunkte sich unendlich nahe anschmiegen, so haben beide den Werth Null.

16. Geht z auf der realen Achse im oberen Blatte von 0 bis + 1, so erhält $F(k, \varphi)$ den Werth

1. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} ,$$

wobei durch die Variable x der geradlinige Weg angedeutet ist. Das Differential wird an der oberen Grenze für $x = 1$ unendlich gross; man überzeugt sich aber leicht, dass trotzdem das Integral einen endlichen Werth hat.

Denn der Faktor $1 : \sqrt{1-k^2x^2}$ hat innerhalb der Integralgrenzen für $x = 1$ seinen grössten Werth $1 : \sqrt{1-k^2}$; daher ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} < \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} , \quad \text{d. i.} < \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\cdot\frac{\pi}{2} .$$

Das Integral 1. hat in der Theorie der elliptischen Integrale eine ähnliche Bedeutung wie bei den cyklometrischen Integralen die Zahl $\frac{1}{2}\pi$; es wird mit K bezeichnet, so dass man also hat

2. $$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} .$$

Umgeht man den Windungspunkt + 1 in einem verschwindend kleinen Kreise, so ist der auf diesen Weg entfallende Zuwachs des Integrals F gleich Null. Geht man alsdann im unteren Blatte entlang der realen Achse bis zum unteren Nullpunkte zurück, so haben $\sqrt{R}$, sowie dz dabei entgegengesetzt gleiche Werthe wie in den darüber liegenden Punkten des oberen Blattes bei der Inte-

gration von 0 bis 1. Wird daher das Integral F im oberen Blatte entlang der realen Achse von 0 bis $+1$ und dann weiter im unteren von $+1$ bis 0 erstreckt, so hat es den Werth $2K$. In Punkten, die in demselben Blatte auf der realen Achse zwischen $+1$ und -1 gleich weit vom Nullpunkte entfernt sind, haben dz und $\sqrt{R}$ dieselben Werthe, wenn ein geschlossener Weg zurückgelegt wird, der $+1$ und -1 in unendlich kleinen Kreisen umgeht. Daher ist

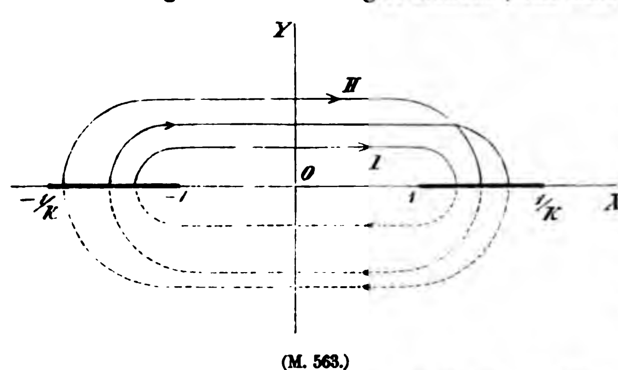
$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \begin{matrix} 2K \text{ im oberen Blatte}, \\ -2K \text{ im unteren Blatte}, \end{matrix}$$

und das Integral über den ganzen beschriebenen Weg ist $4K$. Wir schliessen daher: Wird das Integral

$$F = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

über einen Weg (I, Fig. 563) erstreckt, der nur die beiden Windungspunkte -1 und $+1$ einfach umkreist, so hat es den Werth $4K$.

Ueber den geschlossenen Weg II erstreckt, hat daher F den Werth $8K$ u. s. w.



(M. 563.)

17. Befindet sich z auf der realen Achse im oberen Blatte in dem unendlich nahe vor $+1$ liegenden Punkte $1-\rho$, so ist, wenn im Radicanden Glieder zweiten Grades in ρ vernachlässigt werden, und die Wurzel positiv gerechnet wird,

$$\sqrt{R} = \sqrt{2\rho(1-k^2)}.$$

Geht z in einem verschwindend kleinen Halbkreise in der Richtung der abnehmenden Winkel um den Punkt $+1$ bis wieder auf die reale Achse, so durchläuft es die Werthe $1+\rho e^{i\varphi}$ von $\varphi = \pi$ bis $\varphi = 0$; $\sqrt{R}$ erlangt den Endwerth $i\sqrt{2\rho(1-k^2)}$, ist also verschwindend klein positiv imaginär. Geht nun z auf der realen Achse weiter bis zu dem unendlich nahe vor $1:k$ liegenden Punkte $1:k-\rho$, so ist am Ende dieses Weges

$$\sqrt{R} = i\sqrt{\left(\frac{1}{k^2}-1\right)2k\rho}.$$

Wird z weiter auf einem verschwindenden Kreise um den Punkt $1:k$ geführt, so durchläuft es die Werthe

$$\frac{1}{k} + \rho e^{i\varphi} \text{ von } \varphi = \pi \text{ bis } \varphi = -\pi,$$

und am Ende ist

$$\sqrt{R} = -i\sqrt{\left(\frac{1}{k^2}-1\right)\cdot 2k\rho}.$$

Auf dem weiteren Wege im oberen Blatte entlang der realen Achse bis zu dem dicht vor $+1$ liegenden Punkte $1+\rho e^{2i\pi}$ nimmt $\sqrt{R}$ anfangs zu und dann wieder ab und ist schliesslich

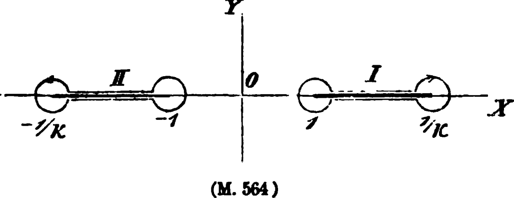
$$\sqrt{R} = -i\sqrt{2\rho(1-k^2)}.$$

Durchläuft dann z in der Richtung abnehmender Winkel einen verschwindend

kleinen Halbkreis um den Punkt $+1$, so erlangt $\sqrt{R}$ wieder seinen Ausgangswerth

$$\sqrt{R} = \sqrt{2\rho(1-k^2)}.$$

Dieser Weg ist in Fig. 564 durch I veranschaulicht. Das Integral F über diesen Weg erstreckt besteht aus den beiden Integralen über die verschwindend kleinen Kreise und aus zwei geradlinigen Integralen. Die ersten beiden sind bekanntlich Null. Der geradlinige Theil entlang des oberen Randes der realen Achse liefert



(M. 564)

$$\frac{1}{i}\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

Substituirt man hier

$$k'^2 = 1-k^2, \quad x = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2\xi^2}},$$

so erhält man leicht

$$\frac{1}{i}\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = -i\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k'^2\xi^2)}}.$$

Das letztere Integral, eine zweite charakteristische Constante in der Theorie der elliptischen Integrale erster Art, wird mit K' bezeichnet, es ist also

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}.$$

Geht z auf dem unteren Rande der realen Achse von $1:k$ bis 1, so haben dz und $\sqrt{R}$ entgegengesetzte Zeichen, wie in den am andern Rande der realen Achse gegenüberliegenden Punkten; daher hat das Integral von $1:k$ bis 1 denselben Werth, wie entlang des oberen Randes von 1 bis $1:k$. Das ganze in der angegebenen Richtung über den Weg Fig. 564, I erstreckte Integral F hat also den Betrag

$$-2iK'.$$

Wir überzeugen uns leicht, dass das Integral entlang des Weges, der im unteren Blatte unter dem soeben beschriebenen liegt, den entgegengesetzt gleichen Weg hat.

In den Punkten der realen Achse, die unendlich nahe bei -1 in der Richtung nach $-1:k$ zu auf dem oberen bez. unteren Rande der realen Achse liegen, hat $\sqrt{R}$ die Werthe*)

$$\sqrt{R} = i\sqrt{2\rho(1-k^2)}, \quad \text{bez.} = -i\sqrt{2\rho(1-k^2)}$$

für die Punkte der realen Achse, die unmittelbar vor $-1:k$, nach -1 zu, auf dem oberen bez. unteren Rande liegen, ist

$$\sqrt{R} = i\sqrt{2k\rho\left(\frac{1}{k^2}-1\right)} \text{ bez. } -i\sqrt{2k\rho\left(\frac{1}{k^2}-1\right)}.$$

Das entlang des oberen Randes der realen Achse von -1 bis $-1:k$ erstreckte Integral F hat somit den Werth

*) wenn im Radicanden Glieder zweiten Grades in ρ vernachlässigt werden.

$$\frac{1}{i}\int_{-1}^{-\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

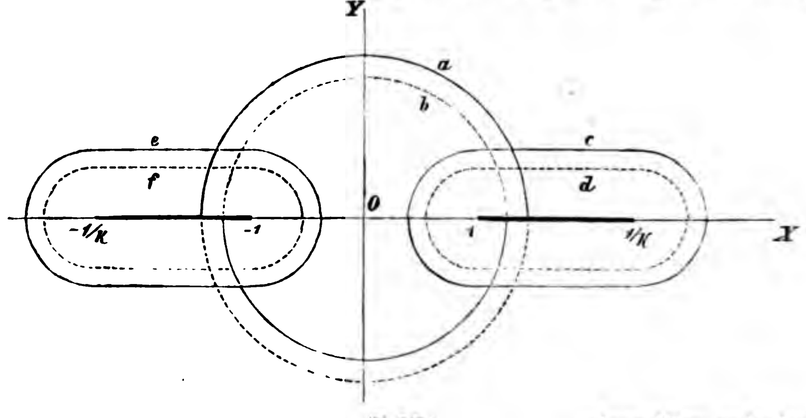
Ersetzt man hier x durch $-x$, so erkennt man, dass dieser Werth gleich iK' ist.

Geht z auf dem untern Rande der realen Achse von $-1:k$ bis -1, so haben dz und $\sqrt{R}$ entgegengesetzte Zeichen, wie in den am obern Rande gegenüberliegenden Punkten; also ist auch das Integral F über diesen Weg erstreckt gleich iK'. Verbindet man diese beiden Integrationsstrecken durch verschwindende Kreise um die Punkte -1 und $-1:k$, so ist für diese Integrationswege $F=0$, mithin ist das Integral über den Weg II (Fig. 564) gleich

$$2iK',$$

das über den im zweiten Blatte darunter liegenden Weg ist daher $-2iK'$.

18. Wir erkennen leicht, dass jeder Weg, der vom Nullpunkte auf der Riemann'schen Fläche bis zu einem gegebenen Endpunkte irgendwie führt, auf

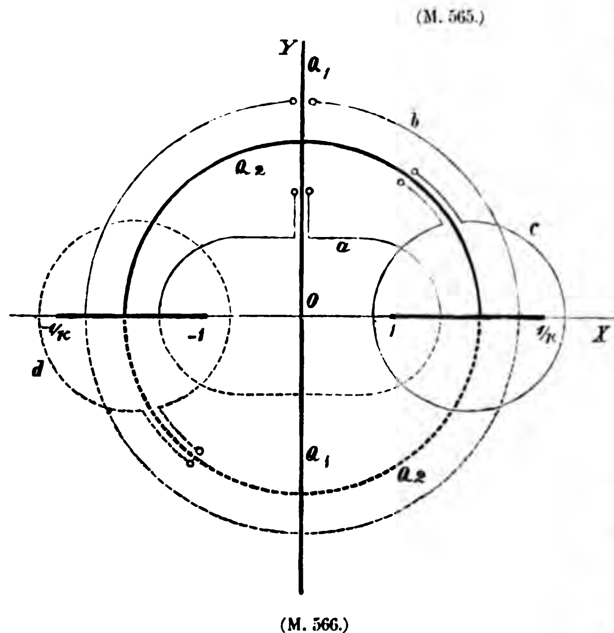


(M. 565.)

einen Weg reducirt werden kann, der keinen Ausnahmepunkt umkreist und auf Wege von der Art a, b, c, d, e, f, im positiven oder negativen Sinne durchlaufen, und auf einmalige oder zweimalige Umkreisungen der einzelnen Windungspunkte. Hieraus folgt: Das Integral erster Art

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

ist unendlich vieldeutig und hat zwei Periodicitätsmoduln, nämlich den realen $4K$ und den imaginären $2iK'$.



(M. 566.)

Um das elliptische Integral erster Art als eindeutige Function des Ortes der RIEMANN'schen Fläche darzustellen, haben wir zwei Querschnitte Q_1 und Q_2 zu ziehen, die wir so anordnen, wie in vorstehender Figur.

Um von einem Punkte am rechten Ufer von Q_1 zu dem am linken gegenüberliegenden zu kommen, haben wir einen Weg wie a oder b zurückzulegen; daher ist für jeden Punkt des linken Ufers F um $4K$ grösser als für den gegenüberliegenden des rechten Ufers. Von einem Punkte des innern Ufers von Q_2 gelangt man zu einem Punkte des äussern Ufers auf einem Wege c oder d; mithin ist F für einen Punkt des innern Ufers um $2iK'$ kleiner, als für den am andern Ufer gegenüberliegenden Punkt.

Für jeden Punkt der Fläche ist das Integral eindeutig bestimmt, sobald es in einem Punkte einen gegebenen (nicht willkürlichen) Werth hat, sobald z. B. festgestellt ist, dass es im obern Blatte im Nullpunkte rechts vom Querschnitte den Werth

$$m \cdot 4K + n \cdot 2K'i$$

haben soll, wo m und n gegebene ganze positive oder negative Zahlen sind.

19. Im Anschlusse an No. 15, 16 und 17 ergeben sich die **Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals zweiter Art.**

Wird das Integral $\int \sqrt{R}\, dz$, $R = \frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}$ im obern Blatte entlang der realen Achse von 0 bis + 1 erstreckt, so hat es den Werth

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}}\, dx,$$

die Wurzel positiv gerechnet.

Dies ist eine charakteristische Constante für die Integrale zweiter Art; sie wird mit E bezeichnet, so dass also

$$E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}}\, dx.$$

Geht z in einem unendlich kleinen Kreise dann um den Punkt + 1 bis ins untere Blatt, so ist für diesen Theil des Weges das Integral $\int \sqrt{R}\, dz = 0$.

In den Punkten der realen Achse des untern Blattes haben $\sqrt{R}$ und dz entgegengesetzt gleiche Werthe wie in den darüber liegenden Punkten des obern, also ist für diesen Weg im untern Blatte

$$\int_1^0 \sqrt{R}\, dz = E.$$

In Punkten der realen Achse, die in demselben Blatte und gleichweit vom Nullpunkte gelegen sind, hat $\sqrt{R}$ denselben Werth. Integrirt man daher im untern Blatte in der bisherigen Richtung weiter bis zum Punkte — 1, umgeht denselben in einem verschwindenden Kreise, der ins obere Blatt führt, und kehrt hier entlang der realen Achse zum Nullpunkte zurück, so **hat für den ganzen in der angegebenen Richtung beschriebenen Weg das Integral zweiter Art den Werth $4E$.**

Wird das Integral zweiter Art über den Weg I in Fig. 564 erstreckt, so ist es doppelt so gross wie das im obern Blatte genommene Integral

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \sqrt{R}\, dx.$$

Wir substituiren

$$x = \frac{1}{k}\sqrt{1 - k'^2 \xi^2};$$

den Grenzen $x = 1$ und $x = 1 : k$ entsprechen dann die Grenzen $\xi = 1$ und $\xi = 0$. Ferner findet man

$$1 - x^2 = \frac{1}{k^2}(k^2 - 1 + k'^2\xi^2) = -\frac{k'^2}{k^2}(1 - \xi^2), \quad 1 - k^2x^2 = k'^2\xi^2,$$

$$dx = -\frac{k'^2}{k^2} \cdot \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 - k'^2\xi^2}}.$$

Hieraus folgt

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{1 - k^2x^2}{1 - x^2}}\, dx = i\int_0^1 \frac{-k'^2\xi^2 d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k'^2\xi^2)}}$$

$$= i\int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k'^2\xi^2}{1 - \xi^2}}\, d\xi - i\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k'^2\xi^2)}}.$$

Das erste Integral rechts bezeichnen wir mit E', es ist also

$$E' = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k'^2x^2}{1 - x^2}}\, dx.$$

Daher ist

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{1 - k^2x^2}{1 - x^2}}\, dx = i(E' - K').$$

Das Integral zweiter Art, erstreckt über den Weg I oder II Fig. 564, hat somit den Betrag $i \cdot 2(E' - K')$. Wir schliessen daher: Das elliptische Integral zweiter Art ist unendlich vieldeutig; es hat den realen Periodicitätsmodul $4E$ und den imaginären $i \cdot 2(E' - K')$.

Führen wir die RIEMANN'sche Fläche durch dieselben Querschnitte, wie bei Integralen erster Art, auf eine einfach zusammenhängende Fläche zurück, so ist das Integral zweiter Art eine eindeutige Function des Ortes der Fläche. Für einen Punkt auf dem rechten Ufer von Q_1 ist das Integral um $4E$ kleiner als für den gegenüberliegenden Punkt des linken Ufers; und für einen Punkt des innern Ufers von Q_2 ist es um $i \cdot 2(E' - K')$ grösser als für den gegenüberliegenden Punkt des äussern Ufers.

Wir werden später sehen, dass sich jedes Integral zweiter Art durch ein Multiplum eines Integrals erster Art mit derselben obern Grenze, vermehrt um eine periodische transcendente Function dieses Integrals ausdrücken lässt; das Integral dritter Art wird in ähnlicher Weise dargestellt werden.

Aus diesen Darstellungen — bis zu denen wir uns vorwiegend mit den Integralen erster Art beschäftigen werden — folgen dann ohne Weiteres die Periodicitätsmoduln der Integrale zweiter und dritter Art.

§ 17. Das Additionstheorem für elliptische Integrale. Numerische Berechnung von Integralen erster und zweiter Art.

1. EULER hat zuerst nachgewiesen, welche von Differentialen freie Bedingungsgleichung zwischen z und ζ bestehen muss, wenn die elliptischen Integrale erster Art

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E}} \text{ und } \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{A\zeta^4 + B\zeta^3 + C\zeta^2 + D\zeta + E}}$$

eine gegebene Summe G haben sollen. Insofern man die Zahl G als ein elliptisches Integral

$$G = \int_0^{\mathfrak{z}} \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{A\mathfrak{z}^4 + B\mathfrak{z}^3 + C\mathfrak{z}^2 + D\mathfrak{z} + E}}$$

ansehen kann, lehrt die Entdeckung EULER's, die Summe zweier elliptischen Integrale erster Art mit gleichem Modul in eins zu verwandeln. Angewendet auf Normalintegrale erster Art lautet dieser Additionssatz: Es ist

$$1. \quad \int_0^{z} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \int_0^{\zeta} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^{\mathfrak{z}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

wenn

$$\mathfrak{z} = \frac{z\sqrt{1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)} + \zeta\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2}.$$

Beweis. Wir setzen zunächst $\mathfrak{z}$ als constant voraus; zwischen unendlich kleinen Aenderungen der Veränderlichen z und ζ besteht dann die Differentialgleichung

$$2. \quad \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = 0,$$

aus welcher wir die folgende ableiten

$$3. \quad \frac{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2}dz + \frac{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2}d\zeta = 0.$$

Beide Glieder links integriren wir theilweis; das erste Glied ergiebt

$$4. \quad z\frac{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2} - \int \frac{Pd\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} - \int Q\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}\,dz,$$

wobei abkürzungsweise gesetzt worden ist

$$P = \frac{z\zeta[2k^2(z^2+\zeta^2) - (1+k^2)(1+k^2z^2\zeta^2)]}{(1-k^2z^2\zeta^2)^2}, \quad Q = \frac{2k^2z^2\zeta^2}{(1-k^2z^2\zeta^2)^2}.$$

Vertauscht man in 4. z mit ζ, so erhält man das Ergebniss der theilweisen Integration des zweiten Theils der linken Seite in 3.; dabei ändern P und Q ihre Werthe nicht; daher folgt aus 3. schliesslich

$$5. \quad \begin{aligned} &\frac{z\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)} + \zeta\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2} \\ &- \int P\left[\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}\right] \\ &- \int Q\left[\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}\,dz + \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}\,d\zeta\right] = c, \end{aligned}$$

wobei c eine noch näher zu bestimmende Constante bezeichnet. Zufolge der Differentialgleichung 2. verschwinden die Integrale in 5. und es ergiebt sich daher die Gleichung

$$6. \quad \frac{z\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)} + \zeta\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2} = c.$$

Setzt man in 1. $\zeta = 0$, so ergiebt sich $z = \mathfrak{z}$; führt man dieselbe Substitution in 6. aus, so folgt $z = c$; daher ist $c = \mathfrak{z}$, w. z. b. w.

Substituirt man $z = \sin\varphi$, $\zeta = \sin\psi$, $\mathfrak{z} = \sin\sigma$, so nimmt das Additionstheorem die Gestalt an: Es ist

$$7. \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \int_0^{\sigma} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

wenn

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\Delta(\psi) + \sin\psi\cos\varphi\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Für $\zeta = z$ ergiebt sich insbesondere: Es ist

8. $$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{1}{2}\int_0^{\mathfrak{z}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

wenn

$$\mathfrak{z} = \frac{2z\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{1-k^2z^4}.$$

Hat in der durch die beiden angegebenen Querschnitte auf einfachen Zusammenhang reducirten RIEMANN'schen Fläche das Integral erster Art für den Nullpunkt des obern Blattes den Werth Null, so ist

$$\int_0^{-\psi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = -\int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Ersetzt man in 7. ψ durch $-\psi$, so folgt daher: Es ist

9. $$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} - \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \int_0^{\sigma} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

wenn

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\Delta(\psi) - \sin\psi\cos\varphi\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

2. Von der Gleichung ausgehend

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\Delta(\psi) + \sin\psi\cos\varphi\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

kann man $\cos\sigma$ und $\Delta(\sigma)$ als rationale Functionen von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta(\varphi)$, $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\Delta(\psi)$ erhalten. Wir wählen zu dieser Ableitung folgenden Weg*): Aus der Gleichung

1. $$\sin\sigma = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

folgt bekanntlich

2. $$\cos\sigma = \pm(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta).$$

Das Vorzeichen in 2. wird bestimmt, indem man angiebt, ob dem Werthe $\beta = 0$, für welchen $\sin\sigma = \sin\alpha$, der Werth $\cos\sigma = +\cos\alpha$, oder $\cos\sigma = -\cos\alpha$ entsprechen soll; entscheiden wir uns für das erstere, so gilt in 2. das obere Vorzeichen. Ferner bemerken wir, dass mit 1. und 2. die Gleichungen gelten

3. $$\cos\beta = \cos\sigma\cos\alpha + \sin\sigma\sin\alpha,$$

4. $$\cos\alpha = \cos\sigma\cos\beta + \sin\sigma\sin\beta.$$

Hieraus können wir neue Formeln ableiten, indem wir $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ durch ganz willkürlich gewählte Werthe ersetzen; für $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ haben wir dann Werthe zu nehmen, welche den Bedingungen genügen

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1.$$

Wir ersetzen

$$\sin\alpha \text{ durch } \frac{\cos\varphi}{n}, \quad \sin\beta \text{ durch } \frac{\cos\psi}{n},$$

wobei $$n = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

und haben somit zu ersetzen

$$\cos\alpha \text{ durch } \sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{n^2}} = \pm\frac{\sin\varphi\Delta(\psi)}{n},$$

*) Vergl. SCHELLBACH, Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen. Berlin 1864, pag. 109.

$$\cos\beta \text{ durch } \pm \frac{\sin\psi\Delta(\varphi)}{n}.$$

Wir wählen in den letzten beiden Substitutionen die oberen Vorzeichen und erhalten aus 1. und 2.

5. $$\sin\sigma = \frac{\cos\varphi\sin\psi\Delta(\varphi) + \cos\psi\sin\varphi\Delta(\psi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

6. $$\cos\sigma = \pm\frac{\sin\varphi\sin\psi\Delta(\varphi)\Delta(\psi) - \cos\varphi\cos\psi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Aus der Gleichung 5 folgen also 6., sowie die durch die gleichen Substitutionen aus 3. und 4. hervorgehenden Gleichungen.

Sollen σ, φ, ψ die im Additionstheorem auftretenden Grössen sein, so entspricht dem Werthe $\psi = 0$ der Werth $\sigma = \varphi$; daher haben wir in 6. das untere Zeichen zu wählen und erhalten somit

7. $$\cos\sigma = \frac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\Delta(\varphi)\Delta(\psi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Aus den Gleichungen 3. und 4. erhalten wir

8. $$\cos\psi = \sin\varphi\sin\sigma\Delta(\psi) + \cos\varphi\cos\sigma,$$

9. $$\cos\varphi = \sin\psi\sin\sigma\Delta(\varphi) + \cos\psi\cos\sigma.$$

Aus allen diesen Gleichungen gehen neue Gleichungen hervor, wenn σ, φ, ψ der Reihe nach durch φ, σ, $-\psi$ ersetzt werden. Hierdurch entsteht aus 9.

10. $$\cos\sigma = -\sin\psi\sin\varphi\Delta(\sigma) + \cos\psi\cos\varphi.$$

Berechnen wir hieraus $\Delta(\sigma)$ und benutzen dabei 7., so erhalten wir

11. $$\Delta(\sigma) = \frac{\Delta(\varphi)\Delta(\psi) - k^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Aus 5. und 7. folgt noch die für die numerische Berechnung von σ brauchbare Gleichung

12. $$\tang\sigma = \frac{\tang\psi\Delta(\varphi) - \tang\varphi\Delta(\psi)}{1 - \tang\psi\tang\varphi\Delta(\varphi)\Delta(\psi)}.$$

Hiernach ist $\tang\sigma = \tang(\mu + \nu)$, wenn

$$\tang\mu = \Delta(\varphi)\tang\psi, \quad \tang\nu = \Delta(\psi)\tang\varphi.$$

3. Es liegt nahe zu fragen, ob unter der Voraussetzung, dass φ, ψ und σ durch die in No. 1. und 2. entwickelten Gleichungen verbunden sind, das Normalintegral zweiter Art

$$E(\sigma) = \int_0^\sigma \Delta(\varphi)\,d\varphi$$

mit der Summe

$$E(\varphi) + E(\psi) = \int_0^\varphi \Delta(\varphi)\,d\varphi + \int_0^\psi \Delta(\varphi)\,d\varphi$$

in einfacher Weise zusammenhängt. Wir setzen*)

1. $$E(\varphi) + E(\psi) = S,$$

und nehmen σ als gegeben, φ und ψ dagegen als veränderlich an. Durch Differentiation folgt aus 1.

2. $$\Delta(\varphi)\,d\varphi + \Delta(\psi)\,d\psi = dS.$$

Fügt man hierzu die unter der für σ gemachten Annahme geltende von No. 1, 2 nicht verschiedene Gleichung

3. $$\Delta(\psi)\,d\varphi + \Delta(\varphi)\,d\psi = 0,$$

so erhält man

4. $$[\Delta(\varphi) + \Delta(\psi)](d\varphi + d\psi) = dS.$$

---

*) SCHLÖMILCH, Compendium d. höh. Analysis, 2. Band, 2. Aufl. pag. 333. Braunschweig 1874.

Setzt man den Werth für $\cos\sigma$ aus No. 2, 10 in 8. und 9. ein, so erhält man leicht

5.
$$\Delta(\varphi) = \frac{\sin\varphi \cos\psi\, \Delta(\sigma) + \cos\varphi \sin\psi}{\sin\sigma},$$
$$\Delta(\psi) = \frac{\sin\psi \cos\varphi\, \Delta(\sigma) + \cos\psi \sin\varphi}{\sin\sigma},$$

Hieraus folgt

6.
$$\Delta(\varphi) \pm \Delta(\psi) = \frac{\Delta(\sigma) \pm 1}{\sin\sigma} \sin(\varphi \pm \psi),$$

wobei entweder die oberen oder die unteren Zeichen gelten.

Setzt man diesen Werth für $\Delta(\varphi) + \Delta(\psi)$ in 4. ein, so entsteht

$$-\frac{\Delta(\sigma) + 1}{\sin\sigma}\, d\cos(\varphi + \psi) = dS,$$

und hieraus durch Integration und in Rücksicht auf 1.

$$E(\varphi) + E(\psi) = \frac{\Delta(\sigma) + 1}{\sin\sigma} [C - \cos(\varphi + \psi)].$$

Für $\psi = 0$ wird $\varphi = \sigma$; wählt man $E(\psi) = 0$, so ist

$$E(\sigma) = \frac{\Delta(\sigma) + 1}{\sin\sigma} (C - \cos\sigma).$$

Durch Subtraction von der vorhergehenden Gleichung ergiebt sich

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma) = \frac{\Delta(\sigma) + 1}{\sin\sigma} (\cos\sigma - \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\varphi).$$

Nach No. 2, 10. ist

$$\cos\sigma - \cos\varphi \cos\psi = - \sin\varphi \sin\psi\, \Delta(\sigma),$$

und daher

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma) = \frac{1 - \Delta^2(\sigma)}{\sin\sigma} \cdot \sin\varphi \sin\psi.$$

Ersetzt man hier $\Delta^2(\sigma)$ durch $1 - k^2 \sin^2\sigma$, so folgt schliesslich

7.
$$E(\varphi) + E(\psi) = E(\sigma) + k^2 \sin\sigma \sin\varphi \sin\psi.$$

Dieser Satz wird als das Additionstheorem für elliptische Integrale zweiter Art bezeichnet.

Es ist selbstverständlich, dass man τ so bestimmen kann, dass der Gleichung genügt wird

$$E(\varphi) + E(\psi) = E(\tau);$$

dann würde aber $\sin\tau$ sich nicht, wie $\sin\sigma$, rational durch $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta(\varphi)$, $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\Delta(\psi)$ ausdrücken lassen.

4. Aehnlich wie bei Integralen zweiter Art verfahren wir bei den Integralen dritter Art

$$\Pi_0(h, k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2\varphi)\Delta(\varphi)}.$$

Wir setzen

1.
$$\Pi_0(\varphi) + \Pi_0(\psi) = S$$

und nehmen wieder σ als gegeben, φ und ψ als veränderlich an.

Durch Differentiation folgt aus 1.

$$\frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2\varphi)\Delta(\varphi)} + \frac{d\psi}{(\Delta + h \sin^2\psi)\Delta(\psi)} = dS.$$

Da nun

2.
$$\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 0,$$

so folgt

3.
$$dS = \left(\frac{1}{1 + h\sin^2\varphi} - \frac{1}{1 + h\sin^2\psi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)},$$
$$= \frac{h(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)}{(1 + h\sin^2\varphi)(1 + h\sin^2\psi)} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Aus No. 3, 7 folgt durch Differentiation

$$\Delta(\varphi)\,d\varphi + \Delta(\psi)\,d\psi = k^2 \sin\sigma\, d(\sin\varphi\sin\psi).$$

Führt man hier $\Delta(\psi)$ aus 2. ein, so entsteht

$$(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \sin\sigma\, d(\sin\varphi\sin\psi).$$

Dies in 3. eingesetzt, ergiebt

$$dS = \frac{h\sin\sigma}{(1 + h\sin^2\varphi)(1 + h\sin^2\psi)}\, d(\sin\varphi\sin\psi).$$

Setzen wir

$$\sin\varphi\sin\psi = q\,,\quad \sin^2\varphi + \sin^2\psi = p\,,$$

so wird

$$dS = \frac{h\sin\sigma}{1 + hp + h^2q^2}\,dq.$$

Um p durch q auszudrücken, gehen wir von der Gleichung aus

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\sigma)$$

und erhalten

$$[\cos\sigma + q\,\Delta(\sigma)]^2 = \cos^2\varphi\cos^2\psi = (1 - \sin^2\varphi)(1 - \sin^2\psi)$$
$$= 1 - p + q^2.$$

Daher ist

$$p = 1 + q^2 - [\cos\sigma + q\,\Delta(\sigma)]^2$$
$$= \sin^2\sigma - 2\cos\sigma\,\Delta(\sigma)\cdot q + k^2\sin^2\sigma\cdot q^2.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$A = 1 + h\sin^2\sigma,\quad B = h\cos\sigma\,\Delta(\sigma),\quad C = hk^2\sin^2\sigma + h^2,$$

so wird

$$dS = \frac{h\sin\sigma\, dq}{A - 2Bq + Cq^2}.$$

Daher ist schliesslich

$$S = h\sin\sigma\int\frac{dq}{A - 2Bq + Cq^2} + Const.$$

Die Integrationsconstante wird bestimmt, indem wir $\psi = 0$ setzen; alsdann wird $q = 0$, $\varphi = \sigma$, $S = \Pi_0(h, k, \sigma)$, und es ist daher

$$\Pi_0(\sigma) = h\sin\sigma\int_{(q=0)}\frac{dq}{A - 2Bq + Cq^2} + Const,$$

folglich

$$S = \Pi_0(\sigma) + h\sin\sigma\int_0^q\frac{dq}{A - 2Bq + Cq^2}.$$

Wird dies in 1. eingeführt, so entsteht schliesslich

$$\Pi_0(\varphi) + \Pi_0(\psi) = \Pi_0(\sigma) + h\sin\sigma\int_0^q\frac{dq}{A - 2Bq + Cq^2},$$

Sind also die Winkel φ, ψ, σ durch die vom Parameter unabhängige Gleichung verbunden

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

so wird durch das Integral $\Pi_0(h, k, \sigma)$ die Summe $\Pi_0(h, k, \varphi) + \Pi_0(h, k, \psi)$

bis auf ein Glied dargestellt, welches das Integral einer $sin\sigma$, $cos\sigma$, und $\Delta(\sigma)$ rational enthaltenden algebraischen Function ist.

Dies ist das Additiontheorem für LEGENDRE's Normalintegrale dritter Art.

---

5. Setzen wir in § 16 No. 12 und 13 $z = sin\varphi$, $\zeta = sin\psi$, so entsteht

1. $$F(k, \varphi) = (1 + \lambda)\, F(\lambda, \psi),$$

wenn $$\lambda = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \quad sin\varphi = \frac{(1 + \lambda)\, sin\psi}{1 + \lambda\, sin^2\psi},$$

$$cos\varphi = \frac{cos\varphi \cdot \Delta(\lambda, \psi)}{1 + \lambda sin^2\psi}, \quad \Delta(k, \varphi) = \frac{1 - \lambda\, sin^2\psi}{1 + \lambda\, sin^2\psi}.$$

Das Integral $F(\lambda, \psi)$ transformiren wir weiter nach No. 1, 8. Ersetzen wir dort z durch $sin\psi$, $\mathfrak{z}$ durch $sin\varphi_1$, k durch λ, so erhalten wir

2. $$F(\lambda, \psi) = \tfrac{1}{2}\, F(\lambda, \varphi_1)$$

wenn $$sin\varphi_1 = \frac{2 sin\psi\, cos\psi\, \Delta(\lambda, \psi)}{1 - \lambda^2\, sin^4\psi}.$$

Aus 1. folgt

$$\frac{cos\varphi\, sin\,\varphi}{\Delta(k, \varphi)} = \frac{(1 + \lambda) cos\psi\, sin\psi\, \Delta(\lambda, \psi)}{1 - \lambda^2\, sin^4\psi}.$$

Daher ist

3. $$sin\varphi_1 = \frac{(1 + k')\, cos\,\varphi\, sin\,\varphi}{\Delta(k, \varphi)}.$$

Hieraus findet sich leicht

4. $$cos\varphi_1 = \frac{cos^2\varphi - k'\, sin^2\varphi}{\Delta(k, \varphi)}, \quad \Delta(\lambda, \varphi_1) = \frac{cos^2\varphi + k'\, sin^2\varphi}{\Delta(k, \varphi)}.$$

Setzt man in 4. $cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + cos 2\varphi)$, $sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - cos 2\varphi)$, so erhält man

5. $$cos\varphi_1 = \frac{1 - k' + (1 + k')\, cos 2\varphi}{2\Delta(k, \varphi)} = \frac{1 + k'}{2} \cdot \frac{\lambda + cos 2\varphi}{\Delta(k, \varphi)}.$$

Aus 3. und 5. folgt nun

6. $$tang\varphi_1 = \frac{sin 2\varphi}{\lambda + cos 2\varphi},$$

und hieraus

7. $$sin(2\varphi - \varphi_1) = \lambda sin\varphi_1.$$

Diese Gleichung ist brauchbar zur Berechnung von φ, wenn φ_1 gegeben ist. Will man φ_1 aus φ finden, so kann man statt 3. oder 4. bequemere Formeln haben, indem man aus 3. und 4. durch Division bildet

$$tang\varphi_1 = \frac{(1 + k')\, tang\,\varphi}{1 - k'\, tang^2\varphi};$$

mit Hülfe dieses Werthes erhält man leicht

8. $$tang(\varphi_1 - \varphi) = k'\, tang\varphi.$$

Aus 1. 2. und 8. hat man daher die Transformation

9. $$F(k, \varphi) = \frac{1 + \lambda}{2}\, F(\lambda, \varphi_1) = \frac{1}{1 + k'}\, F(\lambda, \varphi_1),$$

wenn $$\lambda = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \quad tang(\varphi_1 - \varphi) = k'\, tang\varphi.$$

Um die reciproke Transformation zu erhalten, berechnen wir k' aus

$$\lambda = (1 - k')(1 + k'),$$

und erhalten

10. $$k' = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}, \quad k = \sqrt{1 - k'^2} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1 + \lambda},$$

und vertauschen in 1., 2., 7. und 10. die Bezeichnungen φ, φ_1, k, λ der Reihe nach mit φ_1, φ, λ, k. Dadurch erhalten wir

11. $$F(k, \varphi) = \frac{2}{1+k} F(\lambda, \varphi_1),$$

wenn $$\lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad sin(2\varphi_1 - \varphi) = k\, sin\varphi.$$

Beide Transformationen, 9. und 11., sind für die numerische Berechnung von Integralen erster Art sehr gut zu gebrauchen*).

6. Bezüglich der letzten Transformation bemerken wir zunächst, dass $(1+k):2 < 1$, also $\lambda > \sqrt{k}$ und um so mehr also, da k echt gebrochen ist,

$$\lambda > k;$$

ferner sieht man sofort, dass

$$\varphi_1 < \varphi.$$

Durch diese Transformation wird also der Modul vergrössert und die Amplitude verkleinert. Wenden wir diese Transformation wiederholt an, berechnen also eine Reihe λ, λ_2, λ_3 ... von Moduln

$$\lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \lambda_2 = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}, \quad \lambda_3 = \frac{2\sqrt{\lambda_2}}{1+\lambda_2}, \ldots \lambda_n = \frac{2\sqrt{\lambda_{n-1}}}{1+\lambda_{n-1}}$$

und die zugehörigen Amplituden aus

$$sin(2\varphi_1 - \varphi) = k sin\varphi, \quad sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = \lambda sin\varphi_1, \quad sin(2\varphi_3 - \varphi_2) = \lambda_2 sin\varphi_1,$$
$$\ldots . \; sin(2\varphi_n - \varphi_{n-1}) = \lambda_{n-1} sin\varphi_{n-1},$$

so fragt es sich, gegen welche Grenze diese zunehmenden Moduln und die abnehmenden Amplituden convergiren, wenn n unendlich wächst. Aus

$$\lambda_n = \frac{2\sqrt{\lambda_{n-1}}}{1+\lambda_{n-1}}$$

folgt

$$1 - \lambda_n = \frac{(1-\sqrt{\lambda_{n-1}})^2}{1+\lambda_{n-1}}.$$

Da nun $\sqrt{\lambda_{n-1}} > \lambda_{n-1} > k$, so folgt

$$1 - \lambda_n < \frac{(1-\lambda_{n-1})^2}{1+k}.$$

Wendet man dies wiederholt an, so erhält man

$$1 - \lambda < \frac{(1-k)^2}{1+k}, \quad 1 - \lambda_1 < \frac{(1-\lambda)^2}{1+k} < \frac{(1-k)^4}{(1+k)^3},$$

$$1 - \lambda_3 < \frac{(1-\lambda_2)^2}{1+k} < \frac{(1-k)^8}{(1+k)^7}, \quad 1 - \lambda_4 < \frac{(1-\lambda_3)^2}{1+k} < \frac{(1-k)^{16}}{(1+k)^{15}}$$

$$\ldots ., \quad 1 - \lambda_n < \frac{(1-k)^{2^n}}{(1+k)^{2^n-1}}.$$

Hieraus folgt, dass sich $1 - \lambda_n$ der Grenze Null nähert, und zwar sehr rasch, wenn k nicht zu klein ist; also ist

$$lim \lambda_n = 1.$$

Der Grenzwerth von φ_n ergiebt sich durch wiederholte Anwendung der Gleichung

$$sin(2\varphi_n - \varphi_{n-1}) = \lambda_{n-1} sin\varphi_{n-1}$$

im Verlaufe der Rechnung von selbst; wird derselbe mit Φ bezeichnet, so kommt man schliesslich auf das Integral

*) Die erstere heisst nach ihrem Erfinder LANDEN'sche Substitution. Philosophical Transactions 1775.

$$F(1, \Phi) = \int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = l\,tang\left(\frac{\Phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

und hat daher

$$F(k, \varphi) = lim\left(\frac{2}{1+k} \cdot \frac{2}{1+\lambda} \cdot \frac{2}{1+\lambda_2} \cdot \frac{2}{1+\lambda_3} \cdot \ldots\right) l\,tang\left(\frac{\Phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Da $2:(1+\lambda_n) = \lambda_{n+1} : \sqrt{\lambda_n}$, so kann man hierfür auch setzen

$$F(k, \varphi) = \frac{lim\sqrt{\lambda \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \ldots}}{\sqrt{k}} \cdot l\,tang\left(\frac{\Phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

7. Die Transformation No. 5, 9 gestaltet sich besonders einfach, wenn sie auf das Integral angewendet wird

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \varphi\right).$$

Alsdann ist

$$k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \quad k' = \frac{b}{a}, \quad \frac{1}{1+k'} = \frac{a}{a+b}, \quad \lambda = \frac{a-b}{a+b},$$

$$tang(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a}\,tang\,\varphi.$$

Da nun

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \sin^2\varphi}} = \frac{a+b}{2}\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos^2\varphi + (\sqrt{ab})^2\sin^2\varphi}},$$

so ergiebt sich aus No. 5, 9 die Transformation

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_1^2\cos^2\varphi + b_1^2\sin^2\varphi}},$$

wobei $$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad tang(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a}\,tang\,\varphi.$$

Wendet man diese Transformation wiederholt an, so hat man die Grössen zu berechnen

$$\begin{aligned}
a_1 &= \tfrac{1}{2}(a+b), & b_1 &= \sqrt{ab}; & tang(\varphi_1 - \varphi) &= \frac{b}{a}\,tang\,\varphi; \\
a_2 &= \tfrac{1}{2}(a_1+b_1), & b_2 &= \sqrt{a_1 b_1}; & tang(\varphi_2 - \varphi_1) &= \frac{b_1}{a_1}\,tang\,\varphi_1; \\
a_3 &= \tfrac{1}{2}(a_2+b_2), & b_3 &= \sqrt{a_2 b_2}; & tang(\varphi_3 - \varphi_2) &= \frac{b_2}{a_2}\,tang\,\varphi_2; \\
a_4 &= \tfrac{1}{2}(a_3+b_3), & b_4 &= \sqrt{a_3 b_3}; & tang(\varphi_4 - \varphi_3) &= \frac{b_3}{a_3}\,tang\,\varphi_3;
\end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

Bekanntlich ist

$$a_n - b_n < \tfrac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1});$$

daher hat man

$$\begin{aligned}
a_1 - b_1 &< \tfrac{1}{2}(a-b), \\
a_2 - b_2 &< \tfrac{1}{2}(a_1 - b_1) < \tfrac{1}{4}(a-b) \\
a_3 - b_3 &< \tfrac{1}{2}(a_2 - b_2) < \tfrac{1}{8}(a-b) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n - b_n &< \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1}) < \frac{1}{2^n}(a-b).
\end{aligned}$$

Wächst n unendlich, so ist daher

$$\lim (a_n - b_n) = 0 .$$

Hieraus folgt, dass die Zahlen a_n und b_n sich einer gemeinsamen Grenze c nähern; diese wird nach GAUSS*) als das arithmetisch-geometrische Mittel von a und b bezeichnet.

Wenn a_r von b_r innerhalb der angenommenen Genauigkeitsgrenzen nicht mehr von einander (und von c) zu unterscheiden sind, so hat φ_r eine bestimmte, durch die Rechnung sich ergebende Grenze Φ erreicht, und es ist

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{2^r} \cdot \Phi .$$

8. Auch durch das Additionstheorem allein, ohne Combination mit einer quadratischen Transformation, kann man ein Normalintegral erster Art, und auf demselben Wege eins zweiter Art berechnen. Ist

$$1. \qquad \sin\varphi = \frac{2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 \Delta(\varphi_1)}{1 - k^2 \sin^4 \varphi_1},$$

so ist bekanntlich

$$2. \qquad F(k, \varphi) = 2 F(k, \varphi_1)$$

und nach dem Additionstheorem für Integrale zweiter Art

$$3. \qquad E(k, \varphi) = 2 E(k, \varphi) - k^2 \sin\varphi \sin^2\varphi_1 .$$

Statt der Gleichung 1. kann zur Bestimmung des Winkels φ_1 durch den Winkel φ passender die Gleichung benutzt werden, die aus No. 2, 10 folgt, wenn darin φ_1 für φ, und ψ und φ für σ gesetzt wird:

$$\cos\varphi = \cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_1 \Delta(\varphi) ,$$

woraus sofort folgt

$$\sin\varphi_1 = \sqrt{\frac{1 - \cos\varphi}{1 + \Delta(\varphi)}} .$$

Berechnet man einen Hülfswinkel γ durch die Gleichung

$$\sin\gamma = k \sin\varphi ,$$

so ist $\Delta(\varphi) = \cos\gamma$, und

$$\sin\varphi_1 = \sin\tfrac{1}{2}\varphi : \cos\tfrac{1}{2}\gamma .$$

Berechnet man nun eine Reihe von Winkeln nach den Formeln

$$\begin{aligned}
\sin\varphi_1 &= \sin\tfrac{1}{2}\varphi \;\; : \cos\tfrac{1}{2}\gamma , & \sin\gamma_1 &= k \sin\varphi_1 ; \\
\sin\varphi_2 &= \sin\tfrac{1}{2}\varphi_1 : \cos\tfrac{1}{2}\gamma_1 , & \sin\gamma_2 &= k \sin\varphi_2 ; \\
\sin\varphi_3 &= \sin\tfrac{1}{2}\varphi_2 : \cos\tfrac{1}{2}\gamma_2 , & \sin\gamma_3 &= k \sin\varphi_2 ; \\
\sin\varphi_4 &= \sin\tfrac{1}{2}\varphi_3 : \cos\tfrac{1}{2}\gamma_3 , & \sin\gamma_4 &= k \sin\varphi_4 ; \\
& \cdots \cdots \cdots \cdots \\
\sin\varphi_r &= \sin\tfrac{1}{2}\varphi_{r-1} : \cos\tfrac{1}{2}\gamma_{r-1} ,
\end{aligned}$$

so ist

$$F(k, \varphi) = 2^r F(k, \varphi_r)$$

$$E(k, \varphi) = 2^r E(k, \varphi_r)$$

$$- (\sin\varphi \sin^2\gamma_1 + 2 \sin\varphi_1 \sin^2\gamma_2 + 2^2 \sin\varphi_2 \sin^2\gamma_3 + \ldots + 2^{r-1} \sin\varphi_{r-1} \sin^2\gamma_r).$$

Setzt man die Berechnung so weit fort, bis höhere, als die fünfte Potenz von φ vernachlässigt werden können, so hat man zu setzen, wenn vorübergehend φ_r durch φ ersetzt wird:

$$\frac{1}{\Delta(\varphi)} = (1 + k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{k^2}{2}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right)^2 + \frac{3k^4}{8}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right)^4 ,$$

$$\Delta(\varphi) = 1 - \frac{k^2}{2}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right)^2 - \frac{k^4}{8}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right)^4 ;$$

*) GAUSS, Sämmtliche Werke, herausgeg. von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 3, pag. 361. 1866.

also
$$\frac{1}{\Delta(\varphi)} = 1 + \frac{k^2}{2}\varphi^2 - \left(\frac{k^2}{6} - \frac{3k^4}{8}\right)\varphi^4 ,$$
$$\Delta(\varphi) = 1 - \frac{k^2}{2}\varphi^2 + \left(\frac{k^2}{6} - \frac{k^4}{8}\right)\varphi^4 .$$

Daher ist
$$F(k, \varphi_r) = \varphi_r + \frac{k^2}{6}\varphi_r{}^3 - \frac{k^2(4 - 9k^2)}{120}\varphi_r{}^5 ,$$
$$E(k, \varphi_r) = \varphi_r - \frac{k^2}{6}k_r{}^3 + \frac{k^2(4 - 3k^2)}{120}k_r{}^5 .$$

Für hinlänglich kleine Werthe von k können diese Werthe selbst als erste Annäherungen für $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ benutzt werden, indem man φ^r durch φ ersetzt.

Führt man diese Rechnungen mit fünfstelligen Logarithmen für die Zahlenwerthe durch
$$k = 0{,}93270 , \qquad \varphi = 80^\circ 0',00 ,$$
so erhält man
$$\begin{array}{llll} \varphi & = 80^\circ\ 0',0 & \gamma & = 67^\circ 44',0 \\ \varphi_1 & = 50^\circ 43',6 & \gamma_1 & = 46^\circ 40',4 \\ \varphi_2 & = 27^\circ 48',5 & \gamma_2 & = 26^\circ\ 0',1 \\ \varphi_3 & = 14^\circ 16',7 & \gamma_3 & = 13^\circ 24',0 \\ \varphi_4 & = 7^\circ 11,3 & \gamma_4 & = 6^\circ 45,2 \\ \varphi_5 & = 3^\circ 36,0 & \log\sin\gamma_5 & = 0{,}77094 - 2 . \end{array}$$

Bezeichnet man, wie in den Formeln, mit φ wieder den Arcus, so ist
$$\varphi_5 = 0{,}062831 ,$$
daher ist $\varphi_5^5 < 0{,}0000001$; in den Formeln für $F(\varphi_r)$ und $E(\varphi_r)$ genügen somit die ersten beiden Glieder. Man erhält
$$F(\varphi_5) = 0.062867_5 ,$$
$$E(\varphi_5) = 0.062794_5 .$$

Aus dem ersten dieser Werthe folgt
$$F(k, \varphi) = 32 \cdot F(k, \varphi_5) = 2.01176 .$$

Um $E(k, \varphi)$ zu finden, berechnet man noch folgende Glieder, die sich leicht ergeben, da man die nöthigen Logarithmen schon bei der Hand hat,
$$\begin{array}{rl} \sin\varphi\ \sin^2\gamma_1 & = 0.52116_3 \\ 2\sin\varphi_1 \sin^2\gamma_2 & = 0.29757_1 \\ 4\sin\varphi_2 \sin^2\gamma_3 & = 0.10023_0 \\ 8\sin\varphi_3 \sin^2\gamma_4 & = 0.02728_1 \\ 16\sin\varphi_4 \sin^2\gamma_5 & = 0.00697_2 \\ \hline \text{Summe} & = 0.95322 \end{array}$$

Subtrahirt man dies von
$$32E(k, \varphi_5) = 2.0094 ,$$
so erhält man
$$E(k, \varphi) = 1{,}0562 .$$

Das Beispiel zeigt, dass man nach dieser Methode selbst bei ungünstigen Voraussetzungen, nämlich bei grossen Werthen von k und φ, rasch zum Ziele kommt.

---

9. Das geradlinige Integral
$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

wird rein imaginär, wenn die obere Grenze z rein imaginär ist; in jedem andern Falle ist es real oder complex. Ersetzt man z durch iy, so entsteht

$$\int_0^{iy} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = i\int_0^{y} \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}}\,.$$

Führt man hier $y = tang\varphi$ ein, so erhält man

$$i\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{cos^2\varphi + k^2 sin^2\varphi}} = i\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 sin^2\varphi}}\,,$$

und hat daher schliesslich

$$\int_0^{iy} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = iF(k', \varphi)\,,$$

wobei

$$tang\varphi = y\,.$$

Hierdurch ist die Berechnung eines rein imaginären elliptischen Integrals erster Art auf die eines realen Integrals mit complementärem Modul reducirt.

10. Mit Hülfe des Additionstheorems lässt sich jedes elliptische Integral erster Art, dessen obere Grenze complex ist, in die Summe eines realen und eines rein imaginären Integrals zerlegen. Aus der Gleichung

$$\int_0^{a+ib} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^{x} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \int_0^{iy} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

folgt nach dem Additionssatze

$$a + ib = \frac{x\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\cdot i}{1 + k^2x^2y^2}\,.$$

Durch Vergleichung des Realen und Imaginären ergeben sich hieraus die beiden Gleichungen

$$\frac{x\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}}{1+k^2x^2y^2} = a\,, \qquad \frac{y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1+k^2x^2y^2} = b\,,$$

oder die rationalen

2. $$x^2[1 + (k^2+1)y^2 + k^2y^4] = a^2(1+k^2x^2y^2)^2\,,$$

3. $$y^2[1 - (k^2+1)x^2 + k^2x^4] = b^2(1+k^2x^2y^2)^2\,.$$

Durch Addition folgt, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gesetzt wird,

$$x^2 + y^2 + k^2x^2y^2(y^2+x^2) = c^2(1+k^2x^2y^2)^2\,,$$

und hieraus nach Division durch $1 + k^2x^2y^2$

4. $$x^2 + y^2 = c^2(1 + k^2x^2y^2)\,.$$

Dieser Gleichung entnehmen wir

5. $$y^2 = \frac{c^2 - x^2}{1 - k^2c^2x^2}\,.$$

und erhalten hieraus durch Addition von x^2

6. $$x^2 + y^2 = \frac{c^2(1-k^2x^4)}{1 - c^2k^2x^2}\,.$$

Aus 3. und 4. folgt

$$y^2[1 - (k^2+1)\,x^2 + k^2x^4) = \frac{b^2}{c^4}(x^2+y^2)^2\,.$$

Führt man hier die in 5. und 6. berechneten Werthe ein, so entsteht

$$(c^2 - x^2)(1-x^2)(1-k^2x^2)(1-c^2k^2x^2) = b^2(1-k^2x^4)^2\,.$$

Hieraus erhält man schliesslich

7. $$a^2 - (1+c^2)(1+k^2c^2)x^2 + (1 + 2k^2c^2 + c^4k^4 + k^2 + c^4k^2 + 2b^2k^2)x^4 - k^2(1+c^2)(1+k^2c^2)x^6 + a^2k^4x^8 = 0\,.$$

Dividirt man durch x^4 und fasst die Glieder folgendermaassen zusammen

$$a^2\left(\frac{1}{x^4}+k^4x^4\right)-(1+c^2)(1+k^2c^2)\left(\frac{1}{x^2}+k^2x^2\right)+A=0,$$

wobei $A = 1 + 2c^2k^2 + c^4k^4 + k^2 + c^4k^2 + 2b^2k^2$, und setzt

8. $$k^2x^2+\frac{1}{x^2}=t,$$

so erhält man für t die quadratische Gleichung

$$a^2t^2-(1+c^2)(1+k^2c^2)\,t+A-2k^2a^2=0.$$

Aus dieser Gleichung erhält man t, hierauf x^2 aus 8. und schliesslich y^2 aus 5.

Ebenso wie die Gleichung 7. für x^2, erhält man eine Gleichung achten Grades zur direkten Bestimmung von y^2.

Beispiel. $k = 0{,}6$, $a = 1{,}623$, $b = 0{,}6114$.

Die quadratische Gleichung für t ist

$$t^2-2\cdot 1{,}5844_4\cdot t+6{,}330_6=0;$$

die Wurzeln sind $t_1 = 1{,}913_2$, $t_2 = 1{,}255_6$.

Die Wurzel t_2 führt auf Werthe von x, die grösser als 1 und daher unbrauchbar sind, da das entlang der realen Achse erstreckte Integral nur für $x < 1$ real ist. Aus t_1 folgt

$$x = 0{,}7665,\quad y = 2{,}580.$$

Daher hat man die Zerlegung

$$\int_0^{1{,}623+i\cdot 0{,}6114} dz:\sqrt{R}=\int_0^{0{,}7665} dz:\sqrt{R}+\int_0^{i\cdot 2{,}580} dz:\sqrt{R},$$

$$\sqrt{R}=\sqrt{(1-z^2)(1-0{,}36\cdot z^2)}.$$

In Rücksicht auf No. 9 erhält man hieraus

$$\int_0^{1{,}623+i\cdot 0{,}6114} dz:\sqrt{R}=F(0{,}6;\ 50^\circ\,2',0)+iF(0{,}8;\ 68^\circ\,48',8).$$

11. Denkt man sich in 7. x gegeben, dagegen a und b veränderlich, so ist 7. die Gleichung der Curve, auf welcher sich der veränderliche Punkt $a+ib$ der Variabelnfläche bewegen muss, wenn der reale Theil der Function

$$F=\int_0^{a+ib}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

den durch x gegebenen Betrag haben soll; diese Curve entspricht daher einer Parallelen zur imaginären Achse der Functionsebene. Wie man sieht, ist diese Curve vom vierten Grade und symmetrisch gegen die reale und gegen die imaginäre Achse. Die Gleichung achten Grades in y ist ebenso wie Gleichung 7. vierten Grades in a und b und stellt, wenn a und b veränderlich sind, y gegeben ist, die Curve dar, die einer Parallelen zur realen Achse der Functionsebene entspricht; sie ist ebenfalls symmetrisch gegen die reale und die imaginäre Achse.

§ 18. Die elliptischen Functionen. Entwicklung derselben in Potenzreihen und in periodische Reihen.

1. In der Theorie der Kreisfunctionen stellt man dem Integrale

$$\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=w$$

die Umkehrung gegenüber

$$sin w = z ,$$

und neben diese Function treten noch eine Reihe algebraisch mit ihr zusammenhängende, *cos w*, *tang w*, *cot w*, *sec w*, *cosec w*; es zeigt sich, dass diese einfach periodischen Functionen für die Theorie sowol, wie für die Verwendung von grösserer Bedeutung sind, als die unendlich vieldeutigen algebraischen Integrale, deren Umkehrungen sie sind. Von dem dort befolgten Gedankengange angeleitet, betrachten wir die Umkehrung des elliptischen Integrals

$$1. \quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = w .$$

Ausgehend von der goniometrischen Form

$$2. \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}} = w ,$$

die mit der algebraischen durch die Gleichung $z = sin\varphi$ zusammenhängt, führte Jacobi *) für φ, als Function von w betrachtet, das Zeichen ein

$$\varphi = am w \quad (= \text{Amplitude von } w) .$$

Hieraus ergiebt sich dann für die Umkehrung von 1. die Functionsbezeichnung

$$z = sin am w \quad (\text{Sinus amplitudinis } w) .$$

Hieraus folgt

$$\sqrt{1-z^2} = cos am w .$$

Neben diesen beiden Functionen ist noch $\sqrt{1-k^2z^2}$ von besonderer Wichtigkeit; sie wird nach Jacobi mit

$$\Delta am w \quad (\text{Delta amplitudinis } w)$$

bezeichnet; $sin am w$, $cos am w$, $\Delta am w$ nennt man elliptische Functionen im Gegensatze zu den elliptischen Integralen.

Aus 2. folgt $d\varphi = \Delta(\varphi)\, dw$; daher ist

$$\frac{d\, am\, w}{dw} = \Delta\, am\, w .$$

Hieraus ergiebt sich ferner

$$3. \quad \begin{aligned} \frac{d sin\, am w}{dw} &= \frac{d sin\, am w}{d\, am\, w} \cdot \frac{d\, am w}{dw} = cos\, am\, w\, \Delta\, am\, w , \\ \frac{d cos\, am w}{dw} &= \frac{d cos\, am w}{d\, am\, w} \cdot \frac{d\, am w}{dw} = - sin\, am\, w\, \Delta\, am\, w , \\ \frac{d\Delta\, am\, w}{dw} &= \frac{d\Delta\, am\, w}{d\, am\, w} \cdot \frac{d\, am w}{dw} = - k^2 sin\, am\, w\, cos\, am\, w . \end{aligned}$$

Ueber die Vorzeichen verfügen wir so, dass dem Werthe $z = sin\, am\, w = 0$ die Werthe $cos\, am\, w = \Delta\, am\, w = +1$ (nicht -1) entsprechen.

2. Bezeichnet w den Werth, den das elliptische Integral erster Art für die Punkte der mit den nöthigen Querschnitten versehenen Variabelnfläche hat, in welcher w mit z zugleich verschwindet, so ist

$$z = sin\, am\, w .$$

Der allgemeine Werth des Integrals ist $w + m \cdot 4K + n \cdot 2K'i$, es ist daher auch

$$z = sin\, am\, (w + m \cdot 4K + n \cdot 2K'i) .$$

Daher haben wir

$$sin\, am\, (w + m \cdot 4K + n \cdot 2K'i) = sin\, am\, w .$$

Hieraus ergiebt sich die Haupteigenschaft des Amplitudensinus,

---

*) Jacobi, Fundamenta nova etc., pag. 30.

durch welche er sich von allen bisher untersuchten Functionen wesentlich unterscheidet: Die Function *sin am w* ist doppelt periodisch; sie hat die reale Periode $4K$ und die rein imaginäre $2K'i$.

3. Wir stellen hier einige Werthe zusammen, welche die drei elliptischen Hauptfunctionen für besondere Werthe der Variabeln w haben. Zunächst ist

$$\begin{array}{lll} \sin am\, 0 = 0\,, & \cos am\, 0 = 1\,, & \Delta\, am\, 0 = 1\,, \\ \sin am\, K = 1\,, & \cos am\, K = 0\,, & \Delta\, am\, K = k'\,, \\ \sin am\, 2K = 0\,, & \cos am\, 2K = -1\,, & \Delta\, am\, 2K = 1\,. \end{array}$$

Aus

$$K + iK' = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

folgt weiter

$$\sin am\,(K + iK') = \frac{1}{k}\,, \quad \cos am\,(K + iK') = i\,\frac{k'}{k}\,, \quad \Delta\, am\,(K + iK') = 0.$$

Aus § 17, No. 9 folgt

$$\int_0^{i\,tang\,\varphi} \frac{dz}{\sqrt{R}} = i \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}\,.$$

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ergiebt dies

$$\sin am\,(iK') = \infty\,, \quad \cos am\,(iK') = \infty\,, \quad \Delta\, am\, iK' = \infty\,.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \sin am\,(-w) &= -\sin am\, w\,, \\ \cos am\,(-w) &= \cos am\, w\,, \\ \Delta\, am\,(-w) &= \Delta\, am\, w\,. \end{aligned}$$

4. Aus dem Additionstheorem ergeben sich sofort die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin am\,(w \pm w_1) &= \frac{\sin am\, w \cos am\, w_1\, \Delta\, am\, w_1 \pm \sin am\, w_1 \cos am\, w\, \Delta\, am\, w}{1 - k^2 \sin^2 am\, w \sin^2 am\, w_1}\,, \\ 1.\quad \cos am\,(w \pm w_1) &= \frac{\cos am\, w \cos am\, w_1 \mp \sin am\, w \sin am\, w_1\, \Delta\, am\, w\, \Delta\, am\, w_1}{1 - k^2 \sin^2 am\, w \sin^2 am\, w_1}\,, \\ \Delta\, am\,(w \pm w_1) &= \frac{\Delta\, am w\, \Delta\, am w_1 \mp k^2 \sin am w \cos am w \sin am w_1 \cos am w_1}{1 - k^2 \sin^2 am\, w \sin^2 am\, w_1}\,. \end{aligned}$$

Wendet man die Additionsformeln auf das complexe Argument $u + iv$ an, so erhält man die Hauptfunctionen für ein complexes Argument in ihre realen und imaginären Bestandtheile zerlegt. Aus § 17, No. 9 ergiebt sich

$$\sin am\,(iv) = i\, tang\, am\,(v,\, k')\,.$$

Mithin ist

$$\cos am\,(iv) = \frac{1}{\cos am\,(v,\, k')}\,, \quad \Delta\, am\,(iv) = \frac{\Delta\, am\,(v,\, k')}{\cos am\,(v,\, k')}\,.$$

Berücksichtigt man dies, so erhält man

$$\sin am\,(u + iv) = \frac{\sin am\, u\, \Delta\, am\,(v,\, k') + i \cos am\, u\, \Delta\, am\, u \sin am\,(v,\, k') \cos am\,(v,\, k')}{\cos^2 am\,(v,\, k') + k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\,(v,\, k')}\,,$$

$$2.\quad \cos am\,(u + iv) = \frac{\cos am\, u \cos am\,(v,\, k') - i \sin am\, u\, \Delta\, am\, u \sin am\,(v,\, k')\, \Delta\, am\,(v,\, k')}{\cos^2 am\,(v,\, k') + k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\,(v,\, k')}\,,$$

$$\Delta\, am\,(u + iv) = \frac{\Delta\, am\, u\, \Delta\, am\,(v,\, k') - ik^2 \sin am\, u \cos am\, u \sin am\,(v,\, k')}{\cos^2 am\,(v,\, k') + k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\,(v,\, k')}\,.$$

Unter Berücksichtigung der in No. 3 gegebenen Werthe ergeben die Additionssätze

$$
6. \quad \begin{aligned}
\sin am(w \pm K) &= \pm \frac{\cos am\, w}{\Delta am\, w}, \\
\cos am(w \pm K) &= \mp k' \frac{\sin am\, w}{\Delta am\, w}, \\
\Delta am(w \pm K) &= \frac{k'}{\Delta am\, w};
\end{aligned}
$$

sowie

$$
7. \quad \begin{aligned}
\sin am(w \pm 2K) &= -\sin am\, w, \\
\cos am(w \pm 2K) &= -\cos am\, w, \\
\Delta am(w \pm 2K) &= \Delta am\, w.
\end{aligned}
$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt, dass die Function $\Delta am\, w$ die reale Periode $2K$ hat.

Aus der zweiten ergiebt sich

$$\cos am(w \pm 4K) = \cos am\, w;$$

die Function $\cos am\, w$ hat daher die reale Periode $4K$.

Um $\sin am(w \pm iK')$, $\cos am(w \pm iK')$, $\Delta am(w \pm iK')$ zu erhalten, bemerken wir zunächst, dass

$$\frac{\sin am w}{\cos am w} = 1 : \sqrt{\frac{1}{\sin^2 am\, w} - 1}, \quad \frac{\sin am\, w}{\Delta am\, w} = 1 : \sqrt{\frac{1}{\sin^2 am\, w} - k^2}.$$

Substituiren wir hier $w = iK'$, so wird $\sin am\, w = \infty$ und es folgt

$$\frac{\sin am\, iK'}{\cos am\, iK'} = -i, \quad \frac{\sin am\, iK'}{\Delta am\, iK'} = -i \cdot \frac{1}{k}.$$

Dividirt man nun in den Additionsgleichungen Zähler und Nenner durch $\sin^2 am\, w'$ und setzt dann $w' = iK'$, so erhält man

$$
8. \quad \begin{aligned}
\sin am(w + iK') &= \frac{1}{k \sin am\, w}, \\
\cos am(w + iK') &= -i \cdot \frac{\Delta am\, w}{k \sin am\, w}, \\
\Delta am(w + iK') &= -i \cdot \frac{\cos am\, w}{\sin am\, w}.
\end{aligned}
$$

Durch wiederholte Anwendung entsteht

$$
9. \quad \begin{aligned}
\sin am(w + i \cdot 2K') &= \sin am\, w, \\
\cos am(w + i \cdot 2K') &= -\cos am\, w, \\
\Delta am(w + i \cdot 2K') &= -\Delta am\, w.
\end{aligned}
$$

Aus den Gleichungen 9. und 7. folgt

$$\cos am(w + 2K + i \cdot 2K') = \cos am\, w.$$

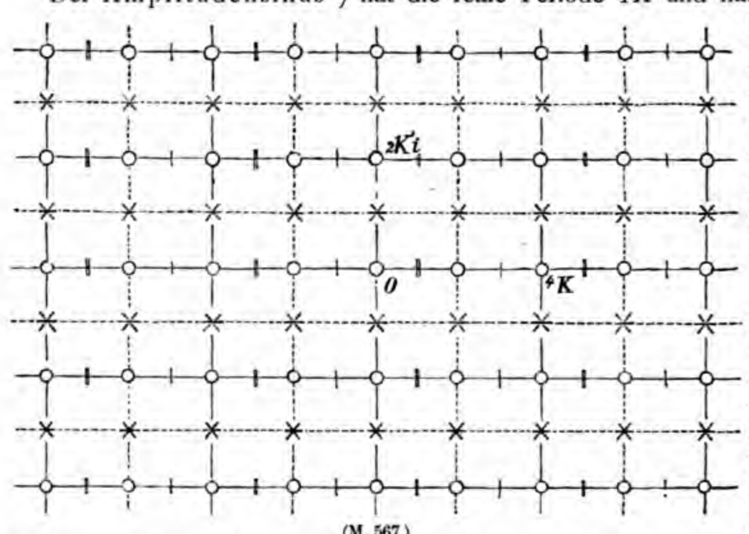
und aus der letzten in 9.

$$\Delta am(w + i \cdot 4K') = \Delta am\, w.$$

In Verbindung mit dem im Anschluss an die Gleichungen 7. haben wir somit: die Function $\cos am\, w$ hat die reale Periode $4K$ und die complexe $2K + i \cdot 2K'$; die Function $\Delta am\, w$ hat die reale Periode $2K$ und die imaginäre $i4K'$.

5. Um uns diese Ergebnisse anschaulich zu machen, zeichnen wir auf der w-Ebene zunächst die Linien, für welche eine elliptische Function dieselben Werthe hat, wie für die Punkte der realen und der imaginären Achse; die Punkte, für welche die Function verschwindet, unendlich gross oder gleich der positiven oder negativen Einheit wird, sind der Reihe nach durch kleine Kreise, Sternchen, einfache und doppelte verticale Striche ausgezeichnet.

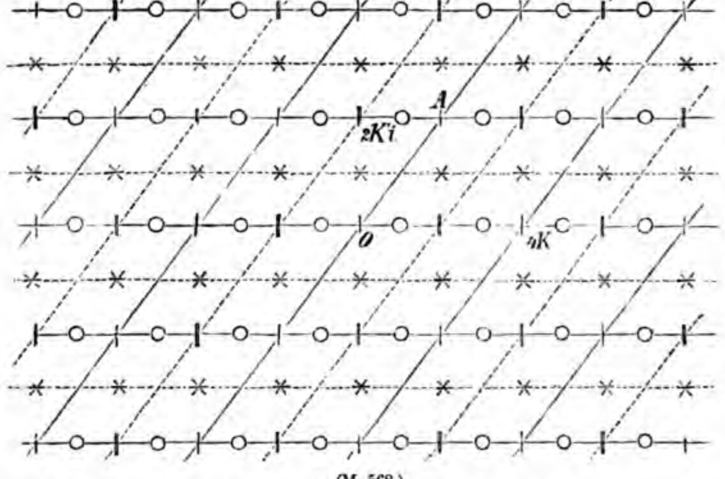
Der Amplitudensinus*) hat die reale Periode $4K$ und hat daher für die Punkte der imaginären Achse dieselben Werthe, wie für Parallele zur imaginären Achse, die dnrch die Punkte $\ldots -8K, -4K, 0, 4K, 8K, 12K \ldots$ gehen; wegen der imaginären Periode $i \cdot 2K'$ hat $sin\, am\, w$ in den Punkten der realen Achse dieselben Werthe, wie in den Parallelen zu dieser Achse durch die Punkte



(M. 567.)

$\ldots - i \cdot 6K', \quad - i \cdot 4K', \quad - i \cdot 2K', \quad 0, \quad i \cdot 2K', \quad i \cdot 4K', \quad i \cdot 6K', \ldots$.
Durch beide Schaaren von Parallelen wird die ganze w-Ebene in congruente Rechtecke getheilt, welche die Länge $4K$ und die Breite $2K'$ haben. Durchläuft w das ganze Gebiet des Rechtecks, das die Ecken hat: $0, 4K, 4K + i \cdot 2K', 2K'$, so nimmt $sin\, am\, w$ alle möglichen realen und complexen Werthe an. Denkt man sich jeden Punkt dieses Rechtecks mit dem zugehörigen Werthe von $sin\, am\, w$ belegt, so erhält man die Werthe, die $sin\, am\, w$ für die Punkte irgend eines andern der Rechtecke annimmt, indem man das erste Rechteck parallel verschiebt, bis es mit dem andern zur Deckung kommt.

6. Die Punkte, in denen der Amplitudencosinus infolge der complexen Periode $2K + i \cdot 2K'$ denselben Werth hat wie im Nullpunkte, liegen auf der Geraden OA, die den Nullpunkt mit dem Punkte $2K + i \cdot 2K'$ verbindet, und zwar liegen sie hier zu beiden Seiten von O um Vielfache der Strecke OA entfernt. Die Punkte, in denen $cos\, am\, w$ infolge der complexen Periode denselben Werth hat, wie in B, liegen auf der durch B gehenden Parallelen zu OA, und sind von B um Vielfache von OA getrennt.



(M. 568.)

*) In Fig. 567 ersetze man die einfachen Verticalstriche durch doppelte und umgekehrt.

Die Punkte, in denen $\cos am\, w$ infolge der realen Periode $4K$ dieselben Werthe hat, wie in den Punkten dieser Parallelen, sind auf Parallelen zu OA enthalten, die von B in der Richtung der realen Achse um Vielfache von $4K$ abstehen, und zwar liegen die Punkte dieser Parallelen, die einem bestimmten Punkte B entsprechen, auf der durch B gehenden Parallelen zur realen Achse.

Zerlegt man die w-Ebene durch Parallele zu OA, welche die Punkte enthalten

$$\ldots\ldots -8K, \quad -4K, \quad 0, \quad 4K, \quad 8K, \ldots\ldots,$$

sowie durch Parallelen zur realen Achse, welche die Punkte enthalten

$$\ldots\ldots -i\cdot 4K', \quad -i\cdot 2K', \quad 0, \quad i\cdot 2K', \quad i\cdot 4K', \ldots\ldots,$$

so zerfällt sie in congruente Parallelogramme; eins derselben hat die Ecken $0,\ 4K,\ 6K + i\cdot 2K',\ 2K + i\cdot 2K'$.

Durchläuft w dieses Parallelogramm, so nimmt $\cos am\, w$ alle möglichen realen und complexen Werthe an. Denken wir uns wieder jeden Punkt dieses Parallelogramms mit dem zugehörigen Werthe von $\cos am\, w$ behaftet, so erhalten wir die Werthe, welche den in einem andern Parallelogramme enthaltenen w-Werthen zugehören, indem wir das erstere mit dem letzteren durch Parallelverschiebung zur Deckung bringen.

7. Die Function $\Delta\, am\, w$ hat die reale Periode $2K$ und die imaginäre $i\cdot 4K'$; daher ziehen wir in der w-Ebene Parallele zur realen Achse durch die Punkte

$$\ldots -i\cdot 8K', \ -i\cdot 4K', \ 0, \ i\cdot 4K', \ i\cdot 8K', \ldots$$

sowie Parallele zur imaginären Achse durch die Punkte

$$\ldots -4K, \ -2K, \ 0, \ 2K, \ 4K, \ldots$$

Durchläuft w das Rechteck, das die Ecken hat $0,\ 2K,\ 2K + i\cdot 4K',\ i\cdot 4K'$, so nimmt $\Delta\, am\, w$ alle möglichen Werthe an. Denken wir uns auch diesmal die Punkte dieses Rechtecks mit den zugehörigen Functionswerthen behaftet, so erhalten wir die Functionswerthe für die Punkte eines andern der Rechtecke, indem wir das erstere parallel verschieben, bis es mit dem letzteren zusammenfällt.

(M. 569.)

8. Setzt man im Additionstheoreme $w_1 = w$, so folgen die Formeln

$$\sin am\, 2w = \frac{2 \sin am\, w \cos am\, w\, \Delta\, am\, w}{1 - k^2 \sin^4 am\, w},$$

$$\cos am\, 2w = \frac{\cos^2 am w - \sin^2 am w\, \Delta^2 am\, u}{1 - k^2 \sin^4 am u} = \frac{1 - 2\sin^2 am\, w + \varphi^2 \sin^4 am w}{1 - k^2 \sin^4 am w},$$

$$\Delta am\, 2w = \frac{\Delta^2 am\, w - k^2 \sin^2 am w \cos^2 am w}{1 - k^2 \sin^4 am w} = \frac{1 - 2k^2 \sin^2 am w + k^2 \sin^4 am w}{1 - k^2 \sin^4 am w}.$$

Setzt man in der zweiten Gleichung $w = \frac{1}{2}K$, so erhält man

$$1 - 2\sin^2 am \tfrac{1}{2}K + k^2 \sin^4 am \tfrac{1}{2}K = 0\,.$$

In Rücksicht darauf, dass $\sin am \frac{1}{2}K$ positiv und kleiner als 1 ist, folgen hieraus die Werthe

$$\sin am \frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + k'}}, \quad \cos am \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k}}, \quad \Delta am \frac{K}{2} = \sqrt{k'}\,.$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$sin\,am\,i\frac{K'}{2} = i\frac{1}{\sqrt{k}}, \quad cos\,am\,i\frac{K'}{2} = \sqrt{\frac{1+k}{k}}, \quad \Delta am\,i\frac{K'}{2} = \sqrt{1+k}.$$

Mit Hülfe der Additionsformeln findet sich dann noch

$$sin\,am\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \frac{1}{\sqrt{1-k'}}, \quad cos\,am\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \mp i\sqrt{\frac{k'}{1-k'}},$$

$$\Delta am\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \mp i\sqrt{k'};$$

$$sin\,am\left(K \pm i\frac{K'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad cos\,am\left(K \pm i\frac{K'}{2}\right) = \mp i\sqrt{\frac{1-k}{k}},$$

$$\Delta am\left(K \pm i\frac{K'}{2}\right) = \sqrt{1-k};$$

$$sin\,am\frac{K \pm iK'}{2} = \sqrt{1 \pm i\frac{k'}{k}}, \quad cos\,am\frac{K \pm iK'}{2} = (1 \mp i)\sqrt{\frac{k'}{2k}},$$

$$\Delta am\frac{K \pm iK'}{2} = k'\sqrt{1 \mp i\frac{k}{k'}}.$$

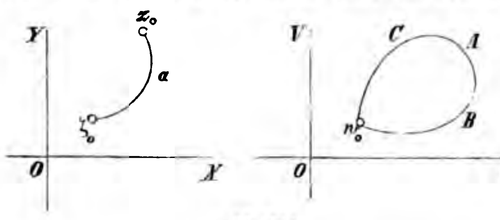
Für den drittletzten Werth erhält man nämlich zunächst

$$\sqrt{\frac{1+k'}{k}} \cdot \frac{1+k+ik'}{1+k+k'} = \sqrt{\frac{1+k'}{k}} \cdot \frac{\sqrt{1+k} + i\sqrt{1-k}}{\sqrt{1+k} + \sqrt{1-k}}.$$

Die Quadratwurzel aus der zweiten Potenz hiervon liefert das Mitgetheilte; bei der vorletzten Formel ist $\sqrt{i} = \pm(1+i):2$ verwendet worden, unter Rücksicht auf die Vorzeichen der Functionen; die Wurzeln sind positiv zu nehmen.

9. Die Functionen *sin amw*, *cos amw*, Δ*amw* sind eindeutige Functionen von w.

Nehmen wir an, *sin amw* sei eine mehrdeutige Function von w und dem Werthe w_0 entsprechen $sin\,am w_0 = \zeta_0$ und $sin\,am w_0 = z_0$; bewegt sich z auf der durch Querschnitte auf einfachen Zusammenhang gebrachten Riemann'schen Variabelnfläche von ζ_0 nach z_0, so beschreibt w eine Curve, die in w_0 anfängt und auch da endigt, da w eine eindeutige Function der Punkte der einfach zusammenhängenden z-Fläche ist. Der Weg $\zeta_0 z_0$ sei so gewählt, dass der zugehörige Weg von w keinen Windungspunkt enthält. Geht w über B nach A und hierauf denselben Weg zurück, so geht ein Werth der Variabeln z von ζ_0 bis zu einem A entsprechenden Punkte a und dann denselben Weg zurück nach ζ_0. Wir wollen nun den Weg $l = ABw_0$ stetig so verändern, dass er in den Weg ACw_0 übergeht. So lange bei diesen Veränderungen der Weg nicht einem Punkte unendlich nahe kommt, für welchen $dz : dw$ unendlich gross ist, so lange gehört zu jeder unendlich kleinen Verrückung eines Punktes der Curve l auch eine unendlich kleine Verrückung des zugehörigen Punktes der Z-Fläche, so lange ist also auch die Deformation des Weges $a\zeta_0$ stetig und ζ_0 der Endpunkt. Da nun der Weg $a\zeta_0$ nicht durch stetige Aenderungen in den ACw_0 entsprechenden Weg az_0 übergeführt werden kann, so folgt, dass, wenn anders die Annahme der Vieldeutigkeit von *sin am w* zutreffen soll, die Curve w_0CAB einen Punkt einschliessen muss, für welchen



(M. 570.)

$$\frac{dz}{dw} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

unendlich gross wird. Dies tritt nur ein, wenn $z = \infty$, und hierfür ist

$$w = iK' + 2mK + 2niK'.$$

Es müsste also, wenn w einen geschlossenen Weg beschreibt, der einen dieser Punkte umgiebt, z von einem Anfangswerthe ζ_0 zu einem andern Endwerthe z_0 gelangen. Wir können uns dabei darauf beschränken, w einen unendlich kleinen Kreis beschreiben zu lassen, der einen dieser Punkte einschliesst. Nun ist

$$\begin{aligned} sin\,am(iK' + 2mK + i2nK' + \rho e^{i\varphi}) &= \pm\, sin\,am(iK' + \rho e^{i\varphi}) \\ &= \pm \frac{1}{k\, sin\,am\,\rho e^{i\varphi}}\,; \end{aligned}$$

wächst φ von 0 bis 2π, so beschreibt $w = \rho e^{i\varphi}$ einen unendlich kleinen Kreis um den Nullpunkt; dieser schliesst keinen Punkt ein, für welchen $dz : dw = \infty$, also erlangt $sin\,am\,\rho^{i\varphi}$ am Ende desselben Wegs denselben Werth, wie am Anfange; mithin gilt das gleiche auch für $sin\,am w$, wenn w einen der Punkte $iK' + 2mK + i2nK'$ umkreist. Hieraus folgt, dass bei jedem geschlossenen Wege von w auch $z = sin\,am w$ einen geschlossenen Weg beschreibt; folglich kann $sin\,am w$ nicht eine mehrdeutige Function von w sein.

Da $z = sin\,am w$ eine eindeutige Function von w ist, und $cos\,am w = \sqrt{1-z^2}$ und $\Delta am w = \sqrt{1-k^2z^2}$ eindeutige Functionen von z, d. i. der Punkte der RIEMANN'schen Variabelnfläche sind, so folgt, dass auch $cos\,am w$ und $\Delta am w$ eindeutige Functionen von w sind.

---

10. Die elliptischen Functionen $sin\,am w$, $cos\,am w$, $\Delta am w$ sind eindeutig und endlich innerhalb des mit dem Halbmesser K' beschriebenen Kreises; folglich lassen sie sich in Potenzreihen entwickeln, die für $mod w < K'$ convergiren.

Da $sin\,am w$ mit w das Zeichen wechselt, $cos\,am w$ und $\Delta am w$ aber nicht, so folgt, dass die Reihe für $sin\,am w$ nur ungerade, die beiden andern Reihen nur gerade Potenzen von w enthalten; wir haben daher Reihen von der Form

$$\begin{aligned} sin\,am\,w &= a_1 w + a_3 w^3 + a_5 w^5 + \ldots \\ cos\,am\,w &= 1 + b_2 w^2 + b_4 w^4 + \ldots \\ \Delta\, am\,w &= 1 + c_2 w^2 + c_4 w^4 + \ldots . \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der a, b, c bedienen wir uns der Methode der unbestimmten Coefficienten. Nach No. 1, 3 ist

$$\frac{d\,sin\,am\,w}{dw} = cos\,am w\, \Delta am w\,.$$

Differenziren wir nochmals, und benutzen die Formeln für den Differentialquotienten von $cos\,am w$ und $\Delta am w$, so erhalten wir

$$\frac{d^2\, sin\,am w}{dw^2} = -(1+k^2)\, sin\,am w + 2k^2\, sin^3 am w\,.$$

Setzen wir auf beiden Seiten dieser Gleichung die Potenzreihe für $sin\,am w$ ein und vergleichen die gleich hohen Potenzen von w, so erhalten wir für die Coefficienten a_1, a_3, a_5, ... die Gleichungen

$$\begin{aligned} 3\cdot 2\cdot a_3 &= -(1+k^2)\,a_1\,, \\ 5\cdot 4\cdot a_5 &= -(1+k^2)\,a_3 + 2k^2 a_1^3\,, \\ 7\cdot 6\cdot a_7 &= -(1+k^2)\,a_5 + 6k^2 a_1^2 a_3\,, \\ 9\cdot 8\cdot a_9 &= -(1+k^2)\,a_7 + 6k^2(a_1^2 a_5 + a_1 a_3^2)\,, \\ 11\cdot 10\cdot a_{11} &= -(1+k^2)\,a_9 + 2k^2(3a_1^2 a_7 + a_3^3 + 6a_1 a_3 a_5)\,, \\ 13\cdot 12\cdot a_{13} &= -(1+k^2)\,a_{11} + 2k^2(3a_1^2 a_9 + 3a_1 a_5^2 + 6a_1 a_3 a_7 + 3a_3^2 a_5)\,. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Den ersten Coefficienten a_1 erhalten wir, indem wir die Reihe für *sin amw* differenziren und davon Gebrauch machen, dass

$$\left(\frac{d\sin amw}{dw}\right)_{w=0} = 1;$$

hieraus ergiebt sich

$$a_1 = 1.$$

Berechnen wir nun aus dem gegebenen Systeme die übrigen Coefficienten, so erhalten wir

$$\sin amw = w - \frac{1+k^2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot w^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot w^5$$

$$- \frac{1+135k^2+135k^4+k^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\cdot w^7 + \frac{1+1228k^2+5478k^4+1228k^6+k^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}\cdot w^9$$

$$- \frac{1+11069k^2+165826k^4+165826k^6+11069k^8+k^{10}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}\cdot w^{11} + \ldots$$

$$mod\, w < K'.$$

11. Wir bilden in gleicher Weise

$$\frac{d^2 \cos amw}{dw^2} = -(1-2k^2)\cos amw - 2k^2\cos^3 amw,$$

und setzen auf beiden Seiten die Potenzreihe für *cos amw* ein; dadurch gelangen wir zu den Gleichungen

$$\begin{aligned}
2\cdot 1\cdot b_2 &= -1,\\
4\cdot 3\cdot b_4 &= -(1+4k^2)\,b_2,\\
6\cdot 5\cdot b_6 &= -(1+4k^2)\,b_4 - 6k^2 b_2^2,\\
8\cdot 7\cdot b_8 &= -(1+4k^2)\,b_6 - 2k^2(b_2^3 + 6b_2b_4),\\
10\cdot 9\cdot b_{10} &= -(1+4k^2)\,b_8 - 6k^2(b_2^2b_4 + 2b_2b_6 + b_4^2),\\
12\cdot 11\cdot b_{12} &= -(1+4k^2)\,b_{10} - 6k^2(b_2b_4^2 + b_2^2b_6 + 2b_2b_8 + 2b_4b_6),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Hieraus findet sich

$$\cos amw = 1 - \frac{1}{1\cdot 2}\cdot w^2 + \frac{1+4k^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot w^4$$

$$- \frac{1+44k^2+16k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot w^6 + \frac{1+408k^2+912k^4+64k^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\cdot w^8$$

$$- \frac{1+3688k^2+30768k^4+15808k^6+256k^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}\cdot w^{10} + \ldots$$

$$mod\, w < K'.$$

12. Für die Function $\Delta\, amw$ ergiebt sich

$$\frac{d^2\,\Delta amw}{dw^2} = (2-k^2)\,\Delta\, amw - 2\Delta^3 amw,$$

woraus die Gleichungen folgen

$$\begin{aligned}
2\cdot 1\cdot c_2 &= -k^2\\
4\cdot 3\cdot c_4 &= -(4+k^2)\,c_2\\
6\cdot 5\cdot c_6 &= -(4+k^2)\,c_4 - 6c_2^2\\
8\cdot 7\cdot c_8 &= -(4+k^2)\,c_6 - 2(c_2^3 + 6c_2c_4)\\
10\cdot 9\cdot c_{10} &= -(4+k^2)\,c_8 - 6(c_2^2c_4 + 2c_2c_6 + c_4^2)\\
12\cdot 11\cdot c_{12} &= -(4+k^2)\,c_{10} - 6(c_2^2c_6 + c_2c_4^2 + 2c_2c_8 + 2c_4c_6)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Diese ergeben

$$\Delta\, amw = 1 - \frac{k^2}{1\cdot 2}\cdot w^2 + \frac{k^2(4+k^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot w^4$$

$$- \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot w^6 + \frac{k^2(64+912k^2+408k^4+k^6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\cdot w^8 - \ldots$$

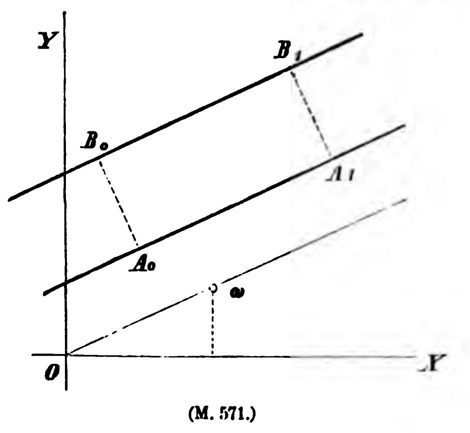
$$mod\, w < K'.$$

Die Reihen für die Produkte je zweier der Functionen *sin amw*, *cos amw*, Δamw erhalten wir, indem wir die soeben entwickelten Reihen nach w differenziren; es entsteht:

$$\cos amw \cdot \Delta amw$$
$$= 1 - \frac{1 + k^2}{1 \cdot 2} w^2 + \frac{1 + 14k^2 + k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} w^4 - \dots$$
$$\sin amw \cdot \Delta amw$$
$$= w - \frac{1 + 4k^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} w^3 + \frac{1 + 44k^2 + 16k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} w^5 - \dots$$
$$\sin amw \cdot \cos amw$$
$$= w - \frac{4 + k^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot w^3 + \frac{16 + 44k^2 + k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot w^5 - \dots$$
$$\mathrm{mod}\, w < K'.$$

13. Wir werden nun die elliptischen Functionen in FOURIER'sche Reihen entwickeln; vorher wollen wir die FOURIER'schen Reihen auf complexe Variable ausdehnen*).

Die Function $f(z)$ sei periodisch und habe die reale oder complexe Periode ω; sie sei ferner endlich und eindeutig innerhalb eines unendlichen Streifens $A_0 A_1 B_0 B_1$, dessen Ränder mit der vom Nullpunkte nach dem Punkte ω gezogenen Geraden parallel sind. Nach der Voraussetzung zerfällt dieser Streifen in congruente Rechtecke, deren in der Richtung des Streifens gemessene Länge $A_0 A_1$ einer Aenderung des z um den Periodicitätsmodul ω zugehört, so dass für homologe Punkte dieser Rechtecke $f(z)$ denselben Werth hat.



(M. 571.)

Wir führen eine neue Variable t durch die Gleichung ein

1. $$e^{\frac{2\pi z}{\omega} i} = t$$

und setzen $t = re^{i\vartheta}$; dann ist

2. $$z = -\frac{i\omega}{2\pi} lr + \frac{\omega}{2\pi} \vartheta.$$

Bewegt sich z auf einer Parallelen zu $A_0 A_1$, so durchläuft es die Werthe $z + m\omega$, wobei m real ist. Gehören r_1 und ϑ_1 zu $z + m\omega$, so ist

3. $$z + m\omega = -\frac{i\omega}{2\pi} lr_1 + \frac{\omega}{2\pi} \vartheta_1.$$

Durch Subtraction von 2. und Division durch ω ergiebt sich

$$m = -\frac{i}{2\pi} l \frac{r_1}{r} + \frac{1}{2\pi} (\vartheta_1 - \vartheta).$$

Da m real ist, so folgt hieraus $r_1 = r$; ferner folgt für $m = 1$ der Werth $\vartheta_1 = \vartheta + 2\pi$; beschreibt also z eine Parallele zur Streifenrichtung, so bewegt sich t auf einem Kreise, schreitet z um ω fort, so durchläuft t einen vollen Kreis.

Hieraus folgt, dass den Normalen zur Streifenrichtung in der z-Ebene Strahlen durch den Nullpunkt in der t-Ebene entsprechen.

*) BRIOT et BOUQUET, Théorie des fonctions élliptiques, 2. éd. Paris 1875. pag. 161. KÖNIGSBERGER, Vorlesungen über die Theorie der Ellipt. Funct., Leipzig 1874. pag. 230.

Gehören nun zu $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$ die Werthe $r = r_0$ und $r = r_1$, so entspricht dem Rechtecke $A_0 A_1 B_1 B_0$ der zwischen den mit den Radien r_0 und r_1 beschriebenen Kreisen enthaltene Ring. Da nach der Voraussetzung $f(z)$ innerhalb dieses Rechtecks eindeutig und endlich ist, so ist die Function

$$f\left(-i \cdot \frac{\omega}{2\pi} lt\right),$$

die aus $f(z)$ durch Ersetzung von z durch t hervorgeht, eindeutig und endlich für den zwischen $r = r_0$ und $r = r_1$ enthaltenen Kreisring. Daher kann diese Function (§ 13, No. 13) in eine Reihe von der Form entwickelt werden

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n t^n.$$

Wenn man t wieder durch z ersetzt, so hat man daher

$$4. \qquad f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{2n\pi z}{\omega} i}$$

gültig zunächst für das Rechteck $A_0 A_1 B_1 B_0$; da aber für zwei Werthe z und $z + \omega$ sowohl $f(z)$ als $e^{\frac{2n\pi z}{\omega} i}$ denselben Werth haben, so folgt, dass die Reihenentwicklung für den ganzen zwischen den Geraden $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$ enthaltenen Streifen gültig ist.

Für die Coefficienten hat man

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int f \cdot t^{-n-1} dt$$

erstreckt über einen Kreis, dessen Halbmesser zwischen r_0 und r_1 liegt; führt man z ein, so entsteht

$$5. \qquad a_n = \frac{1}{\omega} \int f(z) e^{-\frac{2n\pi z}{\omega} i} dz.$$

erstreckt über $A_0 A_1$, oder eine innerhalb des Streifens liegende parallele und gleiche Strecke.

Ersetzt man in 4. und 5. die Exponentialgrössen durch goniometrische Functionen, so erhält man die FOURIER'sche Reihe in der Form

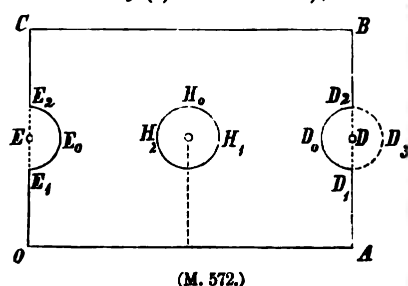
$$f(z) = a_0 + i \sum_{1}^{\infty} (a_n - a_{-n}) \cdot \sin \frac{2n\pi z}{\omega}$$
$$+ \sum_{1}^{\infty} (a_n + a_{-n}) \cdot \cos \frac{2n\pi z}{\omega},$$

die mit der § 11, No. 12 mitgetheilten übereinstimmt.

14. Ist $f(z) = \sin am z$*), so schlagen wir zur Ermittelung des Integrals

$$a_n = \frac{1}{4K} \int_0^{4K} f(z) e^{-\frac{n\pi z}{2K} i} dz$$

folgenden Weg ein.



(M. 572.)

Hat das Rechteck $OABC$ der Reihe nach die Eckpunkte $z = 0$, $4K$, $4K + 2K'i$, $2K'i$, und umgehen wir die beiden Punkte D und E des Perimeters, für welche $z = iK'$ und $4K + iK'$ ist, für welche also $\sin am z$

*) Den bisher aus leicht erkennbaren Gründen festgehaltenen Gebrauch, die Variable in den elliptischen Functionen mit w zu bezeichnen, geben wir nun auf.

unendlich gross wird, durch verschwindend kleine Halbkreise, und schliessen den Punkt $2K+2K'i$, in welchem $sinamz$ ebenfalls unendlich ist, durch einen verschwindend kleinen Kreis $H_0 H_1 H_2$ aus, so ist für die Function $f(z) e^{-\frac{n\pi z}{2K} i} dz$

$$\int OA + \int AD_1 + \int D_1 D_0 D_2 + \int D_2 B + \int BC + \int CE_2 + \int E_2 E_0 E_1 + \int E_1 O + \int H_0 H_1 H_2 = 0 .$$

In correspondirenden Punkten von OC und AB haben $sin\,am z$ und $e^{-\frac{n\pi z}{2K} i}$ denselben Werth, dz aber entgegengesetzt gleiche Werthe, mithin verschwindet die Summe der auf diese Strecken bezüglichen Integrale. In correspondirenden Punkten der Seiten OA und BC hat $sin\,am z$ gleiche Werthe, zur Exponentialgrösse tritt aber der Faktor $e^{n\frac{\pi K'}{K}}$.

Wir setzen

$$e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q ,$$

und haben daher

$$\int OA + \int BC = (1 - q^{-n}) \int OA .$$

Statt des Integrals $\int E_2 E_0 E_1$ können wir $\int D_2 D_3 D_1$ setzen, da in correspondirenden Punkten beider Halbkreise die zu integrirende Function gleiche Werthe hat. Für die Kreisintegrale über $D_1 D_0 D_3$ und $H_0 H_1 H_2$ setzen wir der Reihe nach, indem wir den Radius mit r bezeichen,

$$z = 2K + K'i + re^{i\varphi}, \quad \text{bez.} = 4K + K'i + re^{i\varphi},$$

bezeichnen die verschwindende Grösse $re^{i\varphi}$ mit ρ und beachten, dass

$$sin\,am(2K + K'i + \rho) = -\frac{1}{k\,sin\,am\rho},$$

$$sin\,am(4K + K'i + \rho) = \frac{1}{k\,sin\,am\rho}.$$

Somit erhalten wir

$$\int D_1 D_0 D_3 + \int H_0 H_1 H_2 = i \cdot q^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{e^{-n\pi i} - 1}{k} \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{sin\,am\,\rho} e^{-\frac{n\pi\rho}{2K} i} d\varphi .$$

Wir gehen nun zur Grenze für ein verschwindendes ρ über; da

$$lim \frac{\rho}{sin\,am\rho} = 1 , \quad lim\, e^{-\frac{n\pi\rho}{2K} \cdot i} = 1 ,$$

so folgt

$$\int D_1 D_0 D_3 + \int H_0 H_1 H_2 = 2\pi \cdot q^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{e^{-n\pi i} - 1}{k} \cdot i .$$

Hieraus erhalten wir

$$a_n = \frac{1}{4K} \cdot \int OA = i \frac{\pi}{2K} \cdot \frac{e^{-n\pi i} - 1}{k} \cdot \frac{\sqrt{q^n}}{1 - q^n} = i \frac{\pi}{2K} \cdot \frac{cos\,n\pi - 1}{k} \cdot \frac{\sqrt{q^n}}{1 - q^n}$$

Daher ist

$$a_n + a_{-n} = 0,$$

$$a_{2n} - a_{-2n} = 0 , \quad a_{2n+1} - a_{-2n-1} = -i \cdot \frac{2\pi}{kK} \cdot \frac{\sqrt{q^{2n+1}}}{1 - q^{2n+1}} .$$

Dies ergiebt nun die gesuchte Entwicklung

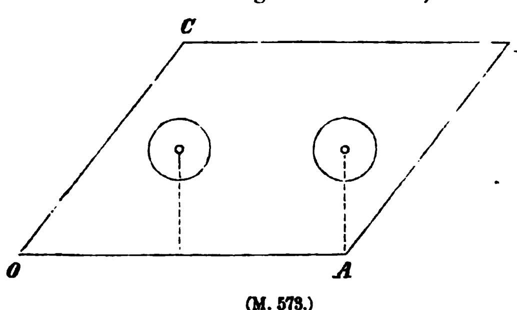
$$sin\,am z =$$

$$\frac{2\pi}{kK}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q} \cdot sin\frac{\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3} \cdot sin\frac{3\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5} sin\frac{5\pi z}{2K} + \ldots\right).$$

15. Zur Ermittlung des geradlinigen Integrales

$$\int_0^{4K} \cos am\, z \cdot e^{-\frac{n\pi z}{2K}i}\, dz$$

bilden wir ein Parallelogramm $OABC$, für dessen Ecken $z = 0,\ 4K,\ 6K + 2K'i,\ 2K + 2K'i$ und schliessen die beiden Punkte $2K + K'i$ und $4K + K'i$ im Inneren dieses Parallelogramms, für welche $\cos am\, z$ unendlich wird, durch gleiche verschwindende Kreise aus. Das Integral erstreckt über den Perimeter des Parallelogramms ist gleich der Summe der beiden Kreisintegrale. In correspondirenden Punkten der Seiten AB und OC haben $\cos am\, z$ und die Exponentialgrösse gleiche, dz entgegengesetzt gleiche Werthe; also verschwindet die Summe der über AB und CO erstreckten Integrale.



(M. 573.)

In correspondirenden Punkten von OA und BC hat $\cos am\, z$ gleiche Werthe und zur Exponentialgrösse tritt der Faktor

$$e^{-\frac{n\pi}{2K}(2K+2K'i)i} = (-q)^{-n}.$$

Die beiden Integrale geben daher vereint

$$[1 - (-q)^{-n}] \cdot \int OA.$$

In den Kreisintegralen setzen wir

$$z = 2K + K'i + \rho, \quad \text{bez.} = 4K + K'i + \rho,$$
$$\rho = r^{i\varphi},$$

und beachten, dass

$$\cos am(2K + K'i + \rho) \cdot e^{-\frac{n\pi i}{2K}(2K+K'i+\rho)} = i \cdot e^{-n\pi i} \cdot q^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{\Delta am\, \rho}{k \sin am\, \rho} \cdot e^{-\frac{n\pi\rho}{2K}i},$$

$$\cos am(4K + K'i + \rho) \cdot e^{-\frac{n\pi i}{2K}(4K+K'i+\rho)} = -\, i \cdot q^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{\Delta am\, \rho}{k \sin am\, \rho} \cdot e^{-\frac{n\pi\rho}{2K}i}.$$

Die Summe der beiden Kreisintegrale ist daher

$$\frac{1}{k}(1 - e^{-n\pi i})\, q^{-\frac{n}{2}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\rho \Delta\, am\, \rho}{\sin am\, \rho} \cdot e^{-\frac{n\pi\rho}{2K}i}\, d\varphi;$$

der Grenzwerth derselben für ein verschwindendes ρ ist

$$\frac{2\pi}{k}(1 - e^{-n\pi i})\, q^{-\frac{n}{2}}.$$

Daher ergiebt sich

$$a_n = \frac{\pi}{2kK}(1 - e^{-n\pi i})\, \frac{q^{-\frac{n}{2}}}{1 - (-q)^{-n}}.$$

Ist n gerade, so ist $a_n = 0$; für ungerade n hat man

$$a_{2n+1} = \frac{\pi}{kK} \cdot \frac{q^{\frac{2n+1}{2}}}{q^{2n+1} + 1};$$

mithin ist

$$a_{2n+1} - a_{-2n-1} = 0, \qquad a_{2n+1} + a_{-2n-1} = \frac{2\pi}{kK} \cdot \frac{q^{\frac{2n+1}{2}}}{q^{2n+1} + 1}.$$

Dies ergiebt schliesslich die Entwicklung

$$\cos am\, z =$$

$$\frac{2\pi}{kK}\left[\frac{\sqrt{q}}{1+q}\cos\frac{\pi z}{2K}+\frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\cos\frac{3\pi z}{2K}+\frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5}\cos\frac{5\pi z}{2K}+\ldots\right].$$

16. Um $\Delta am\, z$ in eine FOURIER'sche Reihe zu entwickeln, haben wir das geradlinige Integral auszuwerthen

$$\int_0^{2K}\Delta am\, z\, e^{-\frac{n\pi z}{K}i}\, dz.$$

Wir integriren die unter dem Integralzeichen stehende Function auf dem Perimeter $OABC$, in dessen Ecken $z = 0$, $2K$, $2K + 4K'i$, $4K'i$, und schliessen die Punkte $K'i$, $3K'i$, $2K + K'i$, $2K + 3K'i$, in welche $\Delta am\, w$ unendlich gross wird, durch kleine Halbkreise aus. Die Integrale über AB und CO haben wieder die Summe Null. In correspondirenden Punkten von OA und CD hat $\Delta am\, z$ gleiche Werthe, die Exponentialgrösse nimmt den Faktor an

$$e^{\frac{4n\pi K'}{K}} = q^{-4n},$$

die beiden Integrale geben daher zusammen

$$(1 - q^{-4n})\cdot\int OA.$$

(M. 574.)

Die vier Halbkreisintegrale kann man durch zwei Kreisintegrale um iK' und $3iK'$ ersetzen; wir substituiren in denselben

$$z = iK' + \rho, \quad \text{bez.} = 3iK' + \rho, \quad \rho = re^{i\varphi},$$

und bemerken, dass

$$\Delta am\,(iK' + \rho)\cdot e^{-\frac{n\pi i}{K}(iK'+\rho)} = -i\frac{\cos am\,\rho}{\sin am\,\rho}\cdot q^{-n}\cdot e^{-\frac{n\pi\rho}{K}i},$$

$$\Delta am(3\cdot iK' + \rho)\cdot e^{-\frac{n\pi i}{K}(3iK'+\rho)} = i\frac{\cos am\,\rho}{\sin am\,\rho}\cdot q^{-3n}\cdot e^{-\frac{n\pi\rho}{K}i}.$$

Für die beiden Kreisintegrale ergiebt sich, wenn man ρ unendlich klein nimmt,

$$2\pi(q^{-n} - q^{-3n}).$$

Daher ist

$$a_n = \frac{\pi}{K}\cdot\frac{q^{-n} - q^{-3n}}{1 - q^{-4n}} = \frac{\pi}{K}\cdot\frac{q^n}{1 + q^{2n}};$$

da $a_{-n} = a_n$, so ist

$$a_n - a_{-n} = 0,$$

$$a_n + a_{-n} = \frac{2\pi}{K}\cdot\frac{q_n}{1 + q^{2n}}, \qquad a_0 = \frac{\pi}{K}.$$

Dies liefert schliesslich

$$\Delta am\, z =$$

$$\frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi z}{K}+\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{2\pi z}{K}+\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi z}{K}+\ldots\right).$$

Diese FOURIER'schen Reihen für $\sin am\, z$, $\cos am\, z$ und $\Delta am\, z$ gelten für alle Werthe von z, welche innerhalb des Streifens liegen, der sich parallel der realen Achse erstreckt und dessen Ränder durch die Punkte $\pm iK'$ gehen. Jenseit dieses Streifens wiederholen sich die Werthe der elliptischen Functionen, gemäss ihrer complexen Periode, und zwar bei $\cos am\, z$ und $\Delta am\, z$ mit Vorzeichenwechsel; die FOURIER'schen Reihen sind aber nur einfach periodisch und setzen sich jenseit des Streifens mit andern Werthen fort, als die Functionen, mit denen sie für Punkte im Innern des Streifens übereinstimmen.

17. Aus den in No. 14, 15 und 16 entwickelten Reihen lassen sich durch Differentiation, Integration und geeignete Substitutionen eine grosse Anzahl brauchbarer Reihen ableiten. Wir beschränken uns hier auf wenige Beispiele.

Ersetzt man in den drei Reihen z durch $K - z$, so entsteht

1. $$\frac{\cos am\, z}{\Delta\, am\, z} = \frac{2\pi}{kK}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\cos\frac{\pi z}{2K} - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\cos\frac{3\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5}\cos\frac{5\pi z}{2K} - \ldots\right),$$

2. $$\frac{\sin am\, z}{\Delta\, am\, z} = \frac{2\pi}{kk'K}\left(\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\frac{\pi z}{2K} - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\frac{3\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5}\sin\frac{5\pi z}{2K} - \ldots\right),$$

3. $$\frac{1}{\Delta\, am\, z} = \frac{\pi}{2k'K} - \frac{2\pi}{k'K}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi z}{K} - \frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{2\pi z}{K} + \frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi z}{K} - \ldots\right).$$

Aus den Transformationsformeln § 17, No. 5.

$$F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \varphi_1\right) = (1+k')F(k, \varphi),$$

4. $$\sin\varphi_1 = \frac{(1+k')\cos\varphi\sin\varphi}{\Delta(\varphi)}, \quad \cos\varphi_1 = \frac{1-(1+k')\sin^2\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

$$\Delta(\varphi_1) = \frac{1-(1-k')\sin^2\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

erhält man sofort, indem man $F(k, \varphi) = w$ setzt,

$$\sin am\left[(1+k')w, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{(1+k')\cos am\, w \sin am\, w}{\Delta\, am\, w},$$

$$\cos am\left[(1+k')w, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{1-(1+k')\sin^2 am\, w}{\Delta\, am\, w}.$$

Da nun nach 4. die Werthe $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und $\varphi_1 = \pi$ einander entsprechen, so ist

$$F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \pi\right) = 2F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right) = (1+k')K, \text{ also}$$

$$F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+k'}{2}K.$$

Das Complement zu $\frac{1-k'}{1+k'}$ ist $\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$. Aus § 17, No. 5, 11 erhält man leicht

$$F(k', \pi) = 2F\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{1+k'}F\left(\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ also}$$

$$F\left(\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right) = (1+k')K'.$$

Ersetzt man also

$$k \text{ durch } \frac{1-k'}{1+k'} \text{ und } w \text{ durch } (1+k')w,$$

so verwandelt sich

$$K \text{ in } \tfrac{1}{2}(1+k')K, \quad K' \text{ in } (1+k')K',$$

$$q \text{ in } q^2,$$

$$\sin am\, w \text{ in } \frac{(1+k')\sin am\, w\cos am\, w}{\Delta\, am\, w},$$

$$\cos am\, w \text{ in } \frac{1-(1+k')\sin^2 am\, w}{\Delta\, am\, w}.$$

Durch diese Substitution erhält man aus der Reihe für *sin am z**):

$$\frac{sin\,am\,z\,cos\,am\,z}{\Delta\,am\,z} =$$

$$\frac{4\pi}{k^2K}\left(\frac{q}{1-q^2}\,sin\frac{\pi z}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\,sin\frac{3\pi z}{K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\,sin\frac{5\pi z}{K} + \ldots\right).$$

§ 19. Die Thetafunctionen.

1. Die FOURIER'schen Reihen für die elliptischen Functionen legen die Frage nahe, ob es nicht möglich sein wird, die Coefficienten a_n einer Reihe

$$1. \qquad S(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n\, e^{-\frac{2n\pi z}{\omega}i}$$

so zu bestimmen, dass durch dieselbe eine Function, welche ausser der Periode ω noch eine zweite Periode μ hat, für alle Werthe der Variabeln dargestellt wird.

Ersetzt man z durch $z+\mu$, so erhält man

$$S(z+\mu) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \cdot e^{-\frac{2n\mu\pi}{\omega}i} \cdot e^{-\frac{2n\pi z}{\omega}i}.$$

Setzt man abkürzungsweise $e^{\frac{2\mu\pi i}{\omega}} = q$, so wird

$$S(z+\mu) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n\, q^{-n}\, e^{-\frac{2n\pi z}{\omega}i}.$$

Soll nun für alle Werthe von z die Gleichung bestehen

$$2. \qquad S(z+\mu) = S(z),$$

so folgt $q = 1$, mithin $\mu = m\omega$, wo m eine ganze Zahl ist. Durch die Gleichung 2. kommt man also über die Periode ω nicht hinaus, und erkennt, dass durch eine FOURIER'sche Reihe eine doppelt periodische Function nicht dargestellt werden kann.

Man kann nun versuchen, eine Reihe zu erhalten, die dem Charakter der doppelten Periodicität möglichst nahe kommt, in dem Sinne, dass beim Uebergange von z auf $z+\mu$ die Reihe einen einfachen, von der Reihensumme nicht unmittelbar abhängigen Faktor annimmt; wenn es dann gelänge, eine zweite, ähnliche Reihe zu construiren, die bei demselben Wachsthum von z auf $z+\mu$ denselben Faktor annimmt, wie die erste, so würde dann der Quotient beider Reihen sich nicht verändern, wenn z durch $z+\mu$ ersetzt wird. Wir gelangen so zu dem Gedanken, eine doppelt periodische Function durch den Quotienten zweier Reihen darzustellen.

Die Forderung, dass bei der Substitution von $z+\mu$ für z die Reihe 1. sich bis auf einen einfach angebbaren Faktor reproducirt, lässt sich erfüllen, wenn wir die Coefficienten a der Bedingung unterwerfen

$$3. \qquad a_n q^{-n} = \gamma \cdot a_{n-1},$$

wobei γ eine noch unbestimmte Constante ist. Denn unter dieser Bedingung ist

$$S(z+\mu) = \gamma \cdot e^{-\frac{2\pi z}{\omega}i} \cdot S(z).$$

Wir dürfen einen Coefficienten beliebig wählen; es sei $a_0 = 1$; alsdann folgt aus 3.

$$a_1 = \gamma q, \quad a_2 = \gamma^2 q^3, \quad a_3 = \gamma^3 q^6, \ \ldots\ldots$$

$$a_n = \gamma^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

---

*) Weitere Entwicklungen dieser Art und einen Uebergang von FOURIER'schen Reihen auf unendliche Produkte siehe SCHLOEMILCH, Compendium Bd. 2. Abschn. Ellipt. Funct.

Um zunächst die einfachsten Bildungen zu erhalten, nehmen wir

$$\gamma = \pm q^{-\frac{1}{2}};$$

dann wird

$$a_n = (\pm 1)^n q^{\frac{n^2}{2}},$$

und wir erhalten so zwei Formen für S, nämlich

4. $$\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{\frac{\pi i}{\omega}(n^2\mu - 2nz)} \quad \text{und} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(n^2\mu - 2nz)}.$$

Um ähnlich gebaute Reihen zu erhalten, die beim Uebergange von z auf $z + \mu$ um einfache Faktoren wachsen, betrachten wir

5. $$S_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty +} b_n e^{-\frac{(2n+1)\pi z}{\omega} i}.$$

Setzt man hier $z + \mu$ für z, so entsteht

$$S_1(z + \mu) = \sum_{-\infty}^{\infty +} b_n q^{-\frac{2n+1}{2}} \cdot e^{-\frac{(2n+1)\pi z}{\omega} i}.$$

Bestimmt man die b durch die Bedingung

6. $$b_n q^{-\frac{2n+1}{2}} = \gamma_1 \cdot b_{n-1},$$

so wird

$$S_1(z + \mu) = \gamma_1 \cdot e^{-\frac{2\pi z}{\omega} i} \cdot S_1(z).$$

Aus 6. folgt

$$b_1 = b_0 \gamma_1 q^{\frac{3}{2}}, \quad b_2 = b_1 \gamma_1 q^{\frac{5}{2}}, \quad b_3 = b_2 \gamma_1 q^{\frac{7}{2}}, \ldots$$

woraus sich ergiebt

$$b_n = b_0 \gamma_1^n \cdot q^{\frac{n^2+2n}{2}}.$$

Wir nehmen

$$\gamma_1 = \gamma = \pm q^{-\frac{1}{2}}, \quad b_0 = q^{\frac{1}{8}},$$

und erhalten

$$b_n = (\pm 1)^n q^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2}.$$

Für die Reihe S_1 erhalten wir somit die beiden Formen

7. $$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}[(n+\frac{1}{2})^2 \mu - (2n+1)z]} \quad \text{und} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{\pi i}{\omega}[(n+\frac{1}{2})^2 \mu - (2n+1)z]}.$$

Wir sind hierdurch auf die Untersuchung der vier Reihen 4. und 7. geführt worden. Wir ersetzen in denselben $\pi z : \omega$ durch z und $i\mu\pi : \omega$ durch $-\rho$; ferner fügen wir zur letzten Reihe den Faktor i.

Die vier Reihen, welche wir so erhalten, führen nach Jacobi den Namen Thetafunctionen und werden durch die Functionszeichen

$$\vartheta(z, \rho), \quad \vartheta_1(z, \rho), \quad \vartheta_2(z, \rho), \quad \vartheta_3(z, \rho)$$

bezeichnet, so dass

8. $$\begin{aligned} \vartheta(z) &= \Sigma(-1)^n e^{-n^2\rho - i \cdot 2nz}, \\ \vartheta_1(z) &= i\,\Sigma(-1)^n e^{-(n+\frac{1}{2})^2\rho - i(2n+1)z}, \\ \vartheta_2(z) &= \Sigma e^{-(n+\frac{1}{2})^2\rho - i(2n+1)z}, \\ \vartheta_3(z) &= \Sigma e^{-n^2\rho - i \cdot 2nz}. \end{aligned}$$

Wird unter $e^{-\rho}$ ein realer positiver echter Bruch verstanden, so haben diese Reihen für jedes endliche z endliche Werthe und werden nur mit z zugleich unendlich gross.

Wir werden nun die wichtigsten Eigenschaften der Thetafunctionen entwickeln; am Schluss dieser Untersuchung werden wir den Zusammenhang dieser Functionen mit den elliptischen Functionen erkennen.

2. Rechnet man je zwei Glieder der Thetafunctionen zusammen, die zu entgegengesetzt gleichen n gehören, so erhält man die Reihen in folgender Gestalt

$$\begin{aligned}
\vartheta(z) &= 1 - 2e^{-\rho}\cos 2z + 2e^{-4\rho}\cos 4z - 2e^{-9\rho}\cos 6z + \ldots, \\
\vartheta_1(z) &= 2\sqrt[4]{e^{-\rho}}\sin z - 2\sqrt[4]{e^{-9\rho}}\sin 3z + 2\sqrt[4]{e^{-25\rho}}\sin 5z - \ldots, \\
\vartheta_2(z) &= 2\sqrt[4]{e^{-\rho}}\cos z + 2\sqrt[4]{e^{-9\rho}}\cos 3z + 2\sqrt[4]{e^{-25\rho}}\cos 5z + \ldots, \\
\vartheta_3(z) &= 1 + 2e^{-\rho}\cos 2z + 2e^{-4\rho}\cos 4z - 2e^{-9\rho}\cos 6z + \ldots
\end{aligned}$$

Hieraus erkennt man die Beziehungen

$$2.\qquad \begin{aligned}
\vartheta(z) &= \vartheta_3(\tfrac{1}{2}\pi - z), & \vartheta_2(z) &= \vartheta_1(\tfrac{1}{2}\pi - z), \\
\vartheta_1(z) &= \vartheta_2(\tfrac{1}{2}\pi - z), & \vartheta_3(z) &= \vartheta(\tfrac{1}{2}\pi - z).
\end{aligned}$$

Bezeichnet m eine ganze Zahl, so ist

$$3.\qquad \begin{aligned}
\vartheta(z + m\pi) &= \vartheta(z), & \vartheta_2(z + m\pi) &= (-1)^m\vartheta_2(z), \\
\vartheta_1(z + m\pi) &= (-1)^m\vartheta_1(z), & \vartheta_3(z + m\pi) &= \vartheta_3(z).
\end{aligned}$$

Ersetzen wir in No. 1, 8 die Variable durch $z + \frac{1}{2}i\rho$, so folgt

$$4.\qquad \begin{aligned}
\vartheta(z + \tfrac{1}{2}i\rho) &= ie^{\frac{1}{4}\rho - iz}\vartheta_1(z), \\
\vartheta_1(z + \tfrac{1}{2}i\rho) &= ie^{\frac{1}{4}\rho - iz}\vartheta(z), \\
\vartheta_2(z + \tfrac{1}{2}i\rho) &= e^{\frac{1}{4}\rho - iz}\vartheta_3(z), \\
\vartheta_3(z + \tfrac{1}{2}i\rho) &= e^{\frac{1}{4}\rho - iz}\vartheta_2(z).
\end{aligned}$$

Ersetzen wir hier wieder z durch $z + \frac{1}{2}i\rho$, so entsteht

$$5.\qquad \begin{aligned}
\vartheta(z + i\rho) &= -e^{\rho - 2iz}\vartheta(z), \\
\vartheta_1(z + i\rho) &= -e^{\rho - 2iz}\vartheta_1(z), \\
\vartheta_2(z + i\rho) &= e^{\rho - 2iz}\vartheta_2(z), \\
\vartheta_3(z + i\rho) &= e^{\rho - 2iz}\vartheta_3(z).
\end{aligned}$$

Wenn man diese Substitution mehrmals wiederholt, und dann noch $z - i\cdot m_1\rho$ für z setzt, so erhält man für jede ganze Zahl m_1

$$6.\qquad \begin{aligned}
\vartheta(z + m_1\cdot i\rho) &= (-1)^{m_1}e^{m_1^2\rho - 2im_1z}\vartheta(z), \\
\vartheta_1(z + m_1\cdot i\rho) &= (-1)^{m_1}e^{m_1^2\rho - 2im_1z}\vartheta_1(z), \\
\vartheta_2(z + m_1\cdot i\rho) &= e^{m_1^2\rho - 2im_1z}\vartheta_2(z), \\
\vartheta_3(z + m_1\cdot i\rho) &= e^{m_1^2\rho - 2im_1z}\vartheta_3(z).
\end{aligned}$$

Aus 3. und 6. folgt noch

$$7.\qquad \begin{aligned}
\vartheta(z + m\pi + m_1\cdot i\rho) &= (-1)^{m_1}e^{m_1^2\rho - 2im_1z}\vartheta(z), \\
\vartheta_1(z + m\pi + m_1\cdot i\rho) &= (-1)^{m+m_1}e^{m_1^2\rho - 2im_1z}\vartheta_1(z), \\
\vartheta_2(z + m\pi + m_1\cdot i\rho) &= (-1)^{m}e^{m_1^2\rho - 2im_1z}\vartheta_2(z), \\
\vartheta_3(z + m\pi + m_1\cdot i\rho) &= e^{m_1^2\rho - 2im_1z}\vartheta_3(z).
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man sofort, dass der Quotient je zweier Thetafunctionen doppelt periodisch ist; die Perioden sind von der Form $m\cdot\pi + n\cdot i\rho$, wobei m und n gleich 0, 1 oder 2 sind.

3. Die Multiplication der beiden Functionen

$$\vartheta_3(z) = \Sigma e^{-n^2\rho - i\cdot 2nz}, \quad \vartheta_3(\zeta) = \Sigma e^{-m^2\rho - i\cdot 2m\zeta}$$

ergiebt die Doppelsumme

$$\vartheta_3(z)\cdot\vartheta_3(\zeta) = \Sigma\Sigma e^{-(n^2+m^2)\rho - i\cdot 2(nz+m\zeta)}.$$

Für den Exponenten von e kann man schreiben

$$-2\rho[\tfrac{1}{4}(n+m)^2 + \tfrac{1}{4}(n-m)^2] - 2i[\tfrac{1}{2}(n+m)(z+\zeta) + \tfrac{1}{2}(n-m)(z-\zeta)].$$

Die Zahlen $n + m$ und $n - m$ sind gleichzeitig gerade oder ungerade; bezeichnen a und b ganze Zahlen, so ist also

$$n + m = 2a, \quad \text{und zugleich } n - m = 2b,$$

oder

$$n + m = 2a + 1, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad n - m = 2b + 1.$$

Durchlaufen a und b alle positiven und negativen ganzen Zahlen, so erhalten $n + m$ und $n - m$ alle möglichen Werthe.

Ersetzt man m und n durch a und b, so erhält man

$$\begin{aligned}\vartheta_3(z)\cdot\vartheta_3(\zeta) &= \Sigma\Sigma e^{-2\rho(a^2+b^2)-2i[a(z+\zeta)+b(z-\zeta)]}\\ &+ \Sigma\Sigma e^{-2\rho[(a+\frac{1}{2})^2+(b+\frac{1}{2})^2]-2i[(a+\frac{1}{2})(z+\zeta)+(b+\frac{1}{2})(z-\zeta)]},\\ &= \Sigma e^{-2a^2\rho-2ia(z+\zeta)}\,.\,\Sigma e^{-2b^2\rho-2b(z-\zeta)}\\ &+ \Sigma e^{-2(a+\frac{1}{2})^2\rho-2i(a+\frac{1}{2})(z+\zeta)}\,.\,\Sigma e^{-2(b+\frac{1}{2})^2\rho-2i(b+\frac{1}{2})(z-\zeta)}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

1. $\vartheta_3(z)\cdot\vartheta_3(\zeta) = \vartheta_3(z+\zeta,\ 2\rho)\cdot\vartheta_3(z-\zeta,\ 2\rho) + \vartheta_2(z+\zeta,\ 2\rho)\cdot\vartheta_2(z-\zeta,\ 2\rho)$.

Ersetzt man hier z durch $\frac{1}{2}\pi - z$, ζ durch $\frac{1}{2}\pi - \zeta$, und beachtet No. 2, 2. und 3., so erhält man

2. $\vartheta(z)\cdot\vartheta(\zeta) = \vartheta_3(z+\zeta,\ 2\rho)\cdot\vartheta_3(z-\zeta,\ 2\rho) - \vartheta_2(z+\zeta,\ 2\rho)\cdot\vartheta_2(z-\zeta,\ 2\rho)$.

Aus No. 2, 4 ergiebt sich leicht

$$\vartheta_3(z-\tfrac{1}{2}i\rho) = e^{\frac{1}{4}\rho+iz}\cdot\vartheta_2(z).$$

Ersetzt man hier ρ durch 2ρ, so entsteht

$$\vartheta_3(z-i\rho,\ 2\rho) = e^{\frac{1}{2}\rho+iz}\cdot\vartheta_2(z,\ 2\rho).$$

Ebenso erhält man

$$\vartheta_2(z-i\rho,\ 2\rho) = e^{\frac{1}{2}i\rho+iz}\cdot\vartheta_3(z,\ 2\rho).$$

Wenn man nun in 1. z durch $z-\frac{1}{2}i\rho$, ζ durch $\zeta-\frac{1}{2}i\rho$ ersetzt, und No. 2, 6 beachtet, so folgt

3. $\vartheta_2(z)\cdot\vartheta_2(\zeta) = \vartheta_2(z+\zeta,\ 2\rho)\,\vartheta_3(z-\zeta,\ 2\rho) + \vartheta_3(z+\zeta,\ 2\rho)\,\vartheta_2(z-\zeta,\ 2\rho)$.

Werden hier z und ζ durch $\frac{1}{2}\pi - z$ und $\frac{1}{2}\pi - \zeta$ ersetzt, so ergiebt sich noch

4. $\vartheta_1(z)\cdot\vartheta_1(\zeta) = -\,\vartheta_2(z+\zeta,\ 2\rho)\cdot\vartheta_3(z-\zeta,\ 2\rho) + \vartheta_3(z+\zeta,\ 2\rho)\cdot\vartheta_2(z-\zeta,\ 2\rho)$.

Aus diesen Gleichungen erhält man leicht die folgenden

$$5.\quad\begin{aligned}\vartheta\,(z)^2 &= \vartheta_3(0,\ 2\rho)\cdot\vartheta_3(2z,\ 2\rho) - \vartheta_2(0,\ 2\rho)\cdot\vartheta_2(2z,\ 2\rho),\\ \vartheta_1(z)^2 &= \vartheta_2(0,\ 2\rho)\cdot\vartheta_3(2z,\ 2\rho) - \vartheta_3(0,\ 2\rho)\cdot\vartheta_2(2z,\ 2\rho),\\ \vartheta_2(z)^2 &= \vartheta_3(0,\ 2\rho)\cdot\vartheta_2(2z,\ 2\rho) + \vartheta_2(0,\ 2\rho)\cdot\vartheta_3(2z,\ 2\rho),\\ \vartheta_3(z)^2 &= \vartheta_3(0,\ 2\rho)\cdot\vartheta_3(2z,\ 2\rho) + \vartheta_2(0,\ 2\rho)\cdot\vartheta_2(2z,\ 2\rho).\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$6.\quad\begin{aligned}\vartheta\,(z)^2 + \vartheta_3(z)^2 &= 2\vartheta_3(0,\ 2\rho)\,\vartheta_3(2z,\ 2\rho),\\ \vartheta\,(z)^2 - \vartheta_3(z)^2 &= -\,2\vartheta_2(0,\ 2\rho)\,\vartheta_2(2z,\ 2\rho),\\ \vartheta_1(z)^2 + \vartheta_2(z)^2 &= 2\vartheta_2(0,\ 2\rho)\,\vartheta_3(2z,\ 2\rho),\\ \vartheta_1(z)^2 - \vartheta_2(z)^2 &= -\,2\vartheta_3(0,\ 2\rho)\,\vartheta_2(2z,\ 2\rho).\end{aligned}$$

Wenn man aus den beiden letzten Gleichungen $\vartheta_3(2z,\ 2\rho)$ und $\vartheta_2(2z,\ 2\rho)$ entnimmt, und in die erste und letzte Gleichung 5. einsetzt, so erhält man

$$7.\quad \frac{2\vartheta_2(0,\ 2\rho)\cdot\vartheta_3(0,\ 2\rho)}{\vartheta_3(0,\ 2\rho)^2+\vartheta_2(0,\ 2\rho)^2}\cdot\vartheta(z)^2 = \vartheta_1(z)^2 + \frac{\vartheta_3(0,\ 2\rho)^2-\vartheta_2(0,\ 2\rho)^2}{\vartheta_3(0,\ 2\rho)^2+\vartheta_2(0,\ 2\rho)^2}\cdot\vartheta_2(z)^2,$$

$$8.\quad \frac{2\cdot\vartheta_2(0,\ 2\rho)\,\vartheta_3(0,\ 2\rho)}{\vartheta_2(0,\ 2\rho)^2+\vartheta_3(0,\ 2\rho)^2}\cdot\vartheta_3(z)^2 = \frac{\vartheta_3(0,\ 2\rho)^2-\vartheta_2(0,\ 2\rho)^2}{\vartheta_3(0,\ 2\rho)^2+\vartheta_2(0,\ 2\rho)^2}\cdot\vartheta_1(z)^2 + \vartheta_2(z)^2.$$

Setzen wir $e^{-\rho} = \sqrt{q}$, so ist

$$\begin{aligned}\vartheta_2(0,\ 2\rho) &= 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}}\ \ldots,\\ \vartheta_3(0,\ 2\rho) &= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots,\end{aligned}$$

beide Grössen sind daher positiv. Aus der Ungleichung $(a-b)^2 > 0$ folgt $a^2+b^2 > 2ab$, setzt man also

$$\frac{2\vartheta_2(0,\ 2\rho)\,\vartheta_3(0,\ 2\rho)}{\vartheta_2(0,\ 2\rho)^2+\vartheta_3(0,\ 2\rho)^2} = k,$$

so ist k ein positiver echter Bruch; man erhält leicht

$$\frac{\vartheta_3(0,\ 2\rho)^2-\vartheta_2(0,\ 2\rho)^2}{\vartheta_3(0,\ 2\rho)^2+\vartheta_2(0,\ 2\rho)^2} = \sqrt{1-k^2} = k',$$

wobei die Wurzel positiv zu nehmen ist. Durch Einführung dieser Zeichen wird aus 7. und 8.

$$9. \qquad k\cdot\vartheta(z)^2 = \vartheta_1(z)^2 + k'\vartheta_2(z)^2,$$

$$10. \qquad k\cdot\vartheta_3(z)^2 = k'\vartheta_1(z)^2 + \vartheta_2(z)^2.$$

Wir setzen hierin $z = 0$ und beachten, dass $\vartheta_1(0) = 0$; dadurch erhalten wir für k und k' die einfacheren Ausdrücke

$$11. \qquad k = \left[\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^2, \quad k' = \left[\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^2.$$

4. In No. 3, 4 ersetzen wir z durch $z + \frac{1}{2}t$, ζ durch $\frac{1}{2}t$, ρ durch $\frac{1}{2}\rho$; dadurch entsteht

$$\vartheta_3(z+t)\cdot\vartheta_2(z) - \vartheta_2(z+t)\cdot\vartheta_3(z) = \vartheta_1(z+\tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{2}\rho)\cdot\vartheta_1(\tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{2}\rho).$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{t}\left[\frac{\vartheta_2(z+t)}{\vartheta_3(z+t)} - \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}\right] = -\frac{\vartheta_1(z+\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}\rho)}{\vartheta_3(z+t)\,\vartheta_3(z)}\cdot\frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}\rho)}{t}.$$

Aus dieser Gleichung gelangen wir zur Kenntniss des Differentialquotienten von $\vartheta_2(z):\vartheta_3(z)$, indem wir zur Grenze für ein verschwindendes t übergehen.

Setzen wir

$$\lim_{t=0}\frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}\rho)}{t} = \alpha,$$

so ergiebt sich

$$1. \qquad \frac{d\,\dfrac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}}{dz} = -\alpha\cdot\frac{\vartheta_1(z, \frac{1}{2}\rho)}{\vartheta_3(z)^2}.$$

Um rechts die Function $\vartheta_1(z, \frac{1}{2}\rho)$ zu beseitigen, beachten wir, dass aus No. 2, 3 folgt, wenn wir z durch $\frac{1}{2}\pi - z$, ζ durch 0 und ρ durch $\frac{1}{2}\rho$ ersetzen,

$$\vartheta_1(z, \tfrac{1}{2}\rho)\,\vartheta_2(0, \tfrac{1}{2}\rho) = 2\vartheta_1(z)\,\vartheta(z).$$

Setzen wir

$$2. \qquad \frac{2\alpha}{\vartheta_2(0, \frac{1}{2}\rho)} = \beta,$$

so erhalten wir

$$3. \qquad \frac{d\,\dfrac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}}{dz} = -\beta\cdot\frac{\vartheta_1(z)\,\vartheta(z)}{\vartheta_3(z)^2}.$$

Wir substituiren hier $\frac{1}{2}\pi - z$ für z und erhalten so

$$4. \qquad \frac{d\,\dfrac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)}}{dz} = \beta\cdot\frac{\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z)}{\vartheta(z)^2}.$$

5. Die soeben gewonnenen Differentialformeln setzen uns in den Stand, die Quotienten zweier Thetafunctionen mit bestimmten Integralen in Beziehung zu bringen. Wir definiren drei neue Functionen $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ durch die Gleichungen

$$f(z) = \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)}, \quad g(z) = \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta(z)}, \quad h(z) = \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta(z)}.$$

Zufolge No. 3, 10 bestehen zwischen diesen Functionen die beiden Gleichungen

$$1. \qquad f(z)^2 + k'\cdot g(z)^2 = k,$$

$$2. \qquad k'f(z)^2 + g(z)^2 = k\cdot h(z)^2.$$

Ferner ist

$$3. \qquad k = \frac{g(0)^2}{h(0)^2}, \quad k' = \frac{1}{f(0)^2}.$$

Die Gleichungen 1. und 2. ergeben

$$4. \qquad g(z)^2 = \frac{k}{k'}\left[1 - \frac{1}{k}\cdot f(z)^2\right],$$

$$5. \qquad h(z)^2 = \frac{1}{k'}\left[1 - k\cdot f(z)^2\right].$$

Die Gleichung No. 4, 4 ergiebt nun

6. $$\frac{df(z)}{dz} = \beta \cdot \frac{\sqrt{k}}{k'} \cdot \sqrt{\left[1 - \frac{1}{k}f(z)^2\right][1 - kf(z)^2]},$$

also ist

$$z = \frac{k'}{\beta\sqrt{k}} \cdot \int \frac{df(z)}{\sqrt{\left[1 - \frac{1}{k}f(z)^2\right][1 - kf(z)^2]}}.$$

Wir ersetzen hier, um mit früheren Bezeichnungen in bessere Uebereinstimmung zu kommen, $\frac{1}{\sqrt{k}}f(z)$ durch ζ und z durch w; alsdann ist

$$w = \frac{k'}{\beta}\int \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}} + Const.$$

Da $\vartheta_1(z)$ verschwindet, wenn $z = 0$ ist, also $\zeta = 0$ und $w = 0$ zusammen gehören, so folgt

7. $$\frac{\beta}{k'} w = \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}.$$

Die Constante $\beta : k'$ lässt sich durch das geradlinige Integral

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}} = K$$

ausdrücken; denn dem Werthe $\zeta = 1$ entspricht $f(z) = \sqrt{k}$, also bestimmt sich das zugehörige z aus

8. $$\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)} = \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}.$$

Dieser Gleichung wird durch $z = \frac{1}{2}\pi$ genügt, wie man sofort erkennt, wenn man in No. 2, 2 z durch Null ersetzt.

Der Differentialquotient $d\zeta : dz$ ist für ein hinlänglich kleines z positiv; dasselbe gilt für $\vartheta_2(z)\vartheta(_3) : \vartheta(z)^2$ für $z < \frac{1}{2}\pi$; folglich ist $\beta > 0$ (No. 4, 4). Damit $\zeta = f(z)$ von 0 bis 1 wächst, hat man daher für z von $z = 0$ an zunehmende Werthe zu setzen, bis man an einen Werth von z kommt, der $\zeta = 1$ entspricht. Man hat daher von den unendlich vielen Wurzeln der Gleichung 8. (vergl. No. 2, 7) die Wurzel $z = \frac{1}{2}\pi$ zu nehmen. Folglich ist

9. $$\frac{\beta}{k'} \cdot \frac{\pi}{2} = K.$$

Wird 7. durch 9. dividirt, so entsteht schliesslich

10. $$\frac{2K}{\pi} w = \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}.$$

Dem Werthe $\zeta = 1 : k$ entspricht

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \text{oder} \quad \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)} = \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen No. 2, 4 folgt für $z = 0$

$$\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_0(0)} = \frac{\vartheta_2(\frac{1}{2}i\rho)}{\vartheta_3(\frac{1}{2}i\rho)},$$

und aus No. 2, 2 für $z = \frac{1}{2}i\rho$ folgt weiter

$$\frac{\vartheta_2(\frac{1}{2}i\rho)}{\vartheta_3(\frac{1}{2}i\rho)} = \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\rho)}{\vartheta(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\rho)}.$$

Daher ist z aus der Gleichung zu bestimmen

$$\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)} = \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\rho)}{\vartheta(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\rho)}.$$

Dieser Gleichung genügen die Werthe

$$z = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}i\rho + 2n\pi + m \cdot i\rho;$$

folglich ist

$$11. \qquad \frac{2K}{\pi}(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}i\rho + 2n\pi + m \cdot i\rho) = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}.$$

Nimmt man rechts das geradlinige Integral, so hat man bekanntlich

$$\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = K + iK'.$$

Man hat daher $n = 0$, und, wenn ρ positiv vorausgesetzt wird, $m = 1$ zu nehmen. Hieraus folgt

$$\frac{2K}{\pi}(\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}i\rho) = K + iK',$$

also ist

$$\rho = \pi \cdot \frac{K'}{K}.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen No. 2, 7 folgt, dass

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{k}} f(w) = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta(w)}$$

sich nicht ändert, wenn w um $2m\pi + m_1 \cdot i\rho$ zunimmt, wobei m und m_1 beliebige ganze Zahlen sind; in Rücksicht auf den soeben gefundenen Werth von ρ wächst dabei

$$\frac{2K}{\pi} \cdot w \quad \text{um} \quad m \cdot 4K + m_1 \cdot 2iK'.$$

In gleicher Weise vieldeutig ist bei gegebenem ζ bekanntlich die rechte Seite der Gleichung 10.; diese Gleichung ist daher umfassend gültig, sie enthält links und rechts Grössen, die dieselben beiden Periodicitätsmoduln haben. Aus 10. folgt nun

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot f(w) = \sin am \frac{2K}{\pi} w,$$

also ist

$$\sin am \frac{2K}{\pi} w = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta(w)}.$$

Ersetzt man hier w durch $\pi w : 2K$, so ergiebt sich

$$12. \qquad \sin am\, w = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}.$$

Aus den Gleichungen 4. und 5. folgt

$$1 - \sin^2 am \frac{2Kw}{\pi} = \frac{k'}{k} g(w)^2,$$

$$1 - k^2 \sin^2 am \frac{2Kw}{\pi} = k' h(w)^2,$$

also, wenn man auch hier w durch $\pi w : 2K$ ersetzt

$$13. \qquad \cos am\, w = \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi w}{2K}\right)},$$

14. $$\Delta\, am\, w = \sqrt{k'} \cdot \frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}.$$

Setzt man die Reihen selbst ein und bezeichnet wieder

$$e^{-\rho} = e^{-\frac{K'}{K}\pi} \text{ mit } q,$$

so erhält man

15. $$sin\, am\, w =$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{2\sqrt[4]{q} \cdot sin \frac{\pi w}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9}\, sin \frac{3\pi w}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}}\, sin \frac{5\pi w}{2K} - \ldots}{1 - 2q\, cos \frac{\pi w}{K} + 2q^4\, cos \frac{2\pi w}{K} - 2q^9\, cos \frac{3\pi w}{K} + \ldots},$$

16. $$cos\, am\, w =$$

$$\sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{2\sqrt[4]{q}\, cos \frac{\pi w}{2K} + 2\sqrt[4]{q^9}\, cos \frac{3\pi w}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}} \cdot cos \frac{5\pi w}{2K} + \ldots}{1 - 2q\, cos \frac{\pi w}{K} + 2q^4\, cos \frac{2\pi w}{K} - 2q^9\, cos \frac{3\pi w}{K} + \ldots},$$

17. $$\Delta\, am\, w =$$

$$\sqrt{k'} \cdot \frac{1 + 2q\, cos \frac{\pi w}{2K} + 2q^4\, cos \frac{2\pi w}{K} + 2q^9\, cos \frac{6\pi w}{K} + \ldots}{1 - 2q\, cos \frac{\pi w}{K} + 2q^4\, cos \frac{2\pi w}{K} - 2q^9\, cos \frac{6\pi w}{K} + \ldots}.$$

6. Nach der Betrachtung von algebraischen Integralen, welche eine Irrationalität zweiten Grades enthalten und einfach periodische Functionen zu Umkehrungen haben, wendeten wir uns zu algebraischen Integralen mit Irrationalitäten dritten oder vierten Grades, erkannten zwei verschiedene Periodicitätsmoduln und wurden durch die Umkehrung zunächst der einfachsten Integrale dieser Art auf die doppelt periodischen Functionen geführt.

Man kann auch den umgekehrten Weg einschlagen. Von der Existenz einfach periodischer Functionen ausgehend, kann man fragen, ob es auch doppelt periodische Functionen giebt. Man wird versuchen, solche Functionen durch Reihen darzustellen, deren Glieder selbst einfach periodisch sind.

Hierdurch wird man auf die Betrachtungen geführt, die wir in No. 1 angestellt haben, gelangt so zur Aufstellung der Thetafunctionen, bildet die doppelt periodischen Functionen $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ und findet dann, dass diese Thetaquotienten Umkehrungen bestimmter Integrale sind. Auf diesem Wege gelangt man sehr rasch und ohne schwierige Betrachtungen zur Kenntniss einer Fülle von Beziehungen über die doppelt periodischen Functionen; die Hauptschwierigkeit, die in der Untersuchung der Integrale complexer irrationaler Functionen liegt, erscheint erst am Schlusse. Dieser Gedankengang war vorzuziehen, so lange die Theorie der Integrale complexer Functionen noch nicht den gegenwärtigen Grad von Evidenz erreicht hatte.

7. Wir wollen nun zeigen, wie das **Additionstheorem elliptischer Functionen mit Hülfe der Thetafunctionen** gefunden wird*).

Aus den Gleichungen No. 3, 1. bis 4. erhalten wir, indem wir z, ζ und ρ durch $\frac{1}{2}(z + \zeta)$, $\frac{1}{2}(z - \zeta)$ und $\frac{1}{2}\rho$ ersetzen,

*) SCHELLBACH, Die Lehre von den ell. Integralen und Thetafunctionen, § 24, u. f.

1. $\vartheta[\tfrac{1}{2}(z+\zeta),\ \tfrac{1}{2}\rho]\cdot\vartheta[\tfrac{1}{2}(z-\zeta),\ \tfrac{1}{2}\rho]=\vartheta_3(z)\,\vartheta_3(\zeta)-\vartheta_2(z)\,\vartheta_2(\zeta),$

2. $\vartheta_1[\tfrac{1}{2}(z+\zeta),\ \tfrac{1}{2}\rho]\cdot\vartheta_1[\tfrac{1}{2}(z-\zeta),\ \tfrac{1}{2}\rho]=\vartheta_3(z)\,\vartheta_2(\zeta)-\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(\zeta),$

3. $\vartheta_2[\tfrac{1}{2}(z+\zeta),\ \tfrac{1}{2}\rho]\cdot\vartheta_2[\tfrac{1}{2}(z-\zeta),\ \tfrac{1}{2}\rho]=\vartheta_3(z)\,\vartheta_2(\zeta)+\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(\zeta),$

4. $\vartheta_3[\tfrac{1}{2}(z+\zeta),\ \tfrac{1}{2}\rho]\cdot\vartheta_3[\tfrac{1}{2}(z-\zeta),\ \tfrac{1}{2}\rho]=\vartheta_3(z)\,\vartheta_3(\zeta)+\vartheta_2(z)\,\vartheta_2(\zeta).$

Die Substitution $\tfrac{1}{2}\pi-z$ und $\tfrac{1}{2}\pi-\zeta$ für z und ζ liefert hieraus

5. $\vartheta_3[\tfrac{1}{2}(z+\zeta),\ \tfrac{1}{2}\rho]\cdot\vartheta[\tfrac{1}{2}(z-\zeta),\ \tfrac{1}{2}\rho]=\vartheta(z)\,\vartheta(\zeta)-\vartheta_1(z)\,\vartheta_1(\zeta),$

6. $\vartheta_2[\tfrac{1}{2}(z+\zeta),\ \tfrac{1}{2}\rho]\cdot\vartheta_1[\tfrac{1}{2}(z-\zeta),\ \tfrac{1}{2}\rho]=\vartheta_1(z)\,\vartheta(\zeta)-\vartheta(z)\,\vartheta_1(\zeta),$

7. $\vartheta_1[\tfrac{1}{2}(z+\zeta),\ \tfrac{1}{2}\rho]\cdot\vartheta_2[\tfrac{1}{2}(z-\zeta),\ \tfrac{1}{2}\rho]=\vartheta_1(z)\,\vartheta(\zeta)+\vartheta(z)\,\vartheta_1(\zeta),$

8. $\vartheta[\tfrac{1}{2}(z+\zeta),\ \tfrac{1}{2}\rho]\cdot\vartheta_3[\tfrac{1}{2}(z-\zeta),\ \tfrac{1}{2}\rho]=\vartheta(z)\,\vartheta(\zeta)+\vartheta_1(z)\,\vartheta_1(\zeta).$

Ferner erhält man leicht durch Addition und Subtraction aus den Gleichungen 5. und 8., 4. und 1., indem man nachher z, ζ und ρ durch $z+\zeta$, $z-\zeta$ und 2ρ ersetzt

9. $2\vartheta(z+\zeta,\ 2\rho)\cdot\vartheta(z-\zeta,\ 2\rho)=\vartheta(z)\,\vartheta_3(\zeta)+\vartheta_3(z)\,\vartheta(\zeta),$

10. $2\vartheta_1(z+\zeta,\ 2\rho)\cdot\vartheta_1(z-\zeta,\ 2\rho)=\vartheta(z)\,\vartheta_3(\zeta)-\vartheta_3(z)\,\vartheta(\zeta),$

11. $2\vartheta_2(z+\zeta,\ 2\rho)\cdot\vartheta_2(z-\zeta,\ 2\rho)=\vartheta_3(z)\,\vartheta_3(\zeta)-\vartheta(z)\,\vartheta(\zeta),$

12. $2\vartheta_3(z+\zeta,\ 2\rho)\cdot\vartheta_3(z-\zeta,\ 2\rho)=\vartheta_3(z)\,\vartheta_3(\zeta)+\vartheta(z)\,\vartheta(\zeta).$

Durch Specialisirung leiten wir hieraus einige brauchbare Formeln ab. Setzen wir in 9. $\zeta=0$, so entsteht

13. $$\vartheta(z)\,\vartheta_3(z)=\vartheta(0,\,2\rho)\,\vartheta(2z,\,2\rho),$$

Aus 6. erhalten wir, wenn $\zeta=0$, $2z$ für z, 2ρ für ρ gesetzt wird,

14. $$\vartheta_1(z)\,\vartheta_2(z)=\vartheta(0,\,2\rho)\,\vartheta_1(2z,\,2\rho).$$

Setzen wir in 6. und 3. $\zeta=z$, so folgt

15. $$\vartheta(z)\,\vartheta_1(z)=\tfrac{1}{2}\vartheta_2(0,\,\tfrac{1}{2}\rho)\,\vartheta_1(z,\,\tfrac{1}{2}\rho),$$

16. $$\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z)=\tfrac{1}{2}\vartheta_2(0,\,\tfrac{1}{2}\rho)\,\vartheta_2(z,\,\tfrac{1}{2}\rho),$$

von denen wir 15. bereits in No. 4. abgeleitet und benutzt haben. Aus den Gleichungen 5. und 8. folgt durch Multiplication

$$\vartheta[\tfrac{1}{2}(z+\zeta),\tfrac{1}{2}\rho]\cdot\vartheta[\tfrac{1}{2}(z-\zeta),\tfrac{1}{2}\rho]\cdot\vartheta_3[\tfrac{1}{2}(z+\zeta),\tfrac{1}{2}\rho)\cdot\vartheta_3[\tfrac{1}{2}(z-\zeta),\tfrac{1}{2}\rho]$$
$$=\vartheta(z)^2\,\vartheta(\zeta)^2-\vartheta_1(z)^2\,\vartheta_1(\zeta)^2.$$

Ersetzt man in 13. z durch $\tfrac{1}{2}(z+\zeta)$ und dann durch $\tfrac{1}{2}(z-\zeta)$, sowie ρ durch $\tfrac{1}{2}\rho$ und führt die Resultate in die soeben gewonnene Gleichung ein, so erhält man

17. $$\vartheta(0)^2\cdot\frac{\vartheta(z+\zeta)\cdot\vartheta(z-\zeta)}{\vartheta(z)^2\,\vartheta(\zeta)^2}=1-f(z)^2\cdot f(\zeta)^2.$$

In 6. und 7. setzen wir $z+\zeta$ und $z-\zeta$ für z und ζ, und erhalten

18. $\vartheta_1(z,\,\tfrac{1}{2}\rho)\,\vartheta_2(\zeta,\,\tfrac{1}{2}\rho)=\vartheta_1(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)+\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_1(z-\zeta),$

19. $\vartheta_2(z,\,\tfrac{1}{2}\rho)\,\vartheta_1(\zeta,\,\tfrac{1}{2}\rho)=\vartheta_1(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)-\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_1(z-\zeta).$

Aus 15. und 16. ziehen wir

$$\tfrac{1}{4}\vartheta_1(0,\,\tfrac{1}{2}\rho)^2\cdot\vartheta_1(z,\,\tfrac{1}{2}\rho)\,\vartheta_2(\zeta,\,\tfrac{1}{2}\rho)=\vartheta(z)\,\vartheta_1(z)\,\vartheta_2(\zeta)\,\vartheta_3(\zeta).$$

Da nun aus 16. folgt, wenn man z durch 0 ersetzt

$$\tfrac{1}{4}\vartheta_2(0,\,\tfrac{1}{2}\rho)^2=\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0),$$

so geht 18. über in

20. $2\vartheta(z)\,\vartheta_1(z)\,\vartheta_2(\zeta)\,\vartheta_3(\zeta)=\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,[\vartheta_1(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)+\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_1(z-\zeta)].$

In gleicher Weise ergiebt sich aus 19.

21. $2\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z)\,\vartheta(\zeta)\,\vartheta_1(\zeta)=\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,[\vartheta_1(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)-\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_1(z-\zeta)].$

Wir erhalten aus 20. zunächst

$$\vartheta(0)^2\,g(0)\,h(0)\,\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)\,[f(z+\zeta)+f(z-\zeta)]$$
$$=2\vartheta(z)^2\cdot\vartheta(\zeta)^2\cdot f(z)\,g(\zeta)\,h(\zeta).$$

Bezeichnen wir die rechte Seite von 17. durch $2T$, so folgt

22. $$g(0)\,h(0)\cdot T\cdot[f(z+\zeta)+f(z-\zeta)]=f(z)\,g(\zeta)\,h(\zeta).$$

Ebenso ergiebt sich aus 21.

23. $$g(0)\,h(0)\,T\,[f(z+\zeta)-f(z-\zeta)]=f(\zeta)\,g(z)\,h(z).$$

Hieraus folgt schliesslich durch Addition und Subtraction, und indem wir für T wieder seinen Werth substituiren

24. $$f(z\pm\zeta)=\frac{1}{g(0)\,h(0)}\cdot\frac{f(z)\,g(\zeta)\,h(\zeta)\pm f(\zeta)\,g(z)\,h(z)}{1-f(z)^2\,g(z)^2}.$$

Beachten wir, dass

$$g(0)=\sqrt{\frac{k}{k'}},\quad h(0)=\frac{1}{\sqrt{k'}},$$

und substituiren

$$f(z)=\sqrt{k}\cdot sin\,am\,\frac{2Kz}{\pi},\quad g(z)=\sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot cos\,am\,\frac{2Kz}{\pi},$$

$$h(z)=\frac{1}{\sqrt{k'}}\,\Delta\,am\,\frac{2Kz}{\pi},$$

so erkennen wir, dass 24. das Additionstheorem für den Amplitudensinus enthält.

8. Die Additionstheoreme für $cos\,am w$ und $\Delta\,am w$ ergeben sich in ähnlicher Weise.

Ersetzen wir in No. 7., 9. und 10. z und ζ durch $z+\zeta$ und $z-\zeta$, so ergiebt sich

$$2\,\vartheta\,(2z,\,2\rho)\cdot\vartheta\;(2\zeta,\,2\rho)=\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_3(z-\zeta)+\vartheta_3(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta),$$
$$2\vartheta_1(2z,\,2\rho)\cdot\vartheta_1(2\zeta,\,2\rho)=\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_3(z-\zeta)-\vartheta_3(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta).$$

Aus No. 7. 13. folgt

$$\vartheta(0,\,2\rho)^2\cdot\vartheta(2z,\,2\rho)\,\vartheta(2\zeta,\,2\rho)=\vartheta(z)\,\vartheta_3(z)\,\vartheta(\zeta)\,\vartheta_3(\zeta).$$

Ferner folgt für $z=0$

$$\vartheta(0,\,2\rho)^2=\vartheta(0)\,\vartheta_3(0).$$

Dies ergiebt

1. $$2\vartheta(z)\,\vartheta_3(z)\,\vartheta(\zeta)\,\vartheta_3(\zeta)=\vartheta(0)\,\vartheta_3(0)\,[\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_3(z-\zeta)+\vartheta_3(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)].$$

Aus 14. ergiebt sich

$$\vartheta(0,\,2\rho)^2\,\vartheta_1(2z,\,2\rho)\,\vartheta_1(2\zeta,\,2\rho)=\vartheta_1(z)\,\vartheta_2(z)\,\vartheta_1(\zeta)\,\vartheta_2(\zeta),$$

und hieraus folgt weiter

2. $$2\vartheta_1(z)\,\vartheta_2(z)\,\vartheta_1(\zeta)\,\vartheta_2(\zeta)=\vartheta(0)\,\vartheta_3(0)\,[\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_3(z-\zeta)-\vartheta_3(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)].$$

Aus 1. und 2. erhalten wir

$$2\vartheta(z)^2\,\vartheta(\zeta)^2\cdot h(z)\,h(\zeta)$$
$$=\vartheta^2(0)\,h(0)\cdot\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)\,[h(z-\zeta)+h(z+\zeta)]$$
$$2\vartheta(z)^2\,\vartheta(\zeta)^2 f(z)\,g(z)\,f(\zeta)\,h(\zeta)$$
$$=\vartheta(0)^2\,h(0)\cdot\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)\,[h(z-\zeta)-h(z+\zeta)].$$

In Rücksicht auf No. 7, 17. folgt hieraus

$$h(0)T[h(z-\zeta)+h(z+\zeta)]=h(z)\,h(\zeta),$$
$$h(0)T[h(z-\zeta)-h(z+\zeta)]=f(z)\,g(z)\,f(\zeta)\,g(\zeta).$$

Hieraus ergiebt sich schliesslich

$$h(0)h(z\pm\zeta)=\frac{h(z)\,h(\zeta)\mp f(z)\,g(z)\,f(\zeta)\,h(\zeta)}{1-f(z)^2\,f(\zeta)^2};$$

dies ist das Additionstheorem für die Function $\Delta\,am w$.

Aus No. 7, 9. und 11. folgt durch Multiplication

$$4\vartheta(z+\zeta,\,2\rho)\,\vartheta_2(z+\zeta,\,2\rho)\,\vartheta(z-\zeta,\,2\rho)\,\vartheta_2(z-\zeta,\,2\rho)=$$
$$\vartheta(z)\,\vartheta_3(z)\,[\vartheta_3(\zeta)^2-\vartheta(\zeta)^2]+\vartheta(\zeta)\,\vartheta_3(\zeta)\,[\vartheta_3(z)^2-\vartheta(z)^2].$$

Setzen wir in No. 7, 11. $z=\zeta$, so entsteht

$$2\vartheta_2(2z,\,2\rho)\,\vartheta_2(0,\,2\rho)=\vartheta_3(z)^2-\vartheta_3(z)^2.$$

Benutzen wir dies und No. 7, 13., so erhalten wir, wenn wir schliesslich 2ρ, $2z$, 2ζ mit ρ, $z+\zeta$, $z-\zeta$ vertauschen,

$$2\vartheta(z)\,\vartheta_2(z)\,\vartheta(\zeta)\,\vartheta_2(\zeta) = \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,[\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_2(z-\zeta) + \vartheta_2(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)]\,.$$

Auf gleiche Weise gelangen wir von No. 7, 10. und 12. zu

$$2\vartheta_1(z)\,\vartheta_3(z)\,\vartheta_1(\zeta)\,\vartheta_3(\zeta) = \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,[\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_2(z-\zeta) - \vartheta_2(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)]\,.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir in Rücksicht auf No. 7, 17

$$g(0)\,T[g(z-\zeta)+g(z+\zeta)] = g(z)\,g(\zeta)\,,$$
$$g(0)\,T[g(z-\zeta)-g(z+\zeta)] = f(z)\,h(z)\,f(\zeta)\,h(\zeta)\,.$$

Hieraus folgt schliesslich das Additionstheorem für die Function *cos amw* in der Form

$$g(0)\,g(z\pm\zeta) = \frac{g(z)\,g(\zeta)\mp f(z)\,h(z)\,f(\zeta)\,h(\zeta)}{1-f(z)^2 f(\zeta)^2}\,.$$

§ 20. Entwicklung der elliptischen Functionen in unendliche Produkte.

1. Eine Function $\varphi(z)$ sei eindeutig und stetig für alle Punkte im Innern einer Curve c mit Ausschluss der Punkte $a_1, a_2, \ldots a_k$, in welcher φ unendlich sei.

Wir schliessen die Punkte $a_1, \ldots a_k$ durch verschwindend kleine Kreise aus; alsdann bilden c und diese Kreise zusammen die vollständige Begrenzung einer Fläche, innerhalb deren φ eindeutig und endlich ist. Daher ist für jeden Punkt z im Innern dieser Fläche

$$1 \qquad 2\pi i\cdot\varphi(z) = \int\limits_{(c)}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt - \int\limits_{(a_1)}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt - \ldots - \int\limits_{(a_k)}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt\,,$$

wobei durch

$$\int\limits_{(c)},\ \int\limits_{(a_1)},\ \ldots\ \int\limits_{(a_k)}$$

Integrale über c, bez über die Kreise um $a_1, a_2, \ldots a_k$ angedeutet sind, alle in positivem Sinne rücksichtlich der von ihnen umschlossenen Flächen.

Es sei $f(z)$ eine Function, die für alle Punkte innerhalb einer Curve c eindeutig und endlich und von Null verschieden ist, mit Ausnahme der Punkte

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_k,$$

in denen sie Null, und der Punkte

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \beta_l,$$

in denen sie unendlich gross sei. Alsdann wird $f'(z):f(z) = dlf(z):dz$ unendlich gross in den Punkten α und β; ersetzt man daher in 1. $\varphi(z)$ durch $f'(z):f(z)$, so hat man

$$2. \qquad 2\pi i\frac{f'(z)}{f(z)} = \int\limits_{(c)}\frac{f'(t)}{f(t)}\cdot\frac{dt}{t-z} - \sum_1^k{}_m\int\limits_{(\alpha_m)}\frac{f'(t)}{f(t)}\cdot\frac{dt}{t-z} - \sum_1^l{}_n\int\limits_{(\beta_n)}\frac{f'(t)}{f(t)}\cdot\frac{dt}{t-z}\,.$$

Bekanntlich ist (§ 13, 13)

$$\int\limits_{(\alpha)}\frac{f'(t)}{f(t)}\cdot\frac{dt}{t-z} = -\frac{1}{z-\alpha}\int\limits_{(\alpha)}\frac{f'(t)}{f(t)}\,dt - \frac{1}{(z-\alpha)^2}\int\limits_{(\alpha)}\frac{f'(t)}{f(t)}\cdot(t-\alpha)\,dt$$
$$-\frac{1}{(z-\alpha)^3}\int\limits_{(\alpha)}\frac{f'(t)}{f(t)}(t-\alpha)^2\,dt - \ldots\,.$$

Wir wollen nun die Voraussetzung machen, dass $(z-\alpha_k):f(z)$ für $z=\alpha_k$ endlich und von Null verschieden sei; da

$$\frac{f(z)}{z-\alpha} = \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha},$$

so ist

$$\lim_{(z=\alpha)} \frac{f(z)}{z-\alpha} = f'(\alpha).$$

Nun ist

$$\int\limits_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \int\limits_{(\alpha)} \frac{t-\alpha}{f(t)} \cdot \frac{f'(t)}{t-\alpha} \cdot dt;$$

gehen wir zur Grenze für einen verschwindend kleinen Kreis über, so wird für den Perimeter desselben $(t-\alpha):f(t)$ constant gleich $1:f'(\alpha)$; ferner ist bekanntlich

$$\int\limits_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{t-\alpha}\,dt = 2\pi i f'(\alpha),$$

folglich ist

3. $$\int\limits_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = 2\pi i.$$

In dem Integrale

$$\int\limits_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)}(t-\alpha)^p\,dt$$

substituiren wir $t = \alpha + \rho e^{i\varphi}$; hierdurch entsteht

$$\rho^p \int\limits_{(\alpha)} e^{ip\varphi} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt.$$

Das hier vorkommende Integral enthält die Elemente des Integrals 3. mit einer endlichen Grösse multiplicirt, ist also mit 3. zugleich endlich; lässt man nun ρ verschwinden, so folgt, dass

4. $$\int\limits_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)}(t-\alpha)^p\,dt = 0,$$

für jedes positive p.

Ferner ist

5. $$\int\limits_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)}\frac{1}{t-z}\,dt = -\frac{1}{z-\beta}\int\limits_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt - \frac{1}{(z-\beta)^2}\cdot\int\limits_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)}(t-\beta)\,dt$$
$$- \frac{1}{(z-\beta)^3}\int\limits_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)}(t-\beta)^2\,dt - \ldots$$

Wir machen nun die zweite Voraussetzung, dass $f(z)\cdot(z-\beta_k)$ für $z=\beta_k$ bei jedem Werthe von k eine endliche und von Null verschiedene Grösse sei. Substituiren wir

$$f(z) = \frac{1}{g(z)},$$

so ist also $(z-\beta_k):g(z)$ für $z=\beta_k$ endlich und von Null verschieden; da nun

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{g'(z)}{g(z)},$$

so ist

6. $$\int\limits_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = -\int\limits_{(\beta)} \frac{g'(t)}{g(t)}\cdot dt = -2\pi i,$$

und

7. $$\int\limits_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)} (t-\beta)^p \, dt = -\int\limits_{(\beta)} \frac{g'(t)}{g(t)} (t-\beta)^p \, dt = 0\,, \qquad p > 0\,.$$

Aus 2. bis 7. folgt schliesslich

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(c)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{z-\alpha_1} + \frac{1}{z-\alpha_2} + \,.\,.\, + \frac{1}{z-\alpha_k}$$

$$- \frac{1}{z-\beta_1} - \frac{1}{z-\beta_2} - \,.\,.\, - \frac{1}{z-\beta_l}\,.$$

Durch Integration folgt hieraus

$$lf(z) = \int U dz + lC \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\,.\,.\,(z-\alpha_k)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\,.\,.\,(z-\beta_l)}\,,$$

oder

8. $$f(z) = C \cdot e^{\int U dz} \cdot \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\,.\,.\,.\,(z-\alpha_k)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\,.\,.\,.\,(z-\beta_l)}\,,$$

wobei zur Abkürzung

$$U = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(c)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z}$$

gesetzt worden ist.

Wenn nun die Anzahl der Punkte α und β unendlich gross ist und keine endliche Curve alle diese Punkte einschliesst, so kann man die Curve c nach einem bestimmten, willkürlich gewählten Gesetze unendlich erweitern; von diesem Gesetze wird dann im Allgemeinen der Grenzwerth abhängen, gegen den das Integral $\int U dz$ convergirt; gleichzeitig hängt von diesem Gesetze auch die Anordnung ab, nach welcher neue Faktorengruppen in den Zähler und Nenner des Produktes 8. eintreten. Wir erkennen so die Möglichkeit, dass je nach der Wahl dieses Gesetzes verschiedene Entwicklungen derselben Function in Form eines unendlichen Produktes erhalten werden können, indem dabei die Art und Weise, nach welcher die Anzahl der Faktoren des Nenners zugleich mit denen des Zählers unendlich wächst, verschieden ist.

Die Constante C kann aus Formel 8. eliminirt werden mit Hülfe des Werthes, den die Function $f(z)$ für irgend einen bestimmten Werth der Variabeln $z = z_0$ annimmt. Man erhält

9. $$f(z) = f(z_0) \cdot \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\,.\,.\,(z-\alpha_k)}{(z_0-\alpha_1)(z_0-\alpha_2)\,.\,.\,(z_0-\alpha_k)} \cdot \frac{(z_0-\beta_1)(z_0-\beta_2)\,.\,.\,(z_0-\beta_l)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\,.\,.\,(z-\beta_l)} \cdot e^{\int_{z_0}^{z} U dz}\,.$$

2. Wir wenden diese Entwicklung zunächst auf die Function $f(z) = \sin z$ an. Der Sinus von z wird nur für ein unendlich grosses imaginäres z unendlich, und verschwindet für

$$z = m\pi\,,$$

wobei m alle realen ganzen Zahlen zu durchlaufen hat.

Wir wählen zur Curve c ein Rechteck, dessen Länge der realen Achse parallel ist, und das symmetrisch zu den Achsen liegt; die beiden zur realen Achse normalen Seiten legen wir durch Punkte, in denen $\sin z$ nicht verschwindet. Die Seiten des Rechtecks nehmen wir unendlich fern an.

Für das Integral U haben wir

$$2\pi i \cdot U = \int\limits_{(c)} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \frac{dt}{t-z}\,.$$

Für alle Punkte auf dem Perimeter des Rechtecks ist t unendlich gross; daher kann in dem Integrale

$$t - z = t\left(1 - \frac{z}{t}\right)$$

durch t ersetzt werden. In je zwei Punkten des Perimeters, die auf einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden liegen, haben t, $sin t$, dt entgegengesetzt gleiche Werthe, $cos t$ denselben Werth, mithin

$$\frac{cos t}{sin t} \cdot \frac{dt}{t}$$

entgegengesetzt gleiche Werthe; folglich zerstören sich je zwei zu Gegenpunkten gehörige Elemente des Integrales U und es ist somit

$$U = 0.$$

Wir erhalten daher, indem wir die zu entgegengesetzten m gehörigen Faktoren vereinigen

$$\frac{sin z}{sin z_0} = \frac{z}{z_0} \cdot \frac{(z^2 - \pi^2)(z^2 - 4\pi^2)(z^2 - 9\pi^2)\ldots}{(z_0^2 - \pi^2)(z_0^2 - 4\pi^2)(z_0^2 - 9\pi^2)\ldots}.$$

Setzen wir $z_0 = 0$ und machen von dem Grenzwerthe Gebrauch

$$\left(\frac{sin z}{z}\right)_{z=0} = 1,$$

so erhalten wir

1. $$sin z = z \cdot \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

gültig für jedes endliche z. Diese Gleichung können wir durch folgende ersetzen:

2. $$\frac{sin \pi z}{\pi z} = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\mu^2}\right),$$

wobei das Zeichen $\prod_1^\infty$ bedeutet, dass alle Faktoren der Form

$$1 - \frac{z^2}{\mu^2}$$

für $\mu = 1$ bis $\mu = \infty$ zu multipliciren sind.

Wird unter

$$\prod_{-m}^{m} f(m)$$

das Produkt aller Faktoren $f(m)\, f(-m)$ für alle Werthe $m = 1$ bis $m = \infty$ verstanden, so ist

$$\prod_{-m}^{m}\left(1 - \frac{z}{m+\alpha}\right) = \prod_{-m}^{m}\frac{m + \alpha - z}{m + \alpha} = \prod_{-m}^{m}\frac{1 + \dfrac{\alpha - z}{m}}{1 + \dfrac{\alpha}{m}}.$$

Also folgt

3. $$\prod_{-m}^{m}\left(1 - \frac{z}{m+\alpha}\right) = \frac{sin \pi(\alpha - z)}{sin \alpha\pi}.$$

3. Die Function $sin\, am\, z$ wird Null für

$$z = 2m \cdot K + 2n \cdot K'i,$$

und wird unendlich gross für

$$z = 2mK + (2n + 1) \cdot K'i,$$

daher ist die Function

$$\sin am \frac{2K}{\pi} z \begin{cases} = 0, & \text{wenn } z = m\pi + n\tau, \\ = \infty, & \text{,,} \quad z = m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau, \end{cases}$$

wobei

$$\tau = i \cdot \frac{\pi K'}{K}.$$

Die Voraussetzungen, unter welchen die in No. 1 angewandte Verwandlung gilt, sind hier erfüllt; denn es ist

$$\lim_{z=0} \frac{z}{\sin am \frac{2Kz}{\pi}} = \pm \lim \frac{z - m\pi - n\tau}{\sin am \frac{2K}{\pi}(z - m\pi - n\tau)} = \frac{\pi}{2K},$$

da bekanntlich

$$\lim_{z=0} \frac{\sin am z}{z} = 1.$$

Ferner ist

$$\lim_{z=iK'} (z - iK') \sin am z = \lim_{\zeta=0} \zeta \sin am (\zeta + iK')$$

$$= \lim_{\zeta=0} \frac{1}{k} \cdot \frac{\zeta}{\sin am \zeta} = \frac{1}{k}.$$

Da nun

$$z - \frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{2K}\left(\frac{2K}{\pi} z - K'i\right),$$

so folgt zunächst, dass

$$\lim_{z=\frac{\tau}{2}} \left(z - \frac{\tau}{2}\right) \sin am \frac{2Kz}{\pi} = \frac{\pi}{2kK}.$$

Da ferner

$$\sin am \frac{2Kz}{\pi} = \pm \sin \frac{2K}{\pi} [z - m\pi - (n + \tfrac{1}{2})\tau],$$

so folgt

$$\lim_{z=\beta} (z - \beta) \cdot \sin am \frac{2Kz}{\pi} = \pm \frac{\pi}{2kK},$$

wobei $m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau$ durch β bezeichnet worden ist.

Als Curve c wählen wir ein Rechteck mit unendlich fernen Seiten, das zu den Achsen symmetrisch liegt, und dessen Umfang keinen Punkt enthält, in welchem $\sin am \frac{2K}{\pi} z$ verschwindet oder unendlich gross ist. Alsdann ist

$$\sin am \frac{2K}{\pi} z = Cz \cdot \frac{\prod\limits_{-m}^{m} \prod\limits_{-n}^{n} (z - m\pi - n\tau)}{\prod\limits_{-m}^{m} \prod\limits_{-n-1}^{n} (z - m\pi - [n + \frac{1}{2}]\tau)} \cdot E,$$

wobei E die als Faktor auftretende Exponentialgrösse bezeichnet. Hierbei ist noch zu bemerken, dass im Zähler m und n nicht gleichzeitig Nnll sein dürfen; der hierzugehörige Faktor z ist vorausgeschickt worden. Ferner soll mit

$$\prod_{-n-1}^{n}$$

das Produkt bezeichnet werden, das entsteht, wenn man jedem Faktor mit dem positiven Werthe n den Faktor zuordnet, in welchem n durch $-n-1$ ersetzt ist.

Setzen wir, um C zu entfernen, $z = 0$, so erhalten wir

1. $$\sin am \frac{2K}{\pi} z = \frac{2K}{\pi} z \cdot \frac{\prod \prod \left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right)}{\prod \prod \left(1 - \frac{z}{m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau}\right)} \cdot E.$$

Wir haben nun über den Werth des in E vorkommenden Integrals zu entscheiden

$$U = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\cos am \frac{2Kt}{\pi}}{\sin am \frac{2Kt}{\pi}} \cdot \frac{dt}{\tau - z};$$

dasselbe erledigt sich ebenso, wie das entsprechende Integral bei der Entwicklung von $\sin z$.

Für jedes endliche z kann $1 : (t - z)$ in allen Punkten des unendlich fernen Rechtecks c durch $1 : t$ ersetzt werden. In Gegenpunkten des Rechtecks hat $\cos am \frac{2Kt}{\pi}$ denselben Werth, $\sin am \frac{2Kt}{\pi}$, t und dt haben entgegengesetzt gleiche Werthe; es zerstören sich mithin die zu je zwei Gegenpunkten gehörigen Elemente des Integrals U, und daher ist $U = 0$ und $E = 1$.

Hieraus folgt

$$2. \qquad \sin am \frac{2K}{\pi} z = \frac{2K}{\pi} z \cdot \frac{\prod_{-m}^{m}\prod_{-n}^{n}\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right)}{\prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left(1 - \frac{z}{m\pi + (n+\frac{1}{2})\tau}\right)},$$

wobei m und n alle ganzen Zahlen von 0 bis ∞ anzunehmen haben, mit der Beschränkung, dass im Zähler m und n nicht zugleich Null sein dürfen. Vorläufig ist dabei noch die aus der Herleitung fliessende Bedingung zu beachten, dass man, im Zähler und Nenner immer bis zu denselben Werthen von m und n zu gehen hat.

4. Wir werden nun nachweisen, dass die unendlichen Produkte im Zähler und im Nenner einzeln convergent sind; damit wird dann die soeben hervorgehobene Beschränkung gegenstandslos, denn der Grenzwerth des Quotienten der unendlichen Produkte ist dann unabhängig davon, wie man im Zähler und Nenner m und n unendlich wachsen lässt, und ist einfach gleich dem Quotienten aus dem Grenzwerthe des Zählers uud dem Grenzwerthe des Nenners. Wir setzen

$$\frac{2K}{\pi} z \cdot \prod_{-m}^{m}\prod_{-n}^{n}\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) = \vartheta_1(z),$$

$$\prod_{-m}^{m}\prod_{-n}^{n}\left(1 - \frac{z}{m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau}\right) = \vartheta(z)$$

und untersuchen diese beiden Functionen. Bilden wir in $\vartheta_1(z)$ das Produkt aller Faktoren, für die n einen gegebenen von Null verschiedenen Werth hat, so erhalten wir nach No. 2, 3

$$\prod_{-m}^{m}\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) = \frac{\sin(n\tau - z)}{\sin n\tau};$$

die Faktoren, für welche $n = 0$ ist, geben

$$\prod_{-m}^{m}\left(1 - \frac{z}{m\pi}\right) = \frac{\sin z}{z};$$

daher ist

$$\vartheta_1(z) = \frac{2K}{\pi} \cdot \sin z \cdot \prod_{-n}^{n} \frac{\sin(n\tau - z)}{\sin n\tau}.$$

Nach der gleichmässig für reale und complexe Bogen gültigen Gleichung

$$\sin\alpha \sin\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

ist

$$\sin(n\tau - z)\cdot\sin(-n\tau - z) = \tfrac{1}{2}(\cos 2n\tau - \cos 2z).$$

Benutzt man

$$\cos 2n\tau = \tfrac{1}{2}(e^{2in\tau} + e^{-2in\tau}),$$

$$\sin n\tau\cdot\sin(-n\tau) = \tfrac{1}{4}(1-e^{2in\tau})^2 e^{-2in\tau},$$

und setzt $e^{i\tau} = q$, so erhält man

$$1.\qquad \theta_1(z) = \frac{2K}{\pi}\sin z\cdot\prod_1^\infty \frac{1-2q^{2n}\cos 2z + q^{4n}}{(1-q^{2n})^2},$$

$$= \frac{2K}{\pi}\sin z\cdot\frac{(1-2q^2\cos 2z+q^4)(1-2q^4\cos 2z+q^8)(1-2q^6\cos 2z+q^{12})\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots\ldots}.$$

Da $i\tau = -\pi K' : K$, so ist

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$$

ein realer echter Bruch, folglich der Nenner

$$(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots\ldots$$

convergent.

Das unendliche Produkt im Zähler ist von der Form

$$(1+z_1)(1+z_2)(1+z_3)\ldots\ldots;$$

dasselbe convergirt bekanntlich, wenn die Reihe

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots$$

convergirt, und diese convergirt mit der Reihe

$$\mathrm{mod}\, z_1 + \mathrm{mod}\, z_2 + \mathrm{mod}\, z_3 + \ldots$$

Es kommt daher in unserm Falle auf die Reihe der Moduln an

$$\mathrm{mod}(q^{4n} - 2q^{2n}\cos 2z) = q^{2n}\,\mathrm{mod}(q^{2n} - 2\cos 2z).$$

Der Quotient zweier benachbarten Glieder der Reihe dieser Moduln ist

$$q^2\cdot\mathrm{mod}\frac{q^{2n+2} - 2\cos 2z}{q^{2n} - 2\cos 2z}.$$

Wächst n unbegrenzt, so nähert sich diese Zahl dem Grenzwerthe q^2; da nun $q^2 < 1$, so folgt, dass die Reihe der Moduln und mithin auch das unendliche Produkt im Zähler convergirt.

Hiermit ist bewiesen, dass $\theta_1(z)$ für jedes endliche z convergirt.

In dem unendlichen Produkte $\theta(z)$ nehmen wir ebenfalls alle Faktoren zusammen, die zu einem gegebenen n gehören; das Produkt derselben ist

$$\prod_{-m}^{m}\left[1 - \frac{z}{m\pi + (n+\frac{1}{2})\tau}\right] = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\tau - z]}{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}.$$

Daher ist

$$\theta(z) = \prod_{-n-1}^{n}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\tau - z]}{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}.$$

Das Produkt zweier zusammengehörigen Faktoren ist

$$\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\tau - z]\,\sin[(-n-\frac{1}{2})\tau - z]}{\sin(n+\frac{1}{2})\tau\,\sin(-n-\frac{1}{2})\tau}.$$

Dieselben goniometrischen Formeln, die bei der Reduction von $\theta_1(z)$ angewandt worden sind, liefern jetzt

$$\frac{1-2q^{2n+1}\cos 2z + q^{4n+2}}{(1-q^{2n+1})^2}.$$

Folglich ist

$$\theta(z) = \frac{(1-2q\cos 2z+q^2)(1-2q^3\cos 2z+q^6)(1-2q^5\cos 2z+q^{10})\ldots}{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots\ldots}.$$

Die Convergenz des Nenners erhellt ohne Weiteres; die des Zählers hängt von der Convergenz der Modul-Reihe ab, deren allgemeines Glied ist

$$q^{2n+1} mod\,(q^{2n+1} - 2\cos 2z).$$

Der Quotient zweier benachbarter Glieder

$$q^2 mod\,\frac{q^{2n+3} - 2\cos 2z}{q^{2n+1} - 2\cos 2z}$$

hat den Grenzwerth q^2, folglich convergirt $\theta_1(z)$.

Wir haben somit schliesslich die für jedes endliche z gültige Entwicklung

$$2. \qquad \sin am\,\frac{2K}{\pi}z$$

$$= \frac{2K}{\pi}\sin z\cdot\frac{(1-2q^2\cos 2z+q^4)(1-2q^4\cos 2z+q^8)(1-2q^6\cos 2z+q^{12})\ldots}{(1-2q\ \cos 2z+q^2)(1-2q^3\cos 2z+q^6)(1-2q^5\cos 2z+q^{10})\ldots}$$
$$\cdot\frac{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots}.$$

5. Zwischen den beiden Functionen $\theta(z)$ und $\theta_1(z)$ findet ein einfacher Zusammenhang statt, den wir zunächst aufdecken wollen. Es ist

$$\theta\left(z+\frac{\tau}{2}\right) = \prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left[1 - \frac{z+\frac{1}{2}\tau}{m\pi+(n+\frac{1}{2})\tau}\right].$$

Wir wollen die Combination $m = 0$, $n = 0$ ausschliessen; dem zugehörigen Faktor $2z:\tau$ müssen wir dann voranstellen und haben alsdann

$$1. \qquad \theta(z+\tfrac{1}{2}\tau) = -\frac{2z}{\tau}\prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left[1 - \frac{z+\frac{1}{2}\tau}{m\pi+(n+\frac{1}{2})\tau}\right].$$

Da nun

$$1 - \frac{z+\frac{1}{2}\tau}{m\pi+(n+\frac{1}{2})\tau} = \frac{m\pi+n\tau-z}{m\pi+(n+\frac{1}{2})\tau} = \left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right):\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi+n\tau}\right),$$

so ist

$$2.\ \theta\left(z+\frac{\tau}{2}\right) = -\frac{2z}{\tau}\prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right):\prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi+n\tau}\right).$$

In dem für ein gegebenes von Null verschiedenes m gebildeten Produkte

$$\prod_{-n-1}^{n}\left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right)$$

hat n die Werthe anzunehmen

$$\left\{\begin{matrix}0\\-1\end{matrix};\ \begin{matrix}1\\-2\end{matrix};\ \begin{matrix}2\\-3\end{matrix};\ \begin{matrix}3\\-4\end{matrix};\ \begin{matrix}\ldots\\\ldots\end{matrix}\right.$$

während für das Produkt

$$\prod_{-n}^{n}\left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right)$$

die Werthe für n sind

$$\left\{0;\ \begin{matrix}1\\-1\end{matrix};\ \begin{matrix}2\\-2\end{matrix};\ \begin{matrix}3\\-3\end{matrix};\ \begin{matrix}\ldots\\\ldots\end{matrix}\right.$$

Hieraus folgt

$$3.\quad \begin{aligned} \prod_{-n-1}^{n}\left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right) &= \prod_{-n}^{n}\left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right)\cdot\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{z}{m\pi-n\tau}\right),\\ \prod_{-n-1}^{n}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi+n\tau}\right) &= \prod_{-n}^{n}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi+n\tau}\right)\cdot\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi-n\tau}\right). \end{aligned}$$

Ist $m = 0$, so ändern sich die Werthsysteme für n nur insofern, als die Werthe 0 in beiden wegfallen; die Gleichungen 3. gelten also auch für diesen Fall. Aus 3. folgt weiter

$$4.\quad \begin{aligned} \prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right) &= \prod_{-m}^{m}\prod_{-n}^{n}\left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right)\cdot\lim_{n=\infty}\prod_{-m}^{m}\left(1-\frac{z}{m\pi-n\tau}\right),\\ \prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi+n\tau}\right) &= \prod_{-m}^{m}\prod_{-n}^{n}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi+n\tau}\right)\cdot\lim_{n=\infty}\prod_{-m}^{m}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi-n\tau}\right). \end{aligned}$$

Nach No. 2, 3 ist

$$\begin{aligned} \prod_{-m}^{m}\left(1-\frac{z}{m\pi-n\tau}\right) &= \frac{\sin(z+n\tau)}{\sin n\tau} = \frac{e^{i(z+n\tau)}-e^{-i(z+n\tau)}}{e^{in\tau}-e^{-in\tau}},\\ &= \frac{e^{iz}\cdot e^{2in\tau}-e^{-iz}}{e^{2in\tau}-1}. \end{aligned}$$

Da $i\tau$ eine negative Zahl, nämlich $-\pi K' : K$, ist, so folgt

$$\lim_{n=\infty}\prod_{-m}^{m}\left(1-\frac{z}{m\pi-n\tau}\right) = e^{-iz};$$

ebenso ist

$$\lim_{n=\infty}\prod_{-m}^{m}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi-n\tau}\right) = e^{\frac{1}{2}i\tau}.$$

Hieraus ergiebt sich schliesslich

$$5.\quad \theta\left(z+\frac{\tau}{2}\right) = \frac{\theta_1(z)}{\theta_1(-\frac{1}{2}\tau)}\cdot e^{-i(z+\frac{\tau}{4})}.$$

Ersetzt man hier z durch $(z-\frac{1}{2}\tau)$, so erhält man

$$6.\quad \theta(z) = \frac{e^{-iz}}{\theta_1(-\frac{1}{2}\tau)}\cdot\theta_1(z-\tfrac{1}{2}\tau).$$

Die Function $\theta_1(z)$ geht also bis auf einen bestimmten Faktor in $\theta(z)$ über, wenn man z durch $(z-\frac{1}{2}\tau)$ ersetzt.

Ersetzt man z durch $-z$ und beachtet, dass

$$\theta(-z) = \theta(z), \qquad \theta_1(-z) = -\theta_1(z),$$

so entsteht aus 5. und 6.

$$7.\quad \theta(z-\tfrac{1}{2}\tau) = \frac{e^{i(z-\frac{\tau}{4})}}{\theta(\frac{1}{2}\tau)}\cdot\theta_1(z).$$

$$8.\quad \theta(z) = \frac{e^{iz}}{\theta_1(\frac{1}{2}\tau)}\cdot\theta_1(z+\tfrac{1}{2}\tau).$$

Ersetzt man in 6. z durch $z+\tau$ und benutzt 8., so entsteht

$$9.\quad \theta(z+\tau) = -e^{-i(iz+\tau)}\,\theta(z).$$

6. Die Function $\theta(z)$ ist periodisch und hat die Periode π, sie ist ferner

endlich für jedes endliche z; hieraus folgt, dass sich $\theta(z)$ in eine FOURIER'sche Reihe entwickeln lässt, die für jedes endliche z gilt, und die Form hat

$$\theta(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{n\cdot 2iz}.$$

Ebenso, wie die Entwicklung einer Function nach steigenden und fallenden Potenzen der Variabeln nur in einer Weise möglich ist, kann auch die damit engstens zusammenhängende Entwicklung in einer FOURIER'schen Reihe nur in einer Weise existiren. Wenn daher zwei Entwicklungen derselben Function vorliegen

$$f(z) = \Sigma A_n e^{n\cdot 2iz} = \Sigma B_n e^{n\cdot 2iz},$$

so folgt

$$A_n = B_n$$

für jeden Werth von n.

Mit Hülfe dieser Bemerkung und der Functionalgleichung No. 5, 9 sind wir im Stande, die Coefficienten A_n zu bestimmen, bis auf einen constanten allen gemeinsamen Faktor. Ersetzen wir in der Gleichung

$$\theta(z) = \Sigma A_n e^{n\cdot 2iz}$$

die Variable z durch $z+\tau$, so entsteht

$$\theta(z+\tau) = \Sigma A_n e^{n\cdot 2iz} \cdot e^{n\cdot 2i\tau},$$

aus No. 5, 9 folgt ferner

$$\theta(z+\tau) = \Sigma(-A_n)\cdot e^{-i\tau}\cdot e^{(n-1)\cdot 2iz}.$$

Vergleichen wir in diesen beiden Entwicklungen die Coefficienten $e^{n\cdot 2iz}$, so folgt

$$A_n e^{n\cdot 2i\tau} = -A_{n+1} e^{-i\tau},$$

oder

$$A_n e^{-n^2\cdot i\tau} = -A_{n+1}\cdot e^{-(n+1)^2\cdot i\tau};$$

dies ergiebt

$$A_n e^{-n^2\cdot i\tau} = (-1)^n A,$$

wobei A eine noch zu bestimmende Constante bezeichnet.

Wir haben somit den Satz: Jede eindeutige Function, die die reale Periode π hat, der Functionalgleichung genügt

$$f(z+\tau) = -e^{i(2z+\tau)} f(z),$$

und für jedes endliche z endlich ist, giebt die FOURIER'sche Entwicklung

$$A\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{n^2\cdot i\tau + 2n\cdot iz},$$

wo alles bis auf A völlig bestimmt ist; jede solche Function ist daher von $\theta(z)$ nur durch einen constanten Faktor verschieden.

7. Setzen wir $-i\tau = \rho$, also $\tau = i\rho$, und vertauschen wir n mit $-n$, so erhalten wir sofort die Beziehung

1. $$\theta(z) = A\cdot\vartheta(z).$$

diese Gleichung lehrt, die fundamentale Thetafunction $\vartheta(z)$ in ein unendliches Produkt zu verwandeln; die Verwandlung ist bis auf einen Zahlenfaktor A geleistet, der noch bestimmt werden muss. Setzen wir $z = 0$, so entsteht

$$\theta(0) = A\cdot\vartheta(0).$$

Da nun $\theta(0) = 1$, so folgt

2. $$\theta(z) = \frac{1}{\vartheta(0)}\cdot\vartheta(z).$$

Nach No. 5, 5 ist

$$\theta(z+\tfrac{1}{2}i\rho) = \frac{e^{-i(z+\frac{1}{2}i\rho)}}{\theta_1(-\frac{1}{2}i\rho}\,\theta_1(z);$$

da nun bekanntlich

$$\vartheta(z + \tfrac{1}{2} i\rho) = i \cdot e^{\frac{1}{4}\rho - iz}\, \vartheta_1(z),$$

so folgt

3. $$\theta_1(z) = i e^{-\frac{1}{4}\rho} \cdot \frac{\theta_1(-\frac{1}{2} i\rho)}{\vartheta(0)}\, \vartheta_1(z).$$

Setzen wir in dem Quotienten

$$\frac{\theta_1(z)}{\vartheta_1(z)} = \frac{2Kz}{\pi} \cdot \frac{\prod\prod\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right)}{\vartheta_1(z)}$$
$$= \frac{2K}{\pi} \cdot \prod\prod\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) : \frac{\vartheta_1(z)}{z}$$

$z = 0$; so erhalten wir

4. $$\lim \frac{\theta_1(z)}{\vartheta_1(z)} = \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{\vartheta_1'(0)}.$$

Da nun nach 3. das Verhältniss $\theta_1(z) : \vartheta_1(z)$ constant ist, so folgt schliesslich

5. $$\theta_1(z) = \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{\vartheta_1'(0)} \cdot \vartheta_1(z).$$

Hierdurch ist die Function $\vartheta_1(z)$ durch das unendliche Produkt $\theta_1(z)$ ausgedrückt.

Wir wollen noch zeigen, wie $\vartheta(0)$ durch ein unendliches Produkt ausgedrückt werden kann. Nach 2. ist

$$\frac{(1 - 2q\cos 2z + q^2)(1 - 2q^3\cos 2z + q^6)(1 - 2q^5\cos 2z + q^{10})\ldots}{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots} = \frac{1}{\vartheta(0)}\,\vartheta(z).$$

Wir setzen

6. $$\frac{1}{\vartheta(0)} \cdot (1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots = R(q),$$

und haben somit

$$(1 - 2q\cos 2z + q^2)(1 - 2q^3\cos 2z + q^6)\ldots$$
$$= R(q)(1 - 2q\cos 2z + 2q^4\cos 4z - 2q^9\cos 6z + \ldots).$$

Ersetzen wir hier z durch $\frac{1}{2}\pi$, so entsteht

7. $$R(q) = \frac{1}{\vartheta_3(0)}(1+q)^2(1+q^3)^2(1+q^5)^2\ldots$$

Aus 6. und 7. folgt durch Multiplication

8. $$R(q)^2 = \frac{1}{\vartheta(0)\vartheta_3(0)} \cdot (1-q^2)^2(1-q^6)^2(1-q^{10})^2\ldots$$

Setzen wir in 6. q^2 statt q, also 2ρ statt ρ, so erhalten wir

9. $$R(q^2) = \frac{1}{\vartheta(0, 2\rho)}(1-q^2)^2(1-q^6)^2(1-q^{10})^2\ldots$$

Nun ist nach § 19, No. 7, 13 für $z = 0$

$$\vartheta(0, 2\rho)^2 = \vartheta(0)\vartheta_3(0),$$

mithin

10. $$R(q^2)^2 = \frac{1}{\vartheta(0)\vartheta_3(0)}(1-q^2)^4(1-q^6)^4(1-q^{10})^4\ldots$$

Durch Division folgt aus 8. und 10.

$$\left[\frac{R(q)}{R(q^2)}\right]^2 = \frac{1}{(1-q^2)^2(1-q^6)^2(1-q^{10})^2\ldots},$$
$$\frac{R(q)}{R(q^2)} = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^6)(1-q^{10})\ldots}.$$

Hierfür schreiben wir

11. $$\frac{R(q)}{R(q^2)} = \frac{(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})(1-{}^{16})\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)(1-q^{10})\ldots}.$$

Ersetzen wir hier der Reihe nach q durch q^2, q^4, q^8, q^{16}, ... multipliciren alle Resultate und bemerken, dass nach 6.

$$\lim_{n=\infty} R(q^n) = 1,$$

und dass

$$\lim_{n=\infty}(1-q^{1\cdot 2^n})(1-q^{2\cdot 2^n})(1-q^{3\cdot 2^n})(1-q^{4\cdot 2^n})\ldots = 1,$$

so erhalten wir aus 11.

12. $$R(q) = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots}.$$

Hieraus ergiebt sich nach 6.

13. $\vartheta(0) = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots.(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots.$

Benutzt man die Identität

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots = \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots}$$
$$= \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots},$$

so kann man statt 13. auch schreiben

14. $$\vartheta(0) = \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots}.$$

8. Vergleichen wir die beiden Entwicklungen

1. $$\sin am\frac{2K}{\pi}z = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)},$$

und $$\sin am\frac{2K}{\pi}z = \frac{\Theta_1(z)}{\Theta(z)}, \quad \text{d. i. nach No. 7, 2. und 5.}$$
$$= \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_1'(0)}\cdot\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)},$$

so folgt die Gleichung

2. $$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_1'(0)},$$

die auch aus 1. für $z=0$ hervorgeht.

Aus No. 7, 3 und 5 folgt

3. $$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{1}{\vartheta_1'(0)} = i\cdot q^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\Theta_1(-\frac{1}{2}i\rho)}{\vartheta(0)}.$$

Der besondere Werth $\Theta_1(-\frac{1}{2}i\rho)$ ergiebt sich aus $\Theta_1(z)$ wie folgt. Es ist

$$\cos(-i\rho) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi K'}{K}} + e^{\frac{-\pi K'}{K}}\right) = \tfrac{1}{2}(q^{-1}+q),$$

$$\sin(-\tfrac{1}{2}i\rho) = \frac{1}{2i}(q^{-\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2i}q^{-\frac{1}{2}}(1-q),$$

folglich ist

$$(1-2q^{2n}\cos 2z + q^{4n}) = 1 - q^{2n-1} - q^{2n+1} + q^{4n}$$
$$= (1-q^{2n-1})(1-q^{2n+1}).$$

Hieraus ergiebt sich (No. 4, 1)

$$i\cdot q^{\frac{1}{4}}\cdot\Theta_1\left(-\frac{i\rho}{2}\right) = \frac{K}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\cdot(1-q)\cdot\frac{(1-q)(1-q^3)\cdot(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2}$$
$$= \frac{K}{\pi\sqrt[4]{q}}\,\frac{(1-q)^2\,(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots}.$$

Daher ist nach 3.

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\vartheta(0)}{\vartheta'(0)}=\frac{K}{\pi\sqrt[4]{q}}\,\frac{(1-q)^2\,(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots},$$

und nach 2.

$$4.\qquad \frac{K\sqrt{k}}{\pi}=\sqrt[4]{q}\cdot\frac{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots}{(1-q)^2\,(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots}.$$

Dies führen wir in No. 4, 2 ein und erhalten

$$5.\qquad sin\,am\frac{2K}{\pi}z=\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\cdot sin z\cdot\frac{(1-2q^2\cos 2z+q^4)(1-2q^4\cos 2z+q^8)\ldots}{(1-2q\,\cos 2z+q^2)(1-2q^3\cos 2z+q^6)\ldots}.$$

9. Um auch für die Functionen

$$cos\,am\frac{2K}{\pi}z\quad\text{und}\quad\Delta am\frac{2K}{\pi}z$$

unendliche Produkte zu erhalten, ersetzen wir zunächst in No. 7, 5 die Variable z durch $\frac{1}{2}\pi-z$. Hierdurch erhalten wir, wenn wir No. 8, 2 berücksichtigen

$$1.\qquad \Theta_1\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\frac{1}{\vartheta(0)\sqrt{k}}\cdot\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\frac{1}{\vartheta(0)\sqrt{k}}\,\vartheta_2(z);$$

in Verbindung mit No. 7, 2

$$\Theta(z)=\frac{1}{\vartheta(0)}\,\vartheta(z),$$

und

$$cos\,am\frac{2K}{\pi}z=\sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta(z)}$$

liefert 1.

$$cos\,am\frac{2K}{\pi}z=\sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta_1(\frac{1}{2}\pi-z)}{\Theta(z)}$$

$$=\frac{2K\sqrt{k'}}{\pi}\cdot cos z\cdot\frac{(1+2q^2\cos 2z+q^4)(1+2q^4\cos 2z+q^8)\ldots}{(1-2q\,\cos 2z+q^2)(1-2q^3\cos 2z+q^6)\ldots}\cdot\frac{(1-q)^2\,(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^8)^2\ldots}.$$

Benutzt man No. 8, 4, so erhält man einfacher

$$2.\qquad cos\,am\frac{2K}{\pi}z=2\sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\sqrt[4]{q}\cdot cos z\cdot\frac{(1+2q^2\cos 2z+q^4)(1+2q^4\cos 2z+q^8)\ldots}{(1-2q\,\cos 2z+q^2)(1-2q^3\cos 2z+q^6)\ldots}.$$

Wir ersetzen ferner in No. 7, 2 z durch $\frac{1}{2}\pi-z$ und erhalten

$$\Theta\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\frac{1}{\vartheta(0)}\,\vartheta\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\frac{1}{\vartheta(0)}\cdot\vartheta_3(z).$$

In Verbindung mit No. 7, 2 und

$$\Delta\,am\frac{2K}{\pi}z=\sqrt{k'}\cdot\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta(z)}$$

liefert dies

$$3.\qquad \Delta\,am\frac{2K}{\pi}z=\sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta(\frac{1}{2}\pi-z)}{\Theta(z)}$$

$$=\sqrt{k'}\cdot\frac{(1+2q\cos 2z+q^2)(1+2q^3\cos 2z+q^6)(1+2q^5\cos 2z+q^{10})\ldots}{(1-2q\cos 2z+q^2)(1-2q^3\cos 2z+q^6)(1-2q^5\cos 2z+q^{10})\ldots}.$$

Die Gleichungen 2. und 3. ergeben für $z=0$

$$4.\qquad \sqrt{\frac{k}{k'}}=2\sqrt[4]{q}\cdot\frac{(1+q^2)^2(1+q^4)^2(1+q^6)^2\ldots}{(1-q)^2\,(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots},$$

$$5.\qquad \sqrt{k'}=\frac{(1-q)^2\,(1-q^3)^2\,(1-q^5)^2\ldots}{(1+q)^2\,(1+q^3)^2\,(1+q^5)^2\ldots}.$$

Aus 4. und 5. folgt

$$6.\qquad \sqrt{k}=2\sqrt[4]{q}\cdot\frac{(1+q^2)^2(1+q^4)^2(1+q^6)^2\ldots}{(1+q)^2\,(1+q^3)^2(1+q^5)^2\ldots},$$

$$7.\qquad \frac{2K\sqrt{k'}}{\pi}=\frac{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots}{(1+q^2)^2(1+q^4)^2(1+q^6)^2\ldots},$$

8. $$\frac{2K}{\pi} = \frac{(1+q)^2(1-q^2)^2(1+q^3)^2(1-q^4)^2\ldots}{(1-q)^2(1+q^2)^2(1-q^3)^2(1+q^4)^2\ldots}\text{ *)}.$$

Aus 7. und 5. folgt durch Multiplication

$$\frac{2Kk'}{\pi} = \frac{(1-q)^2(1-q^2)^2(1-q^3)^2(1-q^4)^2\ldots}{(1+q)^2(1+q^2)^2(1+q^3)^2(1+q^4)^2\ldots}.$$

Vergleicht man dies mit No. 7, 14, so erhält man

9. $$\vartheta(0) = \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}}.$$

Die Nullwerthe von ϑ_2 und ϑ_3 können durch die Constanten des elliptischen Integrals ausgedrückt werden, indem man 9. mit den beiden Gleichungen verbindet

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)}.$$

Aus der letzteren folgt zunächst

10. $$\vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

und hieraus weiter

11. $$\vartheta_2(0) = \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}.$$

---

10. Die Thetafunctionen geben brauchbare Mittel zur numerischen Berechnung elliptischer Functionen.

Zu einem gegebenen Modul k hat man zunächst die Zahl q zu berechnen. Dazu geht man am zweckmässigsten von der Formel aus

$$\sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16}\ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16}\ldots}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} = \frac{q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \ldots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + \ldots}.$$

Bezeichnet man die bekannte linke Seite mit λ und führt die Division rechts aus, so entsteht

1. $$\lambda = q - 2q^5 + 5q^9 - 10q^{13} + 18q^{17} - 32q^{21} + \ldots$$

Setzen wir $q = a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \ldots$ in diese Gleichung ein, so bestimmen sich $a_1, a_2, a_3 \ldots$ durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von λ. Zunächst erkennen wir leicht, dass mehrere der a verschwinden. Da q^5 mit λ^5 beginnt, so folgt

$$a_2 = a_3 = a_4 = 0,$$

also ist q von der Form

$$q = a_1\lambda + a_5\lambda^5 + a_6\lambda^6 + \ldots.$$

Dann enthält aber q^5 nur die Potenzen $\lambda^5, \lambda^9, \ldots,$ und q^9 beginnt mit λ^9, folglich ist

$$a_6 = a_7 = a_8 = 0.$$

Nun enthält q die Potenzen $\lambda, \lambda^5, \lambda^9, \ldots,$
q^5 „ „ $\lambda^5, \lambda^9, \lambda^{13} \ldots,$
q^9 „ „ $\lambda^9, \lambda^{13} \ldots,$

folglich ist $$a_{10} = a_{11} = a_{12} = 0.$$

Hieraus geht hervor, dass in q^5, q^9 und q^{13} hinter λ^{13} sofort λ^{17} folgt, also ist

$$a_{14} = a_{15} = a_{16} = 0.$$

---

*) Weitere verwandte Formeln s. JACOBI, Fundamenta nova, pag. 84 u. f.

Dies bedingt wieder, dass in q^5, q^9, q^{13}, q^{17} nach λ^{17} sofort λ^{21} kommt, es ist daher

$$a_{18} = a_{19} = a_{20} = 0;$$

mithin ist q von der Form

2. $$q = a\lambda + b\lambda^5 + c\lambda^9 + d\lambda^{13} + e\lambda^{17} + f\lambda^{21} + \ldots$$

Anstatt dies in 1. einzuführen, ist es zweckmässiger, für λ aus 1. den Werth in 2. einzusetzen. Man bildet zu diesem Zwecke

$$\begin{aligned}
\lambda^5 &= q^5 - 10q^9 + 65q^{13} - 330q^{17} + 1420q^{21} - \ldots,\\
\lambda^9 &= + q^9 - 18q^{13} + 189q^{17} - 800q^{21} + \ldots,\\
\lambda^{13} &= + q^{13} - 26q^{17} + 65q^{21} - \ldots,\\
\lambda^{17} &= \phantom{q^5 - 10q^9 - 18q^{13} - 26}+ q^{17} - 34q^{21} + \ldots,\\
\lambda^{21} &= \phantom{q^5 - 10q^9 - 18q^{13} - 26q^{17} - 34}+ q^{21} - \ldots,
\end{aligned}$$

und erhält die Gleichungen

$$a = 1, \quad -2 + b = 0, \quad 5 - 10b + c = 0,$$
$$-10 + 65b - 18c + d = 0, \quad 18 - 330b + 189c - 26d + e = 0,$$
$$-32 + 1420b - 800c + 65d - 34e + f = 0.$$

Diese Gleichungen ergeben

$$b = 2, \quad c = 15, \quad d = 150, \quad e = 1707, \quad f = 57470,$$

also ist

3. $$q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + 1707\lambda^{17} + 57470\lambda^{21} + \ldots$$

Für eine Genauigkeit bis zur fünften Decimalstelle genügen die ersten beiden Glieder dieser Gleichung, sobald

$$15\lambda^9 < 0{,}00001, \quad \text{also} \quad \lambda \leqq 0{,}2.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\sqrt{k'} > \frac{3}{7}, \qquad k \overline{\gtrless} 0{,}983.$$

Die ersten drei Glieder genügen bei einer Genauigkeit bis zur sechsten Stelle, wenn

$$150\lambda^{13} < \frac{1}{10^6}, \quad \text{also} \quad \lambda \overline{\gtrless} 0{,}28,$$

$$\sqrt{k'} > \frac{11}{39}, \qquad k < 0{,}992,$$

und bei einer Genauigkeit bis zur fünften Stelle, wenn

$$k < 0{,}9995.$$

Aus q findet man K (wenn man nicht vorzieht, K aus k nach den früher mitgetheilten Methoden direkt zu berechnen) aus der ausserordentlich rasch convergirenden Entwicklung No. 9, 9

$$\sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - 2q^{25} + \ldots$$

Da q selbst für grosse k stark von 1 abweicht, so genügen in den meisten Fällen die ersten drei Glieder. Schliesslich findet man $\sin am\, w$, $\cos am\, w$, $\Delta am\, w$ aus den ebenfalls sehr rasch convergirenden Thetaquotienten § 19, No. 5, 15, 16 und 17.

Man kann diese Gleichungen auch dazu verwenden, w zu finden, wenn $\sin am\, w$, $\cos am\, w$ oder $\Delta am\, w$ gegeben sind, also dazu, ein elliptisches Integral erster Art aus dem Modul und der Amplitude zu berechnen. Wir bedienen uns dazu am zweckmässigsten der Gleichung

$$5.\quad \Delta am\, w = \sqrt{k'}\cdot\frac{1 + 2q\cos\frac{\pi w}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi w}{K} + \ldots}{1 - 2q\cos\frac{\pi w}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi w}{K} - \ldots}.$$

Setzen wir $\pi w : K = v$, so folgt

$$\frac{1}{2q}\cdot\frac{\Delta am\, w - \sqrt{k'}}{\Delta am\, w + \sqrt{k'}} = \frac{\cos 2v + q^8\cos 6v + q^{24}\cos 10v + \ldots}{1 + 2q^4\cos 4v + 2q^{16}\cos 8v + \ldots}.$$

Die linke Seite ist bekannt; wir bezeichnen sie mit δ und erhalten

$$\cos 2v = \delta(1 + 2q^4\cos 4v + 2q^{16}\cos 8v + \ldots) - (q^8\cos 6v + q^{24}\cos 10v + \ldots).$$

In den meisten Fällen ist q so klein, dass $2q^4$ vernachlässigt werden kann; alsdann hat man einfach

$$6.\quad \cos 2v = \delta.$$

Ist dieser Werth nicht hinlänglich genau, so benutzt man ihn als erste Annäherung und berechnet einen genaueren Werth v' nach

$$7.\quad \begin{aligned} \cos 2v' &= \delta(1 + 2q^4\cos 4v + 2q^{16}\cos 8v + \ldots) \\ &\quad - (q^8\cos 6v + q^{24}\cos 10v + \ldots). \end{aligned}$$

Wenn δ nicht sehr klein ist, so stimmt das Vorzeichen von $\cos 2v - \delta$ mit dem von $2\delta q^4\cos 4v$ überein. Ist nun $2\delta q^4\cos 4v$ positiv, so ist der aus 6. folgende Werth von $\cos 2v$ zu klein, der aus 7. folgende Werth grösser, aber immer noch zu klein; ist dagegen $2\delta q^4\cos 4v$ negativ, so ergiebt sich $\cos 2v$ aus 6 zu gross; die aus 7. folgende zweite Annäherung ist zwar kleiner, aber immer noch zu gross; denn $2v$ ist spitz und $4v$ ist nach der Voraussetzung stumpf. In beiden Fällen erhält man durch fortgesetzte Anwendung der Gleichung 7. eine Reihe von Werthen $v', v'', v''', \ldots$ die sich dem richtigen Werthe immer mehr nähern. In sehr vielen Fällen wird v' bereits genau genug sein.

§ 21. Die elliptischen Integrale zweiter und dritter Art.

1. Die Integrale zweiter und dritter Art § 17, No. 8, 9

$$\int_0^z \sqrt{\frac{1 - k^2z^2}{1 - z^2}}\,dz \quad \text{und} \quad \int_0^z \frac{dz}{(1 + \lambda z^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}$$

werden nach Jacobi*) als elliptische Functionen betrachtet, indem man eine neue Variable w durch die Gleichung einführt

$$z = \sin am\, w, \quad \text{also} \quad w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}.$$

Durch diese Substitution ergiebt sich

$$\int \sqrt{\frac{1 - k^2z^2}{1 - z^2}}\,dz = \int \Delta^2 am\, w\, dw.$$

Jacobi bezeichnet das letztere Integral, zwischen den Grenzen 0 und w genommen, als Integral zweiter Art; wir schreiben dafür $\mathfrak{E}(w)$ und haben daher

$$\mathfrak{E}(w) = \int_0^w \Delta^2 am\, w\, dw.$$

Ersetzt man $\Delta am\, w$ durch $\sin am\, w$, so folgt

*) Jacobi, Fundamenta nova, § 47.

$$\mathfrak{E}(w) = w - \int_0^w k^2 \sin^2 am w\, dw.$$

In dem Integrale dritter Art setzen wir

$$\lambda = -k^2 \sin^2 am\, \alpha$$

und machen wieder die Substitution 1.; dadurch entsteht

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + \lambda \sin^2 \varphi)\Delta\varphi} = \int \frac{dw}{1 - k^2 \sin^2 am\,\alpha \sin^2 am w}.$$

Wird das letztere Integral zwischen den Grenzen 0 und w genommen, so erhält man sofort

$$\int_0^w \frac{dw}{1 - k^2 \sin^2 am\,\alpha \sin^2 am w} = w + \int_0^w \frac{k^2 \sin^2 am\,\alpha \sin^2 am w\, dw}{1 - k^2 \sin^2 am\,\alpha \sin^2 am w}.$$

Wir werden nun zeigen, wie die beiden Integrale, um die es sich noch handelt, nämlich

$$\int_0^w k^2 \sin^2 am\, w\, dw \quad \text{und} \quad \int_0^w \frac{k^2 \sin^2 am\, w\, dw}{1 - k^2 \sin^2 am\,\alpha \sin^2 am\, w}$$

auf Thetafunctionen reducirt werden können.

2. Vorher haben wir noch zu untersuchen, ob diese beiden Integrale vom Integrationswege abhängen.

Die Function $\sin am w$ wird unendlich in den Punkten $w = 2mK + (2n+1)K' \cdot i$, wobei m und n ganze Zahlen sind; wir haben daher nach § 13, 13, 3

$$\sin^2 am\,[2mK + (2n+1)K' \cdot i + \mathfrak{w}]$$

für die Umgebung des Punktes $2mK + (2n+1)K' \cdot i$ in eine Reihe nach auf- und absteigenden Potenzen von $\mathfrak{w}$ zu entwickeln und den Coefficienten von $1 : \mathfrak{w}$ zu beachten. Da nun bekanntlich

$$\sin^2 am\,[2mK + (2n+1)K'i + \mathfrak{w}] = \frac{1}{k^2 \sin^2 am \mathfrak{w}}$$

und diese Function für entgegengesetzt gleiche $\mathfrak{w}$ gleiche Zeichen hat, so folgt, dass in der verlangten Entwicklung nur gerade Potenzen von $\mathfrak{w}$ vorkommen; folglich ist der Coefficient von $\mathfrak{w}^{-1}$ gleich Null. Hieraus ergiebt sich sofort:

D a s I n t e g r a l $\int \sin^2 am w\, dw$ ü b e r e i n e k l e i n e C u r v e e r s t r e c k t, d i e e i n e n A u s n a h m e p u n k t e i n f a c h u m k r e i s t, v e r s c h w i n d e t; d a s I n t e g r a l i s t d a h e r e i n e e i n d e u t i g e F u n c t i o n d e r P u n k t e d e r V a r i a b e l n e b e n e.

Die Function

$$\frac{\sin^2 am w}{1 - k^2 \sin^2 am\,\alpha \sin^2 am w}$$

wird nur in den Punkten unendlich gross, für welche

$$1 - k^2 \sin^2 am\,\alpha \sin^2 am w = 0,$$

also

$$\sin am w = \pm \frac{1}{k \sin am\,\alpha}.$$

Hieraus folgen für w die Auflösungen

$$w = \pm \alpha + 2mK + (2n+1)K'i.$$

Setzen wir nun

$$w = \pm \alpha + 2mK + (2n+1)K'i + \mathfrak{w},$$

so erhalten wir

$$\frac{\sin^2 am\, w}{1 - k^2 \sin^2 am\,\alpha \sin^2 am\, w} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 am\,(\mathfrak{w} \pm \alpha) - \sin^2 am\,\alpha}.$$

Ist $\mathfrak{w}$ so klein, dass höhere Potenzen von $\mathfrak{w}$ gegen die erste zu vernachlässigen sind, so ist nach dem Additionstheoreme

$$sin\,am(\mathfrak{w} \pm \alpha) = \pm\, sin\,am\,\alpha + cos\,am\,\alpha\,\Delta am\,\alpha \cdot \mathfrak{w}\,.$$

Folglich ist, über eine verschwindend kleine den Punkt

$$\pm\,\alpha + 2mK + (2n+1)K'i$$

einmal umkreisende Curve ausgedehnt,

$$\int \frac{sin^2\,am\,w}{1 - k^2\,sin^2\,am\,\alpha\,sin^2\,am\,w}\,dw = \pm\,\frac{1}{2k^2\,sin\,am\,\alpha\,cos\,am\,\alpha\,\Delta am\,\alpha}\int\frac{d\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}}$$

$$= \pm\,\frac{\pi i}{k^2\,sin\,am\,\alpha\,cos\,am\,\alpha\,\Delta\,am\,\alpha}\,.$$

Hieraus ergiebt sich: Das Integral

$$\int_0^w \frac{sin^2\,am\,w}{1 - k^2\,sin^2\,am\,\alpha\,sin^2\,am\,w}\,dw$$

ist unendlich vieldeutig und hat den Periodicitätsmodul

$$\frac{\pi i}{k^2\,sin\,am\,\alpha\,cos\,am\,\alpha\,\Delta\,am\,\alpha}\,.$$

3. Nach § 19, No. 17, 17 ist

$$\vartheta(0)^2 \cdot \frac{\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)}{\vartheta(\zeta)^2\,\vartheta(z)^2} = 1 - \left[\frac{\vartheta_1(\vartheta)}{\vartheta\,(\zeta)}\cdot\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta\,(z)}\right]^2.$$

Ersetzt man hier ζ und z durch $\frac{\pi}{2K}\alpha$ und $\frac{\pi}{2K}w$, so erhält man

$$\vartheta(0)^2 \cdot \frac{\vartheta\left[\frac{\pi}{2K}(w+\alpha)\right]\vartheta\left[\frac{\pi}{2K}(w-\alpha)\right]}{\vartheta\left(\frac{\pi\alpha}{2K}\right)^2\vartheta\left(\frac{\pi w}{2K}\right)^2} = 1 - k^2\,sin^2 am\,\alpha\,sin^2 am\,w\,.$$

Wir nehmen beiderseits die Logarithmen und differenziren dann nach α; dadurch entsteht

$$\frac{k^2 sin\,am\,\alpha\,cos\,am\,\alpha\,\Delta\,am\,\alpha\,sin^2 am\,w}{1 - k^2\,sin^2 am\,\alpha\,sin^2 am\,w}$$

$$1.\qquad = \frac{D_\alpha\vartheta\frac{\pi\alpha}{2K}}{\vartheta\frac{\pi\alpha}{2K}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{D_\alpha\vartheta\frac{\pi(w+\alpha)}{2K}}{\vartheta\frac{\pi(w+\alpha)}{2K}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{D_\alpha\vartheta\frac{\pi(w-\alpha)}{2K}}{\vartheta\frac{\pi(w-\alpha)}{2K}}$$

Da nun

$$\frac{d\vartheta\frac{\pi(w+\alpha)}{2K}}{d\alpha} = \frac{d\vartheta\frac{\pi(w+\alpha)}{2K}}{dw}\,,\quad -\frac{d\vartheta\frac{\pi(w-\alpha)}{2K}}{d\alpha} = \frac{d\vartheta\frac{\pi(w-\alpha)}{2K}}{dw}\,,$$

so erhalten wir aus 1., wenn wir mit dw multipliciren und zwischen den Grenzen 0 und w integriren,

$$2.\qquad \int_0^w \frac{k^2\,sin\,am\,\alpha\,cos\,am\,\alpha\,\Delta\,am\,\alpha\,sin^2\,am\,w\,dw}{2 - k^2\,sin^2\,am\,\alpha\,sin^2\,am\,w}$$

$$= \frac{D_\alpha\vartheta\frac{\pi\alpha}{2K}}{\vartheta\frac{\pi\alpha}{2K}}\cdot w + \frac{1}{2}\,l\,\frac{\vartheta\frac{\pi(w-\alpha)}{2K}}{\vartheta\frac{\pi(w+\alpha)}{2K}}\,.$$

Der Periodicitätsmodul des links stehenden Integrals ist πi; ihn besonders hinzuzufügen ist wegen des rechts stehenden Logarithmus nicht nöthig. Das links stehende Integral bezeichnet JACOBI als **Normalintegral dritter Art** $\Pi(w, K, \alpha)$, wofür auch $\Pi(w, \alpha)$ geschrieben wird, wenn über den Modulus k kein Zweifel sein kann.

Wenn wir in 2. rechts und links durch α dividiren und dann zur Grenze für $\alpha = 0$ übergehen, so erhalten wir

$$3. \qquad \int_0^w k^2 \sin^2 am\, w\, dw = \frac{\pi^2}{4K^2}\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}\, w - \frac{D_w \vartheta \frac{\pi w}{2K}}{\vartheta \frac{\pi w}{2K}};$$

denn es ist, wenn $\pi\alpha : 2K = \beta$ gesetzt wird,

$$D_\alpha \vartheta \frac{\pi\alpha}{2K} = \frac{\pi}{2K}\vartheta'\beta,$$

$$\lim \frac{D_\alpha \vartheta \frac{\pi\alpha}{2K}}{\alpha} = \frac{\pi}{2K}\lim \frac{D_\alpha \vartheta\beta}{\beta} = \frac{\pi^2}{4K^2}\cdot \lim \frac{\vartheta'\beta}{\beta} = \frac{\pi^2}{4K^2}\vartheta''(0).$$

Es ist daher

$$4. \qquad \mathfrak{E}(w) = \int_0^w \Delta^2 am\, w\, dw = \left[1 - \frac{\pi^2}{4K^2}\cdot\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}\right] w + \frac{D_w \vartheta \frac{\pi w}{2K}}{\vartheta \frac{\pi w}{2K}}.$$

Das zweite Glied rechts bezeichnet man nach JACOBI mit $Z(w)$, so dass also

$$Z(w) = \frac{D_w \vartheta \frac{\pi w}{2K}}{\vartheta \frac{\pi w}{2K}}.$$

4. Wir entwickeln nun einige Eigenschaften der Function Z. Wenn man die angedeutete Differentiation ausführt, so erhält man zunächst

$$Z(w) = \frac{2q \sin \frac{\pi w}{K} - 4q^4 \sin \frac{2\pi w}{K} + 6q^9 \sin \frac{3\pi w}{K} - \ldots}{1 - 2q \cos \frac{\pi w}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi w}{K} - 2q^9 \cos \frac{3\pi w}{K} + \ldots}.$$

Hieraus folgt

$$Z(-w) = -Z(w), \quad Z(0) = 0, \quad Z(mK) = 0, \quad Z(w + 2K) = Z(w),$$

Da ferner bekanntlich

$$\vartheta \frac{\pi}{2K}(w + 2iK') = -e^{\pi \frac{K'}{K} i - \frac{\pi w}{K}} \vartheta \frac{\pi w}{2K},$$

so folgt, indem man beiderseits die Logarithmen nimmt und differenzirt,

$$Z(w + 2iK') = Z(w) - i\frac{\pi}{K}.$$

Ersetzt man hier w durch $-w$, so erhält man

$$Z(w - 2iK') = Z(w) + i\frac{\pi}{K}.$$

5. Geht z auf der zweiblätterigen RIEMANN'schen Fläche für $\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}$ geradlinig von 0 bis 1, so durchläuft w die reale Achse von 0 bis K, geht z im untern Blatte geradlinig zurück bis 0, so geht w auf der realen Achse weiter bis $2K$. Für diesen Weg ist unzweideutig

$$\int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz = \int_0^w \Delta^2 am w\, dw = \mathfrak{E}(m)\,.$$

Das links stehende LEGENDRE'sche Integral zweiter Art erlangt auf dem angegebenen Wege den Werth $2E$.

Da nun $Z(2K) = 0$ ist, so folgt

$$2E = \left[1 - \frac{\pi^2}{4K^2}\cdot\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}\right]2K;$$

folglich ist

$$1 - \frac{\pi^2}{4K^2}\cdot\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} = \frac{E}{K},$$

und daher

1. $$\mathfrak{E}(w) = \frac{E}{K}w + Z(w),$$

Rückt z auf der realen Achse von 0 bis vor 1, umgeht den Punkt 1 in negativer Drehrichtung in einem verschwindend kleinen Halbkreise, geht dann (auf demselben Rande der realen Achse wie von 0 bis 1) geradlinig weiter bis vor $1:k$, umkreist diesen Punkt in negativer Drehrichtung und kehrt hierauf (jenseits der von 1 bis $1:k$ liegenden Verwachsung) geradlinig bis zu 1 zurück, so durchläuft w geradlinig die reale Achse von 0 bis K, und dann eine Normale zur realen bis zum Punkte $K - 2iK'$. Es ist daher für diese Wege

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz + 2\int_1^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz = \frac{E}{K}(K - 2iK') + i\frac{\pi}{K},$$

da $$Z(K-2iK') = Z(K) + i\frac{\pi}{K} = i\frac{\pi}{K}.$$

Das zweite Integral links ist bekanntlich (§ 16, No. 19)

$$i(E' - K').$$

Daher folgt

$$E + 2i(E' - K') = \frac{E}{K}(K - 2iK') + i\frac{\pi}{K}.$$

Dies reducirt sich auf die von LEGENDRE auf anderm Wege gefundene Beziehung zwischen den vollständigen elliptischen Integralen K, K', E, E'

$$KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

Die Gleichung $z = \sin am\, w$ hat, wenn z einen Punkt der zweiblätterigen RIEMANN'schen Fläche bezeichnet, für w die Wurzeln

$$w + 4mK + i\cdot 2nK',$$

wenn unter w irgend eine Wurzel dieser Gleichung verstanden wird. Die rechte Seite in 1. nimmt hierfür die unendlich vielen Werthe an

$$\frac{E}{K}(w + 4mK + i\cdot 2nK') + Z(w) - i\frac{n\pi}{K}.$$

Setzt man hier nach der LEGENDRE'schen Gleichung

$$\frac{\pi}{K} = 2E' + 2E\frac{K'}{K} - 2K',$$

so erhält man

$$\frac{E}{K}w + Z(w) + 4mE - n\cdot 2i(E' - K')\,.$$

Daher ist die rechte Seite von 1. in derselben Weise unendlich vieldeutig, wie das Integral

$$\int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz\,.$$

Die Gleichung

$$2.\qquad \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz = \frac{E}{K}w + Z(w)\,,\qquad z = sin\,am\,w\,.$$

ist daher erschöpfend, beide Seiten stellen dieselbe Gruppe von doppelt unendlich vielen Werthen dar mit den Periodicitätsmoduln $4E$ und $2i(E'-K')$.

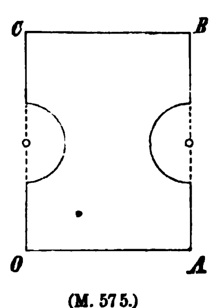
6. Um für $\mathfrak{E}(w)$ und $Z(w)$ eine FOURIER'sche Entwicklung zu erhalten, suchen wir eine solche zunächst für die Function $sin^2 am\,w$. Zu diesem Zwecke haben wir das geradlinige Integral zu ermitteln

$$\int_0^{2K} sin^2 am\,w\,e^{-\frac{n\pi w}{K}i}\,dw\,,$$

da $sin^2\,am\,w$ die reale Periode $2K$ hat. Wir integriren die Function

$$sin^2 am\,w\cdot e^{-\frac{n\pi w}{K}i}$$

entlang des Perimeters eines Rechtecks, dessen Ecken $OABC$ der Reihe nach $w=0,\ 2K,\ 2K+2iK',\ 2iK'$ sind und umgehen dabei die Ausnahmepunkte iK' und $2K+iK'$ durch verschwindende Halbkreise. In gleich weit von der realen Achse entfernten Punkten von OC und AB hat die zu integrirende Function denselben Werth, die auf diese Strecken bezüglichen Theile des Integrals verschwinden daher. In gleichweit von der imaginären Achse entfernten Punkten von OA und CB hat $sin\,am\,w$ denselben Werth; für die Punkte CB tritt aber infolge der Exponentialgrösse der Faktor hinzu



(M. 575.)

$$e^{\frac{2n\pi K'}{K}} = q^{-2n}\,;$$

es ist somit

$$\int(OA) + \int(BC) = (1-q^{-2n})\int(OA)\,.$$

Statt der beiden Halbkreise um iK' und $2K+iK'$ kann ein Kreis um iK' gesetzt werden. Für dieses Kreisintegral J setzen wir

$$w = iK' + \zeta\,,\qquad \zeta = re^{i\varphi}\,,$$

und haben

$$-J = \int_0^{2\pi}\frac{1}{k^2\,sin^2 am\zeta}\cdot q^{-n}\cdot e^{-\frac{n\pi\zeta}{K}i}\cdot i\zeta\cdot d\varphi\,.$$

Wird die Exponentialgrösse durch eine Potenzreihe ersetzt, so ergiebt sich

$$-J = \frac{1}{k^2q^n}\left[i\int_0^{2\pi}\frac{\zeta}{sin^2 am\zeta}\,d\varphi + \frac{n\pi}{K}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^2}{sin^2 am\zeta}\,d\varphi \right.$$
$$\left. -\,i\,\frac{n^2\pi^2}{2K^2}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^2}{sin^2 am\zeta}\,\zeta d\varphi - \ldots\ldots\right].$$

Das erste Integral rechts stimmt bis auf einen constanten Faktor mit dem Kreisintegrale für die Function $sin^2 am w$ überein, von dem wir bewiesen haben, dass es verschwindet; das dritte und alle folgenden verschwinden, wenn wir zur Grenze für $\zeta = 0$ übergehen, da die zu integrirende Function verschwindet; das zweite liefert bei diesem Grenzübergange einen nicht verschwindenden endlichen Werth, und wir erhalten

$$lim J = -\frac{2n\pi^2}{k^2 K q^n}.$$

Daher ergiebt sich schliesslich

$$\int_0^2 sin^2 am w e^{-\frac{n\pi w}{K}i} dw = -\frac{2\pi^2}{k^2 K} \cdot \frac{nq^n}{1-q^{2n}},$$

$$a_n = \frac{\pi^2}{k^2 K^2} \cdot \frac{nq^n}{1-q^{2n}}.$$

Hieraus folgt

$$a_n - a_{-n} = 0, \quad a_n + a_{-n} = -\frac{\pi^2}{k^2 K^2} \cdot \frac{2nq^n}{1-q^{2n}}.$$

Für $n = 0$ ergiebt sich

$$a_0 = \frac{1}{2K}\int_0^{2K} sin^2 am w dw = \frac{1}{2k^2 K}\int_0^{2K}(1 - \Delta^2 am w)\, dw = \frac{K-E}{k^2 K}.$$

Wir haben somit

$$1.\ sin^2 am w = \frac{K-E}{k^2 K} - 2\frac{\pi^2}{k^2 K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}cos\frac{\pi w}{K} + \frac{2q^2}{1-q^4}cos\frac{2\pi w}{K} + \frac{3q^3}{1-q^6}cos\frac{3\pi w}{K} + \ldots\right).$$

Da nun

$$\mathfrak{E}(w) = \int_0^w \Delta^2 am w dw = w - k^2 \int_0^w sin^2 am w dw,$$

so ergiebt sich

$$2.\quad \mathfrak{E}(w) = \frac{E}{K}w + \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2} sin\frac{\pi w}{K} + \frac{q^2}{1-q^4} sin\frac{2\pi w}{K} + \ldots\right)$$

Hieraus folgt noch

$$3.\quad Z(w) = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2} sin\frac{\pi w}{K} + \frac{q^2}{1-q^4} sin\frac{2\pi w}{K} + \frac{q^3}{1-q^6} sin\frac{3\pi w}{K} + \ldots\right).$$

7. Nach No. 3 2, ist

$$1.\quad \Pi(w, k, \alpha) = Z(\alpha)\cdot w + \tfrac{1}{2}l\frac{\vartheta\frac{\pi(w-\alpha)}{2K}}{\vartheta\frac{\pi(w+\alpha)}{2K}}.$$

Vertauscht man Parameter und Amplitude, so entsteht

$$\Pi(\alpha, k, w) = Z(w)\cdot\alpha + \tfrac{1}{2}l\frac{\vartheta\frac{\pi(\alpha-w)}{2K}}{\vartheta\frac{\pi(\alpha+w)}{2K}}.$$

Durch Subtraction ergiebt sich hieraus in Rücksicht darauf, dass $\vartheta(z-\zeta) = \vartheta(\zeta - z)$ die Beziehung

$$2.\quad \Pi(w, k, \alpha) - \Pi(\alpha, k, w) = wZ(\alpha) - \alpha Z(w).$$

Diese Gleichung lehrt, wie man ein Integral dritter Art durch ein anderes ausdrücken kann, in welchem der Modul gegen die Amplitude vertauscht ist.

Ist $w = K$, so wird das Integral dritter Art als vollständig bezeichnet. Nach 2. ist

$$\Pi(K, k, \alpha) = \Pi(\alpha, k, K) + KZ(\alpha) - \alpha Z(K).$$

Da nun

$$\Pi(\alpha, k, K) = 0, \quad Z(K) = 0,$$

so folgt die zur Berechnung eines vollständigen elliptischen Integrals dritter Art brauchbare Gleichung

3. $$\Pi(K, k, \alpha) = KZ(\alpha),$$

die auch sofort aus 1. gewonnen werden kann.

8. Das LEGENDRE'sche Integral dritter Art ist mit dem JACOBI'schen durch die Gleichung verbunden

1. $$\int_0^z \frac{dz}{(1 + \lambda z^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = w + \frac{tang\, am\, \alpha}{\Delta\, am\, \alpha}\, \Pi(w, k, \alpha),$$

$$sin\, am\, w = z, \quad sin^2\, am\, \alpha = -\frac{\lambda}{k^2}.$$

Ist λ negativ und $-\lambda > k^2$, so ist $-\lambda : k^2$ ein unechter Bruch, mithin α complex; ist λ positiv, so ist $sin\, am\, \alpha$ und daher auch α rein imaginär. In beiden Fällen ist, wie überhaupt bei realem λ, das LEGENDRE'sche Integral Π_0 real mit w, während in 1. rechts ein nicht realer Parameter α vorkommt.

Wir wollen zeigen, wie man die imaginäre Form in diesen Fällen vermeiden kann. Wir untersuchen zunächst das besondere Integral

$$\int_0^z \frac{dz}{(1 - z^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}};$$

hier ist $\lambda = -1$, also

$$sin\, am\, \alpha = \frac{1}{k}, \quad \alpha = K + iK'.$$

Nun ist

$$\Pi(w, k, K + iK') = wZ(K + iK') + \tfrac{1}{2} l \frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w - K - iK')}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w + K + iK')}.$$

Damit w den Werth $K + iK'$ annehme, hat z von 0 bis 1 zu gehen, den Punkt 1 in einem verschwindenden Halbkreise in der Richtung der abnehmenden Winkel zu umgehen und dann geradlinig die Strecke bis $1 : k$ zurückzulegen. Daher ist

$$Z(K + iK') = \int_0^{K+iK'} \Delta^2\, am\, w\, dw - \frac{E}{K}(K + iK')$$
$$= E - i(E' - K') - E - i\frac{EK'}{K}$$
$$= -i\left(E' + \frac{EK'}{K} - K'\right).$$

Ferner ist bekanntlich

$$\frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w - K - iK')}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w + K + iK')} = \frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(K + iK' - w)}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(K + iK' + w)} = e^{\frac{i\pi w}{K}} \cdot \frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w - K)}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w + K)} = e^{\frac{i\pi w}{K}}.$$

Mithin ist

$$\Pi(w, k, K + iK') = \frac{iw}{K}\left(\frac{\pi}{2} - E'K - EK' + KK'\right) = 0.$$

Da nun auch $\Delta am(K + iK') = 0$, so nimmt das Glied

$$\frac{tang\,am\,(K + iK')}{\Delta\,am(K + iK')}\,\Pi(w, k, K + iK')$$

die Form $0:0$ an. Um den Grenzwerth des Ausdrucks zu bestimmen, haben wir den Quotienten von

$$\frac{\partial \Pi(w, k, \alpha)}{\partial \alpha} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Delta\,am\,\alpha}{\partial \alpha}$$

für den Werth $\alpha = K + iK'$ zu ermitteln.

Aus $$\Pi(w, k, \alpha) = \Pi(\alpha, k, w) + wZ(\alpha) - \alpha Z(w)$$

folgt

$$1.\quad \frac{\partial \Pi(w, k, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{k^2 \sin am w \cos am w\, \Delta am w \sin^2 am \alpha}{1 - k^2 \sin^2 am w \sin^2 am \alpha} + wZ'(\alpha) - Z(w).$$

Da $$Z(\alpha) = \int_0^\alpha \Delta^2 am w\, dw - \frac{E}{K}\alpha,$$

so ist $$Z'(\alpha) = \Delta^2 am \alpha - \frac{E}{K}.$$

Macht man hiervon in 1. Gebrauch und setzt

$$\sin am \alpha = \frac{1}{k}, \quad \text{also} \quad \cos am \alpha = \frac{ik'}{k}, \quad \Delta am \alpha = 0,$$

so entsteht

$$\left[\frac{\partial \Pi(w, k, \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{(\alpha = K + iK')} = tang\,am w\, \Delta am w - \mathfrak{E}(w).$$

Ferner ist

$$\frac{\partial \Delta\,am\,\alpha}{\partial \alpha} = -k^2 \sin am \alpha \cos am \alpha.$$

Für $\alpha = K + iK'$ ergiebt dies $(-ik')$. Da nun

$$tang\,am(K + iK') = \frac{1}{ik'},$$

so folgt schliesslich

$$2.\quad \int_0^z \frac{dz}{(1 - z^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}} = w + \frac{1}{k'^2}\left[tang\,am w\, \Delta am w - \mathfrak{E}(w)\right],$$

ein Resultat, von dessen Richtigkeit man sich durch Differentiation leicht überzeugt.

9. Auf dieses Integral lassen sich die Functionen $Z(w)$ und $\mathfrak{E}(w)$ im Falle eines rein imaginären Arguments reduciren; denn es ist

$$Z(iv) = \mathfrak{E}(iv) - i\cdot\frac{E}{K}v,$$

$$\mathfrak{E}(iv) = \int_0^{iy} \sqrt{\frac{1 - k^2z^2}{1 - z^2}}\, dz, \quad \text{wobei} \quad y = tang\,am(v, k').$$

Ersetzt man hier z durch iy, so entsteht

$$\mathfrak{E}(iv) = i\int_0^y \sqrt{\frac{1 + k^2y^2}{1 + y^2}}\, dy.$$

Die Substitution $y = tang\varphi$, also $\varphi = am(v, k')$, giebt

$$\mathfrak{E}(iv) = i\int_0^\varphi \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$= i\int_0^\varphi \frac{(1 - k'^2\sin^2\varphi)\,d\varphi}{(1 - \sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi, k')}$$

$$= ik'^2\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k')} + ik^2\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - \sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi, k')}.$$

Daher folgt schliesslich in Rücksicht auf No. 8, 2

$$\mathfrak{E}(iv) = ik'^2 v + ik^2 v + i\frac{k^2}{k'^2}[\operatorname{tang} am(v, k')\,\Delta am(v, k') - \mathfrak{E}(v, k')]$$

$$= iv + i\frac{k^2}{k'^2}[\operatorname{tang} am(v, k')\,\Delta am(v, k') - \mathfrak{E}(v, k')],$$

$$Z(iv) = i\cdot\frac{K - E}{K}v + i\cdot\frac{k^2}{k'^2}[\operatorname{tang} am(v, k')\,\Delta am(v, k') - \mathfrak{E}(v, k')].$$

10. Ist λ negativ und $-\lambda > 1$, so folgt, wenn $-\lambda = \mu^2$ gesetzt wird, aus

$$\sin am\,\alpha = \frac{\mu}{k},$$

dass α von der Form $K + iK' + \beta$ ist. Da nun

$$\sin am(K + iK' + \beta) = \frac{1}{k \sin am(K + \beta)} = \frac{\Delta am\beta}{k \cos am\beta},$$

so dient zur Bestimmung von β die Gleichung

$$\Delta am\beta = \mu \cos am\beta,$$

aus welcher hervorgeht

$$1.\qquad \sin am\beta = \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 - k^2}};$$

nach der Voraussetzung über μ ist der Radicand ein positiver echter Bruch. Man hat nun

$$\Pi(w, k, K + iK' + \beta) = wZ(K + iK' + \beta) + \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w + K + iK' + \beta)}{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w - K - iK' - \beta)}.$$

Aus den Gleichungen § 19, No. 2, 7 folgt

$$\vartheta\frac{\pi}{2K}(K + iK' + \beta) = \vartheta_3\frac{\pi}{2K}(iK' + \beta) = e^{\frac{1}{4}\rho - \frac{i\pi\beta}{2K}}\vartheta_2\frac{\pi\beta}{2K};$$

Also ist

$$\vartheta\frac{\pi}{2K}(w + K + iK' + \beta) = e^{\frac{1}{4}\rho - \frac{i\pi(\beta + w)}{2K}}\vartheta_2\frac{\pi(\beta + w)}{2K},$$

$$\vartheta\frac{\pi}{2K}(w - K - iK' - \beta) = e^{\frac{1}{4}\rho - \frac{i\pi(\beta - w)}{nK}}\vartheta_2\frac{\pi}{2K}(\beta - w).$$

Hieraus folgt

$$Z(K + iK' + \beta) = -\frac{i\pi}{2K} + \frac{D_\beta\vartheta_2\frac{\pi\beta}{2K}}{\vartheta_2\frac{\pi\beta}{2K}},$$

$$\Pi(w, k, K + iK' + \beta) = \frac{D_\beta\vartheta_2\frac{\pi\beta}{2K}}{\vartheta\frac{\pi\beta}{2K}} + \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{\vartheta_2\frac{\pi(\beta + w)}{2K}}{\vartheta_2\frac{\pi(\beta - w)}{2K}}.$$

Ferner ist

$$\cos am(K + iK' + \beta) = -i \frac{\Delta am(K+\beta)}{k \sin am(K+\beta)},$$

$$\Delta am(K + iK' + \beta) = -i \frac{\cos am(K+\beta)}{\sin am(K+\beta)}$$

und daher

$$\frac{tang\, am(K + iK' + \beta)}{\Delta\, am(K + iK' + \beta)} = -\frac{tang\, am(K+\beta)}{\Delta am(K+\beta)} = \frac{\Delta am \beta}{tang\, am \beta}.$$

Somit haben wir schliesslich

$$\int_0^z \frac{dz}{(1 - \mu^2 z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

$$= w + \frac{\Delta am\beta}{tang\, am\beta}\left\{\frac{D_\beta \vartheta_2 \frac{\pi\beta}{2K}}{\vartheta_2 \frac{\pi\beta}{2K}} + \frac{1}{2} l \frac{\vartheta_2 \frac{\pi(\beta+w)}{2K}}{\vartheta_2 \frac{\pi(\beta-w)}{2K}}\right\},$$

wobei also

$$\mu > 1, \quad z = \sin am w, \quad \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 - k^2}} = \sin am \beta.$$

11. Wir wenden uns nun zu dem LEGENDRE'schen Integrale dritter Art für den Fall eines positiven λ. Setzen wir jetzt $\lambda = \mu^2$, wo nun μ real ist, so ist

$$\sin am\, \alpha = i \cdot \frac{\mu}{k};$$

setzt man $\alpha = i\beta$, so folgt zur Bestimmung des realen Werths β

$$tang\, am(\beta, k') = \frac{\mu}{k}, \qquad \sin am(\beta, k') = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + k^2}}.$$

Wir haben nun zunächst

$$\int_0^z \frac{dz}{(1 + \mu^2 z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = w + \frac{tang\, am(i\beta)}{\Delta am(i\beta)} \Pi(w, k, i\beta).$$

Nach § 18, No. 4 ist

$$\frac{tang\, am\, i\beta}{\Delta\, am\, i\beta} = \frac{i \sin am(\beta, k') \cdot \cos am(\beta, k')}{\Delta\, am(\beta, k')}.$$

Ferner ist

$$1. \qquad \Pi(w, K, i\beta) = w Z(i\beta) + \frac{1}{2} l \frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w + i\beta)}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w - i\beta)},$$

$$z(i\beta) = \frac{D_{i\beta}\, \vartheta \frac{\pi\beta}{2K} i}{\vartheta \frac{\pi}{2K} i} = \frac{1}{i} \frac{D_\beta\, \vartheta \frac{\pi}{2K} i}{\vartheta \frac{\pi}{2K} i}.$$

Da nun

$$2. \qquad \vartheta i z = \Sigma(-1)^n e^{-n^2\rho + 2nz},$$

so ist $\vartheta \frac{\pi\beta}{2K} i$ real, und man kann daher für die rechte Seite der vorletzten Gleichung $m : i$ setzen, wobei m real ist. Das elliptische Integral $\Pi(w, k, i\beta)$ ist für ein reales w rein imaginär; ersetzt man es durch iV, so entsteht aus 1.

$$i(V + mw) = \frac{1}{2} l \frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w + i\beta)}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w - i\beta)};$$

mithin ist

$$e^{i(V+mw)} = \left\{\frac{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w+i\beta)}{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w-i\beta)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$e^{-i(V+mw)} = \left\{\frac{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w-i\beta)}{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w+i\beta)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Durch Addition und Subtraction dieser beiden Gleichungen erhält man

$$3. \qquad \cos(V+mw) = \frac{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w+i\beta)+\vartheta\frac{\pi}{2K}(w-i\beta)}{2\sqrt{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w+i\beta)\cdot\vartheta\frac{\pi}{2K}(w-i\beta)}}$$

$$4. \qquad \sin(V+mw) = \frac{1}{2i}\cdot\frac{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w+i\beta)-\vartheta\frac{\pi}{2K}(w-i\beta)}{\sqrt{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w+i\beta)\cdot\vartheta\frac{\pi}{2K}(w-i\beta)}}.$$

Jede dieser Gleichungen ist dazu geschickt, V zu finden; es erübrigt nur noch, Zähler und Nenner in 3. und 4. in handlicher Form darzustellen.

Für den Nenner hat man nach § 19, No. 17

$$\vartheta(2)^2\vartheta\frac{\pi}{2K}(w+i\beta)\vartheta\frac{\pi}{2K}(w-i\beta) = \left(\vartheta\frac{\pi w}{2K}\cdot\vartheta\frac{\pi\beta}{2K}i\right)^2\left(1-k^2\sin^2 am\frac{\pi w}{2K}\sin^2 am\frac{\pi\beta i}{2K}\right).$$

Daher ist

$$5. \quad \vartheta\frac{\pi}{2K}(w+i\beta)\vartheta\frac{\pi}{2K}(w-i\beta) = \left[\frac{\vartheta\frac{\pi w}{2K}\cdot\vartheta\frac{\pi\beta}{2K}i}{\vartheta(0)}\right]^2\left[1+k^2\tang^2 am(\beta, k')\sin^2 am\frac{\pi w}{2K}\right].$$

hierbei hat man für $\vartheta\frac{\pi\beta}{2K}i$ die stark convergente Reihe

$$6. \qquad \vartheta\frac{\pi\beta}{2K}i = 1 - q\left(e^{\frac{\pi\beta}{K}}+e^{-\frac{\pi\beta}{K}}\right) + q^4\left(e^{\frac{2\pi\beta}{K}}+e^{-\frac{2\pi\beta}{K}}\right)$$
$$- q^9\left(e^{\frac{3\pi\beta}{K}}+e^{-\frac{3\pi\beta}{K}}\right) + q^{16}\left(e^{\frac{4\pi\beta}{K}}+e^{-\frac{4\pi\beta}{K}}\right) - \ldots$$

Ferner ist

$$\vartheta\frac{\pi}{2K}(w+i\beta) = 1 + \sum_1^\infty(-1)^n q^{n^2}\cos\frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}}+e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right)$$
$$- i\sum_1^\infty(-1)^n q^{n^2}\sin\frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}}-e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right),$$

$$e\frac{\pi}{2K}(w-i\beta) = 1 + \sum_1^\infty(-1)^n q^{n^2}\cos\frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}}+e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right)$$
$$+ i\sum_1^\infty(-1)^n q^{n^2}\sin\frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}}-e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right).$$

Daher ist

$$7. \qquad \frac{1}{2}\left[\vartheta\frac{\pi}{2K}(w+i\beta)+\vartheta\frac{\pi}{2K}(w-i\beta)\right] = 1+\sum_1^\infty(-1)^n q^{n^2}\cos\frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}}+e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right),$$
$$\frac{1}{2i}\left[\vartheta\frac{\pi}{2K}(w+i\beta)-\vartheta\frac{\pi}{2K}(w-i\beta)\right] = -\sum_1^\infty(-1)^n q^{n^2}\sin\frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}}-e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right).$$

Durch die Gleichungen 3 bis 7 ist V bestimmt.

12. Wir haben nun noch den Fall zu erledigen, dass λ negativ ist und $-\lambda$ zwischen k^2 und 1 liegt; unter dieser Voraussetzung ist α von der Form $K+i\beta$ und β bestimmt sich, wenn $-\lambda$ durch μ^2 ersetzt wird, aus

$$sin\,am(K+i\beta) = \frac{cos\,am\,i\beta}{\Delta\,am\,i\beta} = \frac{1}{\Delta\,am(\beta, k')} = \frac{\mu}{k},$$

woraus folgt

$$sin\,am(\beta, k') = \frac{\sqrt{\mu^2 - k^2}}{k}.$$

Nun ist

1. $$\int_0^z \frac{dz}{(1-\mu^2 z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = w + \frac{tang\,am(K+i\beta)}{\Delta\,am(K+i\beta)}\Pi(w, k, K+i\beta),$$

$$\frac{tang\,am(K+i\beta)}{\Delta\,am(K+i\beta)} = -\frac{\Delta\,am(i\beta)}{k'^2\,tang\,am(i\beta)} = \frac{i}{k'^2}\cdot\frac{\Delta\,am(\beta, k')}{sin\,am(\beta, k')\,cos\,am(\beta, k')},$$

2. $$\Pi(w, k, K+i\beta) = wZ(K+i\beta) + \tfrac{1}{2}l\frac{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w+K+i\beta)}{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w-K-i\beta)}.$$

Zur weiteren Reduction bemerken wir zunächst, dass

3. $$Z(K+i\beta) = \frac{1}{i}\frac{D_\beta\vartheta\frac{\pi}{2K}(K+i\beta)}{\vartheta\frac{\pi}{2K}(K+i\beta)} = \frac{1}{i}\frac{D_\beta\vartheta_3\frac{\pi\beta}{2K}i}{\vartheta_3\frac{\pi\beta}{2K}i}$$

$$\vartheta_3\frac{\pi\beta}{2K}i = 1 + \sum_1^\infty q^{n^2}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right);$$

ferner, dass

$$\vartheta\frac{\pi}{2K}(w+K+i\beta) = \vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w+i\beta),$$

$$\vartheta\frac{\pi}{2K}(w-K-i\beta) = \vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w-i\beta).$$

Der zweite Theil der rechten Seite in Gleichung 1. ist für $z^2 < 1$ real, folglich ist $\Pi(w, k, K+i\beta)$ rein imaginär; ersetzen wir es zur Abkürzung durch iV, sowie $Z(K+i\beta)$ durch $m:i$, worin nun m eine reale bekannte Zahl ist, die sich aus 3. bestimmt, so haben wir für V die Gleichung

$$e^{i(V+mw)} = \left(\frac{\vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w+i\beta)}{\vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w-i\beta)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

woraus weiter folgt

4. $$cos(V+mw) = \frac{\vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w+i\beta) + \vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w-i\beta)}{2\sqrt{\vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w+i\beta)\,\vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w-i\beta)}},$$

$$sin(V+mw) = \frac{\vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w+i\beta) - \vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w-i\beta)}{2i\sqrt{\vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w+i\beta)\,\vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w-i\beta)}}.$$

Ersetzt man in § 18, No. 20, 17 z durch $\frac{1}{2}\pi + z$, so erhält man

$$\frac{\vartheta(0)^2}{\vartheta_3(z)^2\,\vartheta(\zeta)^2}\cdot\vartheta_3(z+\zeta)\,\vartheta_3(z-\zeta) = 1 - k^2\,\frac{\cos^2 am z}{\Delta^2 am z}\cdot\sin^2 am\zeta\,.$$

Die Substitution $z = \frac{\pi w}{2K}$, $\zeta = \frac{\pi\beta}{2K}\,i$ liefert hieraus

$$5.\quad \vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w+i\beta)\,\vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w-i\beta) = \left[\frac{\vartheta_3\frac{\pi w}{2K}\,\vartheta\frac{\pi\beta i}{2K}}{\vartheta(0)}\right]^2\left[1+k^2\frac{\cos^2 am z}{\Delta^2 am z}\tang^2 am(\beta, k')\right]\cdot$$

Ferner ist

$$\vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w+i\beta)$$
$$= 1 + \sum_1^\infty q^{n^2}\cos\frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right) = i\sum_1^\infty q^{n^2}\sin\frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} - e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right),$$

$$\vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w-i\beta)$$
$$= 1 + \sum_1^\infty q^{n^2}\cos\frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right) - i\sum_1^\infty q^{n^2}\sin\frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} - e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right).$$

Hieraus folgt

$$6.\quad \begin{aligned}\frac{1}{2}\left[\vartheta_3\frac{\pi}{K}(w+i\beta) + \vartheta_3\frac{\pi}{K}(w-i\beta)\right] &= 1 + \sum_1^\infty q^{n^2}\cos\frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right),\\ \frac{1}{2i}\left[\vartheta_3\frac{\pi}{K}(w+i\beta) - \vartheta_3\frac{\pi}{K}(w-i\beta)\right] &= -\sum_1^\infty q^{n^2}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} - e^{-\frac{n\beta\pi}{K}}\right).\end{aligned}$$

Durch die Gleichungen 1. bis 6. wird das Problem vollständig gelöst*).

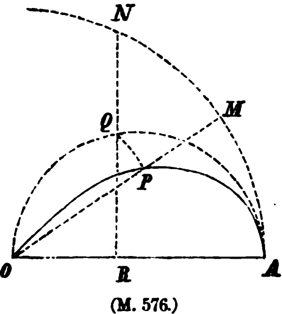
Wir müssen es uns versagen, den Leser tiefer in die Theorie der elliptischen Functionen einzuführen und verweisen hierfür auf die citirten Werke; in dem zuletzt angeführten findet man ausführliche Nachweise über die reichhaltige Literatur dieses wichtigen Abschnitts der Analysis.

§ 22. Geometrische Anwendungen der elliptischen Integrale.

1. Rectification der Lemniscate. Die Gleichung der Lemniscate in Polarcoordinaten ist

$$r = a\sqrt{\cos 2\omega}\,,$$

wenn mit ω der Winkel des Radius vector r mit der Achse der Lemniscate bezeichnet wird.



(M. 576.)

Die Construction der Curve erfolgt in einfachster Weise, indem man um O mit $OA = a$ einen Kreis beschreibt, denselben mit einem Radius vector in M schneidet, $MN = AM$ macht, und mit $NQ \perp OA$ durchschneidet; alsdann ist $OR = a\cos 2\omega$, mithin $OQ = a\sqrt{\cos 2\omega}$; macht man daher $OP = OQ$, so ist P ein Punkt der Lemniscate.

Wir bezeichnen den Winkel AOQ als Amplitude φ des Lemniscatenpunkts P; für diesen Winkel ist

$$\sin\varphi = \frac{AQ}{OA} = \frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a} = \sqrt{2}\cdot\sin\omega\,.$$

---

*) Vergl. Enneper, Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Halle 1876, § 34. Die verschiedenen Formen der elliptischen Integrale 3. Gattung.

Der von A bis P reichende Lemniscatenbogen hat die Länge

$$s = a\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}} = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Also ist

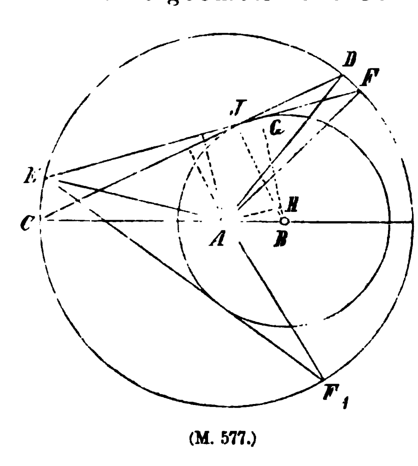
$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

und der Lemniscatenquadrant S

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}}F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Soll die Summe zweier Lemniscatenbogen s_1 und s_2 einem dritten Lemniscatenbogen s gleich sein, so müssen die Amplituden φ_1, φ_2, φ durch eine der äquivalenten Gleichungen verbunden sein, welche das Additionstheorem enthalten.

2. Wir wollen bei dieser Gelegenheit zeigen, wie das **Additionstheorem durch eine geometrische Construction** erledigt werden kann.



(M. 577.)

Man zeichne zwei Kreise, einen mit Centrum A und Radius R, den andern im Innern des ersteren mit Radius r; der Abstand AB der Centra sei h. Im grösseren Kreise ziehe man zwei Sehnen BD und EF, die den kleineren berühren.

Sind α, β, γ die Winkel DAC, EAC, FAC und $AH \perp GB$, so hat man $BG = HG + BH$, d. i. $r = R\cos(\gamma-\beta) + h\cos(\gamma+\beta)$,

$$= (R+h)\cos\beta\cos\gamma + (R-h)\sin\beta\sin\gamma.$$

Ferner folgt aus CBJ

1. $$r = (R+h)\cos\alpha,$$

daher ist

2. $$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \frac{R-h}{R+h}\sin\beta\sin\gamma.$$

Man kann nun h immer so bestimmen, dass für einen gegebenen Modul $k < 1$

3. $$\frac{R-h}{R+h} = \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha};$$

es folgt nämlich hieraus

4. $$h = R\cdot\frac{1-\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}{1+\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}.$$

Man sieht, dass dieser Werth von h kleiner als R ist, und dass nach 3. $R-h$ grösser ist als $(R+h)\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, also grösser als r; es wird also immer mit willkürlich gewählten R und α und aus 4. und 1. bestimmten h und r die Figur mit der vorausgesetzten Anordnung der Kreise erhalten. Führt man nun 3. in 2. ein, so erhält man

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\,\Delta(\alpha).$$

Dies ist aber bekanntlich die Bedingung, unter welcher

1. $$F(\alpha, k) + F(\beta, k) = F(\gamma, k).$$

Sind nun k, α, β gegeben, γ gesucht, so wähle man R beliebig, construire dann h und r nach 4. und 2., mache $EAC = 2\beta$, und ziehe von E die Gerade EF so, dass sie den kleinen Kreis berührt; alsdann ist $\gamma = \frac{1}{2}FAC$.

Die zweite von E an den kleinen Kreis gelegte Tangente EF_1 bestimmt einen Winkel $\gamma = \frac{1}{2}CAF_1$, der die Aufgabe löst

$$F(\alpha, k) - F(\beta, k) = F(\gamma, k).$$

Zieht man von F aus eine Tangente F' an den kleinen Kreis, von F' aus eine Tangente $F'F''$ u. s. w. und bezeichnet die Winkel, die AF', AF'' AF''' u. s. w. mit AC bilden, mit $2\gamma_1$, $2\gamma_2$, $2\gamma_3$ u. s. w., so hat man

$$F(\alpha) + F(\beta) = F(\gamma),$$
$$F(\alpha) + F(\gamma) = F(\gamma_1),$$
$$F(\alpha) + F(\gamma_1) = F(\gamma_2),$$
$$F(\alpha) + F(\gamma_2) = F(\gamma_3),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Hieraus folgt durch Addition

$$F(\gamma_n) = (n+1)F(\alpha) + F(\beta),$$

oder, wenn $\beta = 0$, also $E \equiv C$ ist,

$$F(\gamma_n) = (n+1)F(\alpha).$$

Hierdurch ist die Aufgabe gelöst: Durch Constructionen von geraden Linien und Kreisbogen die Amplitude eines Lemniscatenbogens zu erhalten, der gleich der Summe oder der Differenz der zu gegebenen Amplituden gehörigen Lemniscatenbogen ist; oder der gleich einem ganzzahligen Vielfacheu des zu einer gegebenen Amplitude gehörigen Lemniscatenbogens ist.

3. Die Aufgabe, einem (in A anfangenden) Lemniscatenbogen in eine Anzahl gleicher Theile zu theilen, ist der geometrische Ausdruck der arithmetischen Aufgabe, $\sin am \frac{1}{n} w$ durch n, k und elliptische Functionen von w auszudrücken. Zur Lösung dieses Problems wird man zunächst durch wiederholte Anwendung der Gleichungen für $\sin am(w + w_1)$, $\cos am(w + w_1)$, $\Delta am(w + w_1)$ die Functionen $\sin am\, n w$, $\cos am\, n w$, oder $\Delta am\, n w$ durch w ausdrücken; man erhält so eine Gleichung, welche elliptische Functionen von w mit einer von $n w$ algebraisch verknüpft. Ersetzt man nun hierin $n w$ durch w, also w durch $w : n$, so erhält man durch Auflösung dieser Gleichung eine Function von $w : n$ durch w ausgedrückt.

Diese aufzulösende Gleichung ist bereits für den $n = 2$ vom 8. Grade. Wir müssen hier darauf verzichten, die allgemeine Gleichung des Divisionsproblems aufzustellen, und ihre algebraische Lösbarkeit nachzuweisen*), und geben nur die Lösung für den einfachsten Fall.

Setzt man in

$$\cos am 2w = \frac{\cos^2 am\, w - \sin^2 am\, w\, \Delta^2 am\, w}{1 - k^2 \sin^4 am\, w},$$

w für $2w$ und z für $\sin am \frac{1}{2} w$, so erhält man für z die Gleichung

1. $$(1 - k^2 z^4) \cos^2 am\, w = 1 - 2z^2 + k^2 z^4,$$

aus welcher folgt

2. $$z = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 am\, w}}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 am\, w}}}.$$

Die vier Auflösungen der Gleichung 1. sind

$$\sin am \frac{w}{2}, \quad \sin am\left(\frac{w}{2} + 2K\right), \quad \sin am\left(\frac{w}{2} + iK'\right), \quad \sin am\left(\frac{w}{2} + 2K + iK'\right).$$

Ausdrücke, welche ausser rationalen Grössen nur Quadratwurzeln enthalten, lassen sich bekanntlich mit Lineal und Zirkel construiren. Ohne auf die Einzelheiten einer solchen Construction weiter einzugehen, können wir daher den Satz

*) Vergl. KÖNIGSBERGER, Vorl. über die Theorie d. ell. Funct. 2 Bd. pag. 210.

aussprechen: Ein Lemniscatenbogen kann durch Lineal und Zirkel in 2^n gleiche Theile getheilt werden.

4. Rectification der Ellipse. Werden die rechtwinkligen Coordinaten eines Ellipsenpunktes mit Hülfe eines Winkels φ durch die Gleichungen ausgedrückt

$$x = a\sin\varphi, \quad y = b\cos\varphi,$$

so ist ein vom Endpunkte der kleinen Achse an gerechneter Bogen der Ellipse

$$s = \int_0^\varphi \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi .$$

Bezeichnet man die numerische Excentricität $\sqrt{a^2 - b^2} : a$ mit k, so erhält man

$$s = aE(\varphi, k).$$

Alle auf Integrale zweiter Art bezüglichen Sätze finden also ihre geometrische Deutung als Sätze über Ellipsenbogen. Das Additionstheorem

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma) = k^2 \sin\sigma \sin\varphi \sin\psi$$

lehrt: Zu zwei gegebenen Ellipsenbogen s und s_1 lässt sich immer ein dritter s_2 construiren, so dass das Trinom

$$s + s_1 - s_2$$

geometrisch construirt werden kann.

Nimmt man insbesondere $\sigma = \frac{1}{2}\pi$, so ist s_2 ein Ellipsenquadrant und daher $s_2 - s_1$ ein Ellipsenbogen s', der vom Endpunkte der grossen Achse ausgerechnet wird. In diesem Falle hat man

$$s - s' = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin\varphi \sin\psi$$

$$\sin\psi = \frac{\cos\varphi \Delta\varphi}{1 - k^2\sin^2\varphi} .$$

Man erhält so den Satz: Zu jedem in einem Scheitel beginnenden Theile eines Ellipsenquadranten lässt sich ein im andern Scheitel beginnender Theil construiren, so dass der Unterschied beider Theile construirbar ist.

5. Rectification der Hyperbel. Für die Coordinaten eines Hyperbelpunktes, bezogen auf die Symmetrieachsen, hat man

$$x = a\,\mathrm{cosec}\,\varphi, \quad y = b\cot\varphi,$$

und daher für den vom Scheitel anfangenden Bogen

$$1. \qquad s = \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{c^2 - a^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\, d\varphi .$$

Durch theilweise Integration erhält man

$$\int \frac{\Delta\varphi}{\sin^2\varphi}\, d\varphi = -\cot\varphi\Delta\varphi - k^2 \int \frac{\cos^2\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi .$$

Ferner ist

$$k^2 \frac{\cos^2\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi = -k'^2 \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \Delta\varphi\, d\varphi .$$

Daher hat man

$$2. \qquad \int \frac{\Delta\varphi}{\sin^2\varphi}\, d\varphi = -\cot\varphi\Delta\varphi + k'^2 \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int \Delta(\varphi)\, d\varphi .$$

Setzt man nun in 1.

$$k = a : c,$$

so erhält man durch 2.

$$\frac{1}{c}s = cot\varphi\sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi} + k'^2[K - F(\varphi, k)] - [E - E(\varphi, k)].$$

Der Abstand des Nullpunktes von der Hyperbelnormalen im Bogenendpunkte ist, wie man leicht erhält

$$p = c\frac{cot\varphi}{\Delta\varphi};$$

daher ist

$$s - p\Delta^2\varphi = ck'^2[K - F(\varphi, k)] - c[E - E(\varphi, k)].$$

Geht man hier zur Grenze $\varphi = 0$ über, so ergiebt sich links der Unterschied eines Hyperbelquadranten und der Asymptote, beide vom Nullpunkte aus gezählt; rechts ergiebt sich

$$c(k'^2 K - E).$$

6. Complanation von Oberflächentheilen der centrischen Flächen zweiten Grades. Die Gleichung einer centrischen Fläche zweiten Grades, bezogen auf die Hauptachsen, ist

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

woraus folgt

$$z = \sqrt{\frac{1 - Ax^2 - By^2}{C}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{Ax}{\sqrt{C(1 - Ax^2 - By^2)}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{By}{\sqrt{C(1 - Ax^2 - By^2)}}.$$

Bezeichnet ω den Winkel der Flächennormalen mit der XY-Ebene, so ist die Oberfläche

$$1. \qquad S = \int\int\frac{1}{sin\,\omega}dx\,dy, \quad sin\,\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Setzt man für $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ die obigen Werthe ein, so erhält man

$$2. \qquad sin\,\omega = \sqrt{\frac{C(1 - Ax^2 - By^2)}{C - A(C - A)x^2 - B(C - By^2)}}.$$

Behält man die rechtwinkeligen Coordinaten bei, so führt bereits die erste Integration auf elliptische Integrale, deren Modul die zweite Variable enthält; dadurch ergeben sich Schwierigkeiten, die man zu vermeiden suchen muss, indem man geeignete neue Coordinaten einführt.

Als solche empfehlen sich der Winkel ω und der Winkel φ, den die Projection der Normalen auf die XY-Ebene mit der X-Achse bildet. Die neuen Variabeln sind mit den bisherigen durch die Gleichungen verbunden

$$2. \qquad sin^2\omega = \frac{C(1 - Ax^2 - By^2)}{C - A(C - A)x^2 - B(C - B)y^2}, \quad tang\,\varphi = \frac{By}{Ax}.$$

Der letzten Gleichung wird identisch genügt, wenn man setzt

$$3. \qquad x = BR\cos\varphi, \quad y = AR\sin\varphi;$$

führt man diese Werthe in die erste ein, so folgt

$$4. \qquad R^2 = \frac{C}{AB}\cdot\frac{cos^2\omega}{BC cos^2\omega\, cos^2\varphi + AC cos^2\omega\, sin^2\varphi + AB sin^2\omega}.$$

Die Einführung der neuen Variabeln ergiebt nun zunächst

$$S = \int\int\frac{1}{sin\,\omega}\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi} - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\omega}\right)d\varphi\,d\omega.$$

Für die in Klammern stehende Determinante findet man

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \omega}$$

$$= AB \left[\frac{\partial R}{\partial \omega} \cos\varphi \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi} \sin\varphi + R\cos\varphi\right) - \frac{\partial R}{\partial \omega} \sin\varphi \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi} \cos\varphi - R\sin\varphi\right)\right]$$

$$= AB \cdot R \frac{\partial R}{\partial \omega} = AB \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial (R^2)}{\partial \omega}$$

$$= - \frac{ABC \sin\omega \cos\omega}{(BC\cos^2\omega\cos^2\varphi + CA\cos^2\omega\sin^2\varphi + AB\sin^2\omega)^2} .$$

Daher ist schliesslich

$$5. \quad S = \pm ABC \int\int \frac{\cos\omega \, d\omega \, d\varphi}{(BC\cos^2\omega\cos^2\varphi + CA\cos^2\omega\sin^2\varphi + AB\sin^2\omega)^2} .$$

Zur Orientirung über das Vorzeichen in Verbindung mit der Anordnung der Grenzen dient hier folgende Bemerkung. Die Fläche S ist stets positiv; wird nun für ω immer ein spitzer Winkel, und die unteren Grenzen kleiner als die oberen genommen, so ist das obere oder untere Zeichen zu wählen, je nachdem ABC positiv oder negativ ist.

Die relativ einfachsten Resultate wird man bei der Wahl bestimmter Variabeln immer erhalten, wenn man die Grenzen constant nimmt. In unserm Falle würde das die geometrische Bedeutung haben, dass wir das Stück der Fläche bestimmen, welches von zwei Curven begrenzt ist, längs deren jeder die Normalen gleiche Neigung gegen die XY-Ebene haben, und von zwei anderen, mit diesen in der Begrenzung abwechselnden Curven, längs deren jeder die Normalen einer bestimmten Verticalebene parallel sind.

Die Punkte, deren Normalen die gemeinsame Neigung ω gegen die XY-Ebene haben, haben als Horizontalprojection die Curve

$$\sin^2\omega = \frac{C(1 - Ax^2 - By^2)}{C - A(C-A)x^2 - B(C-B)y^2} ,$$

oder, besser geordnet

$$\frac{A(A\tan^2\omega + C)}{C} x^2 + \frac{B(B\tan^2\omega + B)}{C} y^2 = 1 .$$

Es ist bemerkenswerth, dass diese Curve auch der Durchschnitt der Fläche

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

mit dem Kegel zweiten Grades ist

$$A^2x^2 + B^2y^2 - (C\cot\omega)^2z^2 = 0 .$$

Lässt man ω von Null bis $\frac{1}{2}\pi$ wachsen, so zieht sich der Kegel, der anfangs mit der XY-Ebene zusammenfällt, enger und enger zusammen und fällt schliesslich mit der Z-Achse zusammen; dabei bedeckt sich die Fläche zweiten Grades mit Zonen von verscwindender Breite; an den beiden Rändern jeder solchen Zone haben die Normalen unendlich wenig verschiedene, längs desselben Randes constante Neigung.

Der Inhalt einer solchen Zone wird gefunden, wenn man in 5. die auf φ bezügliche Integration zwischen den Grenzen 0 und 2π ausführt; um die Zone φ zu erhalten, an deren Rändern die Normalen die Neigungen ω_0 und ω_1 haben, hat man alsdann die auf ω bezügliche Integration von ω_0 bis ω_1 zu erstrecken; es ist also

$$S = \pm ABC \int_{\omega_0}^{\omega_1}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\omega \, d\omega \, d\varphi}{(BC\cos^2\omega\cos^2\varphi + CA\cos^2\omega\sin^2\varphi + AB\sin^2\omega)^2} .$$

Um die erste Integration auszuführen, ersetzen wir

$$\sin^2\omega \quad \text{durch} \quad \sin^2\omega\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

und setzen zur Abkürzung

$$m = B(C\cos^2\omega + A\sin^2\omega)\,, \qquad n = A(C\cos^2\omega + B\sin^2\omega)\,;$$

dadurch geht das Integral über in

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \cos\omega\, d\omega \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(m\cos^2\varphi + n\sin^2\varphi)^2}\,.$$

Substituirt man hier $tang\varphi = t$, so erhält man

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{m\cos^2\varphi + n\sin^2\varphi)} = 4\int_0^{\infty} \frac{(1+t^2)\,dt}{(m+nt^2)^2} = \pi\cdot\frac{m+n}{mn\sqrt{mn}}\,,$$

mithin

$$S = \pm\,\pi ABC\cdot\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{mn}}\cdot\cos\omega\, d\omega\,.$$

Dieses Integral wird leicht auf elliptische reducirt. Ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beschränken, wollen wir voraussetzen, dass A und B gleiche Zeichen haben, dass bei dem Hyperboloiden A dem absoluten Werthe nach grösser als B ist und im Falle des Ellipsoids $A < B < C$ ist. Setzen wir

$$\alpha = \sqrt{1-\frac{A}{C}}\,, \qquad \beta = \sqrt{1-\frac{B}{C}}\,,$$

so sind α und β jederzeit real und $\alpha > \beta$. Mit Einführung dieser Werthe erhalten wir nun

$$m = BC(1-\alpha^2\sin^2\omega)\,, \qquad n = AC(1-\beta^2\sin^2\omega)\,,$$

$$S = \pm\frac{\pi}{C\sqrt{AB}}\cdot\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\frac{A}{1-\alpha^2\sin^2\omega}+\frac{B}{1-\beta^2\sin^2\omega}\right)\frac{\cos\omega\, d\omega}{\sqrt{(1-\alpha^2\sin^2\omega)(1-\beta^2\sin^2\omega)}}\,.$$

Hierin setzen wir

$$k = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{C-B}{C-A}}\,,$$

und führen eine neue Variable durch die Gleichung ein

$$\sin\omega = \frac{1}{\alpha}\sin\varphi\,;$$

hierdurch entsteht

$$S = \pm\frac{\pi}{\alpha C\sqrt{AB}}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left(\frac{A}{1-\sin^2\varphi}+\frac{B}{1-k^2\sin^2\varphi}\right)\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,.$$

Wird die Zone von der XY-Ebene an gerechnet, so ist $\varphi_0 = 0$, und daher

$$\begin{aligned}
S &= \pm\frac{\pi}{\alpha C\sqrt{AB}}\int_0^{\varphi}\left(\frac{A}{\cos^2\varphi}+\frac{B}{\Delta^2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \\
&= \pm\frac{\pi A}{\alpha k'^2 C\sqrt{AB}}[tang\varphi\Delta\varphi + k'^2F(\varphi) - E(\varphi)] \\
&\quad \pm\frac{\pi B}{\alpha k'^2 C\sqrt{AB}}\left[E(\varphi) - \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}\right],
\end{aligned}$$

$$= \pm\frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}}\left[[A-(C-B)\cos^2\varphi]\frac{tang\varphi}{\Delta\varphi} + AF(\varphi) + (C-A)E(\varphi)\right].$$

Diese Gleichung enthält das bemerkenswerthe Resultat: Jede Zone einer centralen Fläche zweiten Grades, längs deren Rändern die Normalen ihre Neigung gegen eine Symmetrieebene der Fläche nicht ändern, lässt sich durch elliptische Integrale ausdrücken.*)

Die halbe Fläche des Ellipsoids erhält man aus der vorstehenden Gleichung, wenn man $\sin\omega = 1$, also

$$\sin\varphi = \alpha = \sqrt{1 - \frac{A}{C}}$$

setzt; das Verhältniss der Oberfläche des Ellipsoids zu einem Hauptschnitte desselben wird daher, abgesehen von einem in Bezug auf die Achsen algebraischen Theile, durch unvollständige elliptische Integrale erster und zweiter Art berechnet.

Führt man den Werth für φ in die Gleichung für S ein, so erhält man für die ganze Oberfläche des Ellipsoids

$$S = \frac{2\pi}{C} + \frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}}[F(\varphi) + (C-A)E(\varphi)] .$$

---

*) Diesen Satz hat SCHLOEHMILCH gegeben; weitere Folgerungen hierzu sowie weitere Anwendungen der elliptischen Integrale auf die Complanation von Flächen siehe Compendium der höhern Analysis, 2. Aufl. II. Bd. pag. 346 u. f.

III. Theil. Differentialgleichungen.

§ 23. Allgemeine Sätze über Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Veränderlichen.

1. Unter einer Differentialgleichung wird eine Gleichung verstanden, in welcher Differentialquotienten abhängiger Variabeln in Bezug auf unabhängige (neben den Variabeln selbst und constanten Grössen) vorkommen.

Ist jede abhängige Veränderliche als Function nur einer Veränderlichen betrachtet, so bezeichnet man die Differentialgleichung als gewöhnliche Differentialgleichung zum Unterschiede von partialen Differentialgleichungen, welche die partialen Differentialquotienten von Functionen mehr als einer Variabeln enthalten.

2. Wenn eine Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln den Differentialquotienten $n$ter Ordnung der abhängigen Variabeln und keinen höherer Ordnung enthält, so wird sie als Differentialgleichung $n$ter Ordnung bezeichnet.

Eine Gleichung zwischen zwei Variabeln, die weder den Differentialquotienten $n$ter Ordnung der unabhängigen Variabeln noch höhere Differentialquotienten enthält, und die so beschaffen ist, dass alle Werthe der Variabeln und des 1., 2. 3., . . . bis $n$ten Differentialquotienten, die dieser Gleichung, sowie der durch einmalige oder wiederholte Differentiation daraus hervorgehenden Gleichungen genügen, auch einer gegebenen Differentialgleichung $n$ter Ordnung Genüge leisten, wird als ein Integral der Differentialgleichung $n$ter Ordnung bezeichnet.

3. Wenn ein Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen x, y so beschaffen ist, dass dieselben Systeme von Werthen x, y, $dy : dx$ der Differentialgleichung, sowie auch dem Integrale und dem aus dem Integrale folgenden Werthe von $dy : dx$ genügen, so bezeichnen wir es als das allgemeine Integral der Differentialgleichung.

Durch die Gleichung $F(x, y, y') = 0$ werden drei Veränderliche x, y, y' mit einander verknüpft; betrachten wir x und y als rechtwinkelige Punktcoordinaten, so können wie die Differentialgleichung geometrisch so deuten, dass durch dieselbe jedem Punkte x, y der Ebene eine oder mehr als eine Richtung y' zugeordnet wird; diese Richtung kann durch eine Gerade T vertreten werden, die durch den Punkt x, y so gezogen wird, dass $tang(x, T) = y'$; dann ist also durch die Differentialgleichung jedem Punkte der Ebene eine durch den Punkt gehende Gerade oder eine bestimmte Anzahl solcher Geraden zugeordnet.

Ein Integral $\Phi(x, y) = 0$ der Differentialgleichung repräsentirt eine Curve, die in jedem ihrer Punkte von einer zu diesem Punkte durch die Differentialgleichung zugeordneten Geraden berührt wird. Enthält die Gleichung eine willkürliche Constante C, so gehört zu der Gleichung nicht eine individuelle Curve, sondern eine Gruppe von unendlich vielen Curven, die erhalten werden,

indem man C alle Werthe nach einander beilegt. Die Constante kann dann immer so gewählt werden, dass die Curve $\Phi(x, y, C) = 0$ durch einen gegebenen Punkt P_0 geht; man hat dann nur nöthig, C aus der Gleichung zu bestimmen

$$\Phi(x_0, y_0, C) = 0;$$

und umgekehrt: Soll die Gleichung $F(x, y) = 0$ das allgemeine Integral einer Differentialgleichung I. O. sein, so muss ihr durch jeden Werth von x und y genügt werden können, sie muss also eine willkürliche Constante enthalten; ist diese so gewählt, dass die Curve $\Phi(x, y) = 0$ einen bestimmten Punkt P enthält, so muss alsdann durch die besondere Beschaffenheit der Function Φ die Tangente der Curve $\Phi(x, y) = 0$ in P mit einer der durch die Differentialgleichung dem Punkte P zugeordneten Geraden zusammenfallen.

Unter einem particulären Integrale versteht man ein Integral einer Differentialgleichung, das aus einem allgemeinen hervorgeht, indem man der willkürlichen Constanten einen besonderen Werth ertheilt.

4. Wir wollen nun zunächst zeigen, wie aus einer Gleichung

$$1. \qquad \Phi(x, y, C) = 0,$$

die eine willkürliche Constante C enthält, eine C nicht enthaltende Differentialgleichung I. O. abgeleitet werden kann, von welcher $\Phi(x, y, C)$ das allgemeine Integral ist.

Aus $\Phi(x, y, C) = 0$ erhalten wir durch Differentiation

$$2. \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \cdot y' = 0.$$

Eliminiren wir nun C aus 1. und 2., so erhalten wir eine Differentialgleichung

$$3. \qquad F(x, y, y') = 0.$$

Ist nun das System der Gleichungen 1. und 3. mit dem Systeme 1. und 2. aequivalent und wird C so bestimmt, dass 1. durch einen gegebenen Punkt x, y erfüllt wird, so sind die aus 3. zugeordneten Werthe y' übereinstimmend mit den aus 2. folgenden; also ist 1. das allgemeine Integral von 3.

Wir geben hierzu einige Beispiele.

A. Aus der Gleichung

$$4. \qquad (y - C)^2 = 2px$$

folgt durch Differentiation

$$(y - C)y' = p.$$

Setzt man den hieraus folgenden Werth von $y - C$ in 4. ein, so erhält man die zu 4. gehörige Differentialgleichung

$$y' = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

B. Die Gleichung $x^2 - 2Cy - C^2 - a^2 = 0$ liefert

$$Cy' = x;$$

setzt man hieraus C in die gegebene Gleichung ein, so erhält man

$$(x^2 - a^2)y'^2 - 2xyy' - x^2 = 0,$$

oder

$$y' = \frac{x}{x^2 - a^2}\left(y + \sqrt{y^2 + x^2 - a^2}\right).$$

C. Die Gleichung

$$5. \qquad (x - 2C)^2 + k^2Cy^2 = C^2$$

stellt für positive C eine Gruppe von Ellipsen dar, deren Mittelpunkte auf der Abscissenachse liegen; die auf der XAchse liegende Ellipsenachse ist gleich der Abscisse des Ellipsenmittelpunktes; die andern beiden Scheitel liegen auf der Parabel $\eta^2 = k^2\xi$; für negative C ergeben sich Hyperbeln.

Aus 5. ergiebt sich

6. $$x - 2C + k^2 Cyy' = 0.$$

Führt man zunächst den hieraus folgenden Werth

$$x - 2C = - k^2 Cyy'$$

in 5. ein, so folgt

$$k^4 Cy^2 y'^2 + k^2 y^2 = C.$$

Vergleicht man den hieraus folgenden Werth von C mit dem aus 6. sich ergebenden, so entsteht die zu 5. gehörige Differentialgleichung

$$y'^2 - \frac{y}{x} \cdot y' + \frac{2k^2 y^2 - x}{k^4 xy^2} = 0,$$

oder auf y reducirt

$$y' = \frac{1}{2k^2 xy} (k^2 y^2 + \sqrt{4x^2 - 8k^2 xy^2 + k^4 y^4}).$$

D. Die Gleichung

7. $$2x - 3Cy + C^3 = 0$$

repräsentirt eine Reihe von Geraden, für welche das Quadrat des Abschnittes auf der X-Achse zum Cubus des Abschnittes auf der Y-Achse das constante Verhältniss $= - 27 : 4$ hat. Aus 7. folgt

$$2 = 3Cy',$$

und hieraus und aus 7. die Differentialgleichung

$$xy'^3 - y'^2 + \frac{27}{4} = 0.$$

E. Aus dem allgemeinen Integrale

$$\varphi = l(\sqrt{x^2 - xy} - y + 2x) - \frac{2}{\sqrt{3}} \, Arc\,tang \, \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \sqrt{1 - \frac{y}{x}} + 1 \right) = C$$

folgt durch Differentiation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2 - xy} + 2x}{x(2x - y + \sqrt{x^2 - xy})},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{1}{2x - y + \sqrt{x^2 - xy}}.$$

Daher ist die zugehörige Differentialgleichung

$$y' = 2 + \sqrt{1 - \frac{y}{x}}.$$

5. Die Aufgabe: Zu einer gegebenen Differentialgleichung das allgemeine Integral zu finden (eine Differentialgleichung zu integriren) ist im Allgemeinen durch die bisher bekannten Functionen (Integrale von Functionen mit inbegriffen) nicht lösbar. Im Allgemeinen werden durch Differentialgleichungen neue Functionen definirt. Es besteht dann die Aufgabe, aus der Differentialgleichung die Eigenschaften der durch sie definirten Function möglichst erschöpfend abzuleiten, und ein Verfahren anzugeben, durch welches die Function annäherungsweise gefunden werden kann.

Wir wollen ein solches Annäherungsverfahren zunächst für Differentialgleichungen erster Ordnung angeben. Um ein Integral der Gleichung

1. $$y' = f(x, y)$$

zu erhalten, gehen wir von einem beliebigen Punkte P_0 aus in der Richtung $y_0' = f(x_0, y_0)$ um eine kleine Strecke bis zu dem Punkte P_1, dessen Coordinaten $x_1 = x_0 + \Delta x_0$, $y_1 = y_0 + \Delta y_0$ sind, wobei also

$$\Delta y_0 = f(x_0, y_0) \Delta x_0.$$

Hierauf gehen wir von P_1 bis zu dem Punkte P_2, für den $x_2 = x_1 + \Delta x_1$, $y_2 = y_1 + \Delta y_1$, wobei

$$\Delta y_1 = f(x_1, y_1)\,\Delta x_1\,,$$

und so fort, so dass wir von jedem Punkte P_i bis zum nächsten P_{i+1} in der Richtung weiter gehen, für welche

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f(x_i, y_i)\cdot\Delta x_i,\quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i.$$

Gehen die Abscissenveränderungen Δx_0, Δx_1, Δx_2 . . . zur Grenze Null über, so geht das Polygon $P_0 P_1 P_2$ . . . in eine Curve über, und diese Curve ist ein Integral der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.

6. Wenn zwei allgemeine Integrale einer Differentialgleichung I. O. nach den willkürlichen Constanten aufgelöst die Gleichungen ergeben

$$1.\qquad F = C,\quad f = c,$$

so ist F eine Function von f, d. h. wenn man aus der Gleichung $f(x, y) = f$ die Variable y (oder x) berechnet, indem man das rechts stehende f als neue Variable betrachtet, und diesen Werth in F substituirt, so enthält F dann nur die Variable f, nicht auch x (oder y).

Durch Differentiation folgt aus 1.

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$$

In beiden Gleichungen kommt keine willkürliche Constante mehr vor, aus beiden muss sich also für alle Werthe von x und y derselbe Werth für y' ergeben; die nothwendige und ausreichende Bedingung hierfür ist das Verschwinden der Determinante

$$2.\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Drückt man y in der angegebenen Weise durch x und f aus und setzt dies in F ein, so erhalte man $\mathfrak{F}$. Diese Function kann nur f und x enthalten; man hat

$$3.\qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Bei dem letzten Differentialquotienten ist y als Function von x und f gedacht und vorausgesetzt, dass sich f nicht ändert; daher bestimmt sich derselbe aus der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$$

Wird der hieraus folgende Werth in 3. eingesetzt, so ergiebt sich

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right) : \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Da nun f nicht frei von y sein kann, so folgt aus 4. und 2.

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = 0;$$

also enthält $\mathfrak{F}$ die Variable x nicht, w. z. b. w.*).

*) Statt dieses Beweises hätte auf den Satz Diff. Rechn. § 4, No. 5 verwiesen werden können; wir haben es vorgezogen, einen selbständigen Beweis für den einfachsten Fall jenes allgemeinen Satzes zu geben und bemerken, dass der Gedankengang disses Beweises sich auch auf den allgemeinen Satz anwenden lässt. Vergl. u. A. BALTZER, Determinanten, § 12.

Aus der Gleichung $\mathfrak{F}(f) = C$ folgt $f = c$, worin c eine willkürliche Constante bezeichnet. Daher ist das allgemeine Integral $F = C$ von $f = c$ nicht wesentlich verschieden. Wir geben dieser Thatsache durch den Satz Ausdruck: Eine Differentialgleichung I. O. hat **nur ein** allgemeines Integral.

7. Es sei $f(x, y, C) = 0$ das allgemeine Integral einer Differentialgleichung I. O. Die Werthe der Constanten C für diejenigen Integralcurven, welche durch einen gegebenen Punkt x, y gehen, erhält man durch Auflösung der Gleichung

$$f(x, y, C) = 0,$$

wenn man darin x und y als gegeben betrachtet. So viele verschiedene Auflösungen diese Gleichung hat, eben so viele verschiedene Integralcurven gehen durch P. Diese Curven haben im Allgemeinen in P keine gemeinsame Tangente. Die n Geraden, welche diese Curven in P berühren, sind die Geraden, welche dem Punkte P durch die gegebene Differentialgleichung zugeordnet sind. Hieraus folgt: Wenn der Differentialquotient y' eine n-deutige Function von x und y ist, so ist auch die Constante des allgemeinen Integrals n-deutig durch x und y bestimmt.

Beispiele. A. Aus der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

folgt sofort das allgemeine Integral

$$lx + ly = c.$$

Hier erscheint c als unendlich vieldeutige Function von x und y. Geht man aber beiderseits zu den Logarithmanden über und bezeichnet e^c mit C, so erhält man für das allgemeine Integral die neue Gestalt

$$xy = C,$$

und hierin ist C eindeutig durch x und y bestimmt.

B. Für die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

haben wir das allgemeine Integral

$$\arcsin x + \arcsin y = c.$$

Hier ist ebenfalls c unendlich vieldeutig. Macht man von dem Additionstheoreme Gebrauch

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

und ersetzt $\sin c$ durch γ, so erhält man

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \gamma.$$

Durch Quadriren ergiebt sich, wenn man γ^2 durch C ersetzt,

$$x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = C,$$

und hierin ist C zweideutig, ebenso wie y' zweideutig ist. Hieraus folgt noch die rationale Gleichung

$$C^2 - 2(x^2 + y^2 - 2x^2y^2)C + (x^2 - y^2)^2 = 0.$$

8. Wenn durch eine Differentialgleichung y' n-deutig bestimmt ist, so werden im Allgemeinen für unzählig viele Punkte zwei von den n Werthen zusammenfallen; die Curve dieser Punkte wollen wir als Verzweigungscurve der Differentialgleichung bezeichnen. Ist y' explicite als Function von x und y gegeben

$$y' = \varphi(x, y),$$

so kann man ohne Weiteres die Gleichung der Verzweigungscurve ablesen.

Ist z. B.

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}},$$

so ist die Verzweigungscurve

$$x^2 - y^2 = 0,$$

besteht also aus den beiden Geraden, welche die Winkel der Achsen halbiren.

Bezeichnen $g_1, g_2, \ldots g_n$ die verschiedenen Werthe, welche y' für einen gegebenen Punkt x, y hat, so sind dieselben die Wurzeln der Gleichung.

1. $$F \equiv (y' - g_1)(y' - g_2) \ldots (y' - g_n) = 0;$$

dieselbe gebe ausgerechnet

2. $$F \equiv y'^n + A_1 y'^{n-1} + \ldots + A_{n-1} y' + A_n = 0.$$

Zwei Wurzeln y' dieser Gleichung fallen zusammen, wenn der Verein von 2. und der folgenden Gleichung besteht

3. $$\frac{\partial F}{\partial y'} = n y'^{n-1} + (n-1) A_1 y'^{n-2} + \ldots A_{n-1} = 0.$$

Die Bedingung für den Verein von 2. und 3. erhält man nach Sylvester's Methode, indem man 2. und 3. der Reihe nach mit $y'^{n-2}, y'^{n-1}, \ldots y', 1$, bez. $y'^{n-1}, y'^{n-2}, \ldots y', 1$ multiplicirt, und aus diesen $2n - 1$ Gleichungen die linear darin vorkommenden Grössen $y'^{2n-2}, y'^{2n-1}, \ldots y', 1$ in bekannter Weise eliminirt. Man erhält

$$\begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_2 \ldots \ldots A_{n-1} & A_n & & \\ & 1 & A_1 \ldots \ldots A_{n-2} & A_{n-1} & A_n & \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ & & 1 & A_1 & A_2 \ldots & A_n \\ n(n-1)A_1 & (n-2)A_2 \ldots \ldots A_{n-1} & & & & \\ n & (n-1)A_1 \ldots 2A_{n-2} & A_{n-1} & & & \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ & & & 1 & (n-1)A_1 \ldots & A_{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung der Verzweigungscurve.

9. Die Constante des allgemeinen Integrales einer Differentialgleichung I. O. sei für jeden Punkt der Ebene n-deutig bestimmt; ihre Werthe für den Punkt x, y seien $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$. Bildet man die Gleichung

$$(C - \gamma_1)(C - \gamma_2) \ldots (C - \gamma_n) = 0.$$

so sind die Coefficienten eindeutige Functionen von x und y. Es giebt unzählig viele Punkte der Ebene, für welche zwei Wurzeln dieser Gleichung zusammenfallen; die Curve dieser Punkte nennen wir die Verzweigungscurve des allgemeinen Integrals.

Die Gleichung für C ergebe

$$\Phi \equiv C^n + \alpha_1 C^{n-1} + \alpha_2 C^{n-2} + \ldots + \alpha_n = 0;$$

alsdann erhält man die Gleichung dieser Verzweigungscurve in Form einer verschwindenden Determinante, wenn man C nach Sylvester's Methode aus

$$\Phi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\Phi}{dC} = 0.$$

Diese Curve hüllt entweder die Curven Φ ein und hat in jedem ihrer Punkte mit einer der Curven Φ eine gemeinsame Tangente, oder sie enthält die Doppelpunkte des Curvensystems

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

(Differentialrechn. § 11, No. 6).

Hieraus folgt sofort: Ist die Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales die Einhüllende der Curven $\Phi = 0$, so genügt sie in allen ihren Punkten der Differentialgleichung.

Ist die Verzweigungscurve dagegen die Curve der Doppelpunkte des Curvensystems $\Phi = 0$, so genügt sie im Allgemeinen der Differentialgleichung nicht. Denn im Allgemeinen ist für einen Doppelpunkt einer Curve $\Phi = 0$ der aus der Differentialgleichung folgende Werth von y' nicht unbestimmt, wie der aus dem allgemeinen Integrale folgende, sondern bestimmt; man kann nun nicht den Schluss ziehen, dass dieser Werth mit dem aus der Gleichung der Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales folgenden übereinstimmt.

Wenn die Gleichung der Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales der Differentialgleichung genügt, so ist im Allgemeinen für die Punkte derselben C nicht constant; sie ist alsdann kein particuläres Integral, sondern wird als **singuläres Integral** der Differentialgleichung bezeichnet.

10. Unabhängig von geometrischen Betrachtungen untersuchen wir nun auf analytischem Wege die Existenz eines singulären Integrales, d. i. einer Gleichung, die der Differentialgleichung genügt, ohne ein particuläres Integral zu sein.

Es sei $f(x, y, C) = 0$ das allgemeine Integral einer Differentialgleichung I. O.; wir machen dabei die ausdrückliche Voraussetzung, dass die Function f die Grössen x, y und C nur in eindeutigen Verbindungen enthält.

Jede beliebige Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ kann auf die Form $f(x, y, C) = 0$ gebracht werden, wenn man C nicht als Constante, sondern als Function von x und y betrachtet, gemäss der Gleichung

$$f(x, y, C) \equiv \varphi(x, y) .$$

Die Frage nach einem singulären Integrale können wir nun so stellen: Kann C als Function von x und y so gewählt werden, dass die Gleichung

$$1. \qquad f(x, y, C) = 0$$

der Differentialgleichung genügt?

Durch Differentiation folgt aus 1.

$$2. \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y'\right) = 0 .$$

Wenn 1. der Differentialgleichung genügt, so wird 2. durch einen der aus der Differentialgleichung folgenden Werthe von y' erfüllt, sobald man C in 2. durch x und y gemäss der Gleichung 1. ersetzt. Unter dieser Voraussetzung erfüllt aber jedes der Differentialgleichung entsprechende y' die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 .$$

Daher reducirt sich 2. auf

$$\frac{\partial f}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y'\right) = 0 .$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn entweder

$$3. \qquad \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' = 0 ,$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial C} = 0 .$$

Der Bedingung 3. entsprechen solche Aenderungen von x und y, bei denen C constant bleibt; sie führt somit zum allgemeinen Integrale. Für ein Integral, das in dem allgemeinen nicht enthalten ist, ergiebt sich daher die Bedingung

$$4. \qquad \frac{\partial f}{\partial C} = 0 .$$

Es kann der Fall eintreten, dass den Gleichungen

$$f(x, y, C) = 0 , \quad \frac{\partial f}{\partial C} = 0$$

durch einen constanten Werth von C genügt werden kann; in diesem Falle führt die Elimination von C aus beiden Gleichungen nicht auf ein singuläres, sondern auf ein particuläres Integral.

Eine Ausnahme hiervon tritt in den zahlreichen Fällen ein, wenn für alle Punkte der durch Elimination von C aus

$$f(x, y, C) = \text{ und } \frac{\partial f}{\partial C} = 0$$

sich ergebenden Curve (für welche wir den Namen Verzweigungscurve auch dann beibehalten wollen, wenn f keine algebraische Function von C ist) die Gleichungen bestehen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Denn dann erfüllen die Tangenten der Verzweigungscurve zwar die Gleichung 2., es lässt sich aber hieraus nicht schliessen, dass sie der Differentialgleichung genügen.

Man hat daher nach der Elimination von C aus $f = 0$ und $\partial f : \partial C = 0$ jedesmal erst nachzusehen, ob die resultirenden Curven, bez. welche von ihnen, der Differentialgleichung genügen.

11. Es sei y' eine n-deutige Function von x und y; alsdann ist auch (No. 7) die Constante des allgemeinen Integrales n-deutig durch x und y bestimmt. Wenn für einen Punkt P zwei von den Werthen C unendlich wenig verschieden sind, so fallen auch die Tangenten an diese Curven in P unendlich nahe zusammen. Dies sind aber zwei dem Punkte P durch die Differentialgleichung zugeordnete Richtungen. Wir schliessen daher: Die Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales ist zugleich Verzweigungscurve der Differentialgleichung.

Hiervon tritt eine Ausnahme ein, wenn ein Theil der Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales eine Parallele zur Y-Achse ist; denn für jeden Punkt dieser Geraden ist $y' = \pm \infty$, es fallen also für diese Punkte nicht nothwendig zwei Werthe von y' zusammen.

12. Ein direkter Nachweis für den Zusammenhang der beiden Verzweigungscurven wird zugleich Auskunft darüber geben, ob die Verzweigungscurve der Differentialgleichung aus Curven zusammengesetzt sein kann, die nicht zugleich der Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales angehören. Die Differentialgleichung wird aus dem allgemeinen Integrale

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{1.}$$

erhalten, indem man C aus 1. und aus

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot y' = 0 \tag{2.}$$

eliminirt; das Resultat dieser Elimination werde mit (Φ) bezeichnet. Um die Verzweigungscurve der Differentialgleichung zu erhalten, hat man hierauf y' aus den Gleichungen

$$(\Phi) = 0 \text{ und } \frac{\partial (\Phi)}{\partial y'} = 0 \tag{3.}$$

zu eliminiren. Nun ist

$$\frac{\partial (\Phi)}{\partial y'} = \frac{\partial \Phi}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial y'}. \tag{4.}$$

Die Gleichung 4. zerfällt in die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial C}{\partial y'} = 0. \tag{6.}$$

Die Gleichungen 1. und 5. ergeben die Verzweigungscurve des allgemeinen Integrals Die Gleichung 6. sagt aus, dass die durch 2. definirte Function C von y' nicht abhängt; sie ist daher nicht statthaft.

Wir fassen die Ergebnisse dieser Untersuchungen in folgenden Satz zusammen: Ist $F(x, y, y') = 0$ eine Differentialgleichung I. O. und $\Phi(x, y, C) = 0$ das allgemeine Integral derselben und sind x, y, y', bez. x, y, C in den Functionen F und Φ nur in eindeutigen Verbindungen enthalten, so kann die Resultante, die durch Elimination von C aus

$$\Phi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$$

hervorgeht, höchstens um einen Faktor, der eine ganze Function von x allein ist, von der Resultante verschieden sein, welche durch Elimination von y' aus den Gleichungen

$$F = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

entsteht. Wenn die erstere Resultante der Differentialgleichung genügt, so ist sie das singuläre Integral der Differentialgleichung, soweit sie nicht durch Specialisirung der Constanten C aus dem allgemeinen Integrale hervorgeht.

13. Für die Ableitung des singulären Integrales haben wir daher folgende Wege:

a) Ist das allgemeine Integral auf C reducirt, so bilde man die Bedingung dafür, dass zwei Werthe für C zusammenfallen.

b) Sind in dem Integrale $\Phi(x, y, C) = 0$ die Grössen x, y, C nur in eindeutigen Verbindungen enthalten, so eliminire man C aus

$$\Phi = 0, \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$$

c) Ist die Differentialgleichung auf y' reducirt, so bilde man die Bedingung dafür, dass zwei Werthe von y' zusammenfallen.

d) Sind in der Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ die Grössen x, y, y' nur in eindeutigen Verbindungen enthalten, so eliminire man y' aus

$$F = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Die auf einem dieser vier Wege erhaltenen Gleichungen hat man darauf hin zu prüfen, ob sie der Differentialgleichung genügen; soweit diese Bedingung erfüllt ist, hat man ein Integral der Differentialgleichung gefunden; dasselbe ist singulär, soweit es nicht durch Specialisirung der Constanten aus dem allgemeinen Integrale abgeleitet werden kann. Nach Anwendung der Methoden c) und d) hat man noch nachzusehen, ob die Gleichung $x = \gamma$ für irgend einen constanten Werth γ der Differentialgleichung als singuläres oder particuläres Integral genügt.*)

14. Wir betrachten als Beispiele die in No. 4 aufgestellten Differentialgleichungen.

A. Die Differentialgleichung No. 4, 6

*) Auch ohne Kenntniss des allgemeinen Integrales kann man entscheiden, ob man nach den Methoden c) oder d) zu einem singulären oder particulären Integrale gelangt ist. Vergl. u. A. E. Prix, Ueber singuläre Lösungen der Differentialgleichungen I. O. Progr. d. Realschule zu Annaberg i. S. 1876.

$$F \equiv y'^2 - \frac{p^2}{4x} = 0$$

hat das allgemeine Integral

$$\Phi \equiv (y - C)^2 - 2px = 0.$$

Man erhält

$$\frac{dF}{dy'} = 2y', \quad \frac{d\Phi}{dC} = -2(y - C).$$

Die Verzweigungscurven sind: für die Differentialgleichung

$$V \equiv -\frac{p^2}{x} = 0;$$

für das allgemeine Integral

$$W \equiv \begin{vmatrix} 1 & -2yy^2 & -2px \\ 2 & -2y & 0 \\ 0 & 2 & -2y \end{vmatrix} \equiv -8px = 0.$$

Das singuläre Integral ist $x = 0$.

B. Zu der Differentialgleichung

$$y' \equiv \frac{x}{x^2 - a^2}(y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2})$$

gehört das allgemeine Integral

$$y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = C.$$

Aus beiden Gleichungen folgt das Integral

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0;$$

dasselbe ist singulär, da für die Punkte desselben $C = y$, also variabel ist.

C. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$F \equiv y'^2 - \frac{y}{x}y' + \frac{2k^2y^2 - x}{k^4xy^2} = 0$$

ist

$$\Phi \equiv 3C^2 - (4x - k^2y^2)C + x^2 = 0.$$

Die Bedingungen für das Zusammenfallen zweier Wurzeln y' bez. C sind

$$\frac{1}{4k^4xy^2}(8k^2xy^2 - 4x^2 - k^4y^4) = 0,$$

bez.

$$8k^2xy^2 - 4x^2 - k^4y^4 = 0.$$

Die letztere Gleichung ist das singuläre Integral. Man überzeugt sich leicht, dass es der Differentialgleichung genügt. Durch Differentiation folgt nämlich

$$y' = \frac{2(x - k^2y^2)}{k^2y(4x - k^2y^2)}.$$

Ferner folgt aus dem singulären Integrale

$$k^2y^2 = 2x(2 + \sqrt{3}), \quad x - k^2y^2 = -2x\sqrt{3},$$
$$x - k^2y^2 = -x(3 + 2\sqrt{3}).$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergiebt sich

$$y' = \frac{y}{2x}.$$

Derselbe Werth folgt aus der Differentialgleichung für die Punkte, welche dem singulären Integrale genügen.

D. Die Differentialgleichung

$$F \equiv xy'^3 - y'^2 + \frac{27}{4} = 0.$$

hat das allgemeine Integral

$$\Phi \equiv C^3 - 3Cy + 2x = 0.$$

Die Bedingung für das Zusammenfallen zweier Wurzeln y' bez. C,

$$x^2 - y^3 = 0$$

ist das singuläre Integral.

E. Die Differentialgleichung

$$y' = 2 + \sqrt{1 - \frac{y}{x}}$$

hat das allgemeine Integral

$$\varphi =$$

$$l(\sqrt{x^2 - xy} - y + 2x) - \frac{2}{\sqrt{3}} \mathit{Arc\,tang} \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{1 - \frac{y}{x}} + 1\right) = C.$$

Für die Verzweigungscurve

$$x - y = 0$$

ist

$$y' = 1,$$

während für die Punkte derselben aus der Differentialgleichung folgt

$$y' = 2.$$

Daher ist in diesem Fälle die Verzweigungscurve kein Integral der Differentialgleichung.

F. Hat die Differentialgleichung die Form

$$y' = F + \sqrt{\Psi}$$

wobei F und Ψ rationale Functionen von x und y sind, so ist ihre Verzweigungscurve

$$\Psi = 0.$$

Der aus dieser Gleichung folgende Werth von y' stimmt im Allgemeinen nicht mit dem aus der Differentialgleichung unter der Bedingung $\Psi = 0$ folgenden Werthe

$$y' = F$$

überein; die Verzweigungscurve ist daher für Differentialgleichungen dieser Form im Allgemeinen kein Integral. Das vorige Beispiel bildet hiervon einen besonderen Fall. Ausnahmen bilden u. A. alle Differentialgleichungen, deren allgemeines Integral die Form hat

$$2. \qquad f + \sqrt{\varphi} = C,$$

wobei f und φ rationale Functionen sind

Zu 2. gehört die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{2\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \sqrt{\varphi} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{2\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sqrt{\varphi} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}},$$

welche auf die Form 1. gedacht wird, indem man den Nenner rational macht.

§ 24. Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Veränderlichen.

1. Wir wenden uns nun zur Integration der Differentialgleichungen I. O. Eine allgemeine Methode, durch welche die Herstellung des Integrals in geschlossener Form geleistet oder auf gewöhnliche Integrationen zurückgeführt werden könnte, giebt es nicht; wir müssen uns begnügen, eine Reihe von Fällen anzugeben, in welchen die Integration ausgeführt werden kann, und schliesslich Methoden zu entwickeln, nach welchen das Integral in Form einer unendlichen Reihe gewonnen wird.

Das Integral der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ ist sofort gefunden,

wenn die Variabeln getrennt sind, d. i. wenn M nur eine Function von x, und N nur eine Function von y ist; schreiben wir, um dies zu veranschaulichen, $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ für M und N, so haben wir die Differentialgleichung

$$\varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy = 0\,,$$

und erhalten hieraus ohne Weiteres

$$\int\varphi(x)\,dx + \int\psi(y)\,dy = C\,.$$

Willkürliche Constanten bei den Integralen anzubringen ist in diesem Falle wegen der rechts stehenden Constanten nicht nöthig.

Beispiel. Aus $\quad 2(a+x)\,dx + 3y^2 dy = 0$

folgt das allgemeine Integral $\quad (a+x)^2 + y^3 = C$.

2. Wenn die Variabeln nicht getrennt sind, so gelingt es zuweilen durch Division oder Multiplication mit Functionen der Variabeln die Trennung herbeizuführen. So ergiebt sich aus

1. $$X_1 Y_1\,dx + X_2 Y_2\,dy = 0$$

durch Division mit $X_2 Y_1$

$$\frac{X_1}{X_2}\,dx + \frac{Y_2}{Y_1}\,dy = 0\,.$$

Sind nun X_1, X_2 Functionen von x allein, und Y_1, Y_2 Functionen von y allein, so ist das allgemeine Integral von 1.

$$\int\frac{X_1}{X_2}\,dx + \int\frac{Y_1}{Y_2}\,dy = C\,.$$

Beispiele. A. $\quad xy^2\,dx - (a-x)(b-y)\,dy = 0\,.$

Hieraus folgt $\quad \frac{x}{a-x}\,dx - \left(\frac{b}{y^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0\,;$

daher ist das allgemeine Integral

$$ly - al(a-x) = \frac{xy-b}{y} + C\,.$$

B. $\quad (1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0\,.$

Diese Gleichung ergiebt $\quad \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0\,;$

daher ist das allgemeine Integral

$$arc\,tang\,x + arc\,tang\,y = C\,.$$

C. $\quad \sqrt{1-y^2}\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0\,.$

Hieraus folgt $\quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0\,;$

daher ist das allgemeine Integral

$$arc\,sin\,x + arc\,sin\,y = C\,.$$

Giebt man der Differentialgleichung die Form

$$y' = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\,,$$

so erkennt man, dass die singulären Lösungen in der Gleichung enthalten sind

$$(1-x^2)(1-y^2) = 0\,.$$

Alle vier hierin enthaltenen Geraden genügen der Differentialgleichung; da keine durch Specialisirung aus dem allgemeinen Integrale hervorgeht, so sind alle singuläre Lösungen.

3. Eine Reihe von einfachen geometrischen Aufgaben führen auf Differentialgleichungen erster Ordnung, in denen die Variabeln getrennt werden können.

A. Die Curven zu bestimmen, bei denen die Subnormale eine gegebene Function $\varphi(y)$ der Ordinate ist.

Aus der Bedingung
$$yy' = \varphi(y)$$
folgt
$$\int \frac{y\,dy}{\varphi(y)} = x + C.$$

B. Soll die Subnormale eine Function $\varphi(x)$ der Abscisse sein, so ist die Differentialgleichung
$$yy' = \varphi(x),$$
und daher die Gleichung der gesuchten Curve
$$y^2 = 2\int\varphi(x)\,dx + C.$$

C. Wird verlangt, dass die Subtangente eine Function $\varphi(y)$ der Ordinate ist, so hat man
$$\frac{y}{y'} = \varphi(y),$$
und daher das allgemeine Integral
$$\int \frac{\varphi(y)\,dy}{y} = x + C.$$

D. Soll die Subtangente eine Function $\varphi(x)$ der Abscisse sein, so ist
$$\frac{y}{y'} = \varphi(x),$$
also
$$ly = \int \frac{dx}{\varphi(x)} + C.$$

E. Soll die Tangente eine Function der Ordinate sein, so ist
$$\frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2} = \varphi(y);$$
hieraus folgt
$$y' = \frac{y}{\sqrt{\varphi^2 - y^2}}.$$

Das allgemeine Integral ist
$$\int \frac{\sqrt{\varphi^2 - y^2}}{y}\,dy = x + C.$$

F. Auf ähnliche, einfachste, durch Trennung der Variabeln sofort zu integrirende Differentialgleichungen führen die Aufgaben: Eine Curve zu bestimmen, in welcher die Polarsubtangente, die Polarsubnormale, oder der Winkel zwischen Tangente und Radius vector eine gegebene Function des Radius vector oder des Polarwinkels ist.

G. Soll das von einem Curvenbogen, der Abscissenachse einer festen Ordinate und der Ordinate eines laufenden Curvenpunkts begrenzte Segment einer Curve eine gegebene Function $\varphi(y)$ der Endordinate sein, so hat man die Differentialgleichung
$$y\,dx = \varphi'(y)\,dy,$$
woraus folgt
$$\int \frac{\varphi'(y)}{y}\,dy = x + C.$$

Wird verlangt, dass das Segment eine gegebene Function der Endabscisse sei, so führt die Aufgabe auf keine Differentialgleichung.

4. Wenn in der Gleichung
$$Mdx + Ndy = 0$$
M und N ganze homogene Functionen von x und y vom Grade n sind, so gelingt die Trennung der Variabeln durch die Substitution $y = zx$. Da in jedem Gliede von M und N die Anzahl der variabeln Faktoren n ist, so folgt, dass nach der Substitution M und N in Produkte von x^n mit ganzen

Functionen von z übergehen. Werden dieselben mit $M(z)$ und $N(z)$ bezeichnet, und bemerkt man, dass

$$dy = z dz + x dz ,$$

so erhält man für z und x die Differentialgleichung

$$M(z)\, dx + N(z)\,(z dx + x dz) = 0 .$$

Nach der Trennung der Variabeln folgt hieraus das allgemeine Integral

$$lx = -\int \frac{N(z)}{M(z) + zN(z)}\, dz + C .$$

Durch die Substitution folgt aus der gegebenen Differentialgleichung

$$y' = \frac{M(z)}{N(z)} = M\left(\frac{y}{x}\right) : N\left(\frac{y}{x}\right) .$$

Umgekehrt: Wenn es gelingt, y' als Function von $y:x$ darzustellen; so werden die Variabeln durch die Substitution $y = zx$ getrennt, denn ist

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) ,$$

so liefert die Substitution

$$z dx + x dz = \varphi(z)\, dx ;$$

daher ist das allgemeine Integral

$$lx = -\int \frac{dz}{z + \varphi(z)} + C .$$

Hierin hat man nach der Integration z durch $y:x$ zu ersetzen.

Differentialgleichungen dieser Art werden als homogene Differentialgleichungen bezeichnet.

5. Dieselbe Substitution führt auch bei der nicht homogenen Differentialgleichung zum Ziele

$$y' = \frac{y}{x} + f(x)\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) .$$

Denn man erhält

$$x dz = f(x)\,\varphi(z)\, dx ,$$

und daher das allgemeine Integral

$$\int \frac{dz}{\varphi(z)} = \int \frac{f(x)}{dx}\, dx + C .$$

6. Beispiele. A. Die Curve zu bestimmen, bei welcher die Tangente der Geraden parallel ist, die den Winkel des Radius vector mit der Ordinatenachse halbirt. Bezeichnet ψ den halben Polarwinkel, so soll sein

$$y' = tang(45^\circ + \psi) = \frac{1 + tang\,\psi}{1 - taug\,\psi} = \frac{\sqrt{1 + cos\,2\psi} + \sqrt{1 - cos\,2\psi}}{\sqrt{1 + cos\,2\psi} - \sqrt{1 - cos\,2\psi}} = \frac{1 + sin\,2\psi}{cos\,2\psi} .$$

Daher hat man die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{x}(y + \sqrt{y^2 + x^2}) .$$

Die Substitution $y = zx$ liefert

$$xz' + z = z + \sqrt{z^2 + 1} ,$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \frac{dx}{x} ,$$

hieraus folgt das allgemeine Integral

$$l(z + \sqrt{z^2 + 1}) = lx + C .$$

Denkt man sich C als Logarithmus einer andern Constanten, die wieder mit C bezeichnet werden kann, und geht dann von den Logarithmen zu den Logarithmanden über, so erhält man

$$z + \sqrt{z^2 + 1} = Cx .$$

Substituirt man rückwärts $z = y : x$, so ergiebt sich

$$Cx^2 = y + \sqrt{y^2 + x^2}.$$

Hieraus folgt die rationale Gleichung

$$C^2 x^2 - 2Cy = 1.$$

Ersetzt man hier C durch $1 : C$, so erhält man das allgemeine Integral

$$C^2 + 2Cy = x^2,$$

in Uebereinstimmung mit No. 4, 7.

B. Die Strecke OS_2, welche eine Curventangente von der Ordinatenachse abschneidet. ist bekanntlich $y - xy'$; ist μ der Winkel, unter welchem diese Strecke von der Projection P' des Curvenpunkts, auf die Abscissenachse aus gesehen wird, so ist $tang\mu = y : x - y'$. Wird nun die Curve verlangt, deren Tangente in P normal zu $P'S_2$ ist, so ergiebt sich für dieselbe die Differentialgleichung

1. $$y' = 1 : \left(\frac{y}{x} - y'\right).$$

Hieraus folgt für y' eine quadratische Gleichung, und durch Auflösung derselben

2. $$y' = \frac{y}{2x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{4x^2}}.$$

Die Substitution $y = zx$ führt zu

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{4}} - \frac{z}{2}},$$

oder, wenn rechts der Nenner rational gemacht wird,

$$\frac{dx}{x} = \left(\sqrt{1 + \frac{z^2}{4}} + \frac{z}{2}\right) dz.$$

Die Integration ergiebt

$$lx = \frac{z^2}{4} + \frac{z}{2}\sqrt{1 + \frac{z^2}{4}} + l\left(\frac{z}{2} + \sqrt{1 + \frac{z^2}{4}}\right) + C.$$

Hieraus folgt schliesslich, wenn C geeignet geändert wird:

3. $$4x^2 l(y - \sqrt{4x^2 + y^2}) = y^2 + y\sqrt{4x^2 + y^2} + C.$$

Aus 2. folgt die Verzweigungscurve für y'

4. $$4x^2 + y^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt $y' = -4x : y$, aus 2. ergiebt sich mit Rücksicht auf 4. $y' = y : 2x$; vergleicht man beide Werthe, so erhält man $8x^2 + y^2 = 0$; da diese Gleichung mit 4. nicht übereinstimmt, so ist 4. kein Integral der Differentialgleichung.

7. Um die Differentialgleichung

1. $$(ax + by + c)dx + (a'x + b'y + c')dy = 0$$

in eine homogene zu verwandeln, substituiren wir

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta.$$

Wir erhalten

$$ax + by + c = au + bv + a\alpha + b\beta + c,$$
$$a'x + b'y + c' = a'u + b'v + a'\alpha + b'\beta + c'.$$

Werden nun α und β aus dem Systeme bestimmt

2. $$a\alpha + b\beta = -c,$$
$$a'\alpha + b'\beta = -c',$$

so erhält man die transformirte homogene Gleichung

3. $$(au + bv)du + (a'u + b'v)dv = 0.$$

Die Gleichungen 2. führen auf unendliche Werthe von α und β, wenn

$ab' - a'b = 0$; wird $a' = na$ gesetzt, so ist alsdann $b' = nb$, und daher $a'x + b'y = n(ax + by)$.

Setzt man jetzt $ax + by = z$, so wird

$$bdy = dz - adx,$$

und man erhält die Differentialgleichung

$$b(z + c)dx + (nz + c')(dz - adx) = 0,$$

in welcher sich die Variabeln leicht trennen lassen*).

8. Als lineare Differentialgleichungen erster Ordnung bezeichnet man die Gleichungen von der Form

$$1. \qquad y' + Py = Q,$$

wenn darin P und Q Functionen von x allein sind. Ist $Q = 0$, so lassen sich die Variabeln sofort sondern, und man erhält das allgemeine Integral

$$2. \qquad ly = -\int Pdx + C.$$

Wir wollen nun versuchen, das allgemeine Integral der Gleichung 1. dadurch zu erhalten, dass wir in 2. die willkürliche Constante C durch eine Function von x ersetzen; vielleicht lässt sich diese Function so bestimmen, dass der Differentialgleichung 1 genügt wird.

Ersetzen wir in 2. C durch z und differenziren, so ergiebt sich

$$y' = -Py + z'y.$$

Dieser Werth wird in 1. eingesetzt und liefert für z die Gleichung $z'y = Q$, oder, wenn y hierin gemäss der Gleichung

$$3. \qquad ly = -\int Pdx + z$$

durch x und z ersetzt wird,

$$4. \qquad e^z dz = Qe^{\int Pdx} dx.$$

Hieraus folgt für z das allgemeine Integral

$$e^z = \int Qe^{\int Pdx} dx + C.$$

Daher folgt schliesslich das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung

$$y = e^{-\int Pdx}\left(C + \int Qe^{\int Pdx} dx\right).$$

9. Beispiel. Die Curven zu bestimmen, deren Tangenten von der Ordinatenachse das geometrische Mittel der Abscisse und einer gegebenen Strecke a abschneiden.

Die Differentialgleichung des Problems ist

$$y - xy' = \sqrt{ax},$$

oder

$$y' - \frac{1}{x}y = -\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Diese Gleichung ist linear; es ist $P = -1:x$, $Q = -\sqrt{a:x}$, und daher das allgemeine Integral

$$y = e^{\int\frac{dx}{x}}\left(C - \int\sqrt{\frac{a}{x}}\, e^{-\int\frac{dx}{x}} dx\right).$$

Nach Ausführung der beiden Integrationen erhält man

$$y = Cx + 2\sqrt{ax}.$$

10. Das allgemeine Integral einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung kann auch auf einem andern Wege gefunden werden, den wir ebenfalls angeben wollen. Man versucht, die Aufgabe dadurch auf einfachere zurückzu-

*) BOOLE, A treatise on differential equations, 4. ed., London 1877, pag. 36.

führen, dass man y durch das Produkt uv zweier noch unbestimmter Functionen von x ersetzt. Hierdurch erhält man die Gleichung

$$1. \qquad uv' + vu' + Puv = Q.$$

Bestimmt man nun u aus der Gleichung

$$2. \qquad u' + Pu = 0,$$

so bleibt zur Bestimmung von v die Gleichung übrig

$$3. \qquad uv' = Q.$$

Da es bei der Integration von 2. nur darauf ankommt, irgend eine dieser Gleichung entsprechende Function von x zu erhalten, so kann man der willkürlichen Constanten des allgemeinen Integrals von 2. einen solchen besonderen Werth geben, dass das Integral möglichst einfach wird. Die willkürliche Constante des allgemeinen Integrals der Gleichung 1. tritt erst mit der Integration von 3. ein.

Die Gleichung 2. stimmt mit No. 8, 1 für den Fall $Q = 0$, überein; und die Gleichung 3. ist von der Gleichung No. 8, 4 nicht verschieden, wenn man y durch u und z durch v ersetzt.

11. Die nichtlineare Differentialgleichung

$$1. \qquad f'(y)\frac{dy}{dx} + f(y)P = Q,$$

worin P und Q wieder Functionen von x allein sind, lässt sich in eine lineare verwandeln; setzt man nämlich $f(y) = z$, so ist $f'(y)\,dy = dz$ und man erhält

$$z' + Pz = Q.$$

Auf diese Gleichung führt z. B. die folgende

$$2. \qquad y' + Py = Qy^m.$$

Dividirt man nämlich durch $-y^m : (m-1)$, so erhält man

$$-(m-1)y^{-m}y' - (m-1)Py^{-(m-1)} = -(m-1)Q;$$

und diese Gleichung stimmt mit 1. überein, wenn man $f(y)$, P, Q durch $y^{-(m-1)}$, $-(m-1)P$, $-(m-1)Q$ ersetzt.

12. Das allgemeine Integral der nicht linearen Gleichung*)

$$y' + Py = Qy^2 + R$$

lässt sich angeben, wenn man ein particuläres Integral $y = u$ dieser Gleichung kennt. Setzt man nämlich das allgemeine Integral in der Form voraus

$$y = u + v,$$

worin v eine noch zu bestimmende Function bezeichnet, so hat man für u und v die Gleichung

$$u' + v' + Pu + Pv = Qu^2 + 2Quv + Qv^2 + R.$$

Nach der Voraussetzung ist

$$u' + Pu = Qu^2 + R,$$

daher bleibt zur Bestimmung von v die Gleichung

$$v' + (P - 2Qu)v = Qv^2.$$

Diese Gleichung fällt unter No. 11, 2 für $m = 2$.

Beispiele. A. Der Gleichung

$$y' + Py = Qy^2 + 1 + Px - Qx^2$$

wird durch das particuläre Integral $y = x$ genügt. Daher ist jetzt $u = x$, und für v hat man die Gleichung

$$v' + (P - 2Qx)v = Qv^2.$$

$$\text{B.} \qquad y' + Py = y^2 + P',$$

wobei P' für $dP : dx$ gesetzt ist.

*) Sturm, Cours d'Analyse, 5. éd., t. II, Paris 1877, pag. 51.

Der Gleichung wird durch $y = P$ genügt; daher ist das allgemeine Integral $y = P + v$, wenn v durch die Gleichung bestimmt wird

$$v' - Pv = Qv^2.$$

13. Die Gleichung

$$1. \qquad xy' - ay + by^2 = cx^n$$

ist unter der Form No. 12, 1 enthalten. Setzen wir versuchsweise $y = kx^{\frac{n}{2}}$, so erhalten wir

$$\frac{n}{2} kx^{\frac{n}{2}} - akx^{\frac{n}{2}} + bk^2 x^n = cx^n.$$

Diese Gleichung ist identisch erfüllt, wenn

$$n = 2a, \quad k = \sqrt{c:b}.$$

Im Falle $n = 2a$ kann also nach der in No. 12 angegebenen Methode das allgemeine Integral der Gleichung 1. gefunden werden.

Durch geeignete Substitutionen kann man in einer Reihe von Fällen Differentialgleichungen von der Form 1., in welchen n von $2a$ verschieden ist, auf eine Gleichung derselben Form zurückführen, in welcher $n = 2a$ ist.

Setzt man nämlich in 1.

$$y = A + \frac{x^n}{y_1},$$

worin y_1 eine neue Variable ist, so erhält man

$$2. \qquad -aA + bA^2 + (n - a + 2bA)\frac{x^n}{y_1} + b\frac{x^{2n}}{y_1^2} - \frac{x^{n+1}}{y_1^2}y_1' = cx^n.$$

Wir wählen nun A so, dass $-aA + bA^2 = 0$; also entweder $A = a:b$, oder $A = 0$.

Die Annahme $A = a:b$ ergiebt die Transformation

$$3. \qquad y = \frac{a}{b} + \frac{x^n}{y_1},$$

und die transformirte Gleichung

$$(n + a)\frac{x^n}{y_1} + b\frac{x^{2n}}{y_1^2} - \frac{x^{n+1}}{y_1^2}y_1' = cx^n.$$

Durch Multiplication mit $y_1^2 : x^n$ ergiebt sich hieraus

$$4. \qquad xy_1' - (a + n)y_1 + cy_1^2 = bx^n.$$

Diese Gleichung geht aus 1. hervor, wenn man a, b, c der Reihe nach durch $(a + n)$, c, b ersetzt.

Wendet man nun auf 4. die Substitution an

$$5. \qquad y = \frac{a+n}{c} + \frac{x^n}{y_1},$$

die aus 3. hervorgeht, wenn man a und b durch $a + n$ und c ersetzt, so erhält man

$$xy_1' - (a + 2n)y_1 + by_1^2 = cx^n;$$

hierauf wendet man wieder die der Substitution 3. entsprechende an u. s. f.; nach k Transformationen erhält man die Gleichung

wenn k ungerade ist: $\quad xy_1' - (a + kn)y_1 + cy_1^2 = bx^n$;

wenn k gerade ist: $\quad xy_1' - (a + kn)y_1 + by_1^2 = cx^n$.

Kann man nun die ganze Zahl k so wählen, dass $n = 2(a + kn)$, ist also $(n - 2a) : 2n$ eine ganze Zahl, so kann das allgemeine Integral der Gleichung 1. nach den gegebenen Methoden gefunden werden.

Die andere Annahme $A = 0$ liefert die Substitution $y = x^n : y_1$ und die transformirte Gleichung

$$(n - a)\frac{x^n}{y_1} + b\frac{x^{2n}}{y_1} - \frac{x^{n+1}}{y_1^2}y_1' = cx^n.$$

Multiplicirt man mit $y_1^2 : x^n$, so entsteht

6. $$xy_1' - (n-a)y_1 + cy_1^2 = bx^n,$$

also die Gleichung 1., wenn man a, b, c der Reihe nach durch $n-a, c, b$ ersetzt. Durch wiederholte Anwendung der Substitution ergiebt sich schliesslich

wenn k ungerade ist: $xy_1' - (kn-a)y_1 + cy_1^2 = bx^n$;

wenn k gerade ist: $xy_1' - (kn-a)y_1 + by_1^2 = cx^n$.

Hieraus folgt, dass die Gleichung 1. integrabel ist, wenn k so bestimmt werden kann, dass $2(kn-a) = n$, wenn also $(n+2a) : 2n$ eine ganze Zahl ist.

Wir sehen somit: Das allgemeine Integral der Gleichung 1. kann gefunden werden, wenn $(n \pm 2a) : 2n$ eine positive ganze Zahl ist.

Die RICCATI'sche Differentialgleichung

$$y' + by^2 = cx^m$$

kann auf die Form der Gleichung 1. gebracht werden; setzt man nämlich $y = z : x$, so erhält man aus 7.

$$xz' - z + bz^2 = cx^{m+2}.$$

Die RICCATI'sche Gleichung ist somit integrabel, wenn entweder $(m+4) : (2m+4)$ oder $m : (2m+4)$ eine positive ganze Zahl ist.

---

14. Die Integration der Differentialgleichung

1. $$Mdx + Ndy = 0,$$

gelingt sofort, wenn die linke Seite das vollständige Differential

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy$$

einer Function $\varphi(x, y)$ ist, das allgemeine Integral ist alsdann

$$\varphi(x, y) = C.$$

Es fragt sich nun zunächst, wie man erkennt, ob ein Differentialausdruck $Mdx + Ndy$ ein vollständiges Differential ist, und wie man von dem vollständigen Differentiale die Function φ ableitet.

Ist $Mdx + Ndy$ das vollständige Differential von $\varphi(x, y)$, so ist

1. $$M = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Hieraus folgt sofort die nothwendige Bedingung

2. $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

denn beide Seiten der Gleichung sind nach 1. gleich $\partial^2\varphi : \partial x \partial y$. Die Bedingung 2. ist aber auch hinreichend. Hat man nämlich eine Function ψ, welche der Gleichung genügt $M = \partial\psi : \partial x$, so ist

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

also können N und $\partial\psi : \partial y$ nur um eine Grösse verschieden sein, die x nicht enthält, mithin eine bestimmte Function von y allein ist. Bezeichnet man dieselbe mit Y, und setzt

$$\varphi = \psi + \int Ydy,$$

so ist $$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Eine Function ψ ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichung $M = \partial\psi : \partial x$ zu

$$\psi = \int Mdx,$$

wo bei der Integration das in M enthaltene y als constant zu betrachten ist; es genügt einen particularen Werth dieses Integrals zu nehmen.

Hiermit ist auch die zweite Frage, die Bestimmung der Function φ, und damit die Integration der Differentialgleichung erledigt.

Beispiel. $(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\,dy = 0$.

Hier ist

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -4x - 4y = \frac{\partial N}{\partial x},$$

also ist die linke Seite der Gleichung ein vollständiges Differential. Weiter folgt

$$\psi = \int (x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2xy^2.$$

Der Vergleich von N und

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -2x^2 - 4xy$$

liefert

$$Y = N - \frac{\partial \psi}{\partial y} = y^2;$$

daher ist

$$\varphi = \tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2y - 2xy^2 + \tfrac{1}{3}y^3 = C$$

das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung.

15. Jeder Differentialausdruck $Mdx + Ndy$ kann durch Multiplication mit einer geeigneten Function von x und y in ein vollständiges Differential verwandelt werden.

Die Differentialgleichung

$$1. \qquad Mdx + Ndy = 0$$

habe das allgemeine Integral

$$f(x, y) = C.$$

Durch Differentiation folgt hieraus

$$2. \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0.$$

Aus 1. und 2. folgen übereinstimmende Werthe von y', es ist daher identisch

$$M : N = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Folglich giebt es einen Faktor v, so dass

$$vM = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad vN = \frac{\partial f}{\partial y},$$

und mithin

$$vMdx + vNdy = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.$$

Da die Auffindung des Faktors v sofort zur Kenntniss des allgemeinen Integrals der Gleichung 1. führt, so bezeichnet man v als einen integrirenden Faktor der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$.

16. Ein integrirender Faktor v der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$ wird durch die Gleichung definirt

$$\frac{\partial(vM)}{\partial y} = \frac{\partial(vN)}{\partial x}.$$

Führt man die Differentiationen aus, so erhält man nach geeigneter Umstellung

$$1. \qquad N\frac{\partial v}{\partial x} - M\frac{\partial v}{\partial y} = v\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Dies ist eine partiale Differentialgleichung; die Auflösung derselben ist im Allgemeinen ein höheres Problem, als das, eine Differentialgleichung I. O. zu integriren. Im Allgemeinen ist daher die Integration der Differentialgleichungen

I. O. durch Aufsuchung eines integrirenden Faktors nicht lösbar; vielmehr wird man umgekehrt die partiale Differentialgleichung 1. für im Wesentlichen gelöst erachten, nachdem man ihren Zusammenhang mit dem allgemeinen Integrale einer gewöhnlichen Differentialgleichung I. O. erkannt hat, und hierauf werden wir bei Gelegenheit der partialen Differentialgleichungen zurückkommen.

Doch bleibt trotzdem das Studium der integrirenden Faktoren auch für die Integration von Differentialgleichungen I. O. von hoher Bedeutung; denn alle Integrationsmethoden lassen sich auf die eine Methode, einen integrirenden Faktor zu bestimmen, reduciren, — und indem man umgekehrt von bestimmten Formen integrirender Faktoren ausgeht, kann man Gruppen integrabler Differentialgleichungen aufstellen. Wir werden später hierzu Beispiele geben.

17. Dem allgemeinen Integrale einer Differentialgleichung I. O. kann man unzählig viele verschiedene Formen geben. So hat z. B. $3x^2 dx + 2y dy = 0$ das allgemeine Integral $x^3 + y^2 = C$; dasselbe kann aber auch durch

$$(x^3 + y^2)^n = C, \quad l(x^3 + y^2) = C, \quad sin(x^3 + y^2) = C \text{ u. s. w.}$$

ersetzt werden. Diesen verschiedenen Formen des Integrals entspringen verschiedene Formen des integrirenden Faktors; wir wollen nun nachweisen, wie man aus einem integrirenden Faktor die allgemeine Form finden kann, unter der jeder integrirende Faktor derselben Gleichung enthalten ist.

Ist v ein integrirender Faktor von

$$1. \qquad Mdx + Ndy = 0,$$

so ist

$$2. \qquad vMdx + vNdy = d\varphi,$$

und $\varphi = c$ ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung.

Multipliciren wir 2. mit einer willkürlichen Function von φ, so erhalten wir

$$vF(\varphi)(Mdx + Ndy) = F(\varphi)d\varphi.$$

Hierin ist die rechte Seite das vollständige Differential von

$$\int F(\varphi)d\varphi,$$

also ist auch die linke Seite ein vollständiges Differential, mithin ist $vF(\varphi)$ ein integrirender Faktor von 1. Wir haben daher: Ist v ein integrirender Faktor der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$, und $\varphi = c$ das allgemeine Integral, so ist das Product aus v und einer willkürlichen Function von φ ebenfalls ein integrirender Faktor.

Es sei nun ausser v auch V ein integrirender Faktor; um nachzuweisen, dass $V = vF(\varphi)$, zeigen wir, dass der Quotient $V:v$ eine Function von φ ist. Die nothwendige und ausreichende Bedingung hierfür ist das Verschwinden der Determinante

$$R = \frac{\partial(V:v)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial(V:v)}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Differenzirt man rechts die Quotienten, so entsteht

$$v^2 R = v\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}\right) - V\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Nach der Voraussetzung ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = Nv, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = Mv,$$

und daher

$$vR = v\left(N\frac{\partial V}{\partial x} - M\frac{\partial V}{\partial y}\right) - V\left(N\frac{\partial v}{\partial x} - M\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Nach No. 16, 1 ist nun

$$N\frac{\partial V}{\partial x} - M\frac{\partial V}{\partial y} = V\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right),$$

$$N\frac{\partial v}{\partial x} - M\frac{\partial v}{\partial y} = v\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right);$$

daher ergiebt sich

$$vR = 0, \quad \text{d. i. } R = 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

18. Hat man zwei integrirende Faktoren v und V einer Differentialgleichung I. O. aufgefunden, so kann man das allgemeine Integral der Gleichung angeben, ohne eine Integration anzuführen. Denn ist $\varphi = c$ ein allgemeines Integral, so ist $V = vF(\varphi)$, mithin ist

$$\frac{V}{v} = F(\varphi) = c$$

ebenfalls ein allgemeines Integral; wenn man statt F irgend eine Function von F setzt, so kann man von dem so gefundenen allgemeinen Integrale unter Umständen zu einfacheren Formen für dasselbe übergehen.

19. Wir schlagen nun den in No. 16 angedeuteten Weg ein und construiren zu integrirenden Faktoren von gegebener Form die zugehörigen Differentialgleichungen.

Soll der integrirende Faktor v eine Function F einer gegebenen Function φ von x und y sein, so muss die Gleichung No. 14, 2 von $v = F(\varphi)$ erfüllt werden. Man erhält aus derselben

$$1. \qquad N\frac{dF}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} - M\frac{dF}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} = F(\varphi)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Folglich ist

$$2. \qquad \frac{dF}{F} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - M\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}\,d\varphi.$$

Da nun links ein vollständiges Differential steht, so muss auch die rechte Seite ein solches sein; also muss

$$3. \qquad \psi = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - M\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

eine Function von φ sein. Um zu erfahren, ob dies der Fall ist, kann man aus der Gleichung $\varphi(x, y) = \varphi$ eine der Variabeln x oder y berechnen, in dem man das rechts stehende φ als neue Variable einführt; setzt man dann diesen Werth in ψ ein, so muss sich ψ als Function von φ allein ergeben. Dieser Weg ist dann empfehlenswerth, wenn x oder y aus der Gleichung $\varphi(x, y)$ sich leicht bestimmen lassen. In anderen Fällen hat man die Determinante zu bilden

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x};$$

wenn diese identisch verschwindet, so ist ψ eine Function von φ.

Umgekehrt: Ist ψ eine Function von φ und bestimmt man F durch die Gleichung 2., so wird die Gleichung 1. erfüllt, also ist $F(\varphi)$ ein integrirender Faktor der gegebenen Differentialgleichung. Wir schliessen daher: Die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass ein integrirender Faktor der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ eine Function der gegebenen Function $\varphi(x, y)$ ist, besteht darin, dass ψ eine Function von φ ist.

20. Wir gehen nun auf einige besonders einfache Fälle ein.

Setzen wir $\varphi = x$, bez. $\varphi = y$, so entseht

$$\psi = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}, \quad \text{bez.} \quad \psi_1 = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}.$$

Soll also der integrirende Faktor eine Function von x allein bez. von y allein sein, so muss

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) : N \quad \text{bez.} \quad \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) : M$$

eine Function von x, bez. von y sein.

A. Bedeutet X eine Function von x allein, so ist bei der Gleichung

$$(X + 3axy + by^2)\,dx + (ax^3 + bxy)\,dy = 0$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) : N = \frac{ax + by}{x(ax + by)} = \frac{1}{x},$$

also ist der integrirende Faktor eine Function von x.

Durch Multiplication mit x erhält man

$$xXdx + d(ax^3y + \tfrac{1}{2}bx^2y^2) = 0.$$

Hieraus folgt das allgemeine Integral

$$ax^3y + \frac{b}{2}x^2y^2 + \int xXdx = C.$$

B. Bei der linearen Gleichung

$$y' + Py - Q = 0$$

ist $M = Py - Q$, $N = 1$, und daher

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) : N = P,$$

folglich ist auch hier der integrirende Faktor eine Function von x allein. Zur Bestimmung des Faktor haben wir aus 2.

$$\frac{dF}{F} = Pdx,$$

also ist

$$F = e^{\int Pdx}.$$

Um das allgemeine Integral zu erhalten, bilden wir zunächst (No. 14.)

$$\int MFdx = \int (Py - Q)\,e^{\int Pdx}\,dx = y\,e^{\int Pdx} - \int Q\,e^{\int Pdx}\,dx.$$

Ferner ist

$$Y = NF - \frac{\partial}{\partial y}\int MFdx = 0.$$

Daher folgt für das allgemeine Integral

$$y\,e^{\int Pdx} - \int Q\,e^{\int Pdx}\,dx = c$$

in Uebereinstimmung mit No. 8.

21. Der integrirende Faktor ist eine Function des Produkts xy, wenn

$$\psi = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx}$$

eine Function von xy ist.

Beispiel. $$yF(xy)dx + xG(xy)dy = 0.$$

Hier ist $M = yF(xy)$, $N = xG(xy)$, und somit

$$\psi = \frac{xy[F'(xy) - G'(xy)] + F(xy) - G(xy)}{xy[G(xy) - F(xy)]}.$$

Bezeichnet f den integrirenden Faktor, so ist

$$\frac{df}{f} = -\frac{F'(xy) - G'(xy)}{F(xy) - G(xy)} d(xy) - \frac{d(xy)}{xy},$$

also ist

$$f = 1 : xy[F(xy) - G(xy)].$$

Eine Gleichung von der Form

$$yF(xy)\,dx + xG(xy)\,dy = 0$$

wird daher durch den Faktor $1 : xy[F(xy) - G(xy)]$ integrabel.

22. Der integrirende Faktor ist eine homogene Function nullten Grades von x und y, d. i. eine Function von $y : x$, wenn

$$1. \qquad \psi = \frac{x^2\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{Mx + Ny}$$

eine Function von $y : x$ ist.

Soll der integrirende Faktor eine homogene Function $n$ten Grades sein, also von der Form $x^n F(y : x)$, so ergiebt die partiale Differentialgleichung No. 19, 1

$$nNx^{n-1}F - yx^{n-2}NF' - x^{n-1}MF' = x^n F\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right),$$

$$2. \qquad \psi = \frac{F'}{F} = \frac{x^2\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) + nNx}{xM + yN};$$

also muss die rechte Seite dieser Gleichung eine Function von $y : x$ sein.

Beispiel. Ist die gegebene Differentialgleichung homogen vom $n$ten Grade, so kann man sie durch Division mit x^n in die Form bringen

$$M\left(\frac{y}{x}\right) dx + N\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

Hier ist

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} M', \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} N',$$

und daher

$$\psi = \frac{xM' + yN'}{xM + yN} = \left(M' + \frac{y}{x} N'\right) : \left(M + \frac{y}{x} N\right).$$

Folglich hat eine homogene Differentialgleichung einen integrirenden Faktor, der homogen und nullten Grades ist.

Setzt man in 2. voraus, dass M und N Functionen von $y : x$ sind, so ergiebt sich ψ ebenfalls als Function von $y : x$, unabhängig von n; eine homogene Differentialgleichung lässt also homogene integrirende Faktoren jeden Grades zu.

Berechnet man die Function

$$\psi = \frac{x^2\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) + nNx}{xM + yN}$$

für den Fall, dass der integrirende Faktor homogen vom Grade n sein soll, so enthält dieselbe die unbestimmte Zahl n; unter Umständen gelingt es, die Zahl n so zu wählen, dass ψ homogen wird. Dies ist z. B. der Fall bei der Gleichung

$$(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3)\,dx + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)\,dy = 0;$$

man findet leicht, dass sie einen homogenen integrirenden Faktor vom Grade (-2) zulässt.

23. Um die Gleichung zu integriren

1. $$Q\,dx + R\,dy + S(x\,dy - y\,dx) = 0,$$
worin Q, R und S homogene Functionen sind, und zwar Q und R vom Grade m, S vom Grade n, bestimme man einen homogenen integrirenden Faktor vom Grade $-n-2$ für die Gleichung $Q\,dx + R\,dy = 0$: Giebt man der Differential-gleichung die Form

$$Q\,dx + R\,dy - Sx^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

so erkennt man sofort, dass dieser Faktor die linke Seite in die Summe zweier vollständigen Differentiale verwandelt.

In die Form 1. lässt sich die Gleichung

$$(A + A'x + A''y)(x\,dy - y\,dx) - (B + B'x + B''y)\,dy + (C + C'x + C''y)\,dx = 0$$

durch eine geschickte Substitution bringen.

Setzt man nämlich

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta,$$

so erhält man eine trausformirte Gleichung von der Form

$$(a\xi + a'\eta)(\xi\,d\eta - \eta\,d\xi) - (b\xi + b'\eta)\,d\eta + (c\xi + c'\eta)\,d\xi = 0,$$

wenn α und β die Bedingungen erfüllen

$$\alpha(A + A'\alpha + A''\beta) - (B + B'\alpha + B''\beta) = 0$$
$$-\beta(A + A'\alpha + A''\beta) + (C + C'\alpha + C''\beta) = 0.$$

Wir schreiben hierfür

$$A + A'\alpha + A''\beta = \frac{B + B'\alpha + B''\beta}{\alpha} = \frac{C + C'\alpha + C''\beta}{\beta}.$$

Setzen wir den gemeinschaftlichen Werth dieser drei Ausdrücke $= \lambda$, so ergiebt sich

$$A - \lambda + A'\alpha + A''\beta = 0,$$
$$B + (B' - \lambda)\alpha + B''\beta = 0,$$
$$C + C'\alpha + (C'' - \lambda)\beta = 0.$$

Der Verein dieser Gleichungen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & A' & A'' \\ B & B' - \lambda & B'' \\ C & C' & C'' - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Hat man eine Wurzel λ dieser cubischen Gleichung gefunden, so ergeben sich α und β z. B. aus

$$A - \lambda + A'\alpha + A''\beta = 0 \quad \text{und} \quad B + (B' - \lambda)\,\alpha + B''\beta = 0.$$

---

24. Die bisher integrirten Differentialgleichungen I. O. sind vom ersten Grade, d. h. sie enthalten nur die erste Potenz von y'. Wir geben nun einige besondere Regeln, welche bei der Integration von Differentialgleichungen von höherem Grade zu beachten sind.

Zerfällt die Gleichung

$$F(x, y, y') \equiv A_0 y'^n + A_1 y'^{n-1} + A_2 y'^{n-2} + \ldots + A_{n-1} y' + A_n = 0,$$

in welcher A_0, A_1, ... A_n eindeutige Functionen von x und y bezeichnen, in ein Produkt von Functionen minderen Grades von y', deren Coefficienten eindeutige Functionen von x und y sind, so zerfällt die Differentialgleichung in ebenso viele einzelne Gleichungen, die dadurch hervorgehen, dass man die einzelnen Faktoren gleich Null setzt.

Gelingt es, $F(x, y, y')$ in rücksichtlich y' lineare Faktoren zu zerlegen

$$F \equiv A_0(y' - f_1)(y' - f_2) \ldots (y' - f_n) = 0,$$

und sind darin $f_1, f_2 \ldots f_k$ ein System conjugirter Werthe derselben $k$deutigen Function f, so hat man die Gleichung zu integriren

$$y' - f = 0\,;$$

hierdurch sind die ersten k Faktoren erledigt. Bilden $f_{k+1}, \ldots f_l$ ein System conjugirter Werthe einer mehrdeutigen Function g, so hat man ferner die Gleichung zu integriren

$$y' - g = 0\,,$$

u. s. w. Die vollständige Integration der Differentialgleichung besteht aus den allgemeinen und den singulären Integralen der Gleichungen

$$y' - f = 0\,, \quad y' - g = 0\,, \quad \text{u. s. w.}$$

25. Statt dieses Weges, eine Differentialgleichung I. O. $n$ten Grades zu integriren, kann man auch zum Ziele gelangen, indem man die Gleichung $F(x, y, y') = 0$ nach y auflöst; es ergebe sich

1. $$y = f(x, y')\,.$$

Diese Gleichung differenziren wir und erhalten

2. $$y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx}\,.$$

In dieser letzten Gleichung kommen nur die Grössen x, y', $dy' : dx$ vor, und zwar letztere im ersten Grade. Der Verein des allgemeinen Integrals der Gleichung 2.

$$\varphi(x, y') = C\,,$$

und der gegebenen Gleichung $y = f(x, y')$ ist das allgemeine Integral der letzteren. Wenn es möglich ist, so eliminirt man y' aus diesen beiden Gleichungen, und erhält dann das allgemeine Integral in der bisher üblichen Form $\psi(x, y, C) = 0$.

Man kann auch aus der gegebenen Gleichung die Variable x berechnen. Ergiebt sich

3. $$x = f(y, y')\,,$$

so erhält man durch Differentiation

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dx}\,.$$

Ersetzt man hier $dy' : dx$ gemäss der Identität

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{1}{y'}\,,$$

so erhält man

4. $$1 = \frac{\partial f}{\partial y} y' + y' \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dy}\,,$$

also eine Differentialgleichung für y, y' und $dy' : dy$. Das allgemeine Integral derselben sei

5. $$\varphi(y, y') = C\,.$$

Der Verein der Gleichungen

$$\varphi(y, y') = C \quad \text{und} \quad x = f(y, y')$$

ist dann die Auflösung der gegebenen Gleichung; durch Elimination von y' kann man dieselbe wieder in der üblichen Form darstellen.

26. Ist die Differentialgleichung linear in Bezug auf x und y, also von der Form

1. $$x\varphi(y') + y\psi(y') = \chi(y')\,,$$

so kann man mit gleicher Leichtigkeit auf x oder y reduciren; es ist bemerkenswerth, dass die Herstellung des allgemeinen Integrals durch Integration einer linearen Differentialgleichung erfolgt. Die Differentiation von 1. ergiebt nämlich

2. $$\varphi + \varphi' \cdot \frac{dy'}{dx} + y'\psi + y\psi' \frac{dy'}{dx} = \chi' \frac{dy'}{dx},$$

Setzt man hierin

$$\frac{dy'}{dx} = y' \frac{dy'}{dy},$$

und ersetzt y' durch das einfachere Zeichen p, so erhält man

$$\varphi + p\varphi' \frac{dp}{dy} + p\psi + yp\psi' \frac{dp}{dy} = p\chi' \frac{dp}{dy}.$$

Hier wollen wir p als die unabhängige und y als die abhängige Variable betrachten; wir erhalten alsdann für y die Gleichung

3. $$\frac{dy}{dp} + \frac{p\psi'}{\varphi + p\psi} y = \frac{\chi' - \varphi'}{\varphi + p\psi} p;$$

diese Gleichung ist linear.

Man kann auch y aus 1. und 2. eliminiren; dadurch entsteht

$$\varphi + \varphi' \frac{dp}{dx} + p\psi + \frac{\chi - x\varphi}{\psi} \cdot \psi' \frac{dp}{dx} = \chi' \frac{dp}{dx}.$$

Wird p als unabhängige Variable betrachtet, so ergiebt sich für x die lineare Differentialgleichung

5. $$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi\psi'}{\psi(\varphi + p\psi)} x + \frac{\varphi'\psi + \chi - \chi'\psi}{\psi(\varphi + p\psi)} = 0.$$

Beispiel. Bei der Differentialgleichung

6. $$px + (a + \tfrac{1}{2}p)y = \frac{1}{4a}p^2$$

ist $$\varphi = p, \quad \psi = (a + \tfrac{1}{2}p), \quad \chi = \frac{1}{4a}p^2;$$

$$\varphi' = 1, \quad \psi' = \tfrac{1}{2}, \quad \chi' = \frac{p}{2a}.$$

Daher erhält man für x die Gleichung

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{(2a + p)(2a + 2 + p)} x + \frac{a}{(2a + p)(2a + 2 + p)} = 0.$$

Nach den bekannten Regeln für eine lineare Gleichung ist das allgemeine Integral hiervon

7. $$x = \frac{p + 2a}{p + 2a + 2}\left(C + \frac{a}{p + 2a}\right);$$

aus dieser und aus der gegebenen Differentialgleichung hat man schliesslich noch p zu eliminiren; doch ist auch ohne Ausführung der Elimination das Problem durch die beiden Gleichungen 6. und 7. vollständig gelöst; durch diese Gleichungen sind die beiden Variabeln x und y durch dieselbe Hülfsvariable p ausgedrückt.

27. Die in No. 24, 25 und 26 mitgetheilten Methoden bestehen darin, dass man die gegebene Gleichung

1. $$F(x, y, y') = 0$$

differenzirt; aus der dadurch erhaltenen Gleichung

2. $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx} = 0,$$

und aus 1. eliminirt man y; oder man eliminirt x und ersetzt $dy' : dx$ durch $y' dy' : dy$.

Wenn es sich ereignet, dass

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'$$

identisch verschwindet, dass also

3. $$y' = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y},$$

so zerfällt die Gleichung 2. in die beiden Gleichungen

4. $$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \qquad \text{und 5.} \qquad \frac{dy'}{dx} = 0,$$

Eliminirt man y' aus 1. und 4., so erhält man (§ 23, No. 8) die Verzweigungscurve der Differentialgleichung, und damit das singuläre Integral derselben. Das allgemeine Integral ergiebt sich, indem man aus dem allgemeinen Integrale von 5.

$$y' = C,$$

und aus 1. y' eliminirt; man erhält

$$F(x, y, C) = 0.$$

Beispiel. Die Curve zu bestimmen, von deren Tangenten die beiden Coordinatenachsen eine Strecke von constanter Länge a abschneiden.

Die Differentialgleichung des Problems ergiebt sich zu

6. $$(xy' - y)\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'} = a,$$

oder

$$xy' - y - \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0.$$

Hier ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y', \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -1, \quad \text{also} \quad \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} = -y'.$$

Das allgemeine Integral ist

$$Cx - y - \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}} = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden mit den Achsenabschnitten $a : \sqrt{1+C^2}$ und $-aC : \sqrt{1+C^2}$; die zwischen den Achsen liegende Strecke derselben ist in der That $= a$. Für das singuläre Integral bilden wir

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = x - \frac{a}{\sqrt{1+y'^2}^{\,3}} = 0.$$

Hieraus folgt

$$y' = \left(\frac{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dies in 6. eingesetzt, ergiebt nach leichter Reduction die Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0,$$

das singuläre Integral der Gleichung 6.

28. Das vorige Beispiel ist ein besonderer Fall der von Clairaut bearbeiteten und nach ihm benannten Gleichung

1. $$y - xy' = f(y').$$

Für das allgemeine Integral ergiebt sich der Verein der Gleichungen 1. und

2. $$y' = C,$$

also ist das allgemeine Integral

3. $$y = Cx + f(C).$$

Das singuläre Integral entsteht durch Elimination von y' aus 1. und

4. $$x + \frac{df(y')}{dy'} = 0,$$

in Uebereinstimmung mit dem Resultate der Elimination von C aus 3. und aus der aus 3. durch Differentiation nach C hervorgehenden Gleichung.

29. Die Gleichung

1. $$y - 2xy' = y'f(yy')$$

liefert mit y multiplicirt

2. $$y^2 - 2yy' \cdot x = yy' \cdot f(yy') .$$

Substituirt man $y^2 = z$, so ist $2yy' = z'$, und es ergiebt sich

$$z - xz' = \tfrac{1}{2}z'f(\tfrac{1}{2}z'),$$

also eine CLAIRAUT'sche Gleichung. Das allgemeine Integral von 1. ist daher

3. $$y^2 = 2Cx + Cf(C),$$

das singuläre folgt durch Elimination von y' aus 1. und aus

4. $$1 + y'^2 \cdot \frac{df(yy')}{d(yy')} = 0,$$

wie man leicht erhält, wenn man die an die Stelle von No. 28, 4 hier tretende Gleichung durch 1. reducirt.

30. Die Aufgabe: Die Curve zu bestimmen, bei welcher die Normale eine gegebene Function f der von der Normalen auf der X-Achse abgeschnittenen Strecke ist, führt auf die Differentialgleichung

1. $$y\sqrt{1 + y'^2} = f(x + yy') .$$

Führt man statt y eine neue abhängige Variable r durch die Substitution ein

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

so ist

$$rr' = x + yy',$$

$$y' = \frac{1}{y}(rr' - x), \quad 1 + y'^2 = \frac{r^2 + r^2r'^2 - 2xrr'}{r^2 - x^2} .$$

Daher ergiebt sich aus 1.

2. $$r^2 + r^2r'^2 - 2xrr' = [f(rr')]^2.$$

Hieraus folgt die neue Differentialgleichung

$$r - 2xr' = r' \cdot \frac{[f(rr')]^2 - r^2r'^2}{rr'};$$

diese ist von derselben Form, wie No. 29, 1.

31. Denkt man sich die Gleichung

1. $$\varphi(x, y, y') = 0$$

in Bezug auf y' aufgelöst, so erhält man ein Resultat von der Form

2. $$dy - y'dx = 0,$$

worin man y' aus 1. zu substituiren hat. Man kann nun versuchen, einen integrirenden Faktor F als Function von x, y, y' so zu bestimmen, dass

3. $$F \cdot (dy - y'dx) = 0$$

unter der Voraussetzung 1. ein vollständiges Differential wird. Das allgemeine Integral von 1. wird alsdann durch Elimination von y' aus 1. und aus

$$\int F \cdot (dy - y'dx) = C$$

erhalten, wenn man mit $\int F \cdot (dy - y'dx)$ eine Function bezeichnet, deren vollständiges Differential $F \cdot (dy - y'dx)$ ist.

Ist 3. ein vollständiges Differential, so sind die Bedingungen erfüllt

4. $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} + y' \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + y' \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} + F \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} = 0 .$$

Die Differentialquotienten

$$\frac{\partial y'}{\partial x}, \quad \frac{\partial y'}{\partial y}$$

sind aus 1. zu berechnen. Nun ist für jede Verschiebung des Punktes x, y entlang einer Integralcurve

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \left(\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} y'\right) = \frac{dF}{dx}.$$

Daher folgt aus 4.

$$\frac{1}{F} \cdot \frac{dF}{dx} = -\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial y'}.$$

Wenn sich die rechte Seite dieser Gleichung als ein Differentialquotient nach x darstellen lässt, so erhält man

$$F = e^{\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right) dx}.$$

32. Giebt man dem integrirenden Faktor die Gestalt $G : y'$, so ist das Kriterium dafür, dass

1. $$\frac{G}{y'}(dy - y'\,dx)$$

ein vollständiges Differential ist,

2. $$\frac{1}{y'}\left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x}\right) + G \frac{\partial \frac{1}{y'}}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} = 0.$$

Da nun für jede unendlich kleine Verschiebung des Punktes x, y auf einer Integralcurve

$$\frac{dG}{dy} = \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{\partial G}{\partial y'}\left(\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dy}\right),$$

so folgt aus 2.

3. $$\frac{1}{G} \cdot \frac{dG}{dy} = -\frac{\partial \frac{1}{y'}}{\partial x} = \frac{1}{y'^2} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} = -\frac{1}{y'^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right).$$

Ist die rechte Seite dieser Gleichung ein Differentialquotient nach y, so kann man integriren und erhält

$$G = e^{-\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right) \frac{dy}{y'^2}}.\text{*)}$$

33. Wir geben hierzu zwei Beispiele.

Die Curve zu bestimmen, bei welcher das vom Nullpunkte auf die Tangente gefällte Loth eine gegebene Function der Normalen ist.

Die Differentialgleichung der Curve ist

$$\frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}} = f(y\sqrt{1 + y'^2}).$$

Multiplicirt man beide Seiten mit $y\sqrt{1 + y'^2}$, so erhält man eine Gleichung von der Form

1. $$\varphi = \psi(y\sqrt{1 + y'^2}) - y(xy' - y) = 0.$$

Durch partiale Differentiation folgt hieraus

2. $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -yy'.$$

3. $$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = \psi' \cdot \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} - xy.$$

Durch vollständige Differentiation folgt aus 1.

$$\psi'\left(\sqrt{1 + y'^2} \cdot y' + \frac{yy'y''}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = xy'^2 + xyy'' - yy',$$

---

*) Malmsten, Mémoire sur l'integration des équations differentielles, Liouville, Journal de Mathematiques pures et appliquées. 2. Série, t. VII. pag. 315—333, 1862.

also ist
$$\frac{\psi' \cdot y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{xy'^2 + xyy'' - yy'}{1+y'^2+yy''}.$$

Wird dies in 3. eingesetzt, so erhält man
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = \frac{-(x+yy')y}{1+y'^2+yy''}.$$

Hieraus und aus 2. folgt sofort
$$-\frac{1}{y'^2}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) = -\frac{1+y'^2+yy''}{y'(x+yy')}.$$

Da nun
$$\frac{d(x+yy')}{dy} = \frac{1}{y'} + y' + yy''\cdot\frac{1}{y'},$$
so ist
$$-\frac{1}{y'^2}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) = -\frac{d}{dy}\,l(x+yy').$$

Hieraus folgt
$$G = \frac{1}{x+yy'}.$$

Man hat nun das Integral zu bestimmen
$$\int\frac{dy - y'dx}{y'(x+yy')} = C.$$

Man erhält zunächst
$$C = \int\frac{ydy + yy'\cdot d(yy')}{yy'(x+yy')} - \int\frac{dx + d(yy')}{x+yy'}$$
$$= -\,l(x+yy') + \frac{1}{2}\int\frac{d[y^2(1+y'^2)]}{yy'(x+yy')}.$$

Setzt man zur Abkürzung
$$y\sqrt{1+y'^2} = u,$$
so folgt hieraus
$$C = -\,l(x+yy') + \int\frac{udu}{yy'(x+yy')}.$$

Da nun
$$yy'(x+yy') = u^2 + \frac{u(xy'-y)}{\sqrt{1+y'^2}},$$
so folgt aus 1.
$$yy'(x+yy') = u^2 + uf(u).$$

Daher hat man schliesslich

5. $$C = -\,l(x+yy') + \int\frac{du}{u+f(u)}.$$

Das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung ergiebt sich durch Elimination von y' aus 1. und 5.

34. Die Curve zu bestimmen, bei welcher das vom Nullpunkte auf die Normale gefällte Loth eine gegebene Function des Radius vector ist.

Die Differentialgleichung des Problems ist

1. $$\varphi = f(x^2+y^2) - \frac{x+yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0.$$

Hieraus folgt
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2yf' - \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = \frac{xy'-y}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aus 1. ergiebt sich ferner durch Differentiation

$$2(x+yy')f' = \frac{d(x+yy')}{dx}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} - (x+yy')\cdot\frac{y'y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Daher ist

$$2yf' = \frac{y}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{d}{dx}l(x+yy') - \frac{yy'y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da nun

$$\frac{yy'y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d(x+yy')}{dx},$$

$$= \frac{y'x+yy'^2}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d}{dx}l(x+yy'),$$

so folgt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{y-y'x}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d}{dx}l(x+yy'),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}:\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = -\frac{d}{dx}l(x+yy'),$$

$$F = \frac{1}{x^2+y'}.$$

Man hat daher das Integral

$$\int\frac{dy-y'dx}{x+yy'} = C.$$

Subtrahirt man hiervon

$$\int\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} - arc\,tang\frac{y}{x} = 0,$$

so erhält man

$$arc\,tang\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{xy'-y}{x+yy'}\cdot\frac{d(r^2)}{r^2} = C, \quad r^2 = x^2+y^2.$$

Da nun, wie man sofort erhält,

$$\left(\frac{xy'-y}{x+yy'}\right)^2 + 1 = \frac{r^2(1+y'^2)}{(x+yy')^2},$$

so folgt mit Rücksicht auf die Differentialgleichung

$$\frac{xy'-y}{x+yy'} = \sqrt{\frac{r^2}{f(r^2)^2}-1}.$$

Daher hat man schliesslich für das allgemeine Integral

$$arc\,tang\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{r^2-f(r^2)^2}}{r^2f(r^2)}d(r^2) = C.^{*})$$

---

35. **Integration durch unendliche Reihen.**

Aus der Differentialgleichung $y' = \varphi(x,y)$ gewinnt man durch Differentiation

$$y'' = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + y'\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varphi_1(x,y),$$

1. $$y''' = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \varphi_2(x,y),$$

$$y'''' = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = \varphi_3(x,y),$$

u. s. w.,

so dass also y', y'', y''' bekannte Functionen von x und y sind. Diese Werthe

*) Weitere Beispiele findet man in dem citirten MALMSTEN'schen Aufsatze.

kann man dazu verwenden, y in eine TAYLOR'sche oder MACLAURIN'sche Reihe zu entwickeln. Wird einem Anfangswerthe x_0 eine beliebige Ordinate y_0 zugeordnet, so ist

2. $$y = y_0 + \varphi(x_0, y_0)\frac{x - x_0}{1} + \varphi_1(x_0, y_0)\frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \ldots$$

Setzt man insbesondere $x_0 = 0$ und schreibt b für y_0, so erhält man

3. $$y = b + \varphi(0, b) \cdot \frac{x}{1} + \varphi_1(0, b)\frac{x^2}{1 \cdot 2} + \varphi_2(0, b)\frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

Nach Berechnung der Coefficienten $\varphi_k(x_0, y_0)$ hat man die Grenzen für die Convergenz festzustellen.

Die Entwicklung 3. wird man zumeist mit Vortheil nach der Methode der unbestimmten Coefficienten vornehmen; man setzt

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots .$$

also

$$y' = A_1 + 2 \cdot A_2 x + 3 \cdot A_3 x^2 + \ldots ,$$

substituirt beide Reihen in die Differentialgleichung und bestimmt die A_k so, dass dieselbe identisch erfüllt wird. Wenn eine der Functionen $\varphi_k(0, b)$ unendlich gross ist, so ist die Entwicklung nach der MACLAURIN'schen Reihe nicht zulässig; in diesem Falle wird man zur TAYLOR'schen Reihe greifen und x_0, y_0 so wählen, dass alle Functionen $\varphi_k(x_0, y_0)$ endlich sind.

Aus der Differentialgleichung

$$y' = \frac{\varphi(x, y)}{x}$$

folgt $y' = \infty$ für $x = 0$, sobald $\varphi(x, y)$ für $x = 0$ nicht verschwindet. Man kann daher das Integral dieser Gleichung nicht nach der MACLAURIN'schen Reihe entwickeln. Setzt man $x = 1 + \xi$, so erhält man

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{\varphi(1 + \xi, y)}{1 + \xi}.$$

Wenn nun φ für $x = 1$ nicht unendlich gross ist, so kann man unter Umständen y in eine Reihe nach steigenden Potenzen von ξ, d. i. in eine TAYLOR'sche Reihe nach steigenden Potenzen von $x - 1$ entwickeln.

36. Es kann der Fall eintreten, dass man nicht das allgemeine Integral, sondern nur ein particuläres erhält, wenn man nach der MACLAURIN'schen Reihe entwickelt. So führt z. B. die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{2x + y}{x(1 + x + y)}$$

bei der Annahme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots .$$

auf die Gleichung

$$(A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots)[(A_0 + 1)x + (A_1 + 1)x^2 + A_2 x^3 + A_3 x^4 + \ldots]$$
$$= -A_0 - (A_1 + 2)x - A_2 x^2 - A_3 x^3 - A_4 x^4 - \ldots .$$

Hieraus folgen die Werthe

$$A_0 = 0, \quad A_1 = -1, \quad A_2 = A_3 = A_4 = \ldots = 0,$$

also ergiebt sich das Integral

$$y = -x,$$

das nicht das allgemeine sein kann, da es keine willkürliche Constante enthält. Die Herstellung des allgemeinen Integrals hat keine Schwierigkeit, da man sich leicht überzeugt, dass die Differentialgleichung einen integrirenden Faktor hat, der eine Function von $x + y$ ist.

37. Die RICCATI'sche Differentialgleichung (No. 13).

1. $$y' + by^2 = cx^m$$

wird, indem man by durch y ersetzt, in die Gleichung verwandelt

2. $$y' + y^2 = \gamma x^m, \quad \gamma = cb.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lässt sich als Quotient zweier Potenzreihen herstellen. Macht man nämlich die Annahme $y = \psi(x):\varphi(x)$, indem man unter ψ und φ zwei Potenzreihen versteht, so erhält man aus 2.

$$\frac{\varphi\psi' - \psi\varphi' + \psi^2}{\varphi^2} = \gamma x^m.$$

Nimmt man $\psi = \varphi'$, so vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\varphi'' = \gamma\varphi x^m.$$

Hierin ersetzen wir φ durch $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ und erhalten

$$1\cdot 2\cdot A_2 + 2\cdot 3A_3 x + 3\cdot 4A_4 x^2 + \ldots = \gamma(A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \ldots).$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$A_2 = A_3 = A_4 = \ldots = A_{m+1} = 0.$$

$$(m+1)(m+2)A_{m+2} = \gamma A_0, \quad (m+2)(m+3)A_{m+3} = \gamma A_1,$$

$$A_{m+4} = A_{m+5} = \ldots = A_{2m+3} = 0,$$

$$(2m+3)(2m+4)A_{2m+4} = \gamma A_{m+2}, \quad (2m+4)(2m+5)A_{2m+5} = \gamma A_{m+3},$$

$$A_{2m+6} = A_{2m+7} = \ldots = A_{3m+5} = 0,$$

. . . .

Setzen wir abkürzungsweise

$$U = 1 + \frac{\gamma}{(m+1)(m+2)}x^{m+2} + \frac{\gamma^2}{(m+1)(m+2)(2m+3)(2m+4)}x^{2m+4} + \ldots$$

$$V = x + \frac{\gamma}{(m+2)(m+3)}x^{m+3} + \frac{\gamma^2}{(m+2)(m+3)(2m+4)(2m+5)}x^{2m+5} + \ldots,$$

so ergiebt sich

$$\varphi = A_0 U + A_1 V;$$

daher ist, wenn der willkürliche Quotient $A_1 : A_0$ mit c bezeichnet wird, das allgemeine Integral der RICCATI'schen Gleichung

$$y = \frac{U' + cV'}{U + cV}.$$

38. Trajectorien. Eine Curvengleichung $\varphi(x, y, c) = 0$ enthalte eine willkürliche Constante c; giebt man derselben nach einander alle möglichen Werthe, so wird ein System von unendlich vielen Curven erzeugt. Eine Curve, welche alle diese Curven unter demselben Winkel schneidet, wird als Trajectorie des Curvensystems bezeichnet. Der einfachste Fall tritt ein, wenn die Trajectorie die Curven der Schaar orthogonal schneidet, eine Orthogonalcurve der Schaar ist.

Für irgend einen Punkt x, y der Curve

1. $$\varphi(x, y, c) = 0$$

bestimmt sich die Richtung der Tangente aus der Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0,$$

daher folgt für die diesen Punkt enthaltende Orthogonalcurve

2. $$y' = \frac{\partial\varphi}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Eliminirt man c aus den Gleichungen 1. und 2., so erhält man die Differentialgleichung der Orthogonalcurve; wie man sieht, ist dieselbe von der ersten Ordnung.

39. Für eine Orthogonalcurve von

$$y = \gamma x^m$$

ergiebt sich zunächst

$$y' = -\frac{1}{m\gamma x^{m-1}}.$$

Die Elimination von γ aus beiden Gleichungen führt zu

$$yy' + \frac{1}{m}x = 0;$$

hiervon ist das allgemeine Integral

$$\frac{1}{m}x^2 + y^2 = c.$$

Ist $m > 0$, so sind die gegebenen Curven parabolisch und die Orthogonalcurven Ellipsen; ist $m = 1$, so sind die gegebenen Curven Strahlen eines Büschels, dass den Nullpunkt zum Träger hat, und die Orthogonalcurven sind concentrische Kreise; ist $m < 0$, so sind die gegebenen Curven hyperbolisch und haben die Achsen zu Asymptoten, die Orthogonalcurven sind Hyperbeln; für $m = -1$ insbesondere bilden die gegebenen Curven sowohl, wie die Orthogonalcurven Büschel von gleichseitigen coaxialen Hyperbeln, die Achsen des einen Büschels sind die gemeinsamen Asymptoten des anderen.

40. Um die Orthogonalcurven der Kreise eines Büschels zu erhalten, legen wir die X-Achse durch die Centren, die Y-Achse in die Chordale des Büschels; die Gleichungen aller Büschelkreise sind dann von der Form

$$\varphi \equiv (x-a)^2 + y^2 + b + 2\gamma x = 0$$

wobei γ von Kreis zu Kreis sich ändert. Für eine Orthogonalcurve hat man daher zunächst

$$y' = \frac{\partial\varphi}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{y}{x - a + \gamma}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Elimination von γ

$$2xy\,dx + (y^2 - x^2 + b)\,dy = 0.$$

Hier ist
$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) : M = \frac{2}{y},$$

folglich hat die Differentialgleichung einen integrirenden Faktor, der eine Function von y allein ist; er ergiebt sich aus der Gleichung $dF : F = -2dy : y$ zu $F = y^{-2}$.

Ferner bildet man

$$\lambda = \int \frac{M}{y^2}\,dx = \frac{x^2}{y},$$

$$Y = \frac{N}{y^2} - \frac{\partial\lambda}{\partial y} = 1 + \frac{b}{y^2}, \quad \int Y dy = y - \frac{b}{y},$$

$$\lambda + \int Y dy = \frac{x^2 + y^2 - b}{y},$$

und erhält hieraus das allgemeine Integral der Differentialgleichung, wenn die willkürliche Constante mit $2c$ bezeichnet wird,

$$\frac{x^2 + y^2 - b}{y} = 2c,$$

oder
$$x^2 + y^2 - b - 2cy = 0.$$

Dies bestätigt den in der analytischen Planimetrie entwickelten Satz, dass die Orthogonalcurven eines Kreisbüschels die Kreise eines Büschels sind, deren Centren auf der Chordale des gegebenen Büschels liegen und deren Chordale mit der Centralen desselben zusammenfällt.

41. Die Ellipsen

$$1. \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

für welche, wenn h eine Constante bezeichnet,

$$2. \qquad a^2 - b^2 = h^2,$$

sind confocal; um die Differentialgleichung ihrer Orthogonalcurven zu erhalten, hat man a und b aus 1. und 2. und aus der Gleichung

$$y' = \frac{y}{b^2} : \frac{x}{a^2}$$

zu eliminiren; man erhält

3. $$xyy'^2 + (x^2 - y^2 - h^2)y' - xy = 0.$$

Durch Einführung neuer Variabeln kann diese Gleichung wesentlich vereinfacht werden; setzt man nämlich $x^2 = s$, $y^2 = t$, so erhält man

$$st'^2 + (s - t - h^2)t' - t = 0, \quad \text{oder}$$

4. $$st' - t = h^2 \frac{t'}{t' + 1}.$$

Wird diese Gleichung differenzirt und $dt' : ds = t' \cdot dt' : dt$ gesetzt, so folgt

$$st' \cdot \frac{dt'}{dt} = \frac{h^2 t'}{(t' + 1)^2} \cdot \frac{dt'}{dt}.$$

Diese Gleichung zerfällt in die drei

5. $$t' = 0, \quad s = \left(\frac{h}{t' + 1}\right)^2, \quad \frac{dt'}{dt} = 0.$$

Die erste liefert in 4. substituirt das particuläre Integral $t = 0$. Aus der zweiten und aus 4. eliminirt man t' und erhält

6. $$(h \pm x)^2 + y^2 = 0.$$

und diese Gleichung ist nur durch die beiden Brennpunkte $x = \pm h$, $y = 0$, der Schaar confocaler Ellipsen zu befriedigen. Die dritte der Gleichungen 5. führt zu

$$t' = c.$$

Wird dies in 4. substituirt, so erhält man

$$cx^2 - y^2 = \frac{h^2 c}{1 + c},$$

das allgemeine Integral von 3.; hieraus folgt, dass die Orthogonalcurven confocale Hyperbeln sind, was auch in der Differentialrechnung nachgewiesen worden ist. Zu bemerken ist noch, dass die Gleichung 6. der Differentialgleichung 3. genügt und daher das singuläre Integral derselben ist.

§ 25. Differentialgleichungen höherer Ordnung mit zwei Veränderlichen.

1. Eine Function φ von x und y enthalten n Constante $c_1, c_2, c_3 \ldots c_n$. Die Gleichung

1. $$\varphi(x, y, c_1, c_2, c_3 \ldots c_n) = 0$$

wollen wir n mal differenziren; dadurch entstehen nach einander n Gleichungen von der Form

2. $$\begin{aligned} &\varphi_1(x, y, y';\; c_1 \ldots c_n) = 0, \\ &\varphi_2(x, y, y', y'';\; c_1 \ldots c_n) = 0, \\ &\varphi_3(x, y, y', y'', y''';\; c_1 \ldots c_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_n(x, y, y', y'', y''', \ldots y^{(n)};\; c_1 \ldots c_n) = 0. \end{aligned}$$

Eliminiren wir die n Grössen $c_1 \ldots c_n$ aus den $n + 1$ Gleichungen 1. und 2., so entsteht eine Resultante von der Form

3. $$F(x, y, y', y'', y''', \ldots y^{(n)}) = 0.$$

also eine Differentialgleichung $n$ter Ordnung, — vorausgesetzt dass sich die Constanten nicht bereits aus 1. und aus den ersten k Gleichungen von 2. eliminiren lassen, in welchem Falle die resultirende Differentialgleichung nur von der $k$ten Ordnung sein würde. Wir schliessen daher: Wenn eine Gleichung zwischen

den Variabeln x und y n Constante enthält, so genügen die mit ihr vereinbaren Werthsysteme von x, y, y', y'', y''' ... im Allgemeinen einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung, welche diese Constanten nicht enthält.

Denkt man sich die Differentialgleichung 3. gegeben, so wird derselben durch die Gleichung 1. genügt unabhängig von den Werthen, die man den Constanten beilegen mag; wenn es sich also darum handelt, die Differentialgleichung zu integriren, d. i. aus ihr eine von Differentialquotienten freie Beziehung zwischen den Variabeln abzuleiten, so haben die c den Charakter von willkürlichen Constanten.

Beispiele. A. Die Gleichung

$$y = ae^x + be^{-x}$$

liefert durch zweimalige Differentiation

$$y'' = ae^x + be^{-x};$$

hieraus folgt die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = y.$$

Aus der allgemeineren Gleichung

$$y = ae^{mx} + be^{nx},$$

folgen

$$y' = mae^{mx} + nbe^{nx},$$

und

$$y'' = m^2ae^{mx} + n^2be^{nx}.$$

Die erste und zweite Gleichung ergeben

$$y' - ny = (m - n)ae^{mx},$$

aus der zweiten und dritten folgt

$$y'' - ny' = m(m - n)ae^{mx},$$

daher ergiebt sich die von den Constanten a und b freie Differentialgleichung

$$y'' - (n + m)y' + mny = 0.$$

2. Unter dem allgemeinen Integrale einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung

$$1. \qquad f(x, y, y' \,..\, y^{(n)}) = 0$$

versteht man eine Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ von der Beschaffenheit, dass jedes Werthsystem $x, y, y', \,..\, y^{(n)}$, das der Differentialgleichung genügt, auch die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$, sowie die durch n aufeinanderfolgende Differentiationen daraus folgenden Gleichungen erfüllt

$$2. \qquad \begin{array}{l} \varphi_1(x, y, y') = 0, \\ \varphi_2(x, y, y', y'') = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x, y, y', y'', y''', \ldots y^{(n)}) = 0, \end{array}$$

und umgekehrt.

In der Differentialgleichung 1. kann man x, y, y', y'', .. $y^{(n-1)}$ ganz willkürliche Werthe geben; alsdann ist der höchste Differentialquotient $y^{(n)}$ durch die Gleichung 1. bestimmt. Es müssen daher das allgemeine Integral und die daraus abgeleiteten Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0, \ldots \varphi_{(n-1)} = 0$$

so beschaffen sein, dass sie durch jedes willkürliche für die Grössen x, y, y', y'', ... $y^{(n-1)}$ substituirte Werthsystem erfüllt werden können. Hieraus folgt, dass die Function φ n unbestimmte Constante $c_1, c_2 \,..\, c_n$ enthalten muss, und zwar in solchen Verbindungen, dass durch geeignete Wahl dieser Constanten den angegebenen Bedingungen genügt werden kann. Wir erhalten hieraus: Das allgemeine Integral einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung enthält n willkürliche Constante.

Wenn eine Gleichung $\varphi = 0$ so beschaffen ist, dass alle Werthe von $x, y, y' \ldots y'^{(n)}$, die den Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots \varphi_n = 0$$

genügen, auch die Differentialgleichung erfüllen, φ aber nicht n willkürliche Constante enthält, so wird $\varphi = 0$ als ein particuläres Integral bezeichnet, wenn es aus dem allgemeinen Integrale durch Specialisirung einiger Constanten hervorgeht; in jedem andern Falle wird es als singuläres Integral bezeichnet.

3. Eine Gleichung $\psi(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}) = 0$ wird als ein allgemeines erstes Integral einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung bezeichnet, wenn jedes Werthsystem $x, y, y' \ldots y^{(n)}$, welches der Differentialgleichung genügt, auch die Gleichung $\psi = 0$ und die durch einmalige Differentiation daraus hervorgehende $\psi_1 = 0$ erfüllt. Aus dem Umstande, dass in der Differentialgleichung die Grössen $x, y, y' \ldots y^{(n-1)}$ beliebig gewählt werden können, folgt, dass die Function ψ eine willkürliche Constante enthalten muss. Ein allgemines erstes Integral einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung enthält eine willkürliche Constante. Ausser den durch Specialisirung der Constanten aus einem allgemeinen ersten Integrale hervorgehenden kann es noch weitere erste Integrale $\psi = 0$ geben, so dass alle $\psi = 0$ und $\psi_1 = 0$ befriedigenden Werthe von $x, y, \ldots y^{(n)}$ auch die Differentialgleichung erfüllen; diese werden als singuläre erste Integrale bezeichnet.

Ein allgemeines erstes Integral einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung ist eine Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung. Ein allgemeines erstes Integral dieser Gleichung wird als ein allgemeines zweites Integral der gegebenen Differentialgleichung bezeichnet u. s. f.; ein allgemeines zweites Integral enthält somit zwei, ein drittes drei Constante, u. s. w. Das allgemeine $n$te Integral enthält n Constante und keinen Differentialquotienten; es fällt mit dem bereits definirten allgemeinen Integrale zusammen.

Beispiele. A. Die Differentialgleichung

$$y'' - (m+n)y' + mn = 0$$

hat das allgemeine erste Integral

$$\psi = y' - ny - (m-n)ae^{mx} = 0;$$

denn durch Differentiation ergiebt sich

$$\psi_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}y' + \frac{\partial\psi}{\partial y'}y'' = y'' - ny' - (m-n)\, mae^{mx} = 0,$$

und durch Elimination von a aus $\psi = 0$ und $\psi_1 = 0$ folgt die Differentialgleichung. Dieselbe hat noch ein allgemeines erstes Integral, das sich aus No. 1, 3 und 4 durch Elimination von a ergiebt, nämlich

$$y' - my - (n-m)be^{nx} = 0.$$

Eliminirt man b aus dieser Gleichung und aus der durch Differentiation aus ihr hervorgehenden

$$y'' - my' - (n-m)nbe^{nx} = 0,$$

so erhält man ebenfalls die gegebene Differentialgleichung.

B. Die Differentialgleichung erster Ordnung

3. $$y - xy' = \gamma\sqrt{x},$$

in welcher γ als willkürliche Constante gilt, ist ein allgemeines erstes Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung, die man durch Elimination von γ aus 3. und aus der durch Differentiation abgeleiteten Gleichung erhält

4. $$-xy'' = \frac{\gamma}{2\sqrt{x}},$$

also der Gleichung 5. $$2x^2y'' - xy' + y = 0.$$

Zu 3. gehört das allgemeine Integral (§ 24, No. 8)

6. $$y = cx + 2\gamma\sqrt{x};$$

diese Gleichung giebt nach x differenzirt

7. $$y' = c + \frac{\gamma}{\sqrt{x}}.$$

Eliminirt man γ aus 6. und 7., so folgt

8. $$2xy' - y = cx,$$

und diese Gleichung ist das andere allgemeine erste Integral von 5.

4. Eliminirt man aus dem allgemeinen Integrale $\varphi(x, y, c_1, c_2 \ldots c_n) = 0$ einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung und aus der durch einmalige Differentiation abgeleiteten Gleichung $\varphi_1 = 0$ eine Constante, so erhält man eine Differentialgleichung I. O. mit $(n-1)$ Constanten; wie man sofort sieht, ist dieselbe ein allgemeines $(n-1)$tes Integral der gegebenen Gleichung. Da man nun jede der n Constanten eliminiren kann, so ist ersichtlich, dass man n allgemeine $(n-1)$te Integrale erhält.

Differenzirt man ein solches $(n-1)$tes Integral und eliminirt man aus dem Resultate und aus der ursprünglichen Gleichung eine weitere Constante, so erhält man ein allgemeines $(n-2)$tes Integral u. s. w.

Eliminirt man zwei Constante aus

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0,$$

erhält man ebenfalls ein allgemeines $(n-2)$tes Integral.

Man erkennt leicht, dass es nicht zwei verschiedene $(n-2)$te allgemeine Integrale geben kann, die dieselben $(n-2)$ willkürlichen Constanten enthalten. Denn gesetzt

$$\psi(x, y, y', y'' \, c_1, c_2 \ldots c_{n-2}) = 0$$

und

$$\chi(x, y, y', y'', c_1, c_2 \ldots c_{n-2}) = 0$$

wären wesentlich verschieden, so dass also eine dieser beiden Gleichungen nicht eine nothwendige Folge der andern wäre. Differenzirt man die erste Gleichung, so erhält man

$$\psi = 0, \quad \frac{d\psi}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 \ldots \frac{d^{n-3}\psi}{dx^{n-3}} = 0,$$

und diese $(n-2)$ Gleichungen enthalten die Grössen $x, y, y' \ldots y^{(n-1)}, c_1, c_2, c_3 \ldots c_n$. Fügt man hierzu noch die Gleichung $\chi = 0$, so kann man aus diesen $n-1$ Gleichungen die c_k eliminiren, und behält eine Gleichung zwischen $x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ übrig, im Widerspruche damit, dass ein allgemeines $(n-2)$tes Integral durch jedes System von $x, y, y' \ldots y^{(n-1)}$ muss befriedigt werden können.

Man erhält somit dasselbe allgemeine $(n-2)$te Integral erstens, indem man c_i und c_k aus $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = 0$ eliminirt; zweitens, indem man c_i aus $\varphi = 0$ und $\varphi' = 0$ eliminirt, die Resultante $\varphi_i = 0$ differenzirt und c_k aus $\varphi_i = 0$ und $\varphi_i' = 0$ eliminirt; drittens, indem man c_k aus $\varphi = 0$ und $\varphi' = 0$ eliminirt, die Resultante $\varphi_k = 0$ differenzirt, und c_i aus $\varphi_k = 0$ und $\psi_k' = 0$ eliminirt.

Aehnlich, wie den Satz, dass es nicht zwei verschiedene allgemeine $(n-2)$te Integrale mit denselben $(n-2)$ willkürlichen Constanten giebt, beweist man, dass es nicht zwei $(n-k)$te Integrale mit denselben $(n-k)$ willkürlichen Constanten geben kann.

Hieraus schliessen wir weiter, dass es soviele $(n-k)$te verschiedene Integrale

giebt, als sich die n willkürlichen Constanten des allgemeinen Integrals zu k gruppiren lassen; es giebt daher

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots k}$$

allgemeine $(n-k)$te Integrale.

Wenn man aus den allgemeinen n ersten Integralen die Grössen $y', y'', y''' \ldots y^{(n-1)}$ eliminirt, so erhält man eine von Differentialquotienten freie Gleichung zwischen x, y und n willkürlichen Constanten, also das **allgemeine Integral** der vorgelegten Differentialgleichung $n$ter Ordnung.

5. Das allgemeine Integral einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung lässt sich durch Reihenentwicklung nach dem Taylor'schen Satze erhalten. Wir denken uns die Differentialgleichung auf den höchsten Differentialquotienten $y^{(n)}$ algebraisch reducirt und berechnen aus

$$1.\qquad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', y''', \ldots y^{(n-1)})$$

die höheren Differentialquotienten; indem wir bei jeder durch Differentiation erhaltenen neuen Gleichung den Werth für $y^{(n)}$ aus 1. substituiren, erhalten wir alle höheren Differentialquotienten als Functionen von $x, y, y' \ldots y^{(n)}$; es ergiebt sich zunächst

$$2.\qquad \begin{aligned} \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\cdot y^{n} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\cdot f(x, y, y' \ldots y^{(n)}). \\ &= f_1(x, \ldots y^{(n)}). \end{aligned}$$

So fortfahrend findet man

$$3.\qquad \frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} = f_2(x, \ldots y^{(n)}), \quad \frac{d^{n+3}y}{dx^{n+3}} = f_3(x, \ldots y^{(n)}), \ldots\ldots$$

Nehmen wir nun die zu einem beliebigen Ausgangswerthe x_0 gehörigen Werthe der abhängigen Variabeln und ihrer Differentialquotienten bis zum $(n-1)$ten willkürlich an, so sind $y_0^{(n+1)}, y_0^{(n+2)} \ldots\ldots$ durch die Gleichungen 2. und 3. bestimmt. Werden die willkürlich angenommenen Werthe der Reihe nach mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \pi$ bezeichnet, so ergiebt sich schliesslich die gesuchte Entwicklung

$$4.\qquad \begin{aligned} y = \alpha &+ \beta(x-\alpha) + \frac{\gamma}{1\cdot 2}(x-\alpha)^2 + \ldots + \frac{\pi}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}(x-\alpha)^{n-1} \\ &+ \frac{f(\alpha, \beta, \ldots)}{n!}\cdot(x-\alpha)^n + \frac{f_1(\alpha, \beta, \ldots)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \\ &+ \frac{f_2(\alpha, \beta, \ldots)}{(n+2)!}\cdot(x-\alpha)^{n+2} + \ldots\ldots \end{aligned}$$

6. Wir wenden uns nun zu den **Regeln für die Bestimmung des allgemeinen Integrals einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in den einfachsten Fällen.**

A. **Ist y'' eine Function von x allein,** also

$$1.\qquad y'' = f(x),$$

so hat man sofort ein allgemeines erstes Integral

$$2.\qquad y' = \int f(x)\,dx + C$$

und hieraus das allgemeine Integral

$$3.\qquad y = \int dx \int f(x)\,dx + Cx + C_1.$$

Das andere allgemeine erste Integral folgt durch Elimination von C aus 2. und 3. zu

$$xy' - y = x\int f(x)\,dx - \int dx \int f(x)\,dx - C_1.$$

B. Ist y'' eine Function von y allein, also

4. $$y'' = f(y),$$

so setze man
$$y'' = y'\frac{dy'}{dy};$$

dadurch entsteht aus 4.
$$y'dy' = f(y)\,dy,$$

und hieraus folgt ein allgemeines erstes Integral

5. $$y'^2 = 2\int f(y)\,dy + C, \quad \text{oder} \quad y' = \sqrt{2\int f(y)\,dy + C}.$$

Hier lassen sich wieder die Variabeln sondern und man erhält

6. $$x = \int\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + C}} + C_1.$$

C. Ist y'' eine Function von y' allein, so hat man

7. $$y'' = f(y').$$

Hieraus ergiebt sich

8. $$x = \int\frac{dy'}{f(y')} + C,$$

und es erübrigt nun noch die Integration dieser Differentialgleichung erster Ordnung. Man kann indess dieselbe umgehen, da man das andere allgemeine erste Integral bestimmen kann.

Setzt man in 7. $y'' = y'dy' : dy$, so erhält man
$$y'\,dy' = f(y')\,dy;$$

hieraus ergiebt sich

9. $$y = \int\frac{y'dy'}{f(y')} + C_1.$$

Das allgemeine Integral von 7. erhält man nun durch Elimination von y' aus 8. und 9.

D. Enthält die Differentialgleichung nur y'', y' und x, also y nicht explicite, ist sie also von der Form

10. $$f(y'', y', x) = 0,$$

so bemerke man, dass $y'' = dy' : dx$; man erkennt nun, dass 9. eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y' und x ist. Die Integration derselben führt auf eine Gleichung von der Form

11. $$\varphi(y', x, C) = 0;$$

das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung erster Ordnung ist das allgemeine Integral von 10.

E. Enthält die Differentialgleichung nur y'', y' und y, also nicht x explicite, so hat sie die Form

12. $$f(y'', y', y) = 0.$$

Ersetzt man hier y'' durch $y'dy' : dy$, so ergiebt sich
$$f\left(y'\frac{dy'}{dy}, y', y\right) = 0,$$

also eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y' und y. Das allgemeine Integral derselben

13. $$\varphi(y', y, C) = 0$$

ist eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y und x; das allgemeine Integral von 13. ist auch das allgemeine Integral von 12.

7. Geometrische Anwendungen. Die Aufgabe, eine Curve durch ihre Krümmungshalbmesser zu definiren, führt auf eine Differentialgleichung II. O.,

sobald der Krümmungshalbmesser als Function der Coordinaten, oder ausserdem als Function der Tangente, Normale, Subtangente oder Subnormale gegeben ist.

A. Eine Curve so zu bestimmen, dass der Krümmungshalbmesser in jedem Punkte proportional dem Cubus der Normale ist.

Aus den bekannten Formeln für den Krümmungshalbmesser ρ und die Normale ν

$$\rho = \sqrt{(1+y'^2)^3} : y'', \quad \nu = y\sqrt{1+y'^2}$$

folgt, wenn a ein constanter, gegebener Faktor ist, die Differentialgleichung des Problems

$$\frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''} = a^2 y^3 \sqrt{(1+y'^2)^3},$$

oder einfacher

$$y'' = \frac{1}{a^2 y^3};$$

daher ist

$$y'dy' = \frac{dy}{a^2 y^3},$$

$$y'^2 = -\frac{1}{a^2 y^2} + C, \quad y' = \frac{\sqrt{a^2 Cy^2 - 1}}{ay}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$x = a\int \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 Cy^2 - 1}} + C_1;$$

d. i.

$$x = \frac{1}{aC}\sqrt{a^2 Cy^2 - 1} + C_1.$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$-a^2 C^2 (x - C_1)^2 + a^2 Cy^2 - 1 = 0,$$

so erkennt man, dass die Aenderung von C_1 nur auf eine Verschiebung der Y-Achse hinauskommt; von dem Vorzeichen von C hängt es ab, ob die Curve eine Ellipse oder eine Hyperbel ist.

B. Die Curve zu bestimmen, für welche der Krümmungshalbmesser proportional der Tangente ist.

Die Differentialgleichung des Problems ist

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{ay}{y'}\sqrt{1+y'^2},$$

oder

$$y'' = \frac{(1+y'^2)\,y'}{ay}.$$

Wir setzen hierin $y'' = y'dy' : dy$ und erhalten

$$\frac{dy'}{1+y'^2} = \frac{dy}{ay};$$

daher ist ein erstes allgemeines Integral

$$arc\,tang\,y' = l\,Cy^{\frac{1}{a}}.$$

Hieraus ergiebt sich schliesslich

$$x = \int \frac{dy}{tang\left(l\,Cy^{\frac{1}{a}}\right)} + C_1.$$

C. Der Krümmungshalbmesser sei proportional der Normalen.

Ist n ein constanter Faktor, so hat man jetzt

$$n\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = y\sqrt{1+y'^2},$$

oder einfacher

$$n(1+y'^2) = yy''.$$

Hier setzen wir wieder $y'' = y'dy' : dy$ und erhalten

$$\frac{y'dy'}{1+y'^2} = n\frac{dy}{y},$$

daher ergiebt sich ein erstes allgemeines Integral

$$\tfrac{1}{2}l(1+y'^2) = n\,l\left(\frac{y}{C}\right),$$

woraus folgt

$$y' = \frac{\sqrt{y^{2n} - C^{2n}}}{C^n},$$

$$x = C^n \int \frac{dy}{\sqrt{y^{2n} - C^{2n}}} + C_1 .$$

Für $n = -1$ ergiebt sich ein Kreis, dessen Centrum auf der Abscissenachse liegt; für $n = 1$ eine Kettenlinie; für $n = -\frac{1}{2}$ eine Cycloide; für $n = \frac{1}{2}$ eine Parabel.

D. Soll der Krümmungshalbmesser eine gegebene Function φ der Abscisse sein, so hat man

$$(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = y''\varphi(x).$$

Hieraus folgt

$$\int \frac{dy'}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \int \frac{dx}{\varphi(x)}.$$

Die Integration links kann man ausführen und erhält

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \int \frac{dx}{\varphi(x)} + C.$$

Wird das Integral rechts zur Abkürzung mit X bezeichnet, so ergiebt sich

$$y' = \frac{X+C}{\sqrt{1-(X+C)^2}},$$

und hieraus folgt schliesslich

$$y = \int \frac{(X+C)}{\sqrt{1-(X+C)^2}}\,dx + C_1\ ^{*)}.$$

---

8. Lineare Differentialgleichungen. Unter einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung versteht man eine Gleichung von der Form

$$1. \quad \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + X_{n-1}\frac{dy}{dx} + X_n y = X,$$

wobei $X_1, X_2 \ldots X_n, X$ Functionen von x allein sind. Die Gleichung

$$2. \quad \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + X_n y = 0,$$

die aus 1. hervorgeht, wenn man $X = 0$ setzt, wird als reducirte lineare Differentialgleichung bezeichnet. Wir betrachten diese zunächst. Für dieselben gilt folgender Satz:

Wenn eine reducirte lineare Differentialgleichung die particulären Integrale hat

$$y = y_1, \quad y = y_2, \quad y = y_3, \ldots y = y_k,$$

so wird ihr auch durch die Function genügt

$$3. \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \ldots + c_k y_k,$$

wobei $c_1, c_2 \ldots c_k$ willkürliche Constante sind.

Denn setzt man 3. in 1. ein, und fasst die Glieder zusammen, die mit demselben c multiplicirt sind, so erhält man

*) Weitere Beispiele findet man u. A. in SCHLOEMILCH, Compendium, 1. Bd., Cap. XVIII.

$$\begin{aligned} & c_1(y_1^{(n)} + X_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1} y'_1 + X_n y_1) \\ & + c_2(y_2^{(n)} + X_1 y_2^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1} y'_2 + X_n y_2) \\ & + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & + c_k(y_k^{(n)} + X_1 y_k^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1} y'_k + X_n y_k) = 0. \end{aligned}$$

Da nun $y_1, \ldots y_k$ der Gleichung 1. genügen, so verschwinden links alle Klammerausdrücke, also ist die Gleichung identisch erfüllt. Kennt man n particuläre Integrale und sind nicht zwei oder mehr durch eine Identität von der Form verbunden

$$y_1 = a y_2 + b y_3 + c y_4 + \ldots$$

so ist
$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \ldots + c_n y_n$$

das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung. Denn der gegebene Werth von y befriedigt die Gleichung und enthält n willkürliche Constante. Tritt hingegen der ausgeschlossene Fall ein, ist z. B. $y_1 = a y_2 + b y_3$, so hat man

$$y = (a + c_1) y_2 + (b + c_2) y_3 + c_4 y_4 + \ldots + c_n y_n,$$

und diese Function enthält nur $(n - 1)$ willkürliche Constante, nämlich $(a + c_1)$, $(b + c_2)$, $c_4, c_5 \ldots c_n$.

9. In die lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0$$

substituiren wir versuchsweise $y = e^{\lambda x}$, und erhalten

$$(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n) e^{\lambda x} = 0.$$

Diese Gleichung wird identisch erfüllt, sobald man für λ eine Wurzel der Gleichung nimmt

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Hat diese Gleichung n verschiedene Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, so erhält man n verschiedene particuläre Integrale

$$y = e^{\lambda_1 x}, \quad y = e^{\lambda_2 x}, \ldots y = e^{\lambda_n x};$$

daher ist das allgemeine Integral

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

Sind unter den Wurzeln λ conjugirt complexe, so ersetzt man die Exponentialfunctionen durch goniometrische. Die Methode versagt, wenn die Gleichung für λ zwei oder mehrere gleiche Wurzeln hat; wir werden später sehen, wie man in diesem Falle das allgemeine Integral findet.

10. Der Gleichung

$$y^{(n)} + \frac{a_1}{x} y^{(n-1)} + \frac{a_2}{x^2} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{a^n}{x^n} y = 0$$

lässt sich durch die Annahme genügen $y = x^\mu$; man erhält durch Substitution dieses Werthes

$$[\mu(\mu - 1) \ldots (\mu - n + 1) + a_1 \mu(\mu - 1) \ldots (\mu - n + 2) + \ldots + a_{n-1}\mu + a_n] x^{\mu - n} = 0,$$

hat also für μ eine Wurzel der Gleichung zu nehmen

$$\mu(\mu - 1) \ldots (\mu - n + 1) + a_1 \mu(\mu - 1) \ldots (\mu - n + 2) + \ldots + a_{n-1}\mu + a_n = 0.$$

Hat diese Gleichung n verschiedene Wurzeln $\mu_1, \ldots \mu_n$, so erhält man n particuläre Integrale und aus diesen das allgemeine

$$y = c_1 x^{\mu_1} + c_2 x^{\mu_2} + c_3 x^{\mu_3} + \ldots + c_n x^{\mu_n}.$$

11. Kennt man ein particuläres Integral einer reducirten linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung, so wird das allgemeine Integral aus einer Differentialgleichung $(n - 1)$ter Ordnung gefunden.

Ist $y = \eta$ das gegebene particuläre Integral, so ist auch $y = c\eta$ ein Integral, wenn c constant ist; es liegt nun nahe, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen

man der Gleichung durch einen variabeln Werth von c genügen kann. Ersetzen wir c durch z, setzen also $y = z\eta$, so haben wir die höheren Differentialquotienten des Produkts $z\eta$ nach den bekannten Regeln der Differentialrechnung zu bilden und diese entwickelten Werthe in die Differerentialgleichung einzusetzen. Wir erhalten dann eine Differentialgleichung, welche keinen höheren Differentialquotienten von z enthält als $z^{(n)}$. Die Glieder, welche z enthalten, sind

$$(\eta^{(n)} + X_1\eta^{(n-1)} + X_2\eta^{(n-2)} + \ldots + X_{n-1}\eta' + X_n\eta)\,z\,;$$

da nun η ein particuläres Integral ist, so verschwindet der Klammerinhalt, und die Differentialgleichung für z ist somit von der Form

$$z^{(n)} + Pz^{(n-1)} + Qz^{(n-2)} + \ldots + Tz'' + Uz' = 0\,.$$

Setzt man hier

$$\frac{dz}{dx} = v, \quad \text{also} \quad z = \int v\,dx\,,$$

so erhält man für v die Gleichung

$$v^{(n-1)} + Pv^{(n-2)} + Qv^{(n-3)} + \ldots + Tv' + Uv = 0\,,$$

also in der That eine Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung.

Hat man das allgemeine Integral dieser Gleichung, so wird zu den $(n-1)$ willkürlichen Constanten desselben durch die Integration

$$z = \int v\,dx$$

noch eine hinzugefügt, und es ist daher

$$y = z\eta$$

das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung.

12. Dieser Satz führt zunächst dazu, eine reducirte lineare Differentialgleichung II. O. von der Form No. 9 oder No. 10 allgemein zu integriren, wenn die Gleichungen für λ und μ gleiche Wurzeln haben.

Bei der Gleichung

$$1. \qquad y'' - 2ay' + a^2y = 0$$

ergiebt die Substitution $y = e^{\lambda x}$ für λ die Gleichung

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0\,,$$

also zwei zusammenfallende Wurzeln $\lambda = a$. Macht man nun in 1. die Substitution

$$y = ze^{ax},$$

so erhält man für z die Gleichung

$$z'' = 0, \quad \text{also} \quad z = C_1x + C\,.$$

Folglich ist das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung

$$y = e^{ax}(C_1x + C)\,.$$

Setzt man ferner in die Gleichung

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y = 0$$

$y = \mu x$, so erhält man für μ

$$\mu^2 - (1-a)\mu + \frac{(1-a)^2}{4} = 0\,, \quad \text{also} \quad \mu = \frac{1-a}{2}\,.$$

Um das allgemeine Integral zu erhalten, haben wir zu setzen

$$y = zx^{\frac{1-a}{2}}$$

und erhalten

$$z' \cdot x^{-\frac{a+1}{2}} + z'' \cdot x^{\frac{1-a}{2}} = 0, \quad \text{oder} \quad z' + xz'' = 0\,.$$

Hieraus folgt $v = C : x$ und $z = Clx + C_1$; daher ist

$$y = x^{\frac{1-a}{2}}(Clx + C_1)$$

das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung.

13. Hat bei der linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit constanten Coefficienten

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0,$$

die Gleichung für λ

$$f(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

r gleiche Wurzeln $\lambda = \nu$, so liegt es nahe, von dem für Gleichungen zweiter Ordnung erhaltenen Resultate ausgehend zu vermuthen, dass der gegebenen Gleichung durch die Annahme genügt werde

1. $$y = e^{\nu x}(cx^{r-1} + c_1 x^{r-2} + \ldots + c_{r-1}),$$

wobei $c, c_1, c_2 \ldots c_{r-1}$ willkürliche Constante sind.

Um die Richtigkeit dieser Vermuthung nachzuweisen, bemerken wir zunächst, dass, wenn die Function $f(\lambda) = 0$ den Faktor $(\lambda - \nu)^r$ enthält, alsdann in der Function $f'(\lambda) = 0$ der Faktor $(\lambda - \lambda)^{r-1}$ enthalten ist; denn aus der Voraussetzung

$$f(\lambda) = (\lambda - \nu)^r \cdot \varphi(\lambda)$$

folgt $$f'(\lambda) = r(\lambda - \nu)^{r-1} \cdot \varphi(\lambda) + (\lambda - \nu)^r \varphi'(\lambda).$$

Wenn daher ν eine $r$fache Wurzel der Gleichung

$$f(\lambda) = 0$$

ist, so sind für $\lambda = \nu$ auch die Gleichungen erfüllt

$$f'(\lambda) = 0, \quad f''(\lambda) = 0, \quad f^{(r-1)}(\lambda) = 0.$$

Setzt man

$$cx^{r-1} + c_1 x^{r-2} + \ldots + c_{r-1} \equiv \varphi,$$

so erhält man

$$e^{-\nu x} y^{(k)} = \nu^k \varphi + \binom{k}{1} \nu^{k-1} \varphi' + \binom{k}{2} \nu^{k-2} \varphi'' + \ldots .$$

Substituirt diese für $k = n, n-1, n-2, \ldots 2, 1$ gebildeten Werthe in die Differentialgleichung und unterdrückt den Faktor $e^{\nu k}$, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 = {} & \varphi \cdot (\nu^n + a_1 \nu^{n-1} + a_2 \nu^{n-2} + \ldots) \\ & + \varphi' \cdot \left[\binom{n}{1} \nu^{n-1} + \binom{n-1}{1} a_1 \nu^{n-2} + \binom{n-2}{1} a_2 \nu^{n-3} + \ldots\right] \\ & + \varphi'' \cdot \left[\binom{n}{2} \nu^{n-2} + \binom{n-1}{2} a_1 \nu^{n-3} + \binom{n-2}{2} a_2 \nu^{n-4} + \ldots\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Faktoren von $\varphi, \varphi', \varphi'' \ldots$ sind der Reihe nach

$$f(\nu), \quad \frac{f'(\nu)}{1}, \quad \frac{f''(\nu)}{1 \cdot 2}, \quad \ldots\ldots$$

verschwinden daher sämmtlich; folglich ist 1. ein Integral der Differentialgleichung.

14. Der linearen Gleichung zweiter Ordnung

1. $$y'' + \frac{2}{x} y' + k^2 y = 0$$

suchen wir durch eine Potenzreihe zu genügen; setzen wir

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

also $$y' = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots,$$

$$y'' = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3 x + 3 \cdot 4 \cdot A_4 x^2 + \ldots,$$

so erhalten wir

$$\frac{2A_1}{x} + 2 \cdot 3A_2 + k^2 A_0 + (3 \cdot 4A_3 + k^2 A_1)x + (4 \cdot 5A_4 + k^2 A_2)x^2 + \ldots$$

$$\ldots + [n(n+1)A_n + k^2 A_{n-2}]\, x^{n-2} + \ldots \equiv 0.$$

Hieraus ergeben sich

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{k^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} A_0, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = \frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} A_0 \ldots,$$

allgemein $\qquad A_{2n-1} = 0, \quad A_{2n} = \pm \frac{k^{2n}}{1 \cdot 2 \ldots (2n+1)} A_0 .$

Daher ist

$$y = A_0 \left(1 - \frac{k^2 x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots \right) = \frac{A_0}{k} \cdot \frac{\sin kx}{x} .$$

Dieses Integral ist particulär, da es nur eine willkürliche Constante enthält. Substituirt man in 1.

$$y = z \cdot \frac{\sin kx}{x},$$

so erhält man für z die Gleichung

$$\frac{\sin kx}{x} \cdot z'' + 2 \cdot \frac{k \cos kx}{x} \cdot z' = 0,$$

Diese Differentialgleichung ergiebt

$$z' = \frac{C_1}{\sin^2 kx}, \quad z = -\frac{C_1 \cot kx}{k} + C_2 .$$

Ersetzt man hier C_1 durch $-kC_1$, so erhält man für das allgemeine Integral von 1.

$$y = \frac{C_1 \cos kx + C_2 \sin kx}{x} .$$

15. Ersetzen wir in der Gleichung

2. $$y'' - (x^2 + 3)y = 0$$

y durch die Reihe $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$, so erhalten wir das allgemeine Integral

$$y = A_0 \left(1 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{11}{24} x^4 + \frac{23}{240} x^6 + \ldots \right)$$
$$+ A_1 \left(x + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2 \cdot 4} x^5 + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^7 + \ldots \right).$$

In der zweiten eingeklammerten Reihe ist das Bildungsgesetz der Coefficienten zwar nicht allgemein nachgewiesen, nach den ersten vier Gliedern scheint es aber, als sei diese Reihe

$$x \left[1 + \frac{1}{1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots \right] = x e^{\frac{1}{2} x^2} .$$

Um diese Vermuthung zu prüfen, setzen wir

$$y = x e^{\frac{1}{2} x^2}$$

in die gegebene Differentialgleichung; wir finden leicht, dass derselben genügt wird; mithin haben wir ein particuläres Integral gefunden. Zur Bestimmung des allgemeinen setzen wir

$$x e^{\frac{1}{2} x^2} \cdot z'' + 2 \frac{d}{dx} (x e^{\frac{1}{2} x^2}) z' = 0 .$$

Aus dieser Gleichung folgt sofort

$$z' = \frac{C}{x^2} e^{-x^2}, \quad z = C_1 + C \int \frac{1}{x^2} e^{-x^2} dx,$$

also ist das allgemeine Integral von 2.

$$y = x e^{\frac{1}{2} x^2} \left(C_1 + C \int \frac{1}{x^2} e^{-x^2} dx \right) . ^{*)}$$

16. Wir wenden uns nun zur I n t e g r a t i o n e i n e r l i n e a r e n D i f f e r e n t i a l g l e i c h u n g , d i e n i c h t r e d u c i r t i s t ; die Integrationsmethode wollen wir zunächst an der D i f f e r e n t i a l g l e i c h u n g II. O. zeigen.

*) SCHLOEMILCH, Compendium, Bd. I, § 114.

Um das allgemeine Integral der Gleichung

1. $$y'' + X_1 y' + X_2 y = X$$

zu finden, liegt es nahe, zunächst die reducirte Gleichung zu integriren

2. $$y'' + X_1 y' + X_2 y = 0,$$

und dann zu versuchen, ob man der Gleichung 1. vielleicht dadurch genügen kann, dass man in dem allgemeinen Integrale von 2.

3. $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

die willkürlichen Constanten durch passend gewählte Functionen von x ersetzt. Diese Methode, das Integral einer Gleichung aus dem Integral einer einfacheren herzustellen, wird als Variation der Constanten bezeichnet; wir haben von derselben bereits in § 24 No. 8 und § 25 No. 11 Gebrauch gemacht.

Setzen wir nun in 1.

4. $$y = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

wobei also y_1 und y_2 bekannte Functionen sind, welche den Gleichungen genügen

5. $$y_1'' + X_1 y_1' + X_2 y_1 = 0, \quad y_2'' + X_1 y_2' + X_2 y_2 = 0,$$

so erhalten wir zunächst

6. $$u_1(y_1'' + X_1 y_1' + X_2 y_1) + u_2(y_2'' + X_1 y_2' + X_2 y_2) + X_1(u_1' y_1 + u_2' y_2) + 2(u_1' y_1' + u_2' y_2') + u_1'' y_1 + u_2'' y_2 = X.$$

Die erste Zeile verschwindet nach der Voraussetzung. Machen wir nun für u_1 und u_2 die Annahme

7. $$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0,$$

so folgt zunächst durch Differentiation dieser Gleichung

8. $$u_1' y_1' + u_2' y_2' = -(u_1'' y_1 + u_2'' y_2).$$

Durch 7. und 8. reducirt sich 6. auf

9. $$u_1' y_1' + u_2' y_2' = X.$$

Aus 7. und 9. folgen nun für u_1' und u_2' die Werthe

$$u_1' = \frac{X y_2}{y_2 y_1' - y_1 y_2'}, \quad u_2' = \frac{X y_1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}.$$

Daher ergiebt sich

$$u_1 = \int \frac{X y_2\, dx}{y_2 y_1' - y_1 y_2'} + C_1, \quad u_2 = \int \frac{X y_1\, dx}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} + C_2.$$

Das allgemeine Integral der nicht reducirten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist daher

10. $$y = y_1 \int \frac{X y_2\, dx}{y_2 y_1' - y_1 y_2'} + y_2 \int \frac{X y_1\, dx}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} + C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Hieraus ist der auch direkt leicht erweisliche Satz ersichtlich: Das allgemeine Integral einer nicht reducirten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung wird erhalten, indem man zu einem particulären Integrale das allgemeine Integral der entsprechenden reducirten Gleichung fügt.

Bei der Verwendung der Formel 10. wird man unter Umständen mit Vortheil berücksichtigen, dass

$$\frac{X y_2}{y_2 y_1' - y_1 y_2'} = X : y_2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_1}{y_2}\right), \quad \frac{X y_1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} = X : y_1 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

Beispiele. A. Die reducirte Gleichung

$$y'' + \frac{2}{x} y' + k^2 y = 0$$

hat bekanntlich die particulären Integrale

$$y_1 = \frac{\cos kx}{x}, \quad y_2 = \frac{\sin kx}{x};$$

daher hat die Gleichung

$$y'' + \frac{2}{x}y' + k^2 y = X$$

das allgemeine Integral

$$y = \frac{\cos kx}{x}\left(C_1 - \frac{1}{k}\int X \sin kx dx\right) + \frac{\sin kx}{x}\left(C_2 + \frac{1}{k}\int X \cos kx dx\right).$$

B. Für die Gleichung

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0$$

haben wir die particulären Integrale

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = x^3;$$

daher ergiebt sich für

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = X$$

das allgemeine Integral

$$y = x^2(C_1 - \int xX dx) + x^3(C_2 + \int x^2 X dx).$$

17. Um das allgemeine Integral der Gleichung

1. $$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1}y' + X_n y = X$$

zu erhalten, setzen wir voraus, es sei

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \ldots + c_n y_n$$

das allgemeine Integral der reducirten Gleichung

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1}y' + X_n y = 0,$$

und suchen nun $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ als Functionen von x so zu bestimmen, dass

2. $$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_n y_n$$

das allgemeine Integral von 1. wird.

Wenn man den Werth 2. und die daraus folgenden Werthe $y', y'', y''', \ldots y^{(n)}$ in 1. substituirt, so erhält man eine Gleichung für die n unbestimmten Functionen u_k; um dieselben zu bestimmen, kann man daher noch $(n-1)$ Gleichungen beliebig annehmen. Wir wählen diese Gleichungen so, dass in den Werthen $y', y'', y''' \ldots y^{(n-1)}$ keine Differentialquotienten der u_k vorkommen; alsdann enthält die Differentialgleichung nur die ersten Differentialquotienten dieser Functionen und die Bestimmung derselben wird dadurch thunlichst erleichtert. Aus y folgt zunächst

$$y' = u_1 y_1' + \ldots + u_n y_n' + u_1' y_1 + \ldots + u_n' y_n.$$

Um Differentialquotienten der u in y' zu vermeiden, setzen wir

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' + \ldots + y_n u_n' = 0,$$

und erhalten unter dieser Voraussetzung

$$y' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + \ldots + u_n y_n'.$$

Ferner setzen wir

$$y_1' u_1' + y_2' u_2' + \ldots + y_n' u_n' = 0,$$

und erhalten dadurch

$$y'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + \ldots + u_n y_n''.$$

So weiter gehend, erhalten wir schliesslich

$$y_1^{(n-2)} u_1' + y_2^{(n-2)} u_2' + \ldots + y_n^{(n-2)} u_n' = 0,$$

$$y^{(n-1)} = u_1 y_1^{(n-1)} + u_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + u_n y_n^{(n-1)}.$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich

$$y^{(n)} = u_1 y_1^{(n)} + u_2 y_2^{(n)} + \ldots + u_n y_n^{(n)}$$
$$+ y_1^{(n-1)} u_1' + y_2^{(n-1)} u_2' + \ldots + y_n^{(n-1)} u_n'.$$

Setzt man nun diese Werthe für $y, y', y'' \ldots y^{(n)}$ in die Differentialgleichung

ein und berücksichtigt, dass $y_1, y_2, \ldots y_n$ der reducirten Differentialgleichung genügen, so erhält man

$$y_1^{(n-1)}u_1' + y_2^{(n-1)}u_2' + \ldots + y_n^{(n-1)}u_n' = X.$$

Für die Unbekannten $u_1, u_2 \ldots u_n$ haben wir somit die n Gleichungen

$$\begin{aligned} y_1 u_1' + y_2 u_2' + \ldots + y_n u_n' &= 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' + \ldots + y_n' u_n' &= 0, \\ y_1'' u_1' + y_2'' u_2' + \ldots + y_n'' u_n' &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(n-2)}u_1' + y_2^{(n-2)}u_2' + \ldots + y_n^{(n-2)}u_n' &= 0, \\ y_1^{(n-1)}u_1' + y_2^{(n-1)}u_2' + \ldots + y_n^{(n-1)}u_n' &= X. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind linear für $u_1', u_2' \ldots u_n'$; löst man sie auf, so erhält man $\quad u_1' = \chi_1, \quad u_2' = \chi_2, \quad u_3' = \chi_3 \ldots u_n' = \chi_n,$
wobei $\chi_1, \chi_2 \ldots \chi_n$ bekannte Functionen von x sind. Hieraus folgt

$$u_1 = \int\chi_1 dx + C_1, \quad u_2 = \int\chi_2 dx + C_2, \ldots u_n = \int\chi_n dx + C_n;$$

daher ist schliesslich das gesuchte allgemeine Integral

$$y = y_1 \int\chi_1 dx + \ldots + y_n \int\chi_n dx + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

Man ersieht hieraus noch: Das allgemeine Integral einer nicht reducirten linearen Differentialgleichung wird aus einem particulären Integrale gefunden, indem man zu diesem das allgemeine Integral der entsprechenden reducirten Gleichung fügt.

18. Ueberblickt man die soeben vollendete Rechnung, so erkennt man leicht, dass derselbe Gedankengang auch dann förderlich sein wird; wenn man nicht das allgemeine Integral der reducirten Gleichung kennt, sondern nur eine beschränkte Anzahl von particulären Integralen. Sind r particuläre Integrale y_1, $y_2, y_3 \ldots y_r$ bekannt, zwischen denen keine linearen Indentitäten bestehen, so setzen wir das allgemeine Integral der nicht reducirten Gleichung

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_r y_r.$$

Wir bilden nun die entsprechenden Bedingungsgleichungen für die u_1 wie im vorigen Falle; da wir aber nur u_r unbekannte Functionen haben, so dürfen wir ausser der Differentialgleichung nur $(r-1)$ Gleichungen ansetzen. Dieselben seien

$$1. \quad \begin{aligned} y_1 u_1' + y_2 u_2' + \ldots + y_1 u_r' &= 0, \\ y_1' u_1' + y_2 u_2' + \ldots + y_r' u_r' &= 0, \\ y_1'' u_1' + y_2'' u_2' + \ldots + y_r'' u_r' &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(r-2)}u_1' + y_2^{(r-2)}u_2' + \ldots + y_r^{(r-2)}u_r' &= 0. \end{aligned}$$

Alsdann ergiebt sich

$$2. \quad \begin{aligned} y' &= u_1 y_1' + u_2 y_2' + \ldots + u_r y_r', \\ y'' &= u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + \ldots + u_r y_r'', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(r-1)} &= u_1 y_1^{(r-1)} + u_2 y_2^{(r-1)} + \ldots + u_r y_r^{(r-1)}, \end{aligned}$$

sowie ferner

$$\begin{aligned} y^{(r)} &= u_1 y_1^{(r)} + u_2 y_2^{(r)} + \ldots + u_r y_r^{(r)} \\ &\quad + u_1' y_1^{(r-1)} + u_2' y_2^{(r-1)} + \ldots + u_r' y_r^{(r-1)}, \\ y^{(r+1)} &= \Sigma u_k y_k^{(r+1)} + 2\Sigma u_k' y_k^{(r)} + \Sigma u_k'' y_k^{(r-1)}, \\ y^{(r+2)} &= \Sigma u_k y_k^{(r+2)} + 3\Sigma u_k' y_k^{(r+1)} + 3\Sigma u_k'' y_k^{r} + \Sigma u_k''' y_k^{(r-1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n)} &= \Sigma u_k y_k^{(n)} + \binom{n-r+1}{1}\Sigma u_k' y_k^{(n-1)} + \binom{n-r+1}{2}\Sigma u_k'' y_k^{(n-2)} + \\ &\quad \ldots + \Sigma u_k^{(n-r+1)} y_k^{(r-1)}. \end{aligned}$$

Führen wir diese Werthe in die Differentialgleichung ein und beachten dabei, dass $y_1, y_2, \ldots y_r$ der reducirten Gleichung genügen, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

3. $$\Sigma P_k u_k' + \Sigma Q_k u_k'' + \ldots + \Sigma V_k u_k^{(n-r+1)} = X,$$

worin die $P_k, Q_k, \ldots\ldots V_k$ bekannte Functionen von x sind. Aus den $(r-1)$ Bedingungsgleichungen 1. können wir die Verhältnisse der $u_1', u_2' \ldots u_r'$ finden; drücken wir $u_2' \ldots u_r'$ durch u_1' aus, so erhalten wir

5. $$u_2' = Au_1', \quad u_3' = Bu_1' \ldots\ldots u_r' = Nu_1'$$

wo nun $A, B, \ldots N$ bekannt sind. Diese Gleichungen differenziren wir $(n-r)$ mal und setzen die Resultate in 4. ein. Dadurch entsteht eine Differentialgleichung, die nur u_1 enthält und von der Form ist

$$\alpha u^{(n+r-1)} + \beta u^{(n+r-2)} + \ldots + \nu u' = X,$$

worin $\alpha, \beta, \ldots \nu$ bekannte Functionen von x sind.

Dies ist eine nichtreducirte lineare Differentialgleichung $(n-r)$ter Ordnung für den Differentialquotienten u'. Wir erhalten somit: Wenn man r particuläre durch keine lineare Identität verbundene Integrale der Differentialgleichung kennt

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \ldots + X_n y = 0,$$

so hat man zur Bestimmung des allgemeinen Integrals dieser Gleichung eine reducirte lineare Differentialgleichung $(n-r)$ter Ordnung aufzulösen und dann noch ein einfaches Integral zu berechnen; zur Bestimmung des allgemeinen Integrals der nicht reducirten Gleichung

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \ldots + X_n y = X,$$

hat man die Differentialgleichung $(n-r)$ter Ordnung zu integriren, die aus der des reducirten Problems hervorgeht, wenn man auf der rechten Seite X statt 0 setzt, und dann ebenfalls noch ein einfaches Integral auszuführen.

---

19. Die Methode, an Stelle einer gegebenen Differentialgleichung eine einfachere aufzulösen, und aus dem allgemeinen Integrale dieser Gleichung das der gegebenen dadurch abzuleiten, dass man an die Stelle einer oder mehrerer Constanten geeignet gewählte Functionen der Variabeln setzt, lässt sich auch in andern Fällen, als in den schon bekannten, mit gutem Erfolge anwenden.

Um zu dem allgemeinen Integrale der Gleichung

1. $$y'' + Xy' + Yy'^2 = 0$$

zu gelangen, in welcher X und Y Functionen von x bez. y allein sind, betrachten wir zunächst die einfachere Gleichung

2. $$y'' + Xy' = 0,$$

zu der wir leicht ein erstes Integral finden

3. $$y' = Ce^{-\int X dx}.$$

Wir versuchen nun, z als Function von x so zu bestimmen, dass

4. $$y' = ze^{-\int X dx}$$

ein allgemeines erstes Integral von 1. wird. Aus 4. folgt durch Differentiation

5. $$y'' = e^{-\int X dx}(-zX + z');$$

substituirt man 4. und 5. in 1., so ergiebt sich

$$z' + Yz^2 e^{-\int X dx} = 0.$$

Ersetzt man hier z' durch $y'dz : dy$, so erhält man in Rücksicht auf 4.

$$\left(\frac{dz}{dy} + Yz\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dz}{dy} + Yz = 0, \quad \text{also} \quad z = Ce^{-\int Y dy}.$$

Führt man dies in 4. ein, so entsteht zunächst

$$\frac{dy}{dx} = Ce^{-\int Y dy} \cdot e^{-\int X dx}.$$

In dieser Differentialgleichung I. O. kann man die Variabeln trennen und erhält das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung

$$\int e^{\int Y dy} dy = C\int e^{-\int X dx} dx + C_1.$$

20. An Stelle der Gleichung

1. $$(1 - x^2)y'' - 2xy' + Xy'^3 = 0,$$

worin X nur x enthält, untersuchen wir zunächst die einfachere

2. $$(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0;$$

diese hat das erste Integral

3. $$y' = \frac{C}{1 - x^2}.$$

Setzen wir nun in 1.

$$y' = \frac{z}{1 - x^2}, \quad \text{also} \quad y'' = \frac{2xz}{(1 - x^2)^2} + \frac{z'}{1 - x^2},$$

so erhalten wir

$$z' + X \cdot \frac{z^3}{(1 - x^2)^3} = 0.$$

Hieraus folgt das allgemeine Integral

$$\frac{1}{z^2} = 2\int \frac{X dx}{(1 - x^2)^3} + C,$$

und daher schliesslich das allgemeine Integral von 1.

$$y = \int \frac{z\, dx}{1 - x^2} + C_1.$$

21. Die soeben behandelte Gleichung ist ein besonderer Fall von

$$y'' + X_0 y' + X_1 y'^n = 0$$

Ein allgemeines erstes Integral von

$$y'' + X_0 y' = 0$$

ist

$$y' = Ce^{-\int X_0 dx}.$$

Sucht man nun der gegebenen Gleichung durch das erste Integral zu genügen

$$y' = ze^{-\int X_0 dx},$$

so erhält man zur Bestimmung von z die Gleichung

$$z' + X_1 z^n e^{-(n-1)\int X_0 dx} = 0.$$

Hieraus folgt, sobald n von $+1$ verschieden ist,

$$\frac{1}{n-1} z^{-n+1} = \int X_1 e^{-(n-1)\int X_0 dx} dx + C.$$

Führt man den hieraus folgenden Werth von z in y' ein, so erhält man y' als Function von x, und gewinnt y durch nochmalige Integration.

22. Das allgemeine Integral der Gleichung

1. $$y'' + Y_0 y'^2 + Y_1 y'^n = 0,$$

worin Y_0 und Y_1 Functionen von y allein sind, wird aus einem allgemeinen ersten Integrale der Gleichung gefunden

$$y'' + Y_0 y'^2 = 0 .$$

Ersetzt man y'' durch $y'dy' : dy$, so erhält man hieraus

$$\frac{dy'}{y'} = - Y_0 \, dy$$

und hieraus

$$y' = Ce^{-\int Y_0 dy} .$$

Wir suchen nun der gegebenen Gleichung durch

2. $$y' = ze^{-\int Y_0 dy}$$

zu genügen, worin z eine Function von y allein bedeute. Bildet man unter dieser Voraussetzung

$$y'' = y' \frac{dy'}{dy} = ze^v \left(e^v \frac{dz}{dy} - Y_0 z e^v \right),$$

wobei zur Abkürzung

$$v = - \int Y_0 \, dy$$

gesetzt worden ist, so erhält man aus 1.

$$ze^{2v} \frac{dz}{dy} + Y_1 z^n e^{nv} = 0 .$$

Hieraus folgt

3. $$\frac{dz}{z^{n-1}} + Y_1 e^{(n-2)v} dy = 0 ,$$

worin die Variabeln gesondert sind. Hat man hieraus z als Function von y erhalten, so giebt 2. durch eine Integration x als Function von y. Die beiden Constanten treten bei der Integration der Gleichungen 3. und 2. ein.

23. Mitunter gelingt es, durch Einführung von ein oder zwei neuen Variabeln eine Differentialgleichung in eine einfachere überzuführen. Die Gleichung

1. $$y'' = a^2 x - b^2 y$$

lässt sich als nicht reducirte lineare Gleichung integriren; noch rascher kommt man zum Ziele, wenn man setzt

$a^2 x - b^2 y = t$, also $- b^2 y'' = t''$. Dadurch erhält man aus 1.

$$t'' = - b^2 t ;$$

das allgemeine Integral hiervon ist

$$t = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx ,$$

daher ist das allgemeine Integral von 1.

$$a^2 x - b^2 y = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx^{*}) .$$

§ 26. Differentialgleichungen zwischen mehr als zwei Variabeln. Bestimmte Systeme.

1. Aus der Gleichung zwischen drei Variabeln

1. $$f(x, y, z) = c ,$$

worin c eine willkürliche Constante bezeichnet, folgt durch Differentiation

2. $$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 .$$

Diese Gleichung hat man sich durch eine der verschwindenden Grössen dx,

*) Weitere Ausführungen siehe LACROIX. Traité du calcul différential et du calcul intégral, Paris 1800, 2. vol. Auf die Theorie der singulären Integrale von Gleichungen höherer Ordnung einzugehen, müssen wir uns versagen; man vergl. LACROIX, Traité, 2. vol. No. 667. BOOLE, A Treatise on differential equations, 4. ed. 1. vol. Ch. X.

dy, dz dividirt zu denken, so dass an die Stelle verschwindender Faktoren Quotienten treten, die einen bestimmten Grenzwerth haben.

Ist umgekehrt eine Gleichung gegeben

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

worin P, Q, R Functionen von x, y, z bezeichnen, so fragt es sich, ob dieselbe ein Integral von der Form

$$f(x, y, z) = c$$

hat, und wie dieselbe gefunden werden kann.

2. Sollen alle Werthsysteme von x, y, z, welche die Differentialgleichung erfüllen

$$1. \qquad Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

der Gleichung genügen

$$2. \qquad f(x, y, z) = c,$$

so muss 1. mit der durch Differentiation aus 2. genommenen

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0$$

übereinstimmen; es muss daher einen Faktor v geben, für welchen

$$3. \qquad vP = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad vQ = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad vR = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Berechnet man $\partial^2 f : \partial x \partial y$ aus der ersten und zweiten Gleichung, $\partial^2 f : \partial y \partial z$ aus der zweiten und dritten, $\partial^2 f : \partial z \partial x$ aus der dritten und ersten und setzt die erhaltenen Werthe einander gleich, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$v\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + P\frac{\partial v}{\partial y} - Q\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$v\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\frac{\partial v}{\partial z} - R\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$v\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\frac{\partial v}{\partial x} - P\frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit R, die zweite mit P, die dritte mit Q und addirt, so erhält man nach geeigneter Umstellung folgende v nicht enthaltende Bedingung

$$4. \qquad P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

Soll also die Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ durch eine einzige Gleichung $f(x, y, z) = c$ integrabel sein, so müssen die Functionen P, Q, R die Gleichung 4. identisch erfüllen.

3. Die Bedingung ist nicht nur nothwendig sondern auch ausreichend. Wir weisen dies nach, indem wir zugleich zeigen, wie das Integral der vorgelegten Differentialgleichung gefunden werden kann.

Die Werthe von x und y, die der Gleichung No. 2, 1 bei constantem z genügen, erfüllen die Differentialgleichung

$$1. \qquad Pdx + Qdy = 0;$$

aus dem allgemeinen Integrale dieser Gleichung

$$2. \qquad V(x, y) = c$$

kann man das Integral der gegebenen Gleichung erhalten, indem man in 2. die Constante c durch eine passend gewählte Function von z ersetzt. Nehmen wir an, $V = \varphi(z)$ sei das Integral der Gleichung

$$3. \qquad Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Durch Differentiation folgt aus

4. $$V - \varphi(z) = 0$$

die Gleichung

5. $$\frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \varphi'\right)dz = 0.$$

Da nun $V = c$ das allgemeine Integral von 1. ist, so giebt es einen Faktor v von der Beschaffenheit, dass

6. $$vP = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad vQ = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Multiplicirt man 3. mit v und berücksicht 6., so folgt

7. $$\frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + vR\,dz = 0.$$

Der Vergleich von 5. und 7. ergiebt

8. $$\frac{\partial V}{\partial z} - vR = \frac{d\varphi(z)}{dz}.$$

Da hier rechts eine Function von z allein steht, so muss dasselbe auch links der Fall sein.

Durch die Gleichung $V = \varphi(z)$ ist z als Function von V definirt; die Bedingung, dass $\partial V : \partial z - vR$ eine Function von z allein sei, ist daher erfüllt, wenn dieser Ausdruck in Anbetracht der Variabeln x und y eine Function von V ist. Die ausreichende Bedingung hierzu ist bekanntlich

9. $$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial z} - vR\right) - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial z} - vR\right) = 0.$$

Von dieser Bedingung lässt sich leicht zeigen, dass sie mit No. 2, 4 identisch ist. Durch Ausführung der Differentiationen folgt zunächst aus 9.

10. $$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z} - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z} - v\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial R}{\partial x}\right)$$
$$- R\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.$$

Aus $$\frac{\partial V}{\partial y} = vQ, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = vP \quad \text{folgt}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z} = v\frac{\partial Q}{\partial z} + Q\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z} = v\frac{\partial P}{\partial z} + P\frac{\partial v}{\partial z};$$

daher ist

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z} - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z} = v^2\left(P\frac{\partial Q}{\partial z} - Q\frac{\partial P}{\partial z}\right),$$

$$v\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial R}{\partial x}\right) = v^2\left(P\frac{\partial R}{\partial y} - Q\frac{\partial R}{\partial x}\right).$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = v\left(P\frac{\partial v}{\partial y} - Q\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Da v integrirender Faktor der Gleichung 1. ist, so ist

$$P\frac{\partial v}{\partial y} - Q\frac{\partial v}{\partial x} = v\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Setzt man dies in 10. ein und unterdrückt den Faktor v^2, so erhält man in der That No. 2, 4.

Um nun $\varphi(z)$ zu erhalten, hat man in 8. links die Variabeln x und y durch V zu verdrängen und V durch φ zu ersetzen; man erhält dann eine Differentialgleichung erster Ordnung für φ. Durch das allgemeine Integral dieser Gleichung tritt in das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung eine willkürliche Constante ein.

Beispiel. $$a^2 x\,dx + b^2 y\,dy - c\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 - 1}\,dz = 0.$$

Hier ist $v = 2$, $V = a^2x^2 + b^2y^2$; daher ist

$$\frac{\partial V}{\partial z} - vR = 2c\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 - 1}.$$

Dies ist eine Function von V, folglich lässt die gegebene Differentialgleichung eine einzelne Integralgleichung zu. Man hat weiter

$$\frac{d\varphi}{dz} = -2R = 2c\sqrt{\varphi - 1};$$

Hieraus folgt

$$cz = \int \frac{d\varphi}{2\sqrt{\varphi - 1}} = \sqrt{\varphi - 1} + c_1,$$

wenn c_1 eine willkürliche Constante ist. Dies ergiebt

$$\varphi = (cz - c_1)^2 + 1.$$

Das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung ist sonach

$$a^2x^2 + b^2y^2 - (cz - c_1)^2 = 1.^{*)}$$

4. Wenn in der Gleichung

1. $$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

die Functionen P, Q, R die Bedingung

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

nicht erfüllen, wenn es also keine Flächenfamilie $f(x, y, z, c) = 0$ giebt derart, dass jede unendlich kleine Verschiebung eines Punktes längs irgend einer dieser Flächen der Differentialgleichung genügt, so lassen sich doch auf jeder beliebigen Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ unzählige Linien so ziehen, dass jede unendlich kleine Verschiebung eines Punktes längs jeder solchen Curve die Differentialgleichung erfüllt.

Aus der Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ möge hervorgehen

2. $$z = f(x, y);$$

hieraus folgt für jede Verschiebung entlang der Fläche φ

3. $$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Setzt man 2. und 3. in 1. ein, so bleibt eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und y; das allgemeine Integral derselben sei

4. $$\psi(x, y, C) = 0,$$

wobei C eine willkürliche Constante bezeichnet; diese Gleichung ergiebt eine Schaar von Cylinderflächen, deren Mantellinien der Z-Achse parallel sind; der Schnitt jedes dieser Cylinder mit der Fläche $\varphi = 0$ befriedigt die Gleichung 1.

Man kann nun sagen, die Gleichung 1. sei durch den Verein der beiden Gleichungen 2. und 4. integrirt.

Man kann in diesem Falle die Integralgleichungen auch in folgender Weise darstellen. Ist

$$V(x, y, z) = c$$

das Integral von $Pdx + Qdy = 0$ unter Voraussetzung eines constanten z, so ist

5. $$V(x, y, z) = \varphi(z),$$

worin z eine ganz willkürliche Function von z bedeutet, ein Integral der gegebenen Differentialgleichung für alle Werthe der Variabeln x, y, z, welche der Gleichung genügen (No. 3, 8)

6. $$\frac{\partial V}{\partial z} - vR - \frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

---

*) Weitere Beispiele siehe BOOLE, A treatise etc., Ch. XII.

Somit ist die Gleichung durch zwei Gleichungen (5. und 6.) integrirt, die eine willkürliche Function (φ) enthalten.

5. Um die Bedingungen zu erhalten, unter denen die Differentialgleichung zwischen vier Variabeln

$$1. \qquad Pdx + Qdy + Rdz + Sdt = 0$$

durch eine einzige Gleichung

$$2. \qquad t = \varphi(x, y, z)$$

integrirt werden kann, leiten wir aus 1. ab

$$3. \qquad dt = -\frac{P}{S}dx - \frac{Q}{S}dy - \frac{R}{S}dz .$$

Die gesuchten Bedingungen ergeben sich zunächst in der Form

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{P}{S} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{Q}{S},$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{P}{S} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{R}{S},$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{Q}{S} = \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{R}{S}.$$

Führt man die Differentiationen aus, und bezeichnet partiale Differentialquotienten nach x, y, z, t durch entsprechende Indices, so erhält man, wenn man die partialen Differentialquotienten von t aus 3. substituirt,

$$4. \qquad S(Q_x - P_y) + P(S_y - Q_t) + Q(P_t - S_x) = 0,$$
$$5. \qquad S(P_z - R_x) + P(R_t - S_z) + R(S_x - P_t) = 0,$$
$$6. \qquad S(Q_z - R_y) + Q(R_t - S_z) + R(S_y - Q_t) = 0.$$

Reducirt man 1. auf das Differential einer anderen Variabeln, als auf dt, so erhält man ausser den Gleichungen 4., 5., 6. noch die Gleichung

$$7. \qquad P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x) = 0.$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist diese Gleichung eine Folge der Gleichungen 4., 5., und 6. enthält also keine neue Bedingung für P, Q, R, S.

6. Wenn die Bedingungen No. 5, 4 bis 7 erfüllt sind, so wird der Gleichung

$$1. \qquad Pdx + Qdy + Rdz + Sdt = 0$$

durch ein einziges Integral genügt. Nimmt man zunächst t als constant an, so geht die Differentialgleichung über in

$$2. \qquad Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Da No. 5, 7 erfüllt ist, so lässt diese Gleichung ein einziges Integral zu

$$3. \qquad f(x, y, z, t) = c,$$

wobei t als Parameter auftritt, sofern es in P, Q, R enthalten ist, und c die Integrationsconstante bezeichnet. Man kann nun c als Function der Variabeln t so bestimmen, dass 3. der gegebenen Differentialgleichung genügt. Denn aus 3. folgt

$$4. \qquad f_x dx + f_y dy + f_z dz + f_t dt - \frac{dc}{dt}dt = 0.$$

Da nun 3. das Integral von 2. ist, so ist für einen bestimmten Faktor v

$$5. \qquad f_x = vP, \quad f_y = vQ, \quad f_z = vR;$$

ferner ist zufolge 1.

$$Pdx + Qdy + Rdz = -Sdt.$$

Führt man dies in 4. ein, so erhält man

$$-vS + f_t - \frac{dc}{dt} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dc}{dt} = -vS + f_t.$$

Soll nun c als Function von t allein bestimmbar sein, so muss die rechte Seite dieser Gleichung eine Function von t und c allein sein, sobald man in derselben z gemäss 3. durch x, y, c, t ausgedrückt substituirt. Dies tritt ein, wenn nach der Substitution die Differentialquotienten der rechten Seite, genommen nach x und y, verschwinden.

Daher hat man, wenn man den Erfolg der Substitution durch die Buchstaben f, v, S andeutet, die Bedingungen

6. $$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{vS} - \mathrm{f}_t) = 0\,,$$

7. $$\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{vS} - \mathrm{f}_t) = 0\,.$$

Die Ausführung der Differentiation in 6. ergiebt

8. $$v_x S + v S_x + (v_z S + v S_z) z_x - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} z_x = 0\,.$$

Nun ist zunächst

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = v P_t + v_t P\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} = v R_t + v_t R\,,$$

$$z_x = -P : R\,.$$

Führt man dies in 8. ein und multiplicirt mit R, so erhält man

$$S(R v_x - P v_z) + v(R S_x - P S_z - R P_t + P R_t) = 0\,.$$

Aus $\frac{\partial v R}{\partial x} = \frac{\partial v P}{\partial z}$ folgt

$$R v_x - P v_z = v(P_z - R_x)\,;$$

benutzt man dies, so erhält man schliesslich

$$S(P_z - R_x) + P(R_t - S_z) + R(S_x - P_t) = 0\,,$$

d. i. die Gleichung No. 5, 5. Als ausreichende Bedingung für 7. erhält man ebenso die Gleichung No. 5, 6.

Wenn daher die Bedingungen No. 5, 4. bis 7 erfüllt sind, so ermittele man das Integral

9. $$f(x, y, z, t) = c$$

der Differentialgleichung

$$P dx + Q dy + R dz = 0\,,$$

und bestimme hierauf c als Function von z aus der Differentialgleichung I. O.

$$\frac{dc}{dt} = \mathrm{vS} - \mathrm{f}_t\,;$$

führt man diese Function in 9. ein, so ist 9. das Integral der Gleichung

$$P dx + Q dy + R dz + S dt = 0\,.$$

7. **Bestimmte Systeme simultaner Differentialgleichungen.** Unter einem bestimmten Systeme simultaner Differentialgleichungen versteht man ein System von n Gleichungen welche $(n+1)$ Variable und Differentialquotienten von n derselben in Bezug auf eine — die unabhängige Variable — enthalten.

Wir werden zeigen, wie ein solches System durch Differentiation und successive Elimination auf ein System von n Differentialgleichungen reducirt wird, deren jede ausser der unabhängigen Variabeln nur eine abhängige und ihre Differentialquotienten enthält.

Sind sämmtliche Gleichungen von der ersten Ordnung, so können sie auf die Differentialquotienten

$$\frac{dx_1}{dx}\,, \quad \frac{dx_2}{dx}\,, \quad \frac{dx_3}{dx} \cdots \frac{dx_n}{dx}$$

der abhängigen Variabeln $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ reducirt werden; bringt man diese Gleichungen in die Form

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}, \quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{X_2}{X}, \ldots \frac{dx_n}{dx} = \frac{X_n}{X},$$

so kann man sie durch die Proportion ersetzen

1. $$dx_1 : dx_2 : dx_3 : \ldots : dx = X_1 : X_2 : X_3 : \ldots : X,$$

wo nun keine der n Variabeln vor der andern bevorzugt erscheint.

Nach Jacobi werden die Integralgleichungen dieses Systems auf folgendem Wege erhalten:

Man differenzire die Gleichung

2. $$\frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}$$

$(n-1)$ mal nach x und ersetze nach jeder Differentiation die Differentialquotienten $dx_k : dx$ durch $X_k : X$; alsdann erhält man mit 2. zusammen n Gleichungen, welche die n Differentialquotienten

$$\frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{d^2x_1}{dx^2}, \quad \frac{d^3x_1}{dx_3} \ldots \frac{d^nx_1}{dx^n}$$

durch die Variabeln $x, x_1, \ldots x_n$ ausdrücken. Eliminirt man hieraus die Variabeln $x_2, x_3 \ldots x_n$, so bleibt eine Differentialgleichung $n$ter Ordnung, welche nur die Variabeln x_1 und x enthält,

$$\varphi\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx}, \ldots \frac{d^nx_1}{dx^n}\right).$$

Die n ersten Integrale dieser Gleichung seien

$$F_1\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}}\right) = C_1,$$

$$F_2\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}}\right) = C_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$F_n\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}}\right) = C_n.$$

Setzt man in diese Gleichungen die Werthe der $(n-1)$ Differentialquotienten von x_1 ausgedrückt durch $x, x_1 \ldots x_n$, ein, so erhält man n Gleichungen mit n willkürlichen Constanten $C_1, C_2 \ldots C_n$, die Integralgleichungen des Problems.

8. Ehe wir die Betrachtung bestimmter Systeme fortsetzen, ergänzen wir, gestützt auf das in No. 7 Entwickelte, die in No. 1 bis 6 enthaltenen Untersuchungen, indem wir nachweisen:

Wenn die Bedingungen No. 5, 4 bis 7 nicht erfüllt sind, so wird der Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdt = 0$$

durch den Verein zweier Gleichungen genügt, welche eine willkürliche Function enthalten.

Werden die linken Seiten der Gleichungen No. 5, 4 bis 7 der Reihe nach mit $\mathfrak{R}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{P}, \mathfrak{S}$ bezeichnet, so erkennt man die Identität

1. $$-P\mathfrak{P} + Q\mathfrak{Q} + R\mathfrak{R} + S\mathfrak{S} = 0;$$

daher wird der gegebenen Differentialgleichung durch die Proportion genügt

$$dx : dy : dz : dt = -\mathfrak{P} : \mathfrak{Q} : \mathfrak{R} : \mathfrak{S}.$$

Diese Proportion ist gleichbedeutend mit dem simultanen Systeme

2. $$\frac{dx}{\mathfrak{P}} = -\frac{dt}{\mathfrak{S}}, \quad \frac{dy}{\mathfrak{Q}} = \frac{dt}{\mathfrak{S}}, \quad \frac{dz}{\mathfrak{R}} = \frac{dt}{\mathfrak{S}}.$$

Die Integrale dieser drei Gleichungen seien

$$3.\qquad \begin{aligned} x &= \varphi(t, a, b, c), \\ y &= \psi(t, a, b, c), \\ z &= \chi(t, a, b, c), \end{aligned}$$

wobei a, b, c die Integrationsconstanten bezeichnen.

Durch 3. wird die gegebene Gleichung integrirt; diese Lösung des Problems ist aber nur eine particuläre; wir werden zeigen, wie man von ihr zur allgemeinen Lösung übergehen kann, indem man statt der Constanten a, b, c geeignet gewählte Functionen der Variabeln setzt.

9. Differenzirt man No. 8, 3. nach allen darin enthaltenen Grössen, so erhält man

$$1.\qquad \begin{aligned} dx &= \varphi_t\, dt + \varphi_a\, da + \varphi_b\, db + \varphi_c\, dc, \\ dy &= \psi_t\, dt + \psi_a da + \psi_b\, db + \psi_c\, dc, \\ dz &= \chi_t\, dt + \chi_a da + \chi_b\, db + \chi_c\, dc. \end{aligned}$$

Führt man dies in die gegebene Differentialgleichung ein, so erhält man

$$2.\qquad (P\varphi_t + Q\psi_t + R\chi_t + S)\,dt + \alpha\, da + \beta\, db + \gamma\, dc = 0,$$

wobei

$$3.\qquad \begin{aligned} \alpha &= P\varphi_a + Q\psi_a + R\chi_a, \\ \beta &= P\varphi_b + Q\psi_b + R\chi_b, \\ \gamma &= P\varphi_c + Q\psi_c + R\chi_c. \end{aligned}$$

Die Gleichungen No. 8, 3 genügen unter Voraussetzung constanter a, b, c den Gleichungen No. 8, 2; folglich ist

$$4.\qquad \varphi_t = -\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{S}}, \quad \psi_t = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{S}}, \quad \chi_t = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{S}},$$

$$P\varphi_t + Q\psi_t + R\chi_t + S = \frac{1}{\mathfrak{S}}(-P\mathfrak{P} + Q\mathfrak{Q} + R\mathfrak{R} + S\mathfrak{S}) = 0.$$

Die Gleichung 2. reducirt sich hiernach auf

$$5.\qquad \alpha da + \beta db + \gamma dc = 0.$$

Ersetzt man in P, Q, R die Variabeln x, y, z gemäss der Gleichungen No. 8, 3 durch t, a, b, c, so enthalten α, β, γ nur noch die Variable t; diese Variable kommt in α, β, γ nur in einem gemeinsamen Faktor vor.

Wenn in P, Q, R, S die Variabeln x, y, z durch t, a, b, c ersetzt sind, so deuten wir dies durch die Buchstaben P, Q, R, S an. Alsdann ist

$$6.\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{P}\varphi_a + \mathrm{Q}\psi_a + \mathrm{R}\chi_a). \\ &= \mathrm{P}\frac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial t} + \mathrm{Q}\frac{\partial^2\psi}{\partial a\,\partial t} + \mathrm{R}\frac{\partial^2\chi}{\partial a\,\partial t} \\ &+ (P_t + P_x\varphi_t + P_y\psi_t + P_z\chi_t)\,\varphi_a \\ &+ (Q_t + Q_x\varphi_t + Q_y\psi_t + Q_z\chi_t)\,\psi_a \\ &+ (R_t + R_x\varphi_t + R_y\psi_t + R_z\chi_t)\,\chi_a. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdt = 0$$

wird identisch erfüllt, wenn die Gleichungen gelten

$$x = \varphi, \quad y = \psi, \quad z = \chi,$$
$$dx : dy : dz : dt = \varphi_t : \psi_t : \chi_t : 1.$$

Wenn man aus diesen Gleichungen x, y, z durch t, a, b, c ausdrückt und in die Differentialgleichung substituirt, so erhält man daher die Identität

$$\mathrm{P}\varphi_t + \mathrm{Q}\psi_t + \mathrm{R}\chi_t = -\mathrm{S}.$$

Diese Gleichung ergiebt

$$\mathrm{P}\frac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial t} + \mathrm{Q}\frac{\partial^2\psi}{\partial a\,\partial t} + \mathrm{R}\frac{\partial^2\chi}{\partial a\,\partial t} = -\mathrm{S}_a - \mathrm{P}_a\varphi_t - \mathrm{Q}_a\psi_t - \mathrm{R}_a\chi_t$$

7.
$$= -\mathrm{S}_a - \varphi_t(P_x\varphi_a + P_y\psi_a + Q_z\chi_a)$$
$$- \psi_t(Q_x\varphi_a + Q_y\psi_a + Q_z\chi_a)$$
$$- \chi_t(R_x\varphi_a + R_y\psi_a + R_z\chi_a).$$

Durch Addition von 6. und 7. folgt

8.
$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = -\mathrm{S}_a + \varphi_a[P_t + \psi_t(P_y - Q_x) + \chi_t(P_z - R_x)]$$
$$+ \psi_a[Q_t + \chi_t(Q_z - R_y) + \varphi_t(Q_x - P_y)]$$
$$+ \chi_a[R_t + \varphi_t(R_x - P_z) + \psi_t(R_y - Q_z)].$$

Berücksichtigt man 4., sowie die Werthe von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{S}$, so erhält man

$$P_t + \psi_t(P_y - Q_x) + \chi_t(P_z - R_x) = \frac{1}{\mathfrak{S}}[\mathfrak{S}P_t + \mathfrak{Q}(P_y - Q_x) + \mathfrak{R}(P_z - R_x)]$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{S}}(\mathfrak{S}P_t + (S_x - P_t)[R(P_y - Q_x) + Q(R_x - P_z)]$$
$$+ P[(R_t - R_z)(P_y - Q_x) + (S_y - Q_t)(P_z - R_x)]).$$

Benutzt man hierin

$$R(P_y - Q_x) + Q(R_x - P_z) = \mathfrak{S} - P(Q_z - R_y),$$

und setzt zur Abkürzung

$$(P_y - Q_x)(R_t - S_z) + (P_z - R_x)(S_y - Q_t) + (Q_z - R_y)(P_t - S_x) = \Delta,$$

so erhält man

$$P_t + \psi_t(P_y - Q_x) + \chi_t(P_z - R_x) = S_x + \frac{P}{\mathfrak{S}}\Delta.$$

Ebenso folgt

$$Q_t + \chi_t(Q_z - R_y) + \varphi_t(Q_x - P_y) = S_y + \frac{Q}{\mathfrak{S}}\Delta.$$

$$R_t + \varphi_t(R_x - P_z) + \psi_t(R_y - Q_z) = S_z + \frac{R}{\mathfrak{S}}\Delta.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen ergiebt sich aus 8.

9.
$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = -\mathrm{S}_a + S_x\varphi_a + S_y\psi_a + S_z\chi_a + \frac{\Delta}{\mathfrak{S}}\alpha.$$

Da nun

$$\mathrm{S}_a = S_x\varphi_a + S_y\psi_a + S_z\chi_a,$$

wobei man ebenso wie in 9. nach erfolgter Differentiation x, y, z durch t, a, b, c zu ersetzen hat, so erhält man schliesslich

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\Delta}{\mathfrak{S}}.$$

Integrirt man diese Gleichung nach t, so folgt

$$\alpha = \mathfrak{A}e^{\int\frac{\Delta}{\mathfrak{S}}dt}.$$

Hierbei ist $\mathfrak{A}$ die von t freie Integrationsconstante.

In derselben Weise ergiebt sich

$$\beta = \mathfrak{B}e^{\int\frac{\Delta}{\mathfrak{S}}dt}, \quad \gamma = \mathfrak{C}e^{\int\frac{\Delta}{\mathfrak{S}}dt}.$$

Setzt man diese Werthe für α, β, γ in die Differentialgleichung 5, und unterdrückt den gemeinschaftlichen die Variable t enthaltenden Faktor, so bleibt die Gleichung

10.
$$\mathfrak{A}da + \mathfrak{B}db + \mathfrak{C}dc = 0,$$

welche nur a, b, c enthält.

Diese Gleichung lässt nicht ein einziges Integral zu; denn wenn dies der Fall wäre, so könnte man a, b, c aus den Gleichungen

$$x = \varphi(t, a, b, c),$$
$$y = \psi(t, a, b, c),$$
$$z = \chi(t, a, b, c),$$

als Functionen von x, y, z, t berechnen und in das Integral substituiren; man hätte dann die gegebene Differentialgleichung durch ein einziges Integral integrirt, entgegen der Voraussetzung, dass die Bedingungen No. 5, 4 bis 7 nicht erfüllt sind.

Hat man 10. durch zwei Gleichungen integrirt, die eine willkürliche Function enthalten, und substituirt darin a, b, c als Functionen der Variabeln, so erhält man die Integralgleichungen der gegebenen Differentialgleichung*).

10. Die in No. 7 entwickelte allgemeine Methode kann man in besonderen Fällen durch einfachere, den besonderen Umständen angepasste Wege ersetzen; es gelingt mitunter die Integration einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung durch Integrationen von Gleichungen niederer Ordnung zu ersetzen.

Die Differentialgleichungen

$$1. \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + cz + d, \\ \frac{dy}{dt} &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ \frac{dz}{dt} &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \end{aligned}$$

multipliciren wir der Reihe nach mit 1, m, n und addiren; wir erhalten dadurch

$$2. \quad \frac{dx + m\,dy + n\,dz}{dt} = Ax + By + Cz + D,$$

worin $A = a + ma_1 + na_2$, $B = b + mb_1 + nb_2$,
$C = c + mc_1 + nc_2$, $D = d + md_1 + nd_2$.

Wir bestimmen nun m und n so, dass

$$A : B : C = 1 : m : n.$$

Alsdann giebt es eine Zahl λ, so dass

$$3. \quad A = \lambda, \quad B = m\lambda, \quad C = n\lambda.$$

Der Verein dieser drei Gleichungen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & a_1 & a_2 \\ b & b_1 - \lambda & b_2 \\ c & c_1 & c_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Sind λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln dieser cubischen Gleichung, so erhält man aus 3. drei zusammengehörige Werthepaare m_1, n_1; m_2, n_2; m_3, n_3. Jedes dieser Paare führen wir in 2. ein und erhalten z. B. für m_1, n_1

$$\frac{dx + m_1dy + n_1dz}{dt} = \lambda_1\left(x + m_1y + n_1z + \frac{d + m_1d_1 + n_1d_2}{\lambda_1}\right).$$

Hieraus folgt sofort die Integralgleichung

$$l\left(x + m_1y + n_1z + \frac{d + m_1d_1 + n_1d_2}{\lambda_1}\right) = \lambda_1t + C_1.$$

*) RAABE, Ueber die Integration der Differentialgleichungen von der Form

$$dz = H\,dx + K\,dy + L\,dp + M\,dq + N\,dr \quad \text{u. s. w.}$$

CRELLE's Journal, Bd. 14, pag. 123, 1825. Die allgemeine Auflösung des Problems gab PFAFF in den Denkschriften der Berliner Akademie der Wissenschaften aus den Jahren 1814 und 1815.

Vertauscht man hier m_1, n_1, λ_1, C_1 mit m_2, n_2, λ_2, C_2, bez. m_3, n_3, λ_3, C_3, so erhält man die drei Integralgleichungen des Problems.

Wenn zwei Wurzeln λ gleich sind, so erhält man auf diesem Wege nicht alle Integralgleichungen; man kann sich in diesem Falle der allgemeinen Methode bedienen.

11. Das Problem, die Gleichungen zu integriren

$$1.\quad \begin{aligned} dx : dy : dz &= (ax + by + cz + d) : (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) \\ &\quad : (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2), \end{aligned}$$

lässt sich auf das soeben behandelte zurückführen. Bezeichnet man die rechts stehenden Polynome der Reihe nach mit M, M_1, M_2 und fügt eine neue Variable t hinzu, welche der Proportion genügt

$$dx : dy : dz : dt = M : M_1 : M_2 : 1,$$

so hat man für x, y, z, t dieselben Gleichungen, wie in No. 10. Hat man diese integrirt, und eliminirt dann aus zwei Paaren der drei Integralgleichungen die Hülfsvariable t, so erhält man die beiden Integralgleichungen des Problems.

Macht man in den Gleichungen

$$2.\quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{a\xi + b\eta + c\zeta + d\tau} &= \frac{d\eta}{a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1\tau} = \frac{d\zeta}{a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2\tau} \\ &= \frac{d\tau}{a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_3\tau} \end{aligned}$$

die Substitutionen

$$\xi = x\tau, \quad \eta = y\tau, \quad \zeta = z\tau,$$

worin x, y, z neue Variable sind, so erhält man zunächst

$$\frac{\tau dx + x d\tau}{A} = \frac{\tau dy + y d\tau}{B} = \frac{\tau dz + z d\tau}{C} = \frac{d\tau}{D},$$

wobei $A = ax + by + cz + d$, $\quad B = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1$,
$C = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2$, $\quad D = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3$.

Aus den vorigen Gleichungen erhält man

$$\frac{\tau dx}{A - xD} = \frac{\tau dy}{B - yD} = \frac{\tau dz}{C - zD},$$

und hieraus durch Division mit τ das System

$$3.\quad \frac{dx}{A - xD} = \frac{dy}{B - yD} = \frac{dz}{C - zD}.$$

Die Integralgleichungen dieses Systems werden somit erhalten, indem man das System 2. integrirt und alsdann ξ, η, ζ durch $x\tau$, $y\tau$, $z\tau$ ersetzt, und τ zwischen zwei unabhängigen Paaren der drei Integralgleichungen von 2. eliminirt.

Auf demselben Wege kommt man zum Ziele, wenn die Differentialgleichungen ebenso gebaut sind, wie in No. 6 und 7, aber mehr Variable enthalten.

12. Um die Gleichungen zu integriren*)

$$\frac{dx}{dt} + Px + Qy = V,$$

$$\frac{dy}{dt} + P'x + Q'y = V',$$

in denen P, P', Q, Q', V, V' nur die unabhängige Variable t enthalten, multipliciren wir die zweite mit einer noch unbestimmten Function z der unabhängigen Variabeln und addiren dann beide Gleichungen; dies ergiebt

$$1.\quad \frac{dx}{dt} + z\frac{dy}{dt} + (P + zP')x + (Q + zQ')y = V + zV'.$$

*) Sturm, Cours d'Analyse, No. 633; Lacroix, Traité, Bd. II. pag. 383.

Setzen wir nun $r = x + zy$, so ist

$$\frac{dx}{dt} + z\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} - y\frac{dz}{dt},$$

und aus 1. wird

$$2. \quad \frac{dr}{dt} - y\frac{dz}{dt} + (P + zP')(r - zy) + (Q + zQ')y = V + zV'.$$

Bestimmen wir nun z so, dass

$$3. \quad \frac{dz}{dt} + (P + zP')z - Q - zQ' = 0,$$

so geht die Gleichung 2. über in

$$4. \quad \frac{dr}{dt} + (P + zP')r - V - zV' = 0.$$

Die Gleichung 3. enthält nur z und t und ist erster Ordnung. Sind z_1 und z_2 zwei particuläre Integrale dieser Gleichung, so setze man jedes derselben in 4. ein; man erhält dann zwei lineare Differentialgleichungen I. O. für r, und gewinnt daraus zwei Integrale $r = r_1$ und $r = r_2$, jede mit einer willkürlichen Constanten; hieraus ergeben sich schliesslich die Integralgleichungen des Problems

$$x + z_1 y = r_1, \quad x + z_2 y = r_2.$$

Beispiel.

$$x' + 5x + y = t,$$
$$y' - x + 3y = t^2.$$

Die Gleichung für z ist

$$z' + 2z - z^2 - 1 = 0,$$

und ergiebt das allgemeine Integral

$$z = \frac{1}{c - t} + 1.$$

Für $c = \infty$ und $c = 0$ erhält man die particulären Integrale

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{t-1}{t};$$

daher ergeben sich für die zugehörigen r_1 und r_2

$$r'_1 + 4r_1 = t + t^2,$$
$$r'_2 + \frac{4t+1}{t} r_2 = t^2.$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind

$$r_1 = e^{-4t}[C_1 + \int (t + t^2) e^{4t}\, dt,$$
$$r_2 = \frac{1}{t} e^{-4t}(C_2 + \int t^3 e^{4t}\, dt).$$

Beide Integrale lassen sich nach früher mitgetheilten Regeln (§ 5, No. 2) leicht ausführen.

Die Endgleichungen des Problems sind

$$x + y = r_1, \quad tx + (t-1)y = tr_2,$$

aus welcher man noch, wenn erwünscht, jede der beiden abhängigen Variabeln x und y durch t allein ausdrücken kann.

---

13. **Simultane Systeme von Differentialgleichungen höherer Ordnung** werden durch einen sehr einfachen Kunstgriff auf Systeme von Gleichungen erster Ordnung reducirt.

Um die höheren Differentialquotienten z. B. der abhängigen Variabeln x in Bezug auf die unabhängige t zu beseitigen, fügt man neue Variable x_1, x_2, x_3 .. durch die Gleichungen erster Ordnung hinzu

1. $\frac{dx}{dt} = x_1, \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^3x}{dt^3} = x_3, \ldots$

Statt der Differentialquotienten $x'', x''', \ldots x^{(n)}$ des ursprünglichen Systems hat man in dem neuen Systeme, das aus den durch die Substitutionen 1. modicirten gegebenen Gleichungen und den Gleichungen 1. besteht, die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ und deren erste Differentialquotienten. In gleicher Weise beseitigt man die höheren Differentialquotienten der übrigen abhängigen Variabeln.

Hierauf integrirt man das neue System, und eliminirt dann die neu eingeführten Variabeln.

Hat man z. B. zwei Gleichungen zwischen den abhängigen Variabeln x, y und der unabhängigen t, und sind die höchsten Differentialquotienten die in beiden Gleichungen vorkommen

$$\frac{d^m x}{dt^m} \text{ und } \frac{d^n y}{dt^n},$$

so erhält man auf dem angegebenen Wege

$$2 + (m-1) + (n-1) = m + n$$

Gleichungen erster Ordnung zwischen $(m + n + 1)$ Variabeln; hieraus erhält man $(m + n)$ Integralgleichungen, mit zusammen $(m + n)$ willkürlichen Constanten. Eliminirt man aus diesen Gleichungen die neu eingeführten Variabeln, deren Anzahl $(m + n - 2)$ ist, so ergeben sich zwei Gleichungen zwischen x, y, und t, die Lösungen des Problems.

Wie immer, wird man auch hier in jedem gegebenen Falle die allgemeine Methode zu vermeiden und kürzere Wege zu entdecken suchen. Man wird sich bemühen, durch geschickte Combination der Differentialgleichungen neue Gleichungen zu erhalten, deren Integrale bekannt sind.

14. Wir geben hierzu ein Beispiel aus der theoretischen Mechanik. Die Theorie der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes oder eines Systems von Massenpunkten (z. B. eines starren Körpers) ist nur ein Theil der Theorie simultaner Differentialgleichungen zweiter Ordnung; und umgekehrt hat die Theorie von Systemen gewisser Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch das Interesse, welches die theoretische Mechanik an ihnen nahm, wesentlich an Ausbau gewonnen. Wir ziehen es vor, ohne auf die Feststellung der mechanischen Begriffe und die Begründung der Differentialgleichungen an dieser Stelle einzugehen, letzteren ihre mechanische Einkleidung vollständig zu belassen; losgelöst von derselben würden die Untersuchungen und Resultate an Anschaulichkeit sehr verlieren und zu abstract erscheinen.

Wenn ein freibeweglicher Massenpunkt P, dessen Coordinaten x, y, z sind, von einem festen Centrum O, dem Nullpunkte des Coordinatensystems, angezogen oder abgestossen wird, und zwar so, dass die Anziehungskraft nur von der Entfernung $OP = r$ abhängt, und wenn dieselbe beim Abstande r die Grösse $f(r)$ hat, so gelten für die Coordinaten des Punktes die Differentialgleichungen

1. $$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(r) \cdot \frac{x}{r},$$

2. $$\frac{d^2 y}{dt^2} = f(r) \cdot \frac{y}{r},$$

3. $$\frac{d^2 z}{dt^2} = f(r) \cdot \frac{z}{r}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit dx, dy, dz, so erhält man, wenn man $dx : dt$, $dy : dt$, $dz : dt$, die Geschwindigkeitscomponenten des Punktes, mit x', y', z' bezeichnet,

$$\left(x'\frac{dx'}{dt} + y'\frac{dy'}{dt} + z'\frac{dz'}{dt}\right)dt = \frac{f(r)}{r}(xdx + ydy + zdz).$$

Die linke Seite ist das vollständige Differential von

$$\tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2);$$

die rechte Seite ist ebenfalls ein vollständiges Differential, denn man hat

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{also} \quad xdx + ydy + zdz = rdr.$$

Hieraus erhält man folgendes erste Integral des Systems

4. $$(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 2\int f(r)\,dr + h,$$

wobei h die willkürliche Constante ist.

Bezeichnen v die Geschwindigkeit des Punktes und φ, ψ, χ die Winkel, die sie augenblicklich mit den Achsen bildet, so ist

$$x' = v\cos\varphi, \quad y' = v\cos\psi, \quad z' = v\cos\chi, \quad \text{also} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = v^2;$$

daher kann man 4. ersetzen durch

5. $$v = 2\int f(r)\,dr + h.$$

Nach welchem Gesetze daher auch die Einwirkung des Centrums auf den bewegten Punkt P erfolgen, und in welcher Richtung und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit derselbe seinen Lauf beginnen mag, immer ist die Geschwindigkeit nur eine Function des Radius vector r; wenn sich der Punkt im Laufe der Bewegung wiederholt in demselben Abstande von O befindet, so hat er in allen diesen Momenten dieselbe Geschwindigkeit.

Man kann noch auf anderem Wege zu ersten Integralen des Systems gelangen. Multiplicirt man 1. mit y, 2. mit x und subtrahirt, so ergiebt sich

6 $$xy'' - yx'' = 0.$$

Da nun

$$\frac{d}{dt}(xy' - yx') = xy'' + x'y' - yx'' - y'x' = xy'' - yx'',$$

so folgt aus 6. durch Integration

7. $$xy' - yx' = c;$$

ebenso erhält man die Integrale

8. $$yz' - zy' = c_1,$$

9. $$zx' - xz' = c_2,$$

wobei c, c_1, c_2 willkürliche Constante sind.

Multiplicirt man die Gleichungen 7., 8., 9. der Reihe nach z, x, y und addirt, so erhält man links identisch Null; daher folgt die Gleichung

$$c_1x + c_2y + cz = 0.$$

Dies ergiebt: Die Bewegung erfolgt in einer Ebene, die durch das Anziehungscentrum geht.

Wählt man diese Ebene zur XY-Ebene, so bleiben für das Problem nur die beiden Differentialgleichungen

10. $$x'' = f(r)\cdot\frac{x}{r}, \quad y'' = f(r)\cdot\frac{y}{r},$$

wobei $$r^2 = x^2 + y^2,$$

und die beiden ersten Integrale

11. $$v^2 = 2\int f(r)\,dr + h,$$

12. $$xy' - yx' = c.$$

Die letzte Gleichung vereinfacht sich durch Einführung von Polarcoordinaten. Man hat

$$x = r\cos\varphi, \quad x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\varphi'$$
$$y = r\sin\varphi, \quad y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\varphi'.$$

Daher ist

$$v^2 = r'^2 + r^2\varphi'^2,$$
$$xy' - yx' = r^2\varphi'.$$

Ist df der verschwindend kleine Sector, den der Radius r in der Zeit dt beschreibt, so ist $2df = r^2 d\varphi$, daher folgt aus 13.

$$\frac{df}{dt} = \frac{c}{2}, \quad f = \frac{c}{2}t + C.$$

Die vom Radius vector des Punktes beschriebenen Flächen sind daher den hierbei verflossenen Zeiten proportional.

Setzt man zur Abkürzung

$$\int f(r)\,dr = U,$$

und führt auch in 11. Polarcoordinaten ein, so entsteht

13. $$r'^2 + r^2\varphi'^2 = 2U + h.$$

Nach 12. hat man $r^2\varphi'^2 = c^2 : r^2$, daher folgt aus 12.

$$r'^2 = 2U + h - \frac{c^2}{r^2};$$

hieraus ergiebt sich

14. $$dt = \frac{dr}{\sqrt{2U + h - \left(\frac{c}{r}\right)^2}}, \quad t = \int \frac{dr}{\sqrt{2U + h - \left(\frac{c}{r}\right)^2}} + \gamma_1,$$

und aus 14. und 12,

15. $$d\varphi = \frac{c\,dt}{r^2} = \frac{c\,dr}{r^2\sqrt{2U + h - \left(\frac{c}{r}\right)^2}}, \quad \varphi = c\int \frac{dr}{r^2\sqrt{2U + h - \left(\frac{c}{r}\right)^2}} + \gamma_2.$$

Durch diese Gleichungen ist das Problem vollständig gelöst; insbesondere giebt die letzte Gleichung die Bahn, welche der Punkt beschreibt; die Constanten h, c, γ_1 und γ_2 bestimmen sich in jedem gegebenen Falle aus der Anfangslage, der Anfangsgeschwindigkeit und der Anfangsrichtung des Punktes, Setzt man nämlich fest, dass zur Zeit $t = 0$ die Grössen r, φ, v die Werthe r_0, φ_0, v_0 haben sollen, und dass zu dieser Zeit die Bahn mit dem Radius r_0 den Winkel α bilden soll, so erhält man durch Einführung der Werthe r_0 und v_0 in 11. und 14. die Constanten h und γ_1. Berechnet man aus der Bahngleichung 15. den Winkel σ der Bahntangente gegen den Radius vector, für welchen man hat

16. $$\tan g\,\sigma = r : \frac{dr}{d\varphi},$$

und setzt in 15. und 16. $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$, $\sigma = \alpha$, sowie den vorher gefundenen Werth von h, so erhält man c und γ_2 durch die Anfangszustände ausgedrückt.

§ 27. Partiale Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. Unter einer partialen Differentialgleichung versteht man eine Gleichung zwischen unabhängigen Variabeln, abhängigen Variabeln und den partialen Differentialquotienten der letzteren. Wir beschränken uns auf Gleichungen mit einer abhängigen Variabeln.

2. Wenn eine partiale Differentialgleichung nur partiale Differentialquotienten rücksichtlich einer unabhängigen Veränderlichen enthält, so bietet sie nichts wesentlich Neues; sie ist zu integriren, als ob die übrigen Variabeln Constante wären; die Integrationsconstanten sind durch willkürliche Functionen der übrigen unabhängigen Variabeln zu ersetzen.

Beispiele. A.

Die Gleichung $$3ax^2 + 2byz\frac{\partial z}{\partial x} = c$$
liefert $$ax^3 + byz^2 = cx + f(y),$$
wobei die Function f unbestimmt bleibt.

B. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3y\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\,z = 0.$$

Setzt man hier $z = e^{mx}$, so erhält man die Gleichung
$$m^2 - 3ym + 2y^2 = 0,$$
welche die Wurzeln $m_1 = y$ und $m_2 = 2y$ hat; das Integral ist daher
$$z = f(y)\cdot e^{yx} + g(y)\cdot e^{2yx};$$
es enthält zwei willkürliche Functionen f und g.

3. Ehe wir an die Integration partialer Gleichungen der ersten Ordnung herantreten, werfen wir einen Blick auf ihre Erzeugung. Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, eine Gleichung zwischen drei Variabeln, x, y, z, von denen wir x und y als unabhängige Variable ansehen.

Eine partiale Differentialgleichung I. O. entsteht durch Elimination zweier willkürlichen Constanten a, b aus einer Gleichung $f(x, y, z, a, b) = 0$ und ihren partialen Ableitungen.

Eliminirt man a und b aus den Gleichungen
$$f(x, y, z, a, b) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$
so erhält man in der That eine Gleichung, die ausser den Variabeln noch $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ enthält.

Enthält eine Gleichung $f = 0$ drei Constante, die durch eine Gleichung $g(a, b, c) = 0$ verbunden sind, so erhält man eine partiale Differentialgleichung, indem man a, b, c aus den Gleichungen
$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad g = 0$$
eliminirt.

Beispiele: A. Eine Ebene, die einer gegebenen Richtung α, β, γ parallel ist, hat die Gleichung
$$f \equiv Ax + By + Cz - 1 = 0,$$
wobei die Constanten A, B, C die Bedingung erfüllen
$$g \equiv A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0.$$

Um die zugehörige partiale Differentialgleichung zu erhalten, hat man A, B, C aus den Gleichungen zu eliminiren
$$\begin{aligned} Ax &+ By &+ Cz - 1 &= 0,\\ A\cos\alpha &+ B\cos\beta &+ C\cos\gamma &= 0,\\ A & &+ Cp &= 0,\\ & B &+ Cq &= 0, \end{aligned}$$
wenn zur Abkürzung
$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$
gesetzt wird.

Die Elimination ergiebt die Gleichung
$$\cos\alpha\cdot p + \cos\beta\cdot q - \cos\gamma = 0.$$

B. Eine Ebene, die einen gegebenen Punkt l, m, n enthält, hat die Gleichung
$$f \equiv Ax + By + Cz - 1 = 0,$$
wobei für die Constanten A, B, C die Gleichung besteht
$$g \equiv Al + Bm + Cn - 1 = 0.$$

Die Elimination erfolgt aus diesen beiden Gleichungen und aus

$$A + Cp = 0, \quad B + Cq = 0.$$

Da $f - g = A(x - l) + B(y - m) + C(z - n) = 0$,

so hat man, um die resultirende Gleichung zu gewinnen, nur in der Schlussgleichung des vorigen Beispiels $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ der Reihe nach durch $x - l$, $y - m$, $z - n$ zu ersetzen; man erhält

$$(x - l)p + (y - m)q - (z - n) = 0.$$

C. Für Ebenen, die eine Kugel berühren, deren Halbmesser e ist, und dessen Centrum die Coordinaten a, b, c hat, erhält man das System

$$Ax + By + Cz - 1 = 0, \quad A + Cp = 0, \quad B + Cq = 0;$$
$$Aa + Bb + Cc - 1 = e\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Aus den ersten drei Gleichungen folgt

$$C = 1 : (z - xp - yq), \quad A = -p : (z - xp - yq), \quad B = -q : (z - xp - yz).$$

Setzt man dies in die letzte ein, so entsteht

$$(x - a)p + (y - b)q - (z - c) = e\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

D. Die Gleichung einer Kugel

1. $$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

enthält vier Constante a, b, c, r. Liegt das Centrum auf einer gegebenen Geraden, so sind a, b, c durch zwei lineare Gleichungen verbunden

2. $$a = mc + n, \quad b = \mu c + \nu.$$

Durch Differentiation der Kugelgleichung folgt

3. $$x - a + (z - c)p = 0, \quad y - b + (z - c)q = 0.$$

Setzt man hier für a und b die Werthe aus 3. ein und vergleicht die resultirenden Werthe für c, so erhält man schliesslich

$$(\mu z - y + \nu)p - (mz - x + n)q + \mu(x - \nu) - m(y - \nu) = 0.$$

4. Eine partiale Differentialgleichung I. O. entsteht ferner, wenn man aus einer Gleichung $F[x, y, z, \varphi(\psi)] = 0$, — worin F und ψ bekannte Functionen sind und φ eine willkürliche Function von ψ bezeichnet, — sowie aus ihren partialen Ableitungen die willkürliche Function φ eliminirt.

Durch Differentiation erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)p = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)q = 0,$$

oder besser geordnet

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}p + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}p\right) = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}q + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z}q\right) = 0.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen $\partial F : \partial\varphi$, so erhält man

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)q + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)p + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

oder in Determinantenform

1. $$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist bemerkenswerth, dass diese Gleichung in Bezug auf p und q linear ist.

5. Die willkürliche Function kann auch in anderer Verbindung auftreten. Aus der Gleichung

$$\Phi(f, g) = 0,$$

worin f und g bekannte Functionen von x, y und z sind, während Φ eine willkürliche Function ist, folgt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}p\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}q\right) = 0.$$

Die Elimination von Φ ergiebt die partiale Differentialgleichung

$$2. \qquad \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man die gegebene Function g einer willkürlichen Function φ der gegebenen f gleich, so dass also $g = \varphi(f)$, so kommt man zu dem vorigen Falle zurück; denn aus $\Phi(f, g) = 0$ folgt, dass g eine willkürliche Function von f ist.

6. Partiale Differentialgleichung der Cylinderflächen. Sind α, β, γ die Richtungswinkel der Mantellinien, so ist die Gleichung des Cylinders von der Form (Differentialrechn. § 6, 2)

$$\Phi(x\cos\gamma - z\cos\alpha\,, \; y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0.$$

Setzt man in No. 5, 2.

$$f = x\cos\gamma - z\cos\alpha\,, \qquad g = y\cos\gamma - z\cos\beta\,,$$

so erhält man

$$\frac{1}{\cos\gamma}\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \cos\gamma & 0 & -\cos\alpha \\ 0 & \cos\gamma & -\cos\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha \cdot p + \cos\beta \cdot q - \cos\gamma = 0.$$

7. Partiale Differentialgleichung der Kegelflächen. Es seien l, m, n die Coordinaten der Kegelspitze, so ist die allgemeine Form der Kegelgleichung (Differentialrechnung § 6, 3)

$$\Phi\left(\frac{lz - nx}{z - n}, \; \frac{mz - ny}{z - n}\right) = 0.$$

Setzt man in 2.

$$f = \frac{lz - nx}{z - n}, \qquad g = \frac{mz - ny}{z - n},$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial z} = n\,\frac{x - l}{(z - n)^2}, \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = n\,\frac{y - m}{(z - n)^2}, \qquad \text{so entsteht}$$

$$\frac{(z - n)^3}{n^2}\cdot\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ -\frac{n}{z - n} & 0 & \frac{n(x - l)}{(z - n)^2} \\ 0 & -\frac{n}{z - n} & \frac{n(y - m)}{(z - n)^2} \end{vmatrix} = (x - l)p + (y - m)q - (z - n) = 0.$$

8. Partiale Differentialgleichung der Rotationsflächen. Wir nehmen der Einfachheit wegen an, dass die Achse der Fläche durch den Nullpunkt des Coordinatensystems geht. Construirt man um den Nullpunkt Kugeln, und normal zur Rotationsachse Ebenen, und setzt irgend eine Abhängigkeit zwischen dem Kugelradius a und dem Abstande b einer Normalebene zur Achse vom Nullpunkte voraus, so erfüllen die gemeinsamen Punkte der Kugeln und der zugehörigen

Ebenen eine Rotationsfläche. Die Gleichung einer Kugel um den Nullpunkt ist $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, und die Gleichung einer Normalebene zur Achse $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = b$, wenn α, β, γ die Richtungswinkel der Achse sind; daher ist die allgemeinste Form der Gleichung einer Rotationsfläche

$$\Phi(x^2 + y^2 + z^2, \quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = 0.$$

Wir haben daher in No. 5, 2.

$$f = x^2 + y^2 + z^2, \qquad g = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

zu setzen und erhalten

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ x & y & z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

9. Wenn eine Gleichung $f(x, y, z, a, b) = 0$ zwei willkürliche Constante enthält, und wenn diese Gleichung im Verein mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q = 0$$

durch Elimination von a und b auf die Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

führt, so wird $f = 0$ als vollständiges Integral der partialen Differentialgleichung I. O. $F = 0$ bezeichnet.

Wir wollen nun zunächst sehen, ob ähnlich wie die singulären Integrale gewöhnlicher Differentialgleichungen so auch neue Lösungen der Gleichung $F = 0$ dadurch erhalten werden, dass man die Constanten a und b durch passend gewählte Functionen von x und y ersetzt.

Wir denken uns für diese Untersuchung das vollständige Integral auf z reducirt, also von der Form

1. $$z = f(x, y, a, b).$$

Sind a und b variabel, so erhält man durch Differentiation

2. $$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial x},$$
$$q = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial y}.$$

Sollen diese Gleichungen mit denen übereinstimmen, die aus 1. unter Voraussetzung constanter a und b hervorgehen, so müssen a und b den Bedingungen genügen

3. $$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} = 0.$$

Hieraus erhält man

4. $$\frac{\partial f}{\partial a} \cdot D = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial b} \cdot D = 0,$$

wobei

$$D = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x}.$$

Um den Gleichungen 3. zu genügen, hat man zu setzen: entweder

5. $$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y} = 0;$$

oder

6. $$D = 0,$$

wobei die Gleichungen 3. sich auf eine reduciren, die mit 6. zu combiniren ist; oder

7. $$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

Die Annahme 5. führt auf constante Werthe von a und b, also auf das vollständige Integral zurück.

Wenn die Bedingung $D = 0$ erfüllt ist, so ist b eine Function von a; setzen wir $b = \varphi(a)$, so ist

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \varphi'(a) \cdot \frac{\partial a}{\partial x}, \quad \frac{\partial b}{\partial y} = \varphi'(a) \frac{\partial a}{\partial y},$$

daher gehen beide Gleichungen 3. in die Gleichung über

8. $$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot \varphi'(a) = 0,$$

in welcher b durch $\varphi(a)$ zu ersetzen ist.

Die Elimination von a aus den Gleichungen 8. und 1. kann nur in seltenen Fällen ohne eine bestimmte Annahme über die willkürliche Function φ erfolgen.

Das Integral der partialen Differentialgleichung, welches aus dem Verein der Gleichungen 1., $b = \varphi(a)$ und 8. besteht, und welches durch das Auftreten einer willkürlichen Function φ charakterisirt ist, heisst das allgemeine Integral der Gleichung.

Durch Elimination von a und b aus den Gleichungen 1. und 7. erhält man ein singuläres Integral der Differentialgleichung

Beispiel. Nach No. 6 hat die Gleichung

9. $$\cos\alpha \cdot p + \cos\beta \cdot q - \cos\gamma = 0$$

das vollständige Integral

10. $$Ax + By + Cz - 1 = 0,$$

wobei die Constanten A, B, C durch die Gleichung verbunden sind

11. $$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0.$$

Durch Elimination von C aus 10. und 11. entsteht

12. $$(Ax + By)\cos\gamma - (A\cos\alpha + B\cos\beta)z - \cos\gamma = 0,$$

also ist
$$z = \frac{Ax + By - 1}{A\cos\alpha + B\cos\beta} \cdot \cos\gamma.$$

Setzt man hier

$$\frac{1}{A\cos\alpha + B\cos\beta} = a, \quad \frac{A}{A\cos\alpha + B\cos\beta} = b,$$

so erhält man

$$\frac{B}{A\cos\alpha + B\cos\beta} = \frac{1 - b\cos\alpha}{\cos\beta},$$

und daher

$$\frac{1}{\cos\gamma} \cdot z = -a + bx + \frac{1 - b\cos\alpha}{\cos\beta} y.$$

Für die Gleichung 8. erhält man hier

$$-1 + \frac{x\cos\beta - y\cos\alpha}{\cos\beta} \varphi'(a) = 0.$$

Denkt man sich für φ irgend eine Function gesetzt und die Gleichung nach a aufgelöst, so erhält man jedenfalls a in der Form

$$a = \psi(x\cos\beta - y\cos\alpha),$$

wo nun ψ ebenso willkürlich ist wie φ; setzt man dies in $\varphi(a)$ ein, so erfolgt für b

$$b = \chi(x\cos\beta - y\cos\alpha),$$

wobei aber χ durch ψ bestimmt ist. Beide Werthe für a und b setzen wir in das vollständige Integral und erhalten

$$\frac{z}{\cos\gamma} = -\psi + \frac{1}{\cos\beta}(x\cos\beta - y\cos\alpha)\gamma + \frac{y}{\cos\beta}.$$

Die beiden ersten Glieder der rechten Seite sind zusammen eine willkürliche Function von $(x\cos\beta - y\cos\alpha)$; daher hat man

13. $$z\cos\beta - y\cos\gamma = f(x\cos\beta - y\cos\alpha),$$

wobei f eine willkürliche Function bezeichnet. Aus

$$x\cos\beta - y\cos\alpha = \frac{1}{\cos\gamma}[(x\cos\gamma - z\cos\alpha)\cos\beta + (z\cos\beta - y\cos\gamma)\cos\alpha]$$

erkennt man, dass man 13 ersetzen kann durch

$$\Phi(x\cos\gamma - z\cos\alpha,\ z\cos\beta - y\cos\gamma) = 0,$$

wobei Φ eine willkürliche Function ist, in Uebereinstimmung mit No. 6.

Da in unserm Beispiele

$$\frac{\partial z}{\partial a} = -\cos\gamma,$$

so kann es kein singuläres Integral geben.

10. Wenn eine Gleichung $z = g(x, y)$ die partiale Differentialgleichung I. O. $F(x, y, z, p, q) = 0$ befriedigt, und nicht durch besondere Werthe für a und b aus einem vollständigen Integrale $z = f(x, y, a, b)$ hervorgeht, so gehört diese Gleichung zu dem vollständigen Integrale entweder als allgemeines oder als singuläres Integral.

Denn wenn man $f(x, y, a, b)$ nicht durch Specialisirung der Constanten a und b in $g(x, y)$ verwandeln kann, so kann man doch jedenfalls für a und b solche Functionen von x und y setzen, dass $f(x, y, a, b) = g(x, y)$ wird.

Aus den Untersuchungen in No. 5. folgt hieraus sofort, dass $g(x, y)$ entweder ein zu f gehöriges allgemeines oder singuläres Integral ist.

Ein vollständiges Integral, das dazu gehörige allgemeine sowie das zugehörige singuläre Integral bilden also ein vollständiges Lösungs-System einer partialen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln.

11. Wir wenden uns nun zur Integration der linearen partialen Differentialgleichungen I. O.; und zwar zunächst zu Gleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln. Unter einer linearen Gleichung versteht man eine solche, in welcher die partialen Differentialquotienten der abhängigen Variabeln nur in der ersten Potenz vorkommen; bei drei Variabeln also eine Gleichung von der Form

1. $$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R,$$

wobei P, Q, R constant oder Functionen von x, y, z sind.

Die Integration dieser Gleichung hängt auf's Engste mit der Integration de Systems zusammen

2. $$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Hat man nämlich ein Integral $f(x, y, z) = a$ dieses Systems gefunden, wobei a eine willkürliche Constante bezeichnet, so ist für alle Werthe, die dieser Gleichung genügen

3. $$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0.$$

Da nun f ein Integral von 2. ist, so erfüllen die x, y, z, dx, dy, dz, die der Gleichung 3. genügen, auch die Gleichungen 2., man kann daher in 3. die Differentiale dx, dy, dz der Reihe nach durch die Functionen P, Q, R, ersetzen, denen sie nach 2. proportional sind; folglich hat man

4. $$P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Da nun

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial z},$$

so kann man 4. ersetzen durch

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} - R = 0.$$

Hieraus folgt, dass $f(x, y, z) = a$ ein particuläres Integral von 1 ist.

Dieselbe Schlussweise kann auch rückwärts durchlaufen werden: Ist $f(x, y, z) = a$ ein Integral der Gleichung $Pp + Qq - R = 0$, so ist es auch ein Integral des Systems 2.

Sind $f(x, y, z) = a$ und $g(x, y, z) = b$ zwei Integrale des Systems 2., so ist das allgemeine Integral der Gleichung 1.

$$\Phi(f, g) = 0,$$

wobei Φ eine willkürliche Function bezeichnet.

Um dies zu beweisen, haben wir zu zeigen, dass Φ der Differentialgleichung genügt

5. $$P\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q\frac{\partial \Phi}{\partial y} + R\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

die an die Stelle von 1. tritt, wenn z durch die Gleichung $\Phi = 0$ als unentwickelte Function von y und x bestimmt ist. Nun ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial g}\cdot\frac{\partial g}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial g}\cdot\frac{\partial g}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial g}\cdot\frac{\partial g}{\partial z},$$

folglich hat man

$$P\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q\frac{\partial \Phi}{\partial y} + R\frac{\partial \Phi}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f}\left(P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial g}\left(P\frac{\partial g}{\partial x} + Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\frac{\partial g}{\partial z}\right).$$

Da nun nach der Voraussetzung die beiden rechts stehenden eingeklammerten Polynome verschwinden, so folgt, dass in der That die Gleichung 5. erfüllt ist.

Wir haben somit folgende Regel: Um die Gleichung zu integriren

$$Pp + Qq = R,$$

bilde man das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R};$$

sind $f(x, y, z) = a$ und $g(x, y, z) = b$ zwei Integrale dieses Systems, so ist

$$\Phi(f, g) = 0$$

das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung.

12. Sind $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$, und $h(x, y, z) = c$ particuläre Integrale von

$$Pp + Qq = R,$$

so ist h eine Function von f und g.

Nach der Voraussetzung gelten die Gleichungen

$$P\frac{\partial h}{\partial x} + Q\frac{\partial h}{\partial y} + R\frac{\partial h}{\partial z} = 0,$$

$$P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$P\frac{\partial g}{\partial x} + Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\frac{\partial g}{\partial z} = 0;$$

daher verschwindet die Determinante derselben

$$1. \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

folglich ist h eine Function von f und g (Differentialrechnung § 4, No. 5).

Die Gleichung $h(f, g) = c$ fällt unter $\Phi(f, g) = 0$; es ist also jede Lösung der partialen linearen Differentialgleichung in der Form $\Phi(f, g) = 0$ enthalten.

13. Wir geben hierzu einige Beispiele.

A. Um die Gleichung zu integriren

$$\cos\alpha \cdot p + \cos\beta \cdot q - \cos\gamma = 0$$

bilde man das System

$$dx : dy : dz = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma .$$

Zwei Integralgleichungen desselben sind

$$x\cos\gamma - z\cos\alpha = c_1, \quad y\cos\gamma - z\cos\beta = c_2;$$

daher ist das allgemeine Integral der partialen Gleichung

$$\Phi(x\cos\gamma - z\cos\alpha \quad y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0 .$$

B. $$(x - l)p + (y - m)q - (z - n) = 0 .$$

Hierzu gehört das System

$$dx : dy : dz = (x - l) : (y - m) : (z - n),$$

mit den Integralgleichungen

$$\frac{x - l}{z - n} = c_1, \quad \frac{y - m}{z - n} = c_2 .$$

Das allgemeine Integral ist daher

$$\Psi\left(\frac{x - l}{z - n}, \frac{y - m}{z - n}\right) = 0 .$$

Aus den Identitäten

$$n\frac{x - l}{z - n} - l = \frac{nx - lz}{z - n}, \quad n\frac{y - m}{z - n} - m = \frac{ny - mz}{z - n}$$

folgt, dass man dafür auch schreiben kann

$$\Phi\left(\frac{nx - lz}{z - n}, \frac{ny - mz}{z - n}\right) = 0,$$

in Uebereinstimmung mit No. 7.

C. Integration von

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ x & y & z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0 .$$

Das Hülfssystem ist hier

$$\frac{dx}{y\cos\gamma - z\cos\beta} = \frac{dy}{z\cos\alpha - x\cos\gamma} = \frac{dz}{x\cos\beta - y\cos\alpha} .$$

Bezeichnet man den gemeinsamen Werth dieser drei Verhältnisse mit dt, so erhält man

$$dx = (y\cos\gamma - z\cos\beta)\,dt\,,$$
$$dy = (z\cos\alpha - x\cos\gamma)\,dt\,,$$
$$dz = (x\cos\beta - y\cos\alpha)\,dt\,.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen zunächst nacheinander mit x, y, z, dann mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, und addirt, so erhält man

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0\,, \quad \cos\alpha \cdot dx + \cos\beta \cdot dy + \cos\gamma \cdot dz = 0;$$

hieraus folgen die beiden Integrale des Systems

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1\,, \quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = c_2\,.$$

Das allgemeine Integral der partialen Differentialgleichung ist daher

$$\Phi(x^2 + y^2 + z^2\,, \quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = 0.$$

14. Um die lineare partiale Differentialgleichung mit mehr als drei Variabeln zu integriren

$$1. \qquad X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial x}{\partial x_n} = X\,,$$

bilde man das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$2. \qquad dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n\,.$$

Sind die Integralgleichungen dieses Systems

$$3. \qquad \begin{aligned} f_1(x, x_1, \ldots, x_n) &= c_1\,, \\ f_2(x, x_1, \ldots, x_n) &= c_2\,, \\ \ldots & \ldots \\ f_n(x, x_1, \ldots, x_n) &= c_n\,, \end{aligned}$$

so ist das allgemeine Integral der partialen Differentialgleichung

$$4. \qquad \Phi(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n) = 0\,.$$

Beweis. Durch Differentiation gewinnt man aus 3.

$$5. \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_i}{\partial x} dx = 0\,,$$
$$i = 1, 2, \ldots n\,.$$

Setzt man für $dx_1, \ldots, dx_n$, dx nach 2. die proportionalen Werthe $X_1 \ldots X_n$ X ein, so entsteht

$$6. \qquad X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} + X \frac{\partial f_i}{\partial x} = 0\,.$$

Um nun zu sehen, ob 4. die Gleichung 1. integrirt, ziehen wir aus 4. die Werthe

$$\frac{\partial x}{\partial x_k} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} : \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,,$$

und setzen sie in 1. ein; dadurch entsteht

$$7. \qquad X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + X \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0;$$

soll 1. durch 4. integrirt werden, so muss diese Gleichung identisch sein. Nun ist nach 4.

$$8. \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial f_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_k}\,.$$

Setzt man dies in 7. ein, so entsteht

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial \Phi}{\partial f_i} \left(X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} + X \frac{\partial f_i}{\partial x} \right) = 0\,.$$

Da nun links nach 4. der Klammerinhalt für jeden Werth $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ verschwindet, so ist diese Gleichung identisch erfüllt, w. z. b. w.

Wir wollen die Ausführung eines Beispiels unterlassen; es genüge, darauf hinzuweisen, dass jedes integrable System

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n$$

sogleich eine integrable lineare partiale Differentialgleichung liefert.

---

15. Integration nicht linearer partialer Differentialgleichungen I. O. Die Differentialgleichung sei

1. $$F(x, y, z, p, q) = 0\,.$$

Die Grösse p ist eine Function von x und y; sie kann indess auch als Function von x, y und z aufgefasst werden, wobei z als unbekannte Function von x und y zu betrachten ist; q wird durch 1. als Function von x, y, z, p definirt.

Sucht man nun unter diesen Voraussetzungen p und q als Functionen von x, y, z, so zu bestimmen, dass

2. $$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right),$$

wobei durch die Klammern angedeutet wird, dass die Differentialquotienten unter der Voraussetzung gebildet sind, dass z durch x und y ersetzt ist, so wird der Ausdruck

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

integrabel und liefert durch Integration z als Function von x und y. Nun ist

3. $$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} + q\,\frac{\partial p}{\partial z},$$
$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}\,p + \frac{\partial q}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z}\,p\right).$$

Setzt man dies in 2. ein, so entsteht

4. $$-\frac{\partial q}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \left(q - \frac{\partial q}{\partial p}\,p\right)\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}\,p\,.$$

Ersetzt man hierin q aus 1. durch p, so enthält diese Gleichung nur x, y, z, p, ist also eine lineare partiale Differentialgleichung für p als abhängige und x, y, z als unabhängige Variable. Gelingt es, ein particuläres Integral herzustellen, durch welches p von x, y, z abhängig gemacht wird und das eine willkürliche Constante a enthält, so hat man dies in 1. einzusetzen, und erhält dann aus 1. q durch x, y, z, a ausgedrückt. Beide Werthe hat man in $z = p\,dx + q\,dy$ einzusetzen und dann zu integriren. Das Integral enthält ausser a noch eine willkürliche Constante, ist also ein vollständiges Integral; in bekannter Weise kann man dann das zugehörige allgemeine und das singuläre Integral herstellen.

16. Beispiele. A. Aus der Gleichung

$$pq - z = 0$$

folgt

$$q = \frac{z}{p},$$

daher ist

$$-\frac{\partial q}{\partial p} = \frac{z}{p^2}, \quad q - \frac{\partial q}{\partial p}\,p = \frac{2z}{p}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}\,p = 1\,.$$

Die partiale Differentialgleichung für p ergiebt sich zu

$$\frac{z}{p^2}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2z}{p}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} = 1\,.$$

Dieselbe hat die particuläre Lösung

$$p = y + a\,.$$

Substituirt man dies in die Differentialgleichung, so folgt

$$q = \frac{z}{y + a}.$$

Wenn man diese Werthe für p und q in $z = pdx + qdy$ einsetzt, so erhält man

$$dz = (y + a)\,dx + \frac{z}{y + a}\,dy.$$

Hiernach ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + a,$$

$$z = (y + a)\,x + f(y),$$

wobei $f(y)$ eine unbestimmte Function von y bezeichnet. Führt man diesen Werth von z ein in

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y + a},$$

so ergiebt sich

$$f'(y) = \frac{f(y)}{y + a},$$

woraus durch Integration hervorgeht

$$f(y) = b(y + a).$$

Das vollständige Integral der partialen Differentialgleichung ist daher

$$z = (y + a)(x + b);$$

das allgemeine Integral geht durch Elimination von a aus den Gleichungen hervor

$$z = (y + a)(x + \varphi[a])$$

$$x + \varphi(a) + (y + a)\,\varphi'(a) = 0,$$

worin φ eine willkürliche Function bezeichnet.

B. $$px + qy + pq - z = 0.$$

Hieraus folgt

$$q = \frac{z - px}{y + p}, \quad \frac{\partial q}{\partial p} = -\frac{xy + z}{(y + p)^2},$$

$$q - \frac{\partial q}{\partial p}\,p = \frac{1}{(y + p)^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}\,dp = 0.$$

Die partiale Differentialgleichung für p ist

$$\frac{xy + z}{(y + p)^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{(y + p)^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Derselben wird durch die Annahme $p = a$ genügt; hieraus folgt

$$q = (z - ax) : (y + a),$$

und aus beiden Werthen

$$dz = a\,dx + \frac{z - ax}{y + a}\,dy.$$

Nach dieser Gleichung ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a, \quad \text{also} \quad z = ax + f(y),$$

wobei f eine noch unbestimmte Function bezeichnet. Aus diesem Werthe von z ergiebt sich

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(y);$$

und daher zur Bestimmung von f

$$f'(y) = \frac{(ax + f) - ax}{y + a} = \frac{f}{y + a}.$$

also $$f = b\,(y + a).$$

Daher ergiebt sich das vollständige Integral

$$z = ax + by + ab.$$

Das allgemeine Integral besteht aus den beiden Gleichungen

$$z = ax + (y + a)\varphi(a),$$
$$x + \varphi(a) + (y + a)\varphi'(a) = 0,$$

worin φ willkürlich ist.

Für ein singuläres Integral hat man die Gleichungen

$$x + b = 0, \quad y + a = 0;$$

werden die hieraus folgenden Werthe von a und b in das vollständige Integral eingesetzt, so erhält man das singuläre Integral

$$z = -xy,$$

das, wie man sich leicht überzeugt, der gegebenen Differentialgleichung genügt.

Das singuläre Integral stellt ein hyperbolisches Paraboloid dar; das vollständige für bestimmte Werthe von a und b eine Tangentenebene dieser Fläche; das allgemeine irgend eine abwickelbare Fläche, die der singulären Lösung umgeschrieben ist, deren Tangentenebenen also eine Auswahl aus den dem vollständigen Integrale entspringenden bilden.

17. Die Integration einer nicht linearen Differentialgleichung mit drei Variabeln kann auch mit der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung von der Form

1. $$Pdx + Qdy + Rdz + Sdp = 0$$

in Zusammenhang gebracht werden.

Der gegebenen Differentialgleichung entnimmt man den Werth von q und substituirt ihn in

2. $$dz = pdx + qdy.$$

Die Gleichung 2. geht hierdurch in eine Gleichung von der Form 1. über. Man integrirt dieselbe durch zwei Gleichungen, die eine willkürliche Function enthalten und eliminirt dann p aus diesen Gleichungen.

Beispiel. Die Differentialgleichung

$$pq - z = 0$$

giebt

$$p^2 dx + zdy - pdz = 0.$$

Daher ist, wenn man in § 26, No. 8 t durch p ersetzt,

$$\begin{array}{llll} P = p^2, & Q = z, & R = p, & S = 0, \\ P_x = 0, & Q_x = 0, & R_x = 0, & S_x = 0, \\ P_y = 0, & Q_y = 0, & R_y = 0, & S_y = 0, \\ P_z = 0, & Q_z = 1, & R_z = 0, & S_z = 0, \\ P_p = 2p, & Q_p = 0, & R_p = -1, & S_p = 0. \end{array}$$

Hieraus ergiebt sich

$$\mathfrak{P} = -z, \quad \mathfrak{Q} = p^2, \quad \mathfrak{R} = 2pz, \quad \mathfrak{S} = p^2.$$

Das System simultaner Gleichungen § 26, No. 8, 2 ist daher

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{p^2} = \frac{dz}{2pz} = \frac{dp}{p^2}.$$

Die Integralgleichungen hierzu sind

$$z = ap^2, \quad x = ap + b, \quad y = p + c.$$

Aus denselben folgt

$$\alpha = 0, \quad \beta = p^2, \quad \gamma = ap^2.$$

Unterdrückt man den Faktor p^2, so erhält man daher für a, b, c die Differentialgleichung (§ 26, No. 9, 10)

$$db + adc = 0.$$

Diese wird durch das System integrirt

$$b + ac = \varphi(a),$$
$$c = \varphi'(a).$$

Ersetzt man hierin a, b, c durch die Variabeln, so erhält man

$$x + zy - \frac{2z}{p} = \varphi\left(\frac{z}{p^2}\right),$$

$$y - p = \varphi'\left(\frac{z}{p^2}\right).$$

Durch Elimination von p aus beiden Gleichungen ergiebt sich das allgemeine Integral der gegebenen partialen Differentialgleichung.

Denselben Gedankengang kann man befolgen, um eine nichtlineare partiale Differentialgleichung mit mehr als drei Variabeln zu integriren. Man wird von einer partialen Differentialgleichung mit n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ und der abhängigen x auf eine Differentialgleichung von der Form geführt

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 + \ldots + p_n dx_n,$$

wobei $p_i = \partial x : \partial x_i$, und für einen dieser Differentialquotienten sein aus der Differentialgleichung folgender Werth zu substituiren ist*).

§ 28. Partiale Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

1. In der Differentialgleichung

$$1. \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

substituiren wir

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

Hierdurch geht dieselbe über in

$$2. \quad \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Da nun

$$3. \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x},$$

so erhält man anstatt 2.

$$4. \quad \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Hieraus folgt (Differentialrechnung § 4, No. 5), dass q eine Function von p ist; und umgekehrt, sobald dies der Fall ist, ist 3. und daher auch 1. erfüllt. Wir setzen daher

$$5. \quad q = \varphi(p),$$

wobei φ eine willkürliche Function bezeichnet. Durch Differentiation nach x erhält man hieraus

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \varphi'(p) \frac{\partial p}{\partial x},$$

folglich nach 3.

$$6. \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \varphi'(p) \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Dies ist eine lineare partiale Differentialgleichung I. O. für p. Der Vergleich mit § 27, No. 11. ergiebt

$$P = \varphi'(p), \quad Q = -1, \quad R = 0.$$

Folglich ist das System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu integriren

$$dx + \varphi'(p) dy = 0, \quad dp = 0.$$

---

*) Eine Zusammenstellung der Integrationsmethoden für partiale Differentialgleichungen I. O. mit ausführlichen Literaturnachweisen enthält MANSION, Théorie des équations aux derivées partielles du premier ordre. Paris, 1875.

Aus der letzten Gleichung folgt das Integral

$$p = a,$$

und mit Hülfe dessen aus der ersten

$$x + \varphi'(p)y = b,$$

wobei a und b willkürliche Constante bezeichnen. Das Integral von 6. ist daher

$$7. \qquad x + \varphi'(p)\cdot y = \psi(p),$$

wobei ψ eine willkürliche Function ist. Ersetzt man in dieser Gleichung

$$\varphi'(p)dp = dq,$$

so erhält man

$$8. \qquad xdp + ydq = \psi(p)dp.$$

Da nun

$$d(xp + yq - z) = xdp + pdx + ydq + qdy - \frac{\partial z}{\partial x}dx - \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

$$= xdp + ydq,$$

so folgt aus 8. durch Integration

$$9. \qquad xp + yq - z = \int\psi(p)dp.$$

Setzt man

$$\int\psi(p)dp = \chi(p),$$

wobei χ ebenso willkürlich ist, wie ψ, so erhält man das Integral der vorgelegten Differentialgleichung durch Elimination von p und q aus den drei Gleichungen

$$10. \qquad \begin{aligned} q &= \varphi(p), \\ xp + yq - z &= \chi(p), \\ x + \varphi'(p)y &= \chi'(p). \end{aligned}$$

Das Integral enthält zwei willkürliche Functionen.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass das Integral eine abwickelbare Fläche darstellt. Denn aus der Gleichung der Tangentenebene

$$T = \frac{\partial z}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0$$

folgen die Coordinaten von T

$$u = \frac{p}{xp + yq - z}, \quad v = \frac{q}{xp + yq - z},$$

$$w = \frac{1}{xp + yq - z}.$$

Daher ist

$$p = \frac{u}{w}, \quad q = \frac{v}{w}, \quad xp + yq - z = \frac{1}{w}.$$

Setzt man dies in die ersten beiden Gleichungen 10., so erhält man für die Ebenencoordinaten der eine Integralfläche berührenden Tangentenebenen die beiden von einander unabhängigen Gleichungen

$$11. \qquad \frac{v}{w} = \varphi\left(\frac{u}{w}\right),$$

$$12. \qquad \frac{1}{u} = \chi\left(\frac{u}{w}\right).$$

Die Tangentenebenen der den willkürlichen Functionen φ und χ zugehörigen Integralfläche berühren daher die beiden Flächen 11. und 12.; hierdurch ist die Integralfläche als abwickelbare Fläche charakterisirt (Analyt. Geom. des Raumes, § 10, No. 1 u. f.).

2. Um u als Function der unabhängigen Variabeln x und t so zu bestimmen, dass

1. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ^{*)},$$

setzen wir

2. $$u = F(w)$$

wobei F eine willkürliche, w eine noch zu bestimmende Function von x und t bezeichnet. Substituirt man 2. in 1. so erhält man

$$F''(w)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + F'(w)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 F''(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + a^2 F'(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Dieser Gleichung wird unabhängig von der willkürlichen Function F genügt, wenn man w so bestimmt, dass

3. $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

4. $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

5. $$\frac{\partial w}{\partial t} = \pm a \frac{\partial w}{\partial x},$$

Aus 3. folgt

$$w = \mu t + \nu,$$

wobei μ und ν die Variable x enthalten können.

Setzt man dies in 4. ein, so erhält man

$$\mu'' t + \nu'' = 0,$$

woraus folgt

$$\mu'' = \nu'' = 0;$$

also ist

$$\mu = \alpha x + \beta, \quad \nu = \gamma x + \delta,$$

wobei α, β, γ, δ Constante bezeichnen. Hiernach ergiebt sich

$$w = \alpha x t + \beta t + \gamma x + \delta.$$

Substituirt man dies in 5., so erhält man

$$\alpha x + \beta = \pm a(\alpha t + \gamma).$$

Da diese Gleichung unabhängig von x und t erfüllt sein soll, so folgt

$$\alpha = 0, \quad \beta = \pm a\gamma.$$

Man erhält daher

$$w = \beta(x \pm at) + \delta.$$

Man kann wegen der Unbestimmtheit der Function F den Faktor β und das Glied δ in w unterdrücken. Bedenkt man ferner, dass, wenn

$$u = u_0 \text{ und } u = u_1$$

particuläre Lösungen von 1. sind, alsdann auch 1. durch

$$u = u_0 + u_1$$

genügt wird, so erkennt man, dass das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung durch die Gleichung dargestellt wird

$$u = F(x + at) + G(x - at).$$

Man kann die willkürlichen Functionen F und G immer so bestimmen, dass für $t = 0$ die Functionen u und $\partial u : \partial t$ sich in gegebene Functionen von x verwandeln.**)

Verlangt man, dass

---

*) In der mathematischen Physik wird gezeigt, dass dies die Differentialgleichung ist, welche die Gestalt einer schwingenden elastischen Linie bestimmt, wobei x die Abscisse, u die Ordinate eines Punkts der Linie und t die Zeit bezeichnet.

**) d. i. so, dass für den Anfang der Bewegung die Form der gespannten Linie sowie die Anfangsgeschwindigkeiten aller ihrer Punkte gegebene Werthe haben.

$$u = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F(x), \quad \text{für } t = 0.$$

so kann man zunächst u_0 so bestimmen, dass es der ersteren, und u_1 so, dass es der anderen dieser beiden Bedingungen genügt, und dass

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = 0, \quad u_1 = 0, \quad \text{für } t = 0.$$

Man sieht sofort, dass man für u_0 zu nehmen hat

$$u_0 = \tfrac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)].$$

Denn es ist

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \tfrac{1}{2} a [f'(x + at) - f'(x - at)],$$

für $t = 0$ hat man daher

$$u_0 = f(x), \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0.$$

Ebenso erkennt man sogleich, dass die für u_1 gegebenen Bedingungen von der Function erfüllt werden

$$u_1 = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(\lambda)\, d\lambda.$$

Durch Addition von u_0 und u_1 erhält man das allgemeine, den gegebenen Bedingungen genügende Integral

$$u = \tfrac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(\lambda)\, d\lambda,$$

4. Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

geht aus der soeben integrirten hervor, wenn man in der letzteren t, x, a der Reihe nach durch x, y, i ersetzt; das allgemeine Integral derselben ist daher

$$u = F(x + iy) + G(x - iy).$$

5. In die Differentialgleichung

$$1. \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ *)}$$

substituiren wir versuchsweise

$$u = e^{\alpha x + \beta t};$$

wir erhalten für α und β die Bedingung

$$\beta = a^2 \alpha^2.$$

Daher hat 1. das particuläre Integral

$$u = e^{\alpha x + a^2 \alpha^2 t}.$$

Ersetzen wir hierin α durch $\pm i\alpha$, so entstehen die beiden Lösungen

$$e^{-a^2\alpha^2 t + i\cdot\alpha x}, \quad e^{-a^2\alpha^2 t - i\cdot\alpha x}.$$

Man erhält hieraus neue Lösungen, wenn man diese Grössen mit beliebigen Faktoren multiplicirt und addirt. Nimmt man die Faktoren $\frac{1}{2} e^{-i\cdot\alpha\lambda}$ und $\frac{1}{2} e^{i\cdot\alpha\lambda}$, so erhält man

$$e^{-a^2\alpha^2 t} \cos\alpha(x - \lambda).$$

Ertheilt man hierin α und λ der Reihe nach alle möglichen Werthe, multi-

*) Von dieser Gleichung hängt die Temperatur u der Punkte eines Körpers ab, wenn vorausgesetzt wird, dass dieselbe sich nur parallel der X-Achse ändert; t ist die Zeit.

plicirt jedes so entstehende particuläre Integral mit einer von x und t unabhängigen Grösse μ und addirt alle diese doppelt unendlich vielen Produkte, so ist diese Summe ein Integral der vorgelegten Differentialgleichung. Um eine unendlich grosse Summe zu vermeiden, nehmen wir μ unendlich klein, und setzen

$$\mu = A\psi(\lambda)\, d\alpha\, d\lambda .$$

Alsdann geht die Summe in ein Doppelintegral über, und man erhält

2. $$u = A\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(x-\lambda)\psi(\lambda)\, d\alpha\, d\lambda .$$

Für die untere Grenze der Integration nach α ist 0 und nicht $-\infty$ gewählt worden, weil die zu integrirende Function eine gerade Function für α ist; A bezeichnet eine willkürliche Constante.

5. Man kann die willkürliche Function $\psi(\lambda)$ so bestimmen, dass u für $t = 0$ sich in eine gegebene Function verwandelt. Nach § 11 No. 15, 4 ist

1. $$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty F(\lambda)\cos\alpha(x-\lambda)\, d\alpha\, d\lambda .$$

Setzt man in No. 4, 2 $t = 0$, $u = F(x)$ so erhält man

$$F(x) = A\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \cos\alpha(x-\lambda)\psi(\lambda)\, d\alpha\, d\lambda .$$

Dies wird mit 1. identisch, wenn

$$A = \frac{1}{\pi}, \quad \psi(\lambda) = F(\lambda).$$

Die Function u, welche der Differentialgleichung genügt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

und die sich für $t = 0$ auf die Function reducirt

$$u = F(x),$$

ist daher

$$u = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(x-\lambda)\cdot F(\lambda)\cdot d\alpha\, d\lambda \text{*)} .$$

*) Weiteres findet man in RIEMANN's Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen, hrsg. von HATTENDORF, Braunschweig 1869.

Ausgleichungsrechnung

bearbeitet von
Dr. Richard Heger,
Gymnasiallehrer u. a. o. Hon.-Professor am Kgl. Polytechnikum zu Dresden.

§ 1. Einleitung.

1. Zu zwei gegebenen realen Zahlen a und b kann man die Zahl μ suchen, die a und b möglichst nahe liegt. Als Lösung dieser Aufgabe betrachten wir das arithmetische Mittel von a und b

1. $$\mu = \tfrac{1}{2}(a + b),$$

weil dasselbe um Differenzen von gleichem absoluten Werthe von a und b abweicht. Ebenso wird das arithmetische Mittel μ von n gegebenen Zahlen a_1, $a_2 \ldots a_n$ allgemein als die Zahl betrachtet, die den Zahlen $a_1, a_2 \ldots a_n$ möglichst nahe liegt, denn bei der Gleichung

2. $$\mu = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

sind die gegebenen Zahlen gleichmässig betheiligt und für den Fall $n = 2$ kommt man auf 1. zurück.

Sollen die gegebenen Zahlen einen verschieden grossen Einfluss auf die Zahl μ haben, so kann man denselben derart abschätzen, dass man sich in den Zahlpunkten $a_1, a_2, a_3 \ldots$ der Reihe nach $p_1, p_2, p_3 \ldots$ Zahlpunkte von gleichem Einflusse vereinigt denkt; alsdann erhält man

3. $$\mu = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots}.$$

Wirken an einem Hebel gleiche Gewichte in den Abständen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ vom Unterstützungspunkte, so können dieselben durch ein Gewicht von $n$facher Grösse ersetzt werden, das am Hebelarme 2. wirkt. Sind die Gewichte ungleich $p_1, p_2, p_3 \ldots$, so werden sie durch ein Gewicht ersetzt, das ihrer Summe gleich ist und den Hebelarm 3. hat

In Rücksicht auf diese mechanische Anwendung bezeichnet man die Faktoren $p_1, p_2, p_3 \ldots$ als die Gewichte der Zahlen $a_1, a_2, a_3 \ldots$

2. Um die Gerade

$$y = ax + b$$

zu bestimmen, die n willkürlich gegebenen Punkten $P_1, P_2, \ldots P_n$ möglichst nahe liegt, bilden wir die Differenzen λ_1, λ_2 der zu den Abscissen $x_1, x_2 \ldots$ der gegebenen Punkte gehörigen Ordinaten der Geraden und der Ordinaten $y_1, y_2 \ldots$

Die Forderung, dass die Gerade den Punkten möglichst nahe liegen soll, wird ihren mathematischen Ausdruck darin finden, dass eine bestimmte Function F

der Differenzen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$, die zur Abschätzung der Abweichung der Geraden von $P_1, P_2 \ldots$ dient, einen möglichst kleinen Werth erreichen soll. Wenn, wie wir zunächst voraussetzen, die Punkte alle dasselbe Gewicht haben, so wird für F eine symmetrische Function der λ zu wählen sein. Nehmen wir ferner den Grundsatz an, dass nur der absolute Werth, nicht das Vorzeichen der λ entscheidend sein soll, so darf F nur gerade Potenzen der λ enthalten.

Die Bedingungen für das Minimum von

$$F(\lambda_1, \lambda_2 \ldots), \quad \lambda_r = ax_r + b - y_r$$

sind

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0, \quad \text{d. i.}$$

$$1. \quad \sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} \cdot x_r = 0, \quad \sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} = 0.$$

Wir stellen nun noch die Forderung, dass die Coefficienten a und b durch die Gleichungen 1. linear bestimmt sein sollen.

Hieraus folgt, dass $\partial F : \partial \lambda_r$ eine lineare Function der λ_r sein muss.

Wir erhalten daher für F eine symmetrische quadratische Function der λ_r, die nur die Quadrate der λ_r enthält. Da ein gemeinsamer Faktor oder ein von den λ_r unabhängiges Glied ohne Einfluss auf den Eintritt eines Minimums sind, so ergiebt sich für F die Function

$$2. \quad F = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \ldots + \lambda_n^2.$$

Bezeichnen wir λ_r als die Abweichung der Geraden vom Punkte P_r, so liegt hiernach diejenige Gerade den Punkten $P_1, P_2 \ldots P_n$ möglichst nahe, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von den Punkten $P_1, P_2 \ldots$ ein Minimum wird.

Aus 2. folgt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} = \lambda_r = ax_r + b - y_r.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n = [pq],$$
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = [p],$$

so ergeben sich zur Bestimmung von a und b die Gleichungen

$$3. \quad [xx]\, a + [x]\, b = [xy],$$
$$4. \quad [x]\, a + nb = [y].$$

Aus 4. folgt, dass die durch 3. und 4. bestimmte Gerade den Punkt enthält, der die Coordinaten hat

$$x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots), \quad y = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \ldots);$$

dies ist der Schwerpunkt der gegebenen Punkte.

3. Zur Bestimmung der Ebene T, welche n gegebenen Punkten $P_1, P_2, \ldots P_n$ möglichst nahe liegt, genügen die zur Lösung der vorigen Aufgabe getroffenen Bestimmungen. Die Ebene T wird durch die Forderung definirt

$$1. \quad \begin{aligned} F &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = \textit{Minimum}, \\ \lambda_r &= ax_r + by_r + c - z_r, \end{aligned}$$

wenn T die Gleichung hat

$$z = ax + by + c.$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$\frac{1}{2}\sum\frac{\partial F}{\partial\lambda_r}\cdot\frac{\partial\lambda_r}{\partial a}=\sum\lambda_r x_r=0,$$
$$\frac{1}{2}\sum\frac{\partial F}{\partial\lambda_r}\cdot\frac{\partial\lambda_r}{\partial b}=\sum\lambda_r y_r=0,$$
$$\frac{1}{2}\sum\frac{\partial F}{\partial\lambda_r}\cdot\frac{\partial\lambda_r}{\partial c}=\sum\lambda_r=0.$$

Zur Bestimmung von a, b, c hat man daher das lineare System

$$[xx]\,a+[xy]\,b+[x]\,c=[xz],$$
$$[xy]\,a+[yy]\,b+[y]\,c=[yz],$$
$$[x]\,a+[y]\,b+nc=[z].$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass T den Schwerpunkt von $P_1, P_2, \ldots P_n$ enthält.

4. Die lineare Function

1. $$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_{m-1}x_{m-1}+a_m$$

kann für die gegebenen Werthsysteme

2. $$\begin{matrix} x_{11}, & x_{21}, & x_{31} & \ldots \\ x_{12}, & x_{22}, & x_{32} & \ldots \\ x_{13}, & x_{23}, & x_{33} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1n}, & x_{2n}, & x_{3n} & \ldots \end{matrix}$$
$$n>m$$

im Allgemeinen nicht die gegebenen Werthe

3. $$y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$$

annehmen. Die Function 1., welche für das System 2. solche Werthe annimmt, die den Zahlen 3. möglichst nahe liegen, kann durch geeignete Erweiterung der in No. 2 durchgeführten Betrachtungen ohne neue Annahmen bestimmt werden; nämlich aus der Forderung

4. $$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\ldots+\lambda^2_n=\textit{Minimum},$$
$$\lambda_r=a_1x_{1r}+a_2x_{2r}+\ldots+a_{m-1}x_{m-1,r}+a_m-y_r.$$

Aus 4. ergiebt sich zur Bestimmung der unbekannten Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_m$ das lineare System

5. $$\begin{aligned} &[x_1x_1]\,a_1+[x_1x_2]\,a_2+\ldots+[x_1x_{m-1}]\,a_{m-1}+[x_1]\,a_m=[x_1y_1],\\ &[x_1x_2]\,a_1+[x_2x_2]\,a_2+\ldots+[x_2x_{m-1}]\,a_{m-1}+[x_2]\,a_m=[x_2y_1],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &[x_1x_{m-1}]\,a_1+[x_2x_{m-1}]\,a_2+\ldots+[x_{m-1}x_{m-1}]\,a_{m-1}+[x_{m-1}]\,a_m=[x_{m-1}y_1],\\ &[x_1]\,a_1+[x_2]\,a_2+\ldots+[x_{m-1}]\,a_{m-1}+na_m=[y_1]. \end{aligned}$$

Zufolge der letzten dieser Gleichungen wird die Gleichung

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_{m-1}x_{m-1}+a_m=y$$

befriedigt, wenn man statt $x_1, x_2, x_3, \ldots y$ die Werthe

$$\frac{1}{n}(x_{11}+x_{12}+\ldots),\quad \frac{1}{n}(x_{12}+x_{22}+\ldots),\ \ldots\ \frac{1}{n}(y_1+y_2+\ldots),$$

d. i. die arithmetischen Mittel der für die $x_1, x_2, \ldots y$ gegebenen Zahlen setzt.

5. Durch $(m+1)$ Punkte ist eine Curve C von der Gleichung

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m$$

unzweideutig bestimmt. Sind n Punkte gegeben und ist $n>m+1$, so kann man nach der Curve C fragen, welcher die gegebenen Punkte möglichst nahe liegen.

Da die Curvengleichung die zu bestimmenden Constanten $a_0, a_1, \ldots a_m$ linear enthält, so wird man die bisher angewandte Methode auch auf den vor-

liegenden Fall ausdehnen, und die Curve als Lösung der Aufgabe betrachten, für welche

$$1.\quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \ldots + \lambda^2_n = Minimum,$$
$$\lambda_r = a_0 + a_1 x_r + a_2 x^2_r + \ldots + a_m x_r^m - y_r .$$

Setzt man die Differentialquotienten von 1. in Bezug auf $a_0, a_1, a_2, \ldots a_m$ gleich Null, so erhält man zur Bestimmung der a_k das System

$$n a_0 + [x]\, a_1 + [x^2]\, a_2 + \ldots + [x^m]\, a_m = [y],$$
$$[x]\, a_0 + [x^2]\, a_1 + [x^3]\, a_2 + \ldots + [x^{m+1}]\, a_m = [xy],$$
$$[x^2]\, a_0 + [x^3]\, a_1 + [x^4]\, a_2 + \ldots + [x^{m+2}]\, a_m = [x^2 y],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[x^m]\, a_0 + [x^{m+1}]\, a_1 + [x^{m+2}]\, a_2 + \ldots + [x^{2m}]\, a_m = [x^m y].$$

6. Die periodische Curve C

$$y = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_m \cos mx$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_m \sin mx$$

ist durch $2m + 1$ Punkte bestimmt.

Sind n Punkte gegeben ($n > 2m + 1$) und bestimmt man eine diesen Punkten möglichst gut sich anschliessende Curve C wieder durch die Bedingung

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \ldots + \lambda^2_n = Minimum,$$
$$\lambda_r = a_0 + a_1 \cos x_r + \ldots + b_1 \sin x_r \ldots - y_r ,$$

so erhält man für die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots b_1, \ldots$ die Gleichungen

$$1.\quad \begin{aligned} &[\cos px]\, a_0 + [\cos x \cos px]\, a_1 + [\cos 2x \cos px]\, a_2 + \ldots + [\cos mx \cos px]\, a_m \\ &+ [\sin x \cos px]\, b_1 + [\sin 2x \cos px]\, b_2 + \ldots + [\sin mx \cos px]\, b_m \\ &= [y \cos px], \\ &[\sin px]\, a_0 + [\cos x \sin px]\, a_1 + [\cos 2x \sin px]\, a_2 + \ldots + [\cos mx \sin px]\, a_m \\ &+ [\sin x \sin px]\, b_1 + [\sin 2x \sin px]\, b_2 + \ldots + [\sin mx \sin px]\, b_m \\ &= [y \sin px], \end{aligned}$$

$$p = 0, 1, 2, 3, \ldots m.$$

Diese Gleichungen lassen in einem besonderen Falle eine einfache Lösung zu. Sind nämlich die x so gewählt, dass

$$x_{r+1} = r\varphi, \quad \varphi = 2\pi : n,$$

so erhalten die Gleichungen Coefficienten von der Form

$$[\cos px \cos qx] = 1 + \cos p\varphi \cos q\varphi + \cos 2p\varphi \cos 2q\varphi + \ldots + \cos(n-1)p\varphi \cos(n-1)q\varphi,$$
$$[\cos px \sin qx] = \cos p\varphi \sin q\varphi + \cos 2p\varphi \sin 2q\varphi + \ldots + \cos(n-1)p\varphi \sin(n-1)q\varphi,$$
$$[\sin px \sin qx] = \sin p\varphi \sin q\varphi + \sin 2p\varphi \sin 2q\varphi + \ldots + \sin(n-1)p\varphi \sin(n-1)q\varphi.$$

In diesen Reihen setzen wir

$$\cos\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \quad \sin\alpha \sin\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$
$$\cos\alpha \sin\beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)],$$

und erhalten

$$2.\quad \begin{aligned} [\cos px \cos qx] &= \frac{1}{2}\sum_0^{n-1} \cos k(p - q)\varphi + \frac{1}{2}\sum_0^{n-1} \cos k(p + q)\varphi, \\ [\cos px \sin qx] &= \frac{1}{2}\sum_1^{n-1} \sin k(p + q)\varphi - \frac{1}{2}\sum_1^{n-1} \sin k(p - q)\varphi, \\ [\sin px \sin qx] &= \frac{1}{2}\sum_0^{n-1} \cos k(p - q)\varphi - \frac{1}{2}\sum_0^{n-1} \cos k(p + q)\varphi. \end{aligned}$$

Setzt man in

$$(1 - z^n) : (1 - z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1}$$

für z die complexe Zahl

$$z = \cos(p \pm q)\varphi + i \sin(p \pm q)\varphi,$$

so ist, wenn die ganzen Zahlen p und q nicht gleich sind, $1 - z$ von Null verschieden und $z^n = 1$; daher ist

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = 0 .$$

Die Sonderung des Realen und Imaginären giebt

$$3. \qquad \sum_0^{n-1} cos\, k(p \pm q)\varphi = 0, \qquad \sum_1^{n-1} sin\, k(p \pm q)\varphi = 0 .$$

Für den Fall $p = q$ erhält man aus 2. unter Rücksicht auf 3.

$$4. \qquad [cos^2 px] = \tfrac{1}{2}n, \qquad [sin^2 px] = \tfrac{1}{2}n .$$

Mit Hülfe von 2., 3., 4. ergeben die Gleichungen 1. die Auflösungen

$$a_0 = \frac{1}{n}[y], \qquad a_k = \frac{2}{n}[y\, cos\, kx], \qquad b_k = \frac{2}{n}[y\, sin\, kx].^{*)}$$

6. Die Methode der kleinsten Quadrate (Quadratsummen), die wir in den Abschnitten No. 2 bis 5 angewandt haben, lässt sich auch in den Fällen No. 1 verwenden. Wird zu den gegebenen Zahlen $a_1, a_2 \ldots a_n$ eine Zahl μ so bestimmt, dass

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda^2_n = Minimum,$$
$$\lambda_r = \mu - a_r ,$$

so folgt zur Bestimmung von μ die Gleichung

$$(\mu - a_1) + (\mu - a_2) + (\mu - a_3) + \ldots + (\mu - a_n) = 0 ,$$

aus welcher man erhält

$$\mu = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n).$$

§ 2. Beobachtungsfehler.

1. Bei keiner Messung kann man mit Sicherheit behaupten, dass das durch sie gewonnene Resultat vollkommen genau sei. Auch das sorgfältigst gearbeitete Instrument hat Fehler; auch der vortrefflichste Beobachter, dessen Sinne und Urtheil auf's Beste beanlagt und geschult sind, gelangt an Grenzen, an welchen sein Urtheil anfängt, unsicher zu werden.

Die Fehler einer Messung theilt man ein in constante und in zufällige Fehler. Unter constanten Fehlern versteht man Fehler, die durch solche Abweichungen vom idealen Baue des Instruments herrühren, welche während einer hinlänglich grossen Zeit sich nicht merklich ändern, sowie die von der Individualität des Beobachters abhängigen Fehler, sofern sie sich immer in einem bestimmten Sinne geltend machen. Alle übrigen Fehler, die von den wechselnden äusseren Umständen (Handhabung, gegenseitiger Lage der Theile des Instruments, Temperatur der Luft, Bestrahlung durch die Sonne u. s. w.) in einer Weise abhängen, dass sich die Bestimmung ihres Einflusses der Beurtheilung entzieht, werden als zufällige bezeichnet.

Die constanten Instrumentfehler, sowie die constanten Fehler des Beobachters müssen zunächst möglichst scharf bestimmt werden; dies erfolgt durch Messungen, die genaue Prüfungen der Resultate zulassen; diese Messungen werden unter möglichst günstigen Umständen und mit der grössten Sorgfalt ausgeführt, so dass man sicher sein kann, dass dabei die zufälligen Fehler auf ein Minimum herab-

*) Weitere Ausführungen, auch in Bezug auf Curven von gegebenem Charakter, die zwischen gegebenen Abscissen einer gegebenen Curve möglichst nahe liegen, sowie historische und kritische Bemerkungen über die verschiedenen Methoden, die Ausgleichungsrechnung zu begründen, findet man bei HENKE, Die Methode der kleinsten Quadrate. Inauguraldissertation. Leigzig 1868.

gedrückt sind. Die zufälligen Instrumentfehler, sowie die zufälligen Fehler des Beobachters fassen wir unter der Bezeichnung zufällige Messungsfehler zusammen.

Wir nehmen in allen folgenden Betrachtungen an, dass die bestimmbaren constanten Fehler ermittelt und die Beobachtungsresultate dementsprechend verbessert worden sind; so dass nur noch die Ausgleichung der zufälligen Messungsfehler erübrigt.

2. Hat man eine Grösse direkt wiederholt gemessen, oder hat man zur Bestimmung mehrerer Unbekannten mehr Gleichungen durch Messung bestimmt, als zur Ermittelung der Unbekannten nöthig sind, so werden die für eine Unbekannte direkt erhaltenen Werthe, bez. die für mehrere Unbekannte aus verschiedenen Combinationen der Gleichungen abgeleiteten Werthe zufolge der zufälligen Messungsfehler nicht vollständig übereinstimmen; es kommt nun darauf an, für die Unbekannten solche Werthe zu ermitteln, die den Messungsresultaten sich möglichst gut anschliessen.

Die Berechnung dieser Werthe führt den Namen Ausgleichungsrechnung.

Dieselben Gründe, welche uns bei den Aufgaben des vorigen Paragraphen auf die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate geführt haben, sind auch für die Ausgleichungsrechnung maassgebend*); wir stellen daher als Princip der Ausgleichungsrechnung den Satz auf: Die ausgeglichenen Werthe der Unbekannten sind so zu wählen, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen im Minimum wird, wobei wir unter Abweichung den Unterschied des Werthes einer Function, den sie für die durch die Ausgleichung gefundenen Werthe der Unbekannten annimmt, und des durch Beobachtung gefundenen Betrags der Function verstehen.

§ 3. Ausgleichung direkter Beobachtungen.

1. Hat man durch n direkte Messungen für dieselbe unbekannte Grösse die mit den zufälligen Fehlern behafteten Bestimmungen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ erhalten, und hat man keine Veranlassung, diesen Beobachtungen ungleiche Gewichte zuzuerkennen, so ist der ausgeglichene Werth der Unbekannten (§ 1, 1)

$$x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n).$$

Die Abweichungen sind

$$\lambda_1 = x - x_1, \quad \lambda_2 = x_2 - x, \ldots.$$

Unter der mittleren Abweichung λ versteht man die Zahl, deren Quadrat das arithmetische Mittel der einzelnen Abweichungen ist. Hiernach ist

$$\lambda^2 = \frac{1}{n}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2).$$

Die mittelbare Abweichung dient dazu, die Uebereinstimmung der Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots$ abzuschätzen; je kleiner λ bei verschiedenen Beobachtungsreihen für dieselbe Unbekannte sich ergiebt, um so grössere Uebereinstimmung zeigen die Beobachtungen der betreffenden Reihe.

2. Beispiel.

Für die geographische Breite der Ofener Sternwarte fand LITTROW folgende 10 Resultate**)

---

*) Diese Begründung der Ausgleichungsrechnung gab HENKE, a. a. O.

**) LIAGRE, Calcul des probabilités et théorie des erreurs, Bruxelles 1852. pag. 204.

No.	x_k	λ_k	λ^2_k
1	47° 29′ 11″,5	+ 0,5	0,25
2	12″,2	— 0,2	0,04
3	12″,8	— 0,8	0,64
4	11″,2	+ 0,8	0,64
5	11″,7	+ 0,3	0,09
6	12″,3	— 0,3	0,09
7	11″,5	+ 0,5	0,25
8	11″,9	+ 0,1	0,01
9	12″,4	— 0,4	0,16
10	12″,5	— 0,5	0,25
$x = 47° 29′ 12″,0$			

Da die x_k nur in den Sekunden-Einern abweichen, so genügt es, zur Berechnung von x die Einer und Zehntel zu addiren (die Summe beträgt 20) und den zehnten Theil der Summe zu 47° 29′ 10″ zu addiren.

Aus der letzten Columne folgt

$$[\lambda^2] = 2{,}42\,.$$

Daher ist $$\lambda = \sqrt{2{,}42 : 10} = \pm\ 0{,}49\,.$$

3. Wenn man Grund hat, einzelne Beobachtungen einer Reihe für wesentlich zuverlässiger (oder minder zuverlässig) zu halten als die anderen, so drückt man diesen Unterschied dadurch aus, dass man den Beobachtungen ungleiche Gewichte beilegt.

Haben die Beobachtungen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ der Reihe nach die Gewichte $p_1, p_2, p_3, \ldots$, so ist der ausgeglichene Werth

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots}.$$

Die aus der Gleichung

$$\lambda^2 = \frac{p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 + p_3 \lambda_3^2 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots}$$

bestimmte Zahl bezeichnet man in diesem Falle als die mittlere Abweichung der Gewichtseinheit.

4. Beispiel.

Bei einem Repetitionstheodoliten ist ausser dem Fernrohre auch der horizontale Theilkreis um eine verticale Achse drehbar; man kann daher das Fernrohr für sich allein um die Verticale drehen, während der Theilkreis feststeht, kann aber auch den Theilkreis in fester Verbindung mit dem Fernrohre drehen. Um den Winkel zwischen den Verticalebenen zweier Objecte A und B zu bestimmen, richtet man das Fernrohr auf A und liest die Stellung des Nonius ab; dreht dann auf B, verbindet das Fernrohr mit dem Theilkreise und dreht beide zusammen zurück, bis ersteres auf A gerichtet ist u. s. f. Nachdem die Drehung des Fernrohrs von A nach B genügend oft wiederholt worden ist, liest man die Stellung des Nonius ab und addirt zur Ablesung die Anzahl ganzer Umdrehungen, die der Nonius während der Beobachtungen auf dem horizontalen Theilkreise zurückgelegt hat. Zieht man von der so gewonnenen Zahl die erste Stellung des Nonius ab und dividirt die Differenz durch die Zahl p, welche angiebt, wie oft das Fernrohr von A nach B gedreht worden ist, so erhält man den gesuchten Winkel. Durch eine grössere Anzahl von Repetitionen eliminirt man fast ganz den Einfluss des Theilungsfehlers des Instruments, so dass nur noch der Einfluss der

Visurfehler übrig bleibt; man kann einen durch p Repetitionen gemessenen Winkel als das arithmetische Mittel aus p Einzelmessungen betrachten und setzt daher das Gewicht desselben der Zahl p proportional.

Man hat einen Winkel 14 mal durch Repetition gemessen und betrachtet die Repetitionszahlen p als die Gewichte der Beobachtungen; die Zahlen p, die Messungsresultate, den ausgeglichenen Werth des Winkels, die damit berechneten λ_k, λ_k^2 und $p_k\lambda_k^2$ sind in folgender Tafel zusammengestellt; die mit $p_k x_k$ überschriebene Columne enthält der Kürze wegen nur die Secunden von x_k mit p_k multiplicirt.

No.	p_k	x_k	$p_k x_k$	λ_k	λ^2_k	$p_k\lambda^2_k$
1	5	17° 56′ 45″,00	225,00	— 5,22	27,248	136,24
2	4	31,25	125,00	+ 8,53	72,761	291,04
3	5	42,50	212,50	— 2,72	7,398	36,99
4	3	45,00	135,00	— 5,22	27,248	81,74
5	3	37,50	112,50	+ 2,28	5,198	15,59
6	3	38,33	115,00	+ 1,45	2,103	6,31
7	3	27,50	82,50	+ 12,28	150,798	452,39
8	3	43,33	130,00	— 3,55	12,603	37,81
9	4	40,63	162,50	— 0,85	0,723	2,89
10	2	36,25	72,50	+ 3,53	12,461	24,92
11	3	42,50	127,50	— 2,72	7,398	22,19
12	3	39,17	117,50	+ 0,61	0,372	1,12
13	2	45,00	90,00	— 5,22	27,248	54,49
14	3	40,83	122,50	— 1,05	1,103	3,31
	46		1830,00			1167,03

Die letzte Zeile enthält die Summen

$$[p], \ [px], \ [p\lambda^2].$$

Aus derselben ergiebt sich

$$x = 17^\circ\, 56' + \frac{1830'',00}{46} = 17^\circ\, 56'\, 39'',78\,,$$

$$\lambda = \pm\, 5'',037\,.$$

5. Man habe durch direkte Messungen und Ausgleichung für k Zahlen die ausgeglichenen Werthe X_1, X_2, X_3, ... und die zugehörigen mittleren Abweichungen Λ_1, Λ_2, Λ_3, ... erhalten; setzt man eine Grösse X mit Hülfe der X_1, X_2, .. und gegebener Coefficienten a_1, a_2, ... in der Weise linear zusammen

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \ldots,$$

so fragt es sich, wie gross die mittlere Abweichung Δ dieser linearen Function ist, wenn man unter einer einzelnen Abweichung den Unterschied der mit Hülfe der ausgeglichenen Werthe hergestellten Zahl X und der mit Hülfe irgend einer Combination der Beobachtungswerthe hergestellten bezeichnet.

Ist $\lambda_{1\alpha}$, $\lambda_{2\beta}$, $\lambda_{3\gamma}$, ... eine Combination einzelner Abweichungen der X_1, X_2, X_3, ..., so ist die dazu gehörige einzelne Abweichung der linearen Function

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma..} = a_1\lambda_{1\alpha} + a_2\lambda_{2\beta} + a_3\lambda_{3\gamma} + \ldots$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\Delta^2_{\alpha\beta\gamma..} &= a_1^2\lambda_{1\alpha}^2 + a_2^2\lambda_{2\beta}^2 + a_3^2\lambda_{3\gamma}^2 + \ldots \\ &+ 2a_1a_2\lambda_{1\alpha}\lambda_{2\beta} + 2a_1a_3\lambda_{1\alpha}\lambda_{3\gamma} + \ldots\end{aligned}$$

Wir ersetzen hierin $\lambda_{1\alpha}$, $\lambda_{2\beta}$, ... der Reihe nach durch jede Combination der einzelnen Abweichungen und nehmen das arithmetische Mittel aller so entstehenden Werthe $\Delta^2_{\alpha\beta\gamma\ldots}$.

Sind n_1, n_2, n_3 ... Beobachtungen zur Bestimmung von X_1, X_2, X_3 ... gemacht worden, so ist die Anzahl aller Combinationen

$$m = n_1 n_2 n_3 \ldots n_k.$$

Für das arithmetische Mittel Δ^2 hat man

$$m\Delta^2 = a_1^2 \cdot \frac{m}{n_1} \Sigma\lambda_{1\alpha}^2 + a_2^2 \frac{m}{n_2} \Sigma\lambda_{2\beta}^2 + \ldots$$

$$+ 2a_1 a_2 \cdot \frac{m}{n_1 n_2} \Sigma\lambda_{1\alpha}\Sigma\lambda_{2\beta} + 2a_1 a_3 \cdot \frac{m}{n_1 n_3} \Sigma\lambda_{1\alpha}\Sigma\lambda_{3\gamma} + \ldots$$

Aus dem Begriffe des arithmetischen Mittels folgt, dass die algebraische Summe der Abweichungen aller einzelnen Beobachtungen vom Mittel verschwindet, also ist

$$\Sigma\lambda_{1\alpha} = \Sigma\lambda_{2\beta} = \Sigma\lambda_{3\gamma} = \ldots = 0.$$

Berücksichtigt man noch, dass

$$\Sigma\lambda_{1\alpha}^2 = n_1 \Lambda_1^2, \quad \Sigma\lambda_{2\alpha}^2 = n_2 \Lambda_2^2 \ldots,$$

so ergiebt sich schliesslich

$$\Delta^2 = a_1^2 \Lambda_1^2 + a_2^2 \Lambda_2^2 + a_3^2 \Lambda_3^2 + \ldots$$

6. Ist X keine lineare Function der X_k, so kann man unter den Voraussetzungen, dass der TAYLOR'sche Satz auf X für die Werthe der X_k, welche innerhalb der durch Beobachtung gewonnenen Zahlen liegen, anwendbar ist, und dass man nur die erste Potenz der Abweichungen zu berücksichtigen braucht, setzen

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma\ldots} = a_1 \lambda_{1\alpha} + a_2 \lambda_{2\beta} + a_3 \lambda_{3\gamma} + \ldots$$

wobei

$$a_i = \frac{\partial X}{\partial X_i},$$

wenn man in diesen Differentialquotienten für X_1, X_2, .. die ausgeglichenen Werthe setzt.

7. **Beispiel.** Man hat in einem Dreiecke ABC die Seiten $BC = a$ und die Winkel $CBA = \beta$ und $BCA = \gamma$ bestimmt; diese Werthe seien mit den mittleren Abweichungen Λ_a, Λ_β, Λ_γ behaftet. Für den dritten Winkel α, den Halbmesser r des eingeschriebenen Kreises und die beiden andern Seiten b und c hat man

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma,$$

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha}, \quad b = 2r\sin\beta, \quad c = 2r\sin\gamma.$$

Die mittlere Abweichung von α ist

$$\Lambda_\alpha = \sqrt{\Lambda_\beta^2 + \Lambda_\gamma^2}.$$

Da man hat

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{1}{2\sin\alpha}, \quad \frac{\partial r}{\partial \alpha} = -\frac{a\cos\alpha}{2\sin^2\alpha},$$

so ist

$$\Lambda_r = \frac{1}{2\sin^2\alpha} \sqrt{\sin^2\alpha \cdot \Lambda_a^2 + a^2\cos^2\alpha \cdot \Lambda_\alpha^2}.$$

Ferner ergeben sich

$$\Lambda_b = 2\sqrt{\sin^2\beta \cdot \Lambda_r^2 + r^2\cos^2\beta \cdot \Lambda_\beta^2},$$

$$\Lambda_c = 2\sqrt{\sin^2\gamma \cdot \Lambda_r^2 + r^2\cos^2\gamma \cdot \Lambda_\gamma^2}.$$

§ 4. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

1. Für die gegebenen Coefficienten

$$\begin{array}{llll} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots \\ \ldots & & & \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots \end{array}$$

habe man die Werthe

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots \; u_n$$

der linearen Functionen

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots \\ \ldots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots \end{array}$$

beobachtet; allen Beobachtungen sei dasselbe Gewicht zuerkannt. Die Anzahl der Unbekannten $x, y, z, \ldots$ sei kleiner als n. Die ausgeglichenen Werthe der Unbekannten erhält man durch die Bedingung (§ 1, No. 4),

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \ldots + \lambda_n^2 = \textit{Minimum}$$

$$\lambda_r = a_r x + b_r y + c_r z + \ldots - u_r$$

aus dem linearen Systeme

$$\begin{array}{l} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \ldots = [au], \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + \ldots = [bu], \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + \ldots = [cu], \\ \ldots \end{array}$$

Diese Gleichungen werden nach Gauss als die Normalgleichungen bezeichnet. In der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] & \ldots \\ [ab] & [bb] & [bc] & [bd] & \ldots \\ [ac] & [bc] & [cc] & [cd] & \ldots \\ [ad] & [bd] & [cd] & [dd] & \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{vmatrix}$$

haben symmetrisch zur Hauptdiagonale stehende Glieder denselben Coefficienten. Bezeichnet man den Coefficienten des $k$ten Gliedes der $i$ten Zeile mit α_{ik}, so folgen aus 1. die ausgeglichenen Werthe

$$\begin{array}{l} x = \frac{1}{D}([au]\alpha_{11} + [bu]\alpha_{21} + [cu]\alpha_{31} + \ldots), \\ y = \frac{1}{D}([au]\alpha_{12} + [bu]\alpha_{22} + [cu]\alpha_{32} + \ldots), \\ z = \frac{1}{D}([au]\alpha_{13} + [bu]\alpha_{23} + [cu]\alpha_{33} + \ldots), \\ \ldots \end{array} \qquad 2.$$

2. Mit Hülfe der soeben berechneten Werthe erhält man für die Abweichung einer Beobachtung

$$\lambda_r = a_r x + b_r y + c_r z + \ldots - u_r.$$

Für die mittlere Abweichung hat man

$$\lambda^2 = \frac{1}{n}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \ldots + \lambda_n^2).$$

Ersetzt man in den Lösungen No. 1, 2 die u_r überall durch

$$u'_r = u_r + \lambda_r,$$

so ändern sich die $x, y, z, \ldots$ nicht; denn die ausgeglichenen Werthe erfüllen die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots &= u_1', \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots &= u_2', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots &= u_n', \end{aligned}$$

folglich sind $x, y, z, \ldots$ die Werthe, welche sich aus diesem Systeme durch die Methode der kleinsten Quadrate ergeben, also die Werthe, welche aus No. 1, 2 hervorgehen, wenn man darin die u_r durch die u_r' ersetzt.

Um die Schärfe der Bestimmung jeder einzelnen Unbekannten abzuschätzen, kann man an jeder Beobachtung u_r eine Correction anbringen, die dem absoluten Werthe nach der mittleren Abweichung λ gleich ist, und die zu diesen corrigirten u gehörigen corrigirten x, y, z .. nach No. 1, 2 berechnen. Da man keine Veranlassung hat, positive Correctionen vor den negativen auszuzeichnen, so wird man alle möglichen Vorzeichencombinationen für λ wählen, und aus den resultirenden Correctionen der Unbekannten mittlere Abweichungen $\lambda_x, \lambda_y \ldots$ berechnen.

In der Gleichung

$$x = \frac{1}{D}([au']\alpha_{11} + [bu']\alpha_{21} + \ldots)$$

ist u_r' das Mittel aus $u_r' + \lambda$ und $u_r' - \lambda$; zur Bestimmung von λ_x kann man daher die Gleichung für Δ § 3, No. 5 benutzen. Setzt man in derselben

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \ldots = \lambda,$$

so erhält man

1. $$D^2 \cdot \lambda_x^2 = \lambda^2[(a_1\alpha_{11} + b_1\alpha_{12} + \ldots)^2 + (a_2\alpha_{11} + b_2\alpha_{12} + \ldots)^2 + \ldots].$$

Setzt man

2. $$a_i\alpha_{11} + b_i\alpha_{12} + \ldots = A_i,$$

multiplicirt die hieraus für $i = 1, 2, 3, \ldots$ hervorgehenden Gleichungen der Reihe nach mit $A_1, A_2, A_3, \ldots$, und addirt, so erhält man

3. $$[aA]\alpha_{11} + [bA]\alpha_{12} + \ldots = [AA].$$

Multiplicirt man die Gleichungen 2. mit a_i und addirt, so entsteht

$$[aa]\alpha_{11} + [ab]\alpha_{12} + \ldots = [aA].$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist die Determinante D; daher folgt

$$[aA] = D.$$

Multiplicirt man dagegen 2. mit b_i, bez. $c_i, d_i, \ldots$, so erhält man

$$\begin{aligned} [ab]\alpha_{11} + [bb]\alpha_{12} + \ldots &= [bA], \\ [ac]\alpha_{11} + [bc]\alpha_{12} + \ldots &= [cA], \\ [ad]\alpha_{11} + [bd]\alpha_{12} + \ldots &= [dA], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen verschwinden identisch. Folglich ergiebt sich aus 3.

$$[AA] = D \cdot \alpha_{11}.$$

Daher hat man schliesslich

4. $$\lambda_x^2 = \lambda^2 \cdot \frac{\alpha_{11}}{D}, \quad \text{und ebenso}$$
$$\lambda_y^2 = \lambda^2 \cdot \frac{\alpha_{22}}{D},$$
$$\lambda_z^2 = \lambda^2 \cdot \frac{\alpha_{33}}{D},$$
$$\ldots\ldots$$

Je schärfer die Bestimmung einer Unbekannten, je kleiner also die auf sie gemäss dieser Gleichungen entfallende mittlere Abweichung ist, ein um so grösseres Gewicht hat man derselben beizulegen.

Wir bezeichnen das Reciprocum vom Quadrate der mittleren Abweichung direkt als Gewicht der Unbekannten und haben daher, wenn die Gewichte mit p_x, p_y, p_z, ... bezeichnet werden,

5. $$p_x = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{D}{\alpha_{11}}, \quad p_y = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{D}{\alpha_{22}}, \ldots,$$

6. $$p_x : p_y : p_z = \ldots = \frac{1}{\alpha_{11}} : \frac{1}{\alpha_{22}} : \frac{1}{\alpha_{33}} : \ldots$$

3. Numerische Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen.

Zur Berechnung der Coefficienten der Normalgleichungen bedient man sich mit Vortheil hinlänglich ausführlicher Quadrattafeln. Aus denselben entnimmt man zunächst direkt die Glieder der Summen

$$[aa], [bb], [cc], \ldots$$

Um auch die übrigen Summen

$$[ab], [ac], [bc], \ldots$$

zu erhalten, kann man von einer der Gleichungen Gebrauch machen

$$ab = \tfrac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2],$$
$$ab = \tfrac{1}{2}[(a+b)^2 - a^2 - b^2],$$
$$ab = \tfrac{1}{2}[a^2 + b^2 - (a-b)^2].$$

Wenn man die Normalgleichungen auflösen und zugleich die Gewichte der einzelnen Unbekannten bestimmen will, so wird man am zweckmässigsten das folgende Verfahren zur Auflösung eines allgemeinen linearen Systems einschlagen. Das System sei

$$\begin{aligned}
(11\cdot 1)x_1 + (12\cdot 1)x_2 + (13\cdot 1)x_3 + \ldots + (1n\cdot 1)x_n &= (1u\cdot 1),\\
(21\cdot 1)x_1 + (22\cdot 1)x_2 + (23\cdot 1)x_3 + \ldots + (2n\cdot 1)x_n &= (2u\cdot 1),\\
(31\cdot 1)x_1 + (32\cdot 1)x_2 + (33\cdot 1)x_3 + \ldots + (3n\cdot 1)x_n &= (3u\cdot 1),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n1\cdot 1)x_1 + (n2\cdot 1)x_2 + (n3\cdot 1)x_3 + \ldots + (nn\cdot 1)x_n &= (nu\cdot 1).
\end{aligned}$$

Hierin sind die Coefficienten der Einfachheit wegen durch in Klammern geschlossene Ziffernzusammenstellungen angedeutet; $(ik\cdot 1)$ bedeutet den Coefficienten von x_k in der $i$ten Gleichung des 1. Systems; letztere Unterscheidung ist nothwendig, weil noch mehrere Systeme behufs der Auflösung des gegebenen aufgestellt werden; $(iu\cdot 1)$ bedeutet die rechte Seite der i-ten Gleichung des 1. Systems.

Aus der Elemententafel

1. $$\begin{matrix}
(11\cdot 1) & (12\cdot 1) & (13\cdot 1) \ldots (1n\cdot 1) & (1u\cdot 1),\\
(21\cdot 1) & (22\cdot 1) & (23\cdot 1) \ldots (2n\cdot 1) & (2u\cdot 1),\\
(31\cdot 1) & (32\cdot 1) & (33\cdot 1) \ldots (3n\cdot 1) & (3u\cdot 1),\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
(n1\cdot 1) & (n2\cdot 1) & (n3\cdot 1) \ldots (nn\cdot 1) & (nu\cdot 1)
\end{matrix}$$

berechnen wir eine neue Tafel,

2. $$\begin{matrix}
(22\cdot 2) & (23\cdot 2) \ldots (2n\cdot 2) & (2u\cdot 2),\\
(32\cdot 2) & (33\cdot 2) \ldots (3n\cdot 2) & (3u\cdot 2),\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
(n2\cdot 2) & (n3\cdot 2) \ldots (nn\cdot 2) & (nu\cdot 2),
\end{matrix}$$

bei welcher

3.
$$(ik \cdot 2) = (ik \cdot 1) - \frac{(i1 \cdot 1)}{(11 \cdot 1)} \cdot (1k \cdot 1),$$
$$(iu \cdot 2) = (iu \cdot 1) - \frac{(i1 \cdot 1)}{(11 \cdot 1)} \cdot (1u \cdot 1).$$

Während wir die $(ik \cdot 2)$ vollständig berechnen, wollen wir die $(iu \cdot 2)$ als lineare Functionen der $(iu \cdot 1)$ dargestellt lassen. Die Tafel 2. gehört zu dem Systeme, welches durch Elimination von x_1 aus der ersten Gleichung in Verbindung mit der zweiten, dritten, u. s. w. Gleichung hervorgeht.

In derselben Weise, wie man von 1. zu 2. übergeht, gelangt man von 2. zu einer neuen Coefficiententafel 3., von dieser zu einer vierten Tafel u. s. w. Wie man sofort sieht, erhält man durch genügend häufige Wiederholung dieses Verfahrens schliesslich die Gleichung

4.
$$(nn \cdot n)\, x_n = (nu \cdot n).$$

Hierbei ist die rechte Seite eine lineare Function der $(iu \cdot 1)$, in welcher $(nu \cdot 1)$ den Coefficienten 1. hat. Vergleicht man die aus 4. hervorgehende Auflösung

5.
$$x_n = \frac{(nu \cdot 1) + \ldots}{(nn \cdot n)}$$

mit

$$x_n = \frac{a_{nn} \cdot (nu \cdot 1) + \ldots}{D},$$

wobei D die Determinante des Systems 1. und a_{nn} den Coefficienten von $(nn \cdot 1)$ in dieser Determinante bezeichnet, so ergiebt sich

6.
$$(nn \cdot n) = \frac{D}{a_{nn}}.$$

Dividirt man die Glieder der ersten Zeile der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} (11 \cdot 1) & (12 \cdot 1) & \ldots & (1n \cdot 1) \\ (21 \cdot 1) & (22 \cdot 1) & \ldots & (2n \cdot 1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n1 \cdot 1) & (n2 \cdot 1) & \ldots & (nn \cdot 1) \end{vmatrix}$$

durch $(11 \cdot 1)$, multiplicirt dann die Zeile der Reihe nach mit

$$(21 \cdot 1),\quad (31 \cdot 1),\ \ldots\ (n1 \cdot 1)$$

und subtrahirt diese Zeilen von Produkten der Reihe nach von der 2., 3., . . $n$ten Zeile, so erhält man

$$\frac{D}{(11 \cdot 1)} = \begin{vmatrix} (22 \cdot 2) & (23 \cdot 2) & \ldots & (2n \cdot 2) \\ (32 \cdot 2) & (33 \cdot 2) & \ldots & (3n \cdot 2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n2 \cdot 2) & (n3 \cdot 2) & \ldots & (nn \cdot 2) \end{vmatrix}.$$

Dividirt man hier wieder die Elemente der ersten Zeile mit dem ersten Elemente, multiplicirt dann mit den Anfangselementen der 2., 3., . . . Zeile und subtrahirt diese Produkte nach einander von den Elementen der 2., 3., . . . Zeile, so entsteht

$$\frac{D}{(11 \cdot 1)(22 \cdot 2)} = \begin{vmatrix} (33 \cdot 3) & (34 \cdot 3) & \ldots \\ (43 \cdot 3) & (44 \cdot 3) & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Wenn man dieses Verfahren genügend oft wiederholt, so erhält man schliesslich

$$\frac{D}{(11 \cdot 1)(22 \cdot 2)(33 \cdot 3) \ldots (n-1,\, n-1 \cdot n-1)} = (nn \cdot n);$$

also ist

7. $$D = (11 \cdot 1)(22 \cdot 2)(33 \cdot 3) \ldots (nn \cdot n),$$
und daher mit Rücksicht auf 6.

8. $$\alpha_{nn} = (11 \cdot 1)(22 \cdot 2)(33 \cdot 3) \ldots (n-1,\, n-1 \cdot n-1).$$

Ohne von dem numerischen Werthe der $(iu \cdot 1)$ Gebrauch zu machen, substituirt man 5. in die erste Gleichung des $(n-1)$ten Systems; diese Gleichung enthält ausser x_n noch x_{n-1}; nach der Substitution erhält man x_{n-1} als lineare Function der $(iu \cdot 1)$.

In die erste Gleichung des $(n-2)$ten Systems setzt man nun die aufgefundenen Werthe von x_n und x_{n-1} u. s. f., bis man endlich alle x als lineare Functionen der $(iu \cdot 1)$ ausgedrückt hat.

Multiplicirt man die Coefficienten, welche $(iu \cdot 1)$ in diesen Functionen haben, mit der unter 7. gefundenen Determinante D, so erhält man die Coefficienten α_{ik}, welche die Elemente $(ik \cdot 1)$ in D haben.

Handelt es sich um die Auflösung von Normalgleichungen, so sind die Coefficienten der $(iu \cdot i)$ den Gewichten p_i der Unbekannten proportoinal; die in No. 2 definirten Gewichte werden aus den Coefficienten der $(iu \cdot i)$ durch Division durch das Quadrat der mittleren Abweichung λ erhalten.

Setzt man schliesslich für die $(iu \cdot 1)$ die Werthe in die für x_k gefundenen Ausdrücke, so hat man die Auflösung des gegebenen Systems beendet.

Kommt es nur auf diese Auflösung an, und nicht auf die Bestimmung der α_{ik}, so kann bereits vom Beginne der Rechnung an von den numerischen Werthen der $(iu \cdot 1)$ Gebrauch machen.

4. Wenn die Beobachtungen ungleiche Gewichte haben, $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$, so hat man die Summe
$$p_1\lambda_1^2 + p_2\lambda_2^2 + p_3\lambda_3^2 + \ldots + p_n\lambda_n^2$$
zu einem Minimum zu machen. Aus dieser Bedingung ergeben sich die Normalgleichungen für den Fall ungleicher Gewichte zu

1. $$\begin{array}{l} [paa]\,x + [pab]\,y + [pac]\,z + \ldots = [pua], \\ [pab]\,x + [pbb]\,y + [pbc]\,z + \ldots = [pub], \\ [pac]\,x + [pbc]\,y + [pcc]\,z + \ldots = [puc], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

wobei z. B.
$$[pac] = p_1 a_1 c_1 + p_2 a_2 c_2 + p_3 a_3 c_3 + \ldots$$

Hat man diese Gleichungen nach No. 3. aufgelöst und mit Hülfe dieser Auflösungen die Abweichungen der einzelnen Beobachtungen bestimmt, so erhält man aus der Gleichung
$$\lambda^2 = \frac{p_1\lambda_1^2 + p_2\lambda_2^2 + p_3\lambda_3^2 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots}$$
die mittlere Abweichung λ der Gewichtseinheit.

Um die mittleren Abweichungen $\lambda_x, \lambda_y, \ldots$ der ausgeglichenen Werthe der Unbekannten zu erhalten, hat man den vorliegenden Fall dadurch mit dem Falle gleicher Gewichte in Uebereinstimmung zu bringen, dass man annimmt, man habe anstatt lauter verschiedener Bestimmungen Gruppen von der Reihe nach $p_1, p_2, p_3 \ldots$ identischen Bestimmungen erhalten. Alsdann kann man sofort die Gleichungen No. 2, 4 benutzen, indem man für D die Determinante des Systems 1. und für α_{ii} den Coefficienten des $i$ten Diagonalgliedes dieser Determinante setzt.

5. Beispiel.

Zwischen den vom Punkte M ausgehenden Strahlen MA, MB, MC, MD, wurden folgende Winkel gemessen

$w_1 = A,B = 48^\circ\, 17'\, 1'',4$ mit dem Gewichte $p_1 = 30$;
$w_2 = A,C = 96\ 52\ 16,8$ „ „ „ „ $p_2 = 20$;
$w_3 = A,D = 152\ 54\ 6,8$ „ „ „ „ $p_3 = 26$;
$w_4 = B,C = 48\ 35\ 14,3$ „ „ „ „ $p_4 = 25$;
$w_5 = B,D = 104\ 37\ 7,8$ „ „ „ „ $p_5 = 28$;
$w_6 = C,D = 56\ 1\ 48,9$ „ „ „ „ $p_6 = 44$.

(M. 578.)

Werden die drei ersten Winkel mit ξ, η, ζ bezeichnet, so sind die sechs beobachteten Grössen durch sechs lineare Gleichungen

$$a_k\xi + b_k\eta + c_k\zeta = w_k$$

verbunden, wobei a_k, b_k, c_k die Werthe haben

1.

No.	1	2	3	4	5	6
a_k	1	0	0	−1	−1	0
b_k	0	1	0	1	0	−1
c_k	0	0	1	0	1	1

Nimmt man als Unbekannte die Differenzen

$$\xi - w_1 = x, \quad \eta - w_2 = y, \quad \zeta - w_3 = z,$$

so erhält man Gleichungen von der Form

$$a_k x + b_k y + c_k z = u_k,$$

wobei die a_k, b_k, c_k die Werthe 1. haben, während die u_k sind

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0;$$
$$u_4 = +1,1; \quad u_5 = -2,4; \quad u_6 = +1,1.$$

Die zur Aufstellung der Normalgleichungen nöthigen Zahlen sind

No.	a	b	c	u	paa	pab	pac	pbb	pbc	pcc	pau	pbu	pcu
1	+1	.	.	.	30	.	.	.	.	.	.	.	.
2	.	+1	.	.	.	.	.	20	.	.	.	.	.
3	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	26	.	.	.
4	−1	+1	.	−1,1	25	−25	.	25	.	.	27,5	−27,5	.
5	−1	.	+1	+2,4	28	.	−28	.	.	28	−67,2	.	67,2
6	.	−1	+1	−1,1	.	.	.	44	−44	44	.	48,4	−48,4
				Summen	83	−25	−28	89	−44	98	−39,7	20,9	18,8

Daher sind die Normalgleichungen

$$83x - 25y - 28z = -39,7$$
$$-25x + 89y - 44z = 20,9$$
$$-28x - 44y + 98z = 18,8.$$

Die Auflösungen dieses Systems sind

$$x = -0'',34, \quad y = 0'',24, \quad z = 0'',20.$$

Die ausgeglichenen Werthe der sechs Winkel sind daher

$$A, B = 48^\circ\, 17'\, 1'',06,$$
$$A, C = 96\ 52\ 17,04,$$
$$A, D = 152\ 54\ 7,00,$$
$$B, C = 48\ 35\ 15,98,$$
$$B, D = 104\ 37\ 5,94,$$
$$C, D = 56\ 1\ 49,96.$$

Die Summe $[p\lambda\lambda]$ ist 222,44; für das Verhältniss der Gewichte ergeben sich die abgerundeten Zahlen

$$p_x : p_y : p_z = 55 : 50 : 55,$$

also sind die Gewichte nahezu gleich gross.*)

6. Einige Schriftsteller empfehlen zur Erleichterung der Berechnung der Coefficienten der Normalgleichungen das gegebene auszugleichende System

$$1. \quad \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots = u_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

durch das folgende zu ersetzen

$$2. \quad \begin{array}{l} \dfrac{a_1}{u_1} x + \dfrac{b_1}{u_1} y + \dfrac{c_1}{u_1} z + \ldots = 1, \\ \dfrac{a_2}{u_2} x + \dfrac{b_2}{u_2} y + \dfrac{c_2}{u_2} z + \ldots = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Haben die Beobachtungen die Gewichte $p_1, p_2, \ldots p_n$, so ist die Bedingung zur Bestimmung der Unbekannten aus dem Systeme 2.

$$p_1 \left(\frac{a_1}{u_1} x + \ldots - 1\right)^2 + p_2 \left(\frac{a_2}{u_2} x + \ldots - 1\right)^2 + \ldots = \textit{Minimum}.$$

Hierfür kann man setzen

$$3. \quad \frac{p_1}{u_1^2} \cdot (a_1 x + \ldots - u_1)^2 + \frac{p_2}{u_2^2} \cdot (a_2 x + \ldots - 1)^2 + \ldots = \textit{Minimum}.$$

Die Bedingung für die Ausgleichung des gegebenen Systems 1. ist

$$4. \quad p_1 (a_1 x + \ldots - u_1)^2 + p_2 (a_2 x + \ldots - 1)^2 + \ldots = \textit{Minimum}.$$

Vergleicht man 3. und 4., so erkennt man, dass die Ersetzung des Systems 1. durch das System 2. gleichbedeutend damit ist, den Beobachtungen anstatt der gegebenen Gewichte

$$p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$$

die Gewichte zuzuschreiben

$$\frac{p_1}{u_1^2}, \frac{p_2}{u_2^2}, \frac{p_3}{u_3^2}, \ldots \frac{p_n}{u^2_n}.$$

Hieraus folgt, dass es nicht statthaft ist, das System 1. durch 2. zu ersetzen; sowie, dass es überhaupt nicht statthaft ist, die durch die Beobachtungen gegebenen Gleichungen mit ungleichen Zahlen zu multipliciren.

Wenn man indess bedenkt, dass die Bestimmung der Gewichte niemals eine scharfe ist, sondern immer nur auf mehr oder minder unsicheren Abschätzungen beruht, so kann man, wenn man im Interesse einer Abkürzung der Zahlenrechnung es für sehr wünschenswerth halten sollte, die gegebenen Gleichungen 1. unbedenklich mit Zahlen multipliciren, deren Verhältnisse nicht viel von der Einheit abweichen; insbesondere kann man 2. für 1. setzen, wenn die $u_k : u_i$ für jedes k und i nahezu $= 1$ ist. Die auf diesem Wege berechneten ausgeglichenen Werthe werden dann nur sehr wenig von dem durch Verwendung des Systems 1. gewonnenen abweichen.

7. Wenn Functionen

$$\varphi_1(x, y, z, \ldots), \quad \varphi_2(x, y, z, \ldots), \quad \varphi_3(x, y, z, \ldots),$$

deren Werthe

*) Meyer, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch von Czuber, Leipzig 1859, pag. 305.

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

man beobachtet hat, nicht linear sind, so wähle aus den Gleichungen

$$\varphi_i(x, y, z, \ldots) = u_i$$

so viele aus, als Unbekannte vorhanden sind und löse dieses System in geeigneter Weise auf. Es wird dabei genügen, solche Annäherungswerthe für die Unbekannten zu erhalten, für welche die Abweichungen der berechneten u_i von den beobachteten nicht mehr betragen wie die bei der Ausgleichung zu erwartende Abweichung dieser Grössen. Die so für $x, y, z, \ldots$ gefundenen Zahlen können als die angenähert richtigen Werthe gelten.

An denselben hat man geeignete Correctionen $\xi, \eta, \zeta \ldots$ anzubringen, um die ausgeglichenen Lösungen $x', y', z', \ldots$ zu erhalten. Unter den Voraussetzungen, dass innerhalb des Betrages dieser Correctionen der TAYLOR'sche Lehrsatz auf alle Functionen φ anwendbar ist, und dass die $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ so klein sind, dass man nur die erste Potenz dieser Correctionen zu berücksichtigen hat, ersetzt man jede Function φ durch

$$\varphi = \varphi(x, y, z, \ldots) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\zeta + \ldots$$

Hierin hat man rechts für $x, y, z, \ldots$ die Annäherungswerthe zu setzen.

Hierdurch erhält man für $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ die linearen Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\xi + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\eta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\zeta + \ldots = u_1 - \varphi_1,$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\xi + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\eta + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\zeta + \ldots = u_2 - \varphi_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

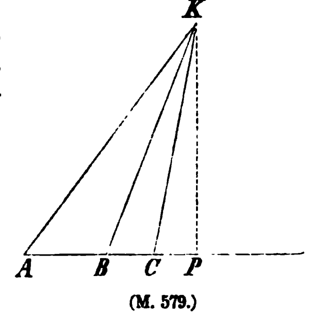
aus denen man zur Bestimmung der $\xi, \eta, \zeta \ldots$ die Normalgleichungen ableitet.

8. Beispiel.

Um die Lage des Punktes K gegen die Basis AC zu bestimmen, misst man die Strecken AB und BC, sowie die Winkel PCK, PBK, PAK.

Setzt man

$\operatorname{tang} PCK = u_1$, $\operatorname{tang} PBK = u_2$, $\operatorname{tang} PAK = u_3$, $KP \perp AC$, $AC = d_1$, $AB = d_2$, $AP = x$, $PK = y$, so hat man zwischen den gesuchten und den beobachteten Grössen die Gleichungen



(M. 579.)

$$u_1 = \frac{y}{x - d_1},$$

$$u_2 = \frac{y}{x - d_2},$$

$$u_3 = \frac{y}{x}.$$

also eine überzählige Gleichung.

Sind x', y' Näherungswerthe der Unbekannten, so erhält man für die daran anzubringenden Correctionen ξ, η die Gleichungen

$$-\frac{y'}{(x'-d_1)^2}\cdot\xi + \frac{1}{x'-d_1}\cdot\eta = u_1 - \frac{y'}{x'-d_1}$$

$$-\frac{y'}{(x'-d_2)^2}\cdot\xi + \frac{1}{x'-d_1}\cdot\eta = u_2 - \frac{y'}{x'-d_2}$$

$$-\frac{y'}{x'^2}\cdot\xi + \frac{1}{x'}\cdot\eta = u_3 - \frac{y'}{x'};$$

nachdem man alle neun Coefficienten dieses Systems berechnet hat, leitet man die Normalgleichungen ab.

§ 5. Ausgleichung direkter und vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.

1. Hat man durch einfache Messung für die Winkel x, y, z eines ebenen Dreiecks die Werthe ξ, η, ζ gefunden, so wird die Summe $\xi + \eta + \zeta$ nicht genau 180° betragen. Die Verbesserungen, welche man an den gemessenen Werthen anbringen muss, um die genaue Winkelsumme herzustellen, bestimmen sich nach der Methode der kleinsten Quadrate in folgender Weise.

Sind x, y, z die verbesserten Winkel, so sind $x - \xi$, $y - \eta$, $z - \zeta$ die Abweichungen. Die Summe der Quadrate derselben muss ein Minimum werden unter der Bedingung

$$f = x + y + z - 180^\circ = 0 .$$

Daher hat man (Differentialrechng., § 14, No. 14) das Minimum der Function

$$F = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 + 2kf$$

zu bestimmen. Hierzu ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} x - \xi + k &= 0, \\ y - \eta + k &= 0, \\ z - \zeta + k &= 0, \\ x + y + z &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Subtrahirt man die letzte von der Summe der andern, so folgt

$$k = \tfrac{1}{3}(\xi + \eta + \zeta - 180^\circ) .$$

Hieraus folgen die gesuchten Winkel

$$1. \quad \begin{aligned} x &= \xi - \tfrac{1}{3}(\xi + \eta + \zeta - 180^\circ), \\ y &= \eta - \tfrac{1}{3}(\xi + \eta + \zeta - 180^\circ), \\ z &= \zeta - \tfrac{1}{3}(\xi + \eta + \zeta - 180^\circ). \end{aligned}$$

Der Ueberschuss der gemessenen Winkelsumme über der theoretischen ist daher in drei gleiche Theile zu theilen und jeder der gemessenen Winkel um diesen Theil zu vermindern.

Kleinere Dreiecke auf der Erdoberfläche kann man als ebene und ihre Winkelsumme daher als nicht verschieden von 180° betrachten. Bei grösseren Dreiecken, wie sie bei Landesvermessungen vorkommen, bestimmt man den sphärischen Excess ε in Secunden mit hinlänglicher Genauigkeit, indem man den Flächeninhalt Δ nach den Formeln für ebene Dreiecke ermittelt, und alsdann von der Formel Gebrauch macht

$$\varepsilon = \frac{F}{R^2} \cdot 206265 .$$

Hierin ist R der Halbmesser der Kugel, für mittlere geographische Breiten und für Meter ist daher

$$log R = 8{,}80484 .$$

Bei der Ausgleichung der Winkel eines spärischen Dreiecks hat man in 1. statt 180° zu setzen $180^\circ + \varepsilon$.

2. Hat man für jeden der Winkel eines ebenen Dreiecks n Messungen

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n; \quad \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots \mathfrak{y}_n; \quad \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n$$

gemacht, die gleiches Gewicht haben, so werden die ausgeglichenen Winkel aus den Bedingungen erhalten

$$\sum_1^m [(x - \mathfrak{x}_i)^2 + (y - \mathfrak{y}_i)^2 + (z - \mathfrak{z}_i)^2] + 2k(x + y + z - 180^\circ) = Min.$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$x - \xi + \frac{1}{m} k = 0\,,$$
$$y - \eta + \frac{1}{m} k = 0\,,$$
$$z - \zeta + \frac{1}{m} k = 0\,,$$
$$x + y + z = 180^\circ,$$

wobei mit ξ, η, ζ die arithmetischen Mittel der für x, y, z beobachteten Winkel bezeichnet worden sind. Dieses System hat dieselben Lösungen, wie das entsprechende System in 1., wenn in 1. k durch $k:m$ ersetzt wird.

3. Hat man für x, y, z der Reihe nach m, n, r Beobachtungen gemacht, alle von demselben Gewichte, so erhält man zur Bestimmung der ausgeglichenen Werthe die Bedingung

$$\sum_1^m (x - \mathfrak{x}_i)^2 + \sum_1^n (y - \mathfrak{y}_i)^2 + \sum_1^r (z - \mathfrak{z}_i)^2 + 2k(x + y + z - 180^\circ) = Min.$$

Bezeichnet man wieder mit ξ, η, ζ die arithmetischen Mittel der für x, y, z durch Messung gefundenen Winkel und mit $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{r}$ die Reciproken von m, n, r, so folgen zur Bestimmung der ausgeglichenen Werthe die Gleichungen

$$x - \xi + \mathfrak{m}k = 0\,,$$
$$y - \eta + \mathfrak{n}k = 0\,,$$
$$z - \zeta + \mathfrak{r}k = 0\,,$$
$$x + y + z = 180^\circ.$$

Aus denselben erhält man, wenn man

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} + \mathfrak{r} = \mathfrak{s} \quad \text{und} \quad \xi + \eta + \zeta - 180^\circ = d$$

setzt, die Lösungen

$$x = \xi - \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{s}} \cdot d\,, \quad y = \eta - \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{s}} \cdot d\,,$$
$$z = \zeta - \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{s}} \cdot d\,.$$

4. Sind x, y, z nicht Winkel eines Dreiecks, sondern Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks, so gilt für dieselben die Bedingung

1. $$x^2 - y^2 - z^2 = 0\,.$$

Die arithmetischen Mittel ξ, η, ζ kann man als Annäherungen betrachten, so dass man nur die erste Potenz der Correctionen zu beachten braucht; für dieselben folgt aus 1.

$$2\xi \cdot \lambda - 2\eta \cdot \mu - 2\zeta \cdot \nu = -\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\,.$$

Die Unbekannten λ, μ, ν bestimmen sich aus der Bedingung

$$\sum_1^m (\xi + \lambda - \mathfrak{x}_i)^2 + \sum_1^n (\eta + \mu - \mathfrak{y}_i)^2 + \sum_1^r (\zeta + \nu - \mathfrak{z}_i)^2$$
$$+ 2k(2\xi\lambda - 2\eta\mu - 2\zeta\nu + \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2) = Min.$$

Man erhält die Gleichungen

$$\lambda + 2\mathfrak{m} \cdot k\xi = 0\,,$$
$$\mu - 2\mathfrak{n} \cdot k\eta = 0\,,$$
$$\nu - 2\mathfrak{r} \cdot k\zeta = 0\,,$$
$$2\xi\lambda - 2\eta\mu - 2\zeta\nu = -\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\,.$$

Hieraus folgt

$$4k(\mathfrak{m}\xi^2 + \mathfrak{n}\eta^2 + \mathfrak{r}\zeta^2) = \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2.$$

Setzt man

$$\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 = 2d\,, \quad \mathfrak{m}\xi^2 + \mathfrak{n}\eta^2 + \mathfrak{r}\zeta^2 = \mathfrak{s}\,,$$

so ergeben sich die ausgeglichenen Werthe

$$x = \xi + \lambda = \xi\left(1 - \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{s}}d\right),$$
$$y = \eta + \mu = \eta\left(1 + \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{s}}d\right),$$
$$z = \zeta + \nu = \zeta\left(1 + \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{s}}d\right).$$

5. Nach diesen Beispielen wenden wir uns zu einem allgemeineren Falle. Sind für die Unbekannten x_1, x_2, x_3 durch direkte Beobachtung die Werthe ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... mit den Gewichten p_1, p_2, p_3 ... gefunden worden und werden die x durch q lineare Bedingungen verbunden

$$1. \quad \begin{aligned} f_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \ldots - b_1 = 0, \\ f_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + \ldots - b_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

so hat man zur Bestimmung der Unbekannten

$$p_1(x_1 - \xi_1)^2 + p_2(x_2 - \xi_2)^2 + \ldots + 2k_1f_1 + 2k_2f_2 + \ldots = \textit{Minimum}.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$2. \quad \begin{aligned} p_1x_1 - p_2\xi_1 + [ka_1] &= 0, \\ p_2x_2 - p_2\xi_2 + [ka_2] &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die unbekannten Grössen k_1, k_2, ... bezeichnet man nach GAUSS als Correlaten.

Aus 2. berechnet man die Grössen x_1, x_2 ... und setzt dieselben in 1. ein, Dadurch erhält man q lineare Gleichungen zur Bestimmung der Correlaten. Nach Auflösung dieses Systems erhält man aus 2. die Unbekannten.

6. Sind einige unter den Bedingungsgleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ... nicht linear, so betrachtet man die beobachteten Werthe der Unbekannten als Annäherungen und bestimmt deren Verbesserungen; unter der Voraussetzung, dass nur erste Potenzen der Verbesserungen zu berücksichtigen sind und dass innerhalb der Werthe der Verbesserungen die Functionen und ihre ersten Differentialquotienten endlich und stetig sind, ersetzt man φ durch

$$\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\lambda_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\lambda_2 + \ldots = 0,$$

worin die Unbekannten x_1, x_2, ... durch die beobachteten Werthe zu ersetzen sind. Hierdurch kommt man auf den Fall linearer Bedingungsgleichungen zurück (Vergl. das Beispiel in No. 4).

7. Beispiel.

A. Zur Bestimmung der Fläche eines Dreiecks hat man dessen Seiten x', y', z', sowie die zugehörigen Höhen u', v', w' gemessen, und die Werthe erhalten

$$x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w.$$

Die zu bestimmenden Grössen sind durch die beiden Gleichungen verbunden

$$1. \quad \begin{aligned} x'u' - y'v' &= 0, \\ x'u' - z'w' &= 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die an x, y ... anzubringenden Verbesserungen mit

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z},\ \mathfrak{u},\ \mathfrak{v},\ \mathfrak{w},$$

so hat man für dieselben die aus 1. folgenden Gleichungen

$$2. \quad \begin{aligned} f &= u\mathfrak{x} + x\mathfrak{u} - v\mathfrak{y} - y\mathfrak{v} + xu - yv = 0. \\ \varphi &= u\mathfrak{x} + x\mathfrak{u} - w\mathfrak{z} - z\mathfrak{w} + xu - zw = 0. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Correctionen, sowie der Correlaten k_1 und k_2, folgen aus der Bedingung

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 + 2k_1 f + 2k_2 \varphi = Minimum.$$

die Gleichungen

$$3. \quad \begin{aligned} \mathfrak{x} + u(k_1 + k_2) &= 0, \\ \mathfrak{y} - vk_1 &= 0, \\ \mathfrak{z} - wk_2 &= 0, \\ \mathfrak{u} + x(k_1 + k_2) &= 0, \\ \mathfrak{v} - yk_1 &= 0, \\ \mathfrak{w} - zk_2 &= 0. \end{aligned}$$

Die aus diesen Gleichungen folgenden Werthe von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ setzt man in 2. ein; dadurch erhält man

$$\begin{aligned} (u^2 + x^2 + v^2 + y^2)k_1 + (u^2 + x^2)k_2 &= xu - yv, \\ (u^2 + x^2)k_1 + (u^2 + x^2 + w^2 + z^2)k_2 &= xu - zw. \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen berechnet man die Correlaten k_1, k_2; setzt die für dieselben gefundenen Werthe in 3. ein, so erhält man die Correctionen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$.

Mit Hülfe derselben ergeben sich die ausgeglichenen Werthe

$$\begin{aligned} x' &= x + \mathfrak{x}, & y' &= y + \mathfrak{y}, & z' &= z + \mathfrak{z}, \\ u' &= u + \mathfrak{u}, & v' &= v + \mathfrak{v}, & w' &= w + \mathfrak{w}. \end{aligned}$$

Die aus denselben berechneten Produkte

$$x'u', \quad y'v', \quad z'w'$$

stimmen bis auf Grössen erster Ordnung in Bezug auf die Correctionen miteinander überein.

B. In einem Dreiecke hat man für die Seiten x', y', z' und die gegenüber liegenden Winkel u', v', w' durch direkte Beobachtungen von gleichem Gewichte die Grössen x, y, z, u, v, w gefunden.

Zwischen den zu bestimmenden Grössen bestehen die Gleichungen

$$3. \quad \begin{aligned} u' + v' + w' - 180^\circ &= 0, \\ x' \cos v' + y' \cos u' - z' &= 0, \\ x' \cos w' + z' \cos u' - y' &= 0, \end{aligned}$$

von denen nur die erste linear ist. Bezeichnet man die an den beobachteten Grössen anzubringenden kleinen Verbesserungen der Reihe nach wieder mit

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{u}, \mathfrak{w}, \mathfrak{v},$$

und setzt

$$\begin{aligned} u + v + w - 180 &= a, \\ x \cos v + y \cos u - z &= b, \\ x \cos w + z \cos u - y &= c, \end{aligned}$$

so erhält man für die Verbesserungen die Bedingungsgleichungen

$$4. \quad \begin{aligned} f &\equiv \mathfrak{u} + \mathfrak{v} + \mathfrak{w} + a = 0, \\ \varphi &\equiv \cos v \cdot \mathfrak{x} - x \sin v \cdot \mathfrak{v} + \cos u \cdot \mathfrak{y} - y \sin u \cdot \mathfrak{u} - \mathfrak{z} + b = 0, \\ \psi &\equiv \cos w \cdot \mathfrak{x} - x \sin w \cdot \mathfrak{w} + \cos u \cdot \mathfrak{z} - z \sin u \cdot \mathfrak{u} - \mathfrak{y} + c = 0. \end{aligned}$$

Aus der Bedingung

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 + 2k_1 f + 2k_2 \varphi + 2k_3 \psi = Min.$$

folgen die Gleichungen

$$5. \quad \begin{aligned} \mathfrak{x} + k_2 \cos v + k_3 \cos w &= 0, \\ \mathfrak{y} + k_2 \cos u - k_3 &= 0, \\ \mathfrak{z} - k_2 + k_3 \cos u &= 0, \\ \mathfrak{u} + k_1 - k_2 \cdot y \sin u - k_3 \cdot z \sin u &= 0, \\ \mathfrak{v} + k_1 - k_2 \cdot x \sin v &= 0, \\ \mathfrak{w} + k_1 - k_3 \cdot x \sin w &= 0. \end{aligned}$$

Substituirt man die aus 5. folgenden Werthe der Verbesserungen in 4., so

ergeben sich drei lineare Gleichungen für die Correlaten k_1, k_2, k_3 und nach Auflösung derselben aus 5. die Unbekannten.

8. Hat man zur Bestimmung der Unbekannten

$$x, y, z, \ldots$$

die Werthe

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$$

der Functionen

$$\begin{gathered} \varphi_1(x, y, z, \ldots), \\ \varphi_2(x, y, z, \ldots), \\ \cdots\cdots \\ \varphi_n(x, y, z, \ldots) \end{gathered}$$

beobachtet, und bestehen zwischen den u die Bedingungsgleichungen

$$\begin{gathered} f(u_1, u_2, u_3, \ldots) = 0, \\ g(u_1, u_2, u_3, \ldots) = 0, \\ h(u_1, u_2, u_3, \ldots) = 0, \\ \cdots\cdots \end{gathered}$$

so hat man zunächst die Beobachtungen der u nach dem bisher Mitgetheilten auszugleichen und mit Benutzung dieser ausgeglichenen Werthe das in § 4 angegebene Verfahren einzuhalten.

9. Sind zur Bestimmung der Unbekannten

$$x, y, z, \ldots$$

die Werthe

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$$

der linearen Functionen

$$1. \quad \begin{gathered} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots \\ \cdots\cdots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots \end{gathered}$$

beobachtet worden, haben diese Beobachtungen die Gewichte

$$p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$$

und bestehen zwischen den Unbekannten die linearen Gleichungen

$$2. \quad \begin{gathered} f_1 \equiv \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \ldots = 0, \\ f_2 \equiv \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \ldots = 0, \\ \cdots\cdots \end{gathered}$$

so haben die Unbekannten die Werthe, für welche

$$3. \quad \begin{gathered} p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 + p_3 \lambda_3^2 + \ldots + 2k_1 f_1 + 2k_2 f_2 + \ldots = \textit{Minimum}, \\ \lambda_r = a_r x + b_r y + \ldots - u_r. \end{gathered}$$

Aus 3. folgen für $x, y, z, \ldots$, und für die unbekannten Correlaten die Gleichungen

$$\begin{gathered} [paa]x + [pab]y + [pac]z + \ldots + [\alpha k] = [ua], \\ [pab]x + [pbb]y + [pbc]z + \ldots + [\beta k] = [ub], \\ [pac]x + [pbc]y + [pcc]z + \ldots + [\gamma k] = [uc], \\ \cdots\cdots \end{gathered}$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist gleich der Anzahl der Unbekannten $x, y, z, \ldots$; im Verein mit den Bedingungsgleichungen, deren Anzahl mit der der Correlaten $k_1, k_2, \ldots$ übereinstimmt, genügen sie zur Bestimmung aller darin vorkommenden unbekannten Grössen.

10. Sind einige der Functionen $u_1, u_2, u_3 \ldots f_1, f_2, \ldots$ nicht linear, so wählt man aus den Beobachtungen und den Bedingungsgleichungen so viele aus, als Unbekannte $x, y, z, \ldots$ zu bestimmen sind. Man wird dabei darauf achten, dass die Bestimmung der Unbekannten möglichst geringe Schwierig-

keiten macht. Man berechnet nun x, y, z, .. aus den ausgewählten Gleichungen durch ein geeignetes Annäherungsverfahren bis zu einem genügenden Genauigkeitsgrade, und reducirt dann mit Hülfe des TAYLOR'schen Satzes die durch Beobachtung gefundenen Gleichungen sowie die Bedingungsgleichungen auf lineare Gleichungen für die an den berechneten Näherungswerthen anzubringenden Verbesserungen.

---

11. Die in den vorstehenden Abschnitten mitgetheilte Darstellung der Grundlinien der Ausgleichungsrechnung weicht von der üblichen Darstellungsweise insofern ab, als die meisten Schriftsteller nach GAUSS und LAPLACE die Ausgleichungsrechnung mit Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen verbinden.

Statt der von uns zu Grunde gelegten Forderung: Die Unbekannten so zu bestimmen, dass mit den Beobachtungen eine möglichst gute Uebereinstimmung erzielt und die Ausgleichung lediglich durch Auflösung linearer Gleichungen bewirkt wird, — geht man alsdann von der Forderung aus: Die **wahrscheinlichsten** Werthe der Unbekannten zu bestimmen. Um derselben zu genügen, muss man wissen, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, bei einer Beobachtung einen Fehler von gegebener Grösse zu machen, oder wenigstens, wie sich die Wahrscheinlichkeiten gegebener Fehler zu einander verhalten.

Eine aus allgemeinen Betrachtungen fliessende, von nicht zu bestreitenden und auf alle vorkommenden Fälle passenden Voraussetzungen ausgehende Erledigung dieser Frage ist bis jetzt nicht gegeben worden und wird wohl nicht möglich sein; die werthvolle Arbeit HAGEN's*) geht von Voraussetzungen über die Zusammensetzung von Fehlern aus unzählig vielen unbemerkbar kleinen Fehlern aus, die kaum jemals genau und in sehr vielen Fällen nicht einmal angenähert zutreffen.

Den entgegengesetzten Weg hat GAUSS, der Erfinder der Methode der kleinsten Quadrate**) eingeschlagen. GAUSS geht von der Annahme aus, dass bei direkten Beobachtungen von gleicher Genauigkeit das arithmetische Mittel unbestreitbar der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten sei; er zeigt, dass diese Annahme genügt, um das Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit zu bestimmen, und findet für die Wahrscheinlichkeit $w\,dx$ einen Fehler vom Betrage x zu begehen, den Ausdruck

$$w\,dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2x^2}\,dx,$$

wobei h eine von den besonderen Verhältnissen der Beobachtung abhängige von x aber unabhängige Zahl bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit $W dx_1, dx_2, dx_3, \ldots$ dass bei einer Reihe von Beobachtungen die Fehler $x_1, x_2, x_3, \ldots$ zusammentreffen, ist das Produkt der für das Eintreffen von $x_1, x_2, x_3, \ldots$ einzeln geltenden Wahrscheinlichkeiten, also ist

$$W dx_1\,dx_2\,dx_3 \ldots = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \ldots$$

W wird ein Minimum wenn

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots = \textit{Minimum}.$$

Hiergegen kann eingewendet werden, dass man von Alters her zwar das arithmetische Mittel an die Stelle gleich guter von einander abweichender

*) HAGEN, Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1837.

**) GAUSS, Theorie motus corporum coelestium, Hamburg 1809.

Messungen derselben Grösse gesetzt hat, gewiss aber ohne je dabei daran zu denken, dass man dadurch einen wahrscheinlichsten Werth gewinnen wollte, sondern wegen der Einfachheit der Rechnung. Man hat daher kein Recht, von der unbestrittenen Anwendung des arithmetischen Mittels aus einen Schluss auf das Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit zu machen.

Zur Bestimmung der Fehlerwahrscheinlichkeit w hat man auch folgenden Weg eingeschlagen.

Unter allen Fehlern ist gewiss der Fehler $x = 0$ der wahrscheinlichste, die Function w hat daher für $x = 0$ ein Maximum.

Man darf ferner annehmen, dass entgegengesetzt gleiche Fehler gleich wahrscheinlich sind; hieraus folgt, dass w eine gerade Function ist. Für Fehler, die verhältnissmässig sehr klein sind, ist die Wahrscheinlichkeit nahezu $= 1$. Von einer gewissen, von den Besonderheiten jeder Beobachtungsreihe abhängigen Grösse x an nimmt die Wahrscheinlichkeit rasch ab, und verschwindet für Fehler, die eine gewisse Grenze überschreiten.

Die Wahrscheinlichkeit, irgend einen Fehler zu begehen, ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} w\,dx\,;$$

da es nun gewiss ist, irgend einen Fehler (0 mit eingerechnet) zu machen, so folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} w\,dx = 1\,.$$

Diese Bedingungen genügen noch nicht, um die unbekannte Function w vollständig zu definiren. Da man mehr Eigenschaften nicht anzugeben vermag, so ergreift man das Auskunftsmittel, für w unter den bekannten Functionen, welche den Bedingungen genügen, die einfachste auszuwählen. Als solche empfiehlt sich

$$w = Ae^{-h^2x^2}\,;$$

sie hat für $x = 0$ das Maximum $w = A$; sie ist eine gerade Function; die Curve, deren Abscissen und Ordinaten x und w sind, hat die Wendepunkte

$$x = \pm\frac{h}{\sqrt{2}}\,,\quad w = \frac{A}{\sqrt{e}}\,,$$

und nähert sich von da an asymptotisch sehr rasch der Abscissenachse. Aus der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-h^2x^2}\,dx = 1$$

folgt

$$A = 1 : \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2}\,dx\,.$$

Da nun*)

---

*) Zur Bestimmung des Integrals

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

bildet man nach CAUCHY

$$V = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\,.$$

Die Ausführung der Integrationen ergiebt

$$V = J^2\,.$$

Substituirt man Polarcoordinaten, so erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

so ergiebt sich

$$w = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2}.$$

Diese inductive Methode zur Bestimmung von w verdient vor jeder andern jedenfalls den Vorzug; die Willkür, welche bei der Bestimmung von w waltet, tritt bei derselben ganz unverhüllt hervor.

Gegen alle Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen in der Ausgleichungsrechnung ist der jedenfalls wesentliche Einwand zu erheben, dass es sich bei fast allen Fällen der Ausgleichungsrechnung nur um eine verhältnissmässig kleine Anzahl von Beobachtungen handelt, und dass es bedenklich ist, auf eine Gruppe von wenig Fällen Folgerungen aus den für grosse Zahlen geltenden Sätzen anzuwenden.

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\cdot r\,d\varphi\,dr.$$

Da nun

$$\int e^{-r^2}\cdot r\,dr = -\tfrac{1}{2}e^{-r^2} + Const.,$$

so ist

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2}\cdot r\,dr = \tfrac{1}{2},$$

und daher

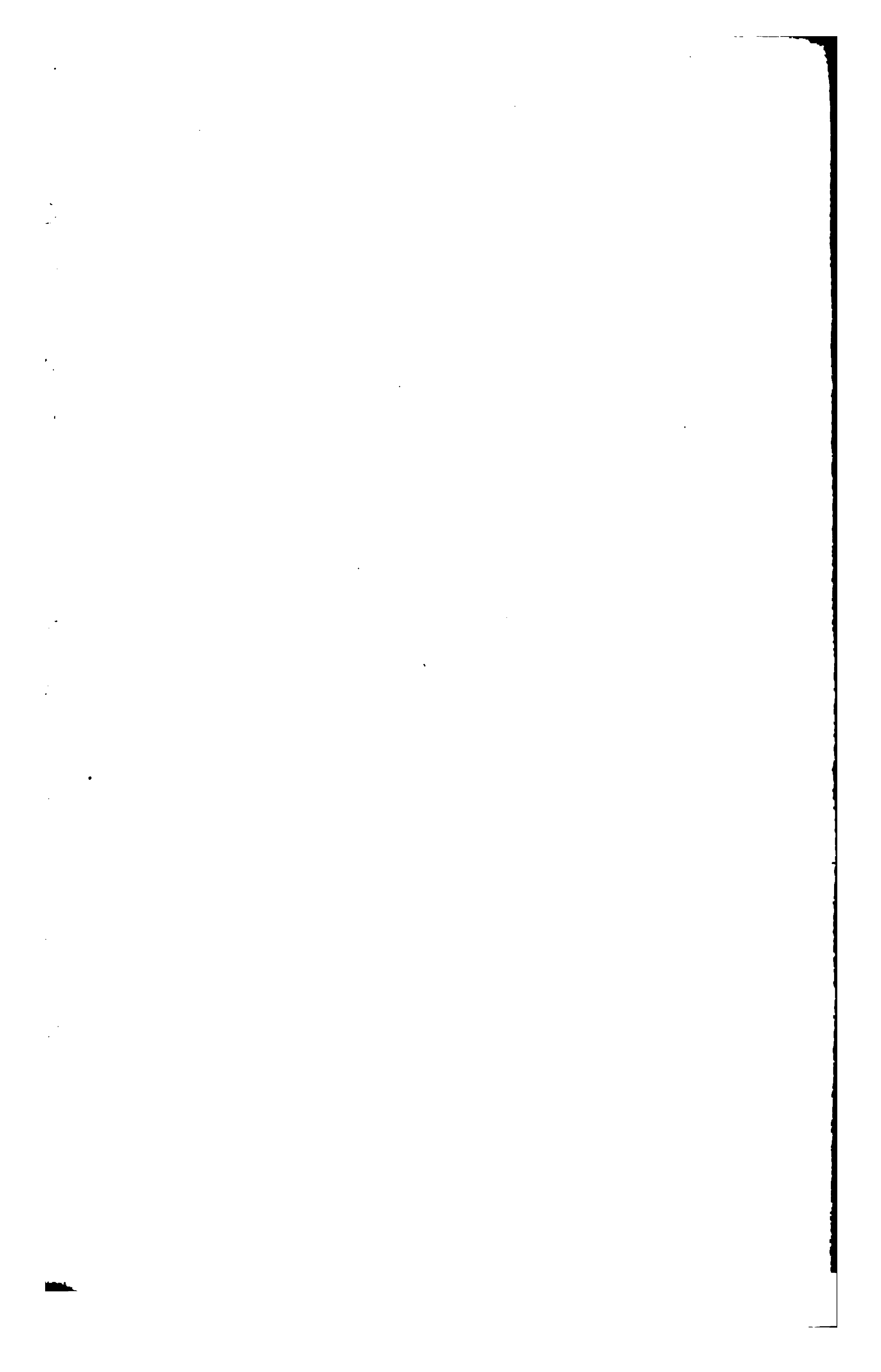
$$V = \frac{\pi}{4}.$$

Hieraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\mathfrak{J} = \sqrt{\pi}.$$

Ersetzt man x durch hx, so ergiebt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}.$$



Renten-, Lebens- und Aussteuer-Versicherung

bearbeitet von

Dr. Richard Heger

Gymnasiallehrer u. a. o. Hon.-Professor am Kgl. Polytechnikum zu Dresden.

§ 1. Lebenswahrscheinlichkeit.

1. Unter allen unserer Beobachtung zugänglichen Ereignissen sehen wir mit Recht diejenigen als von einer unübersehbaren grössten Mannigfaltigkeit von Ursachen bedingt an, die das Schicksal der Menschen ausmachen, insbesondere die, welche vom menschlichen Willen direkt abhängen. Wir begeben uns daher jedes Urtheils über unser eigenes Schicksal und über die Zukunft unserer Mitmenschen, und suchen das aus diesem Verzicht fliessende peinvolle Gefühl der Unsicherheit zu überwinden.

Wenn nun auch die Zukunft des Einzelnen sich unserem Urtheile entzieht, so hat sich doch ergeben, dass bei hinlänglich grossen Bevölkerungsgruppen in mehrfachen Beziehungen Regelmässigkeiten vorhanden sind, die einen ziemlich sicheren Schluss in die nächste oder selbst in die fernere Zukunft gestatten.

Bei einer einzelnen Familie ist z. B. die Anzahl der Todesfälle innerhalb bestimmter Zeitabschnitte scheinbar ganz regellos; bei einer Gemeinde von einigen Tausend Einwohnern ist diese Zahl schon von Jahr zu Jahr nahezu dieselbe, so dass gewisse, von dieser Zahl abhängende Einrichtungen mit Sicherheit vorher getroffen werden können; in einer grösseren Stadt von mehr als hunderttausend Einwohnern ist bereits die Zahl der wöchentlichen Todesfälle nahezu constant, oder doch insofern gleichmässig, dass auf dieselben Kalenderwochen mehrerer auf einander folgender Jahre dieselbe Anzahl von Sterbefällen kommt. Bei grösseren Bevölkerungsgruppen (Provinzen, Reichen), zeigen sich nicht bloss die Todesfälle selbst ihrer Zahl nach unveränderlich, sondern es sind auch die verschiedenen häufiger vorkommenden Todesursachen immer in nahezu demselben Verhältnisse an den Todesfällen betheiligt; ebenso bleibt bei der Zahl der jährlichen Todesfälle der Procentsatz derer, die ein bestimmtes Alter erreicht haben, wesentlich unverändert.

Auch bei den Ereignissen, die direkt vom Willen abhängig sind, zeigt sich eine unverkennbare Gleichmässigkeit. So kamen im Königreiche Preussen*) in den Jahren 1821—1875 jährlich auf das Tausend der Bevölkerung durchschnittlich 17,79 Eheschliessungen; von dieser Durchschnittszahl weichen die fünfzigjährigen

*) Preussische Statistik. (Amtliches Quellenwerk). Herausgegeben in zwanglosen Heften vom Kgl. statistischen Bureau. in Berlin. XLVIII. A. 1879. pag. 135.

Durchschnitte nur um ungefähr ± 1 ab; die grösste Ziffer (1871—1875) beträgt 18,06, die kleinste (1851—55) 16,75.

Auf 100000 zu Anfang eines Jahres Lebende kamen in Preussen im Laufe des nächsten Jahres in dem Zeitraume 1851—70 durchschnittlich 5 Personen durch Selbstmord um; die Durchschnittsziffer wird in 10 Jahren dieses Zeitraums erreicht; in 8 Jahren beträgt sie 4, in den beiden letzten 6. Vom Jahre 1830 bis 1853 war diese Ziffer unverändert in jedem Jahre 4*).

Nach QUETELET's mustergültigen Untersuchen wurden in Frankreich von einer Million Bewohnern im Zeitraume 1826—30 jährlich durchschnittlich 135 wegen begangener Verbrechen verurtheilt, 1831—35 130, 1836—40 150, 1841—45 140, so dass selbst in diesen von Zufällen ganz besonders abhängigen Ereignissen eine auffällige Gleichmässigkeit sich ausspricht.

Seit der Erkenntniss der Gleichmässigkeit solcher Ereignisse ist erst eine wissenschaftliche Statistik möglich, ist dieselbe zugleich eine unentbehrliche Grundlage für jede auf das Ganze einer Bevölkerungsgruppe gerichtete Thätigkeit geworden.

2. Die statistischen Erhebungen haben insbesondere gezeigt, dass das Verhältniss der Anzahl derer, die das $k$te Lebensjahr erreichen, zu der Anzahl derer, die im Laufe des $k$ten Lebensjahres sterben, im Wesentlichen nur von der Zahl k abhängt. Man hat diese Verhältnisse durch mehrere in weit auseinander liegenden Zeiten angestellte Zählungen bestimmt und nur verhältnissmässig sehr geringe Aenderungen gefunden. Man hat daher das Recht, auf eine Reihe von Jahren hin für alle auf die Lebensdauer bezüglichen Rechnungen diese Verhältnisszahlen als nur von k abhängige, übrigens aber constante Zahlen anzusehen.

Auf Grund dieser Wahrnehmung hat man Tafeln construirt, welche angeben, wie Viele von einer gewissen Anzahl Geborener das 1., 2., 3., . . . Lebensjahr erfüllen. Die am Schlusse dieser Abhandlung angeführte Tafel giebt diese Zahlen für 100000 männliche und für 100000 weibliche Lebendgeborene für das Königreich Preussen an.**)

3. Bezeichnet a_k die in der Tafel enthaltene Anzahl der Personen, die das $k$te Lebensjahr erfüllen, so werden von a_x $x$jährigen Personen a_y y Jahre alt oder älter. Daher ist die Wahrscheinlichkeit w, das eine $x$jährige Person das $y$te Lebensjahr erfüllt,

$$w = \frac{a_y}{a_x}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sie vor Erfüllung des $y$ten Jahres stirbt, ist

$$1 - w = \frac{a_x - a_y}{a_x}.$$

Von a_y Personen, die das Ende des $y$ten Lebensjahres erreichen, sterben $a_y - a_z$ vor Erfüllung des $z$ten Jahres. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine

*) Preussische Statistik. XLVIII. A. Tabelle XLVII.

**) Mit von Seiten der Direction des Königlich Preussischen statistischen Bureaus gütigst gewährter Erlaubniss geben wir in dieser Tafel einen auszugsweisen Abdruck der im Jahrgang 1880 der Zeitschrift des Königlichen statistischen Bureaus veröffentlichten Tafel »Absterbeordnung, Mortalitätstafel, Tafel der Lebenserwartung und durchschnittliche Lebensdauer der Bevölkerung des Preussischen Staates.« Nach einer an den Verfasser ergangenen brieflichen Mittheilung besteht die Absicht, die Tafel im nächsten Jahre auf Grund des Materials aus anderweiten drei Beobachtungsjahren, sowie der durch die letzte Volkszählung ermittelten Altersvertheilung der Bevölkerung neu zu berechnen.

$x$jährige Person das $y$te Lebensjahr erfüllt, aber vor Erfüllung des $z$ten stirbt ist daher

$$w = \frac{a_y - a_z}{a_x},$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Personen P und Q die heute x und y Jahre alt sind, noch wenigstens p Jahre lang leben, ist das Produkt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass P in p Jahren noch lebt, mit der, dass Q noch lebt, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w_1 = \frac{a_{x+p}}{a_x} \cdot \frac{a_{y+p}}{a_y}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass P noch lebt, Q aber verstorben ist, ist

$$w_2 = \frac{a_{x+p}}{a_x}\left(1 - \frac{a_{y+p}}{a_y}\right).$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide verstorben sind, ist

$$w_3 = \left(1 - \frac{a_{x+p}}{a_x}\right)\left(1 - \frac{a_{y+p}}{a_y}\right).$$

4. Halbirt man die Anzahl a_x der das $x$te Jahr vollendenden Personen und sucht das Lebensalter ξ auf, welches von $\frac{1}{2}a_x$ Personen erreicht wird, so ist die Wahrscheinlichkeit einer $x$jährigen Person, das ξte Lebensjahr zu vollenden, gleich $1:2$; man bezeichnet daher ξ als die wahrscheinliche Lebensdauer einer gegenwärtig x Jahre alten Person.

So ist z. B. für eine männliche Person

$$a_{35} = 51372, \quad \tfrac{1}{2}a_{35} = 25686.$$

Die letztere Zahl liegt zwischen den beiden zu 63 und 64 Jahren gehörigen

$$a_{63} = 26658, \quad a_{64} = 25378.$$

Man denkt sich nun die bei den a_{63} Personen im Laufe des 64. Lebensjahres eintretenden Todesfälle auf das Jahr gleichmässig vertheilt; unter dieser Voraus setzung würden

$$a_{63} - \tfrac{1}{2}a_{35} = 26658 - 25686 = 972$$

Personen vom 64. Lebensjahre noch den Bruchtheil

$$\frac{a_{63} - \frac{1}{2}a_{35}}{a_{63} - a_{64}} = \frac{972}{1280} = 0{,}76$$

verleben; daher ist die wahrscheinliche Lebensdauer einer im 36. Lebensjahre stehenden Person

$$63{,}76.$$

5. Zum Zwecke einer vereinfachten Berechnung der Tafeln für Rentenversicherungen wurde bereits im Jahre 1724 von Moivre der Versuch gemacht, eine Formel aufzustellen, welche die Zahlen a_x als Function des Lebensalters angiebt; gestützt auf die älteste von Halley 1693 entworfene Sterblichkeitstafel schlug Moivre die Formel vor

$$a_x = 86 - x,$$

durch welche die Zahl derer angegeben werden sollte, welche von 86 gleichzeitig Geborenen das $x$te Lebensjahr erfüllen.

Weder dieser Versuch, noch eine grössere Anzahl nachfolgende Versuche können als gelungen bezeichnet werden.

Von einer berechtigten theoretischen Grundlage ausgehend, kam Gompertz zu einer Formel, die zwar noch nicht die Tabellen genügend deckte; es gelang aber im Anschlusse an Gompertz's Grundgedanken Makeham und Lazarus, das Gompertz'sche Gesetz so zu ergänzen, dass die Sterblichkeitstafeln mit völlig genügender Genauigkeit dadurch dargestellt werden.

6. Nach GOMPERTZ*) denkt man sich den Widerstand einer grossen Anzahl gleichaltriger menschlicher Organismen gegen die Zerstörung mit der Zeit dergestalt abnehmend, dass er im Verlaufe jedes verschwindend kleinen Zeitelementes sich auf denselben Bruchtheil des ursprünglichen Betrags vermindert. Setzt man den anfänglichen Betrag dieses Widerstandes w, und nimmt an, dass derselbe bis zum Ende des ersten Zeitelementes auf pw ($p < 1$) herabgesunken ist, so ist er am Ende des 2., 3., 4., . . . $m$ten Zeitelementes

$$wp, \quad wp^2, \quad wp^3, \ldots wp^m.$$

Nimmt man an, dass eine Zeiteinheit (Jahr) n Elemente enthalte, und dass am Ende eines Jahres der Widerstand den Betrag

$$wp_1$$

habe, so ist

$$p_1 = p^n,$$

und nach x Jahren ist der Widerstand

$$wp_1{}^x.$$

Das Reciproke der Widerstandskraft bezeichnet GOMPERTZ als Todeskraft, und nimmt an, dass die Anzahl derer von a_x $x$jährigen Personen, die im nächsten Zeitelemente dx sterben, durch das Produkt von dx mit a_x und der Todeskraft gewonnen werde, also den Betrag habe

$$\frac{a_x}{wp_1{}^x}\, dx.$$

Ersetzt man hier $1 : w$ und $1 : p_1$ bez. durch b und q, so erhält man

$$a_x \cdot bq^x dx.$$

Diese Anzahl ist aber auch, wenn man die Sterblichkeitsliste für verschwindend kleine Intervalle dargestellt denkt, entgegengesetzt gleich dem Differentiale da_x. Daher hat man die Differentialgleichung

$$da_x = -\, a_x \cdot bq^x dx.$$

Aus derselben ergiebt sich sofort

$$la_x = -\frac{b}{lq} \cdot q^x + Const.$$

und daher

1. $$a_x = c \cdot K^{q^x},$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$K = e^{-\frac{b}{lq}}.$$

Bei geeigneter Wahl der Constanten c, K und q verträgt sich das GOMPERTZ'sche Gesetz (1.) sehr gut mit den vorhandenen Sterblichkeitstafeln für die Lebensjahre 20 bis 60, ergiebt aber stärkere Abweichungen für die Sterblichkeit im früheren und im späteren Alter.

7. Um diese Abweichungen zu beseitigen, nahm MAKEHAM neben der von GOMPERTZ eingeführten vom Alter abhängigen Todeskraft noch eine während des ganzen allmählichen Absterbens des Complexes von gleichaltrigen Personen beständig wirkende an.

Wird dieselbe mit β bezeichnet, so ergiebt sich

$$-\, da_x = a_x \left(\beta dx + \frac{b}{lq}\, q^x\right) dx,$$

und hieraus folgt

$$a_x = c \cdot K^{q^x} h^x,$$

*) GOMPERTZ, On the nature of the function expressive of the law of human mortality and a new method of determining the value of life contingencies. Philos. Transact. 1825.

wenn man $e^{-\beta}$ durch h ersetzt. Dieses Gesetz ist als das GOMPERTZ-MAKEHAM'sche Sterblichkeitsgesetz bekannt. Dasselbe stellt sehr gut die Sterblichkeit vom 15. Lebensjahre an aufwärts dar.

Um auch für die ersten 15 Lebensjahre Uebereinstimmung zwischen dem Gesetze und den Tabellen zu erzielen, ergriff LAZARUS (1867) das Auskunftsmittel, zu der veränderlichen Todeskraft

$$a_1 q^x$$

noch andere mit abweichendem Dignanden zu nehmen, so dass die Todeskraft dargestellt wird durch die Summe

$$\beta + b_1 q^x + b_2 q_1^x + b_3 q_2^x + \ldots$$

Es erwies sich als vollkommen genügend, diese Reihe auf die ersten drei Glieder zu beschränken. Wie man sieht, ergiebt sich hieraus, wenn man $e^{-\frac{b_2}{l q_1}}$ mit H bezeichnet

$$a^x = c \cdot h^x K^{q^x} H^{q_1^x} H^{q_1^x}.$$

Diese letzte Formel stellt bei geschickter Wahl der darin enthaltenen sechs Constanten die Zahlen der Sterblichkeitslisten mit durchaus hinlänglicher Genauigkeit für alle Lebensalter dar.*)

§ 2. Zinseszins- und Rentenrechnung.

1. Ein Kapital vermehrt sich durch Zinzeszins, wenn die nach einem bestimmten Zeitraume fälligen Zinsen mit dem Kapitale vereinigt werden, so dass sie im nächsten Zeitabschnitte zu gleichem Zinsfusse sich verzinsen. Wir nehmen zunächst an, dass die Zinsen alljährlich kapitalisirt werden.

Ein Kapital c bringt in einem Jahre zu $p\%$ die Zinsen $cp : 100$, wächst also an auf

$$c\left(1 + \frac{p}{100}\right) = c \cdot r,$$

wenn man den Discontfaktor

$$1 + \frac{p}{100}$$

abkürzungsweise mit r bezeichnet. Das Endkapital cr des ersten Jahres ist das Anfangskapital des zweiten; daher ist das Endkapital am Ende des 2. Jahres

$$cr \cdot r = cr^2.$$

Mit jedem neuen Verzinsungsjahre tritt ein Faktor r hinzu; daher wächst das Kapital c durch jährlichen Zinseszins in n Jahren zu $p\%$ an auf das Endkapital

$$1. \qquad k = c \cdot r^n.$$

Wenn das Kapital über n Jahre hinaus noch sich während eines echten Bruchtheils t eines Jahres verzinst, so wächst es auf den Betrag an

$$2. \qquad k = c \cdot r^n \cdot \left(1 + \frac{tp}{100}\right), \quad t < 1.$$

Wie man sofort sieht, gelten diese Formeln auch dann, wenn die Zinsen nicht jährlich kapitalisirt werden, sondern wenn andere, kürzere oder längere Verzinsungsfristen gelten; nur hat man dann für p nicht die jährlichen Zinsen auf das Hundert, sondern die auf die Verzinsungsfrist entfallenden zu setzen und für n die Anzahl der Verzinsungsfristen. Wenn also z. B. die

---

*) AMTHOR, Das GOMPERTZ-MAKEHAM'sche Sterblichkeitsgesetz und seine Anwendung bei der Lebensversicherungs- und Rentenrechnung. Festschrift, Herrn Oberbürgermeister PFOTENHAUER u. s. w. gewidmet vom Lehrercollegium der Kreuzschule. Dresden, 1874. pag. 20.

Kapitalisirung vierteljährlich 20 Jahre lang erfolgt, und das Kapital sich zu 5% verzinst, so hat man in den Formeln 1. und 2.

$$r = 1 + \frac{1,25}{100}, \quad n = 80$$

zu setzen.

In dem Faktor $1 + tp : 100$ hat man auch in diesem Falle für p die jährlichen Procente zu nehmen, da t die über eine ganze Anzahl von Verzinsungsfristen hieraus verzinste Zeit in Bruchtheilen eines ganzen Jahres angiebt.

2. Die Formel No. 1, 2 löst die Aufgabe, aus dem Anfangskapitale, dem Zinsfusse und der Zeit das Endkapital zu finden.

Beispiel. Verzinsen sich 8500 Mark durch halbjährlichen Zinseszins zu 4% 12 Jahre 8 Monate lang, so ist

$$c = 8500, \quad r = 1,02, \quad n = 25,$$

$$t = \frac{1}{6}, \quad 1 + \frac{tp}{100} = 1 + \frac{4}{600} = 1,0066\ldots;$$

daher ist

$$k = 8500 \cdot 1,02^{25} \cdot 1,00667 = 14038.$$

Das Anfangskapital ergiebt sich zu

$$c = k : r^n \left(1 + \frac{tp}{100}\right).$$

3. Sind c, k und n gegeben und $t = 0$, so findet man den Discontfaktor

1. $$r = \sqrt[n]{\frac{k}{c}},$$

und hieraus den Zinsfuss.

Ist t von Null verschieden, so liefert die Gleichung 1. eine erste Annäherung p_1 zur Bestimmung des Zinsfusses. Da $\left(1 + \frac{pt}{100}\right)$ gegen r^n nur klein ist, so wird dieser Faktor ziemlich genau erhalten, wenn man p durch p_1 ersetzt. Man erhält mit Benutzung dieses Werthes eine zweite Annäherung p_2 aus

$$r_2 = \sqrt[n]{\frac{k}{c} : \left(1 + \frac{tp_1}{100}\right)},$$

und in gleicher Weise weitere Näherungswerthe

$$r_3 = \sqrt[n]{\frac{k}{c} : \left(1 + \frac{tp_2}{100}\right)},$$

$$r_4 = \sqrt[n]{\frac{k}{c} : \left(1 + \frac{tp_3}{100}\right)},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Dabei ist, wie man sofort sieht

$$p_1 > p_2,$$
$$p_2 < p_3 < p_1,$$
$$p_3 > p_4 > p_2,$$
$$\cdots\cdots$$

Hieraus folgt, dass die Näherungswerthe

$$p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$$

sich einer bestimmten Grenze nähern; auf so viele Decimalstellen zwei folgende Näherungswerthe übereinstimmen, auf ebenso viele Stellen stimmen sie mit dem gesuchten Zinsfusse p überein.

Beispiel. Wie gross ist der Zinsfuss, zu welchem 20000 Mark bei jährlichem Zinseszins in 18 Jahren 4 Monaten auf 43000 Mark anwachsen?

Hier ist $c = 20000$, $k = 43000$, $n = 18$, $t = \frac{1}{3}$. Man erhält

$$r_1 = \sqrt[18]{2,1500} = 1,0435,$$

$$1 + \frac{tp_1}{100} = 1,0145, \quad r_2 = r_1 : \sqrt[18]{1,0145} = 1,0426,$$

$$1 + \frac{tp_2}{100} = 1,0142, \quad r_3 = r_1 : \sqrt[18]{1,0142} = 1,0426.$$

Da r_2 und r_3 bis auf fünf Ziffern übereinstimmen, so folgt mit einer Genauigkeit bis auf die Hundertel

$$p = 4,26.$$

4. Zur Bestimmung der Zeit aus c, k und p bildet man die Gleichung

$$n \log r + \log\left(1 + \frac{tp}{100}\right) = \log k - \log c.$$

Da

$$1 + \frac{tp}{100} < r,$$

so ergiebt sich n aus dieser Gleichung als die ganze Zahl des Quotienten

$$(\log k - \log c) : \log r,$$

der Divisionsrest ist

$$\log\left(1 + \frac{tp}{100}\right),$$

und liefert den Zeitrest t.

Beispiel. In wie viel Jahren wächst ein Kapital durch jährlichen Zinseszins zu $4\frac{1}{2}$% auf den 3fachen Betrag an?

Aus $\log(k:c) = 0,47712$, $\log r = 0,01912$ folgt

$$\log(k:c) = 24 \cdot \log r + 0,01824, \quad \text{also} \quad n = 24.$$

Da nun $$0,01824 = \log 1,0429,$$

und $$4,29 : 4,5 = 0,95,$$

so ergiebt sich als Antwort 24,95 Jahre.

5. Bezeichnet man mit p die Verzinsung auf Hundert und ein Jahr, und werden die Zinsen am Ende jedes $m$ten Theiles eines Jahres kapitalisirt, so ist nach n Jahren das Endkapital

$$k = c \cdot \left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{nm} = c \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{\frac{100m}{p}}\right]^{\frac{pn}{100}}.$$

Wächst m unendlich, werden also die Zinsen continuirlich kapitalisirt, so erhält man

$$k = c \cdot e^{\frac{pn}{100}}.$$

Von der Annahme einer continuirlichen Kapitalisirung macht man bei einigen Aufgaben mit Vortheil Gebrauch.

6. Wenn man sich für n auf eine ganze Anzahl von Jahren, bez. auf eine ganze Anzahl solcher Zeitabschnitte beschränkt, nach deren Verlauf die Zinsen kapitalisirt werden, so giebt die Formel

$$k = c \cdot r^n$$

sowohl den Werth an, den ein Kapital c nach Verlauf von n Jahren erreicht, als den Werth, den ein vor n Jahren ausgeliehenes Kapital haben musste, um bis jetzt zu dem Betrage k anzuwachsen, wenn nur in diesem Falle die Zahl n — entsprechend einer Zeitbestimmung in der Richtung der Vergangenheit — negativ gerechnet wird.

Soweit es sich um Kapitalien handelt, bei denen für die in Frage kommenden Zeitabschnitte eine Vermehrung durch Zinseszins bei gleichbleibendem Zinsfusse

stattfindet, hat man sich den Werth eines Kapitals in stetiger Veränderung begriffen zu denken; der nach Ablauf einer ganzen positiven oder negativen Anzahl von Jahren erreichte Werth einer Summe, die heute c Mark beträgt, ist

$$k = c \cdot r^n$$

Diesen Werth k bezeichnet man als den Zeitwerth der Summe c, und zwar als den Vorwerth oder Nachwerth, je nachdem n positiv oder negativ ist.

7. Anstatt eine Zahlung c zu einer bestimmten Zeit zu leisten, kann man an einem um n (positive oder negative) Jahre davon entfernten Zeitpunkte den für diesen Zeitpunkt berechneten Zeitwerth von c, d. i. $c \cdot r^n$ zahlen; handelt es sich um einen Vorwerth, so kann der Gläubiger vom Schuldner billigerweise nicht mehr verlangen; im Falle eines Nachwerths muss der Gläubiger so viel verlangen, wenn er nicht Schaden haben soll.

Aus diesem Grundsatze ergiebt sich sofort folgende Regel für die Aequivalenz von Zahlungen:

Eine Reihe Zahlungen, die zu bestimmten Zeiten zu leisten sind, kann durch eine andere Reihe von Zahlungen, die zu anderen bestimmten Zeiten geleistet werden, ersetzt werden, wenn nur für beide Reihen von Zahlungen die für einen beliebig gewählten Zeitpunkt berechneten Summen der Zeitwerthe einander gleich sind.

Hat man nach $t_1, t_2, t_3, \ldots t_r$ Jahren die Summen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_r$ zu bezahlen, so kann man dafür nach $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3, \ldots \mathfrak{t}_8$ Jahren die Summen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots \mathfrak{a}_8$ zahlen, wenn die für das Ende des τten Jahres berechneten Zeitwerthe gleich sind

$$\mathfrak{a}_1 r^{\tau-\mathfrak{t}_1} + \mathfrak{a}_2 r^{\tau-\mathfrak{t}_2} + \mathfrak{a}_3 r^{\tau-\mathfrak{t}_3} + \ldots = a_1 r^{\tau-t_1} + a_2 r^{\tau-t_2} + a_3 r^{\tau-t_3} + \ldots$$

Wenn diese Gleichung für irgend einen Werth von τ identisch ist, so ist es auch für jeden andern; denn wenn man τ durch eine andere Zahl σ ersetzt, so ändern sich alle Glieder der Gleichung um denselben Faktor

$$r^{\sigma-\tau}.$$

---

8. Werden mehrere gleiche Zahlungen R (Renten) in jährlichen Zwischenräumen im Ganzen $n$mal geleistet, so ist deren Werth bei Auszahlung der letzten Rente

$$\begin{aligned} S &= Rr^{n-1} + Rr^{n-2} + \ldots + Rr + R, \\ &= R(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1), \\ &= R\frac{r^n - 1}{r - 1}. \end{aligned}$$

Da $r - 1 = p : 100$, so hat man schliesslich

$$S = \frac{100R}{p}(r^n - 1).$$

Dieselbe Formel ist auch dann verwendbar, wenn die Rente nicht jährlich gezahlt wird, sobald dabei die Zinsen nicht jährlich kapitalisirt werden, sondern an denselben Terminen, an welchen die Renten zahlbar sind; der Zinsfuss p hat dann eine entsprechend veränderte Bedeutung.

Werden z. B. 20 Renten von je 1500 Mark in vierteljährlichen Abständen bezahlt, und die Zinsen zu 5% vierteljährlich kapitalisirt, so ist der Zeitwerth aller Renten bei der Auszahlung der 20ten

$$S = \frac{100 \cdot 1500}{1,25} \cdot (1,0125^{20} - 1).$$

9. Wird ein Kapital C (Mise) zu jährlichem Zinseszins zu p% angelegt, und

von demselben in jährlichen Abständen, beginnend ein Jahr nach Anlegung der Mise, eine Rente R bezogen, so ist der Kassenbestand K unmittelbar nach der Auszahlung der $n$ten Rente vermehrt um den Zeitwerth aller n Renten gleich dem Zeitwerthe der Mise, alles berechnet für die Auszahlung der letzten Rente. Daher hat man die Gleichung

$$C \cdot r^n = \frac{100R}{p}(r^n - 1) + K.$$

Je nachdem $R \gtreqless \frac{100}{Cp}$, ist $K \gtreqless C$.

10. In letzterem Falle kann eine vollständige Verzehrung der Mise eintreten; aus der Bedingung $K = 0$ ergiebt sich folgender, als Rentengleichung bezeichneter Zusammenhang zwischen C, R, p und n

$$C \cdot r^n = \frac{100R}{p}(r^n - 1).$$

Hieraus folgt

die Mise $$C = \frac{100R}{p}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right);$$

die Rente $$R = \frac{Cp}{100} : \left(1 - \frac{1}{r^n}\right).$$

11. Eine gegebene Mise C kann durch eine gegebene Rente R bei gegebenem Zinsfusse p im Allgemeinen nicht vollständig aufgezehrt werden; die Auszahlung von Renten wird solange erfolgen, bis ein Kassenbestand K übrig ist, der mit den einjährigen Zinsen zusammen weniger als R beträgt. Man hat alsdann die Aufgabe zu lösen, die grösstmögliche Anzahl von Renten, sowie den nach Auszahlung der letzten Rente verbleibenden Kassenrest zu bestimmen.

Die Gleichung No. 9 ergiebt

$$r^n\left(1 - \frac{Cp}{100R}\right) = 1 - \frac{Kp}{100R},$$

folglich ist

1. $$n \log r + \log\left(1 - \frac{Kp}{100R}\right)^{-1} = \log\left(1 - \frac{Cp}{100R}\right)^{-1}.$$

Nach der Voraussetzung ist

$$K < \frac{R}{r}.$$

Hieraus folgt die Ungleichung

$$\frac{Kp}{100R} < \frac{p}{100r}, \quad \text{d. i.} < \frac{p}{100 + p}.$$

Hieraus folgt

$$1 - \frac{Kp}{100r} > \frac{100}{100 + p}, \quad \text{d. i.} > \frac{1}{r}.$$

Nach Gleichung 1. wird daher n als die ganze Zahl des Quotienten

$$\log\left(1 - \frac{Cp}{100R}\right)^{-1} : \log r$$

gefunden; der Divisionsrest ist

$$\log\left(1 - \frac{Kp}{100R}\right)^{-1}$$

und dient zur Bestimmung des Kassenrestes K.

Beispiel. Eine Rentenanstalt gewährt für eine bei Vollendung des 18. Lebensjahres eingezahlte Summe von 344,28 Mk. vom Ende des 50. Lebensjahres an lebenslänglich jährlich 100 Mk. Rente; auf wie viele Jahre ist der

Genuss der Rente berechnet und wie gross ist nach Verlauf dieser Zeit der Kassenrest, wenn die Gesellschaft die Verzinsung zu 4% ansetzt?

Die Mise beträgt

$$344{,}28 \cdot 1{,}04^{31}.$$

Daher ist

$$\frac{Cp}{100R} = \frac{344{,}28 \cdot 1{,}04^{31} \cdot 4}{10000} = 0{,}46440 .$$

Hieraus folgt

$$log\left(1 - \frac{Cp}{100R}\right)^{-1} = 0{,}27116 .$$

Die Division durch $log\,r = 0{,}01703$ ergiebt

$$n = 15, \quad log\left(1 - \frac{Kp}{100R}\right)^{-1} = 0{,}01571 ,$$

also

$$K = 3{,}68 \cdot R : p = 92 .$$

12. Um p zu bestimmen, ersetzt man in der Rentengleichung p durch $100(r - 1)$ und erhält

$$Cr^n = \frac{R}{r-1}(r^n - 1),$$

woraus die Gleichung für r hervorgeht

$$Cr^{n+1} - (C + R)r^n + R = 0, \quad \text{oder}$$

$$1. \qquad r^n\left[1 + \frac{R}{C} - r\right] - \frac{R}{C} = 0 .$$

In diese Gleichung setzt man versuchsweise

$$p = \quad 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5, \ldots$$

also

$$r = 1{,}01; \; 1{,}02; \; 1{,}03; \; 1{,}04; \; 1{,}05; \ldots$$

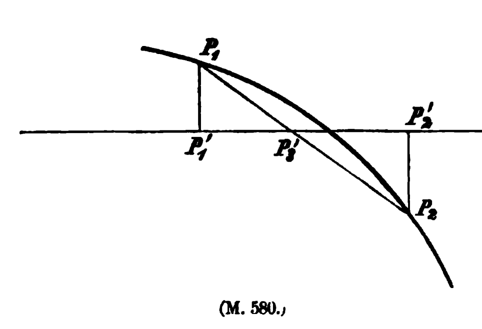
und setzt diese Versuche so lange fort, bis man zu zwei auf einander folgenden Werthen p_1 und p_2 von p gelangt, für welche die linke Seite der Gleichung 1., die wir abkürzungsweise mit y bezeichnen wollen, entgegengesetzte Werthe erhält. Man kann r als Abscisse, y als Ordinate eines Punktes betrachten. Die Curve

$$y = r^n\left[1 + \frac{R}{C} - r\right] - \frac{R}{C}$$

schneidet alsdann die Abscissenachse in einem zwischen r_1 und r_2 gelegenen Punkte. Man erhält die Abscisse des Schnittpunktes angenähert, wenn man den zwischen den Abscissen r_1 und r_2 enthaltenen Curvenbogen mit der durch seine Enden bestimmten Sehne verwechselt. Die Abscisse r_3 des Schnittpunkts der Sehne mit Abscissenachse erhält man aus der Proportion

$$P_1'P_3' : P_3'P_2' = P_1'P_1 : P_2P_2',$$

d. i. $(r_3 - r_1) : (r_2 - r_3) = y_1 : y_2$.



(M. 580.)

Hieraus folgt

$$r_3 = \frac{r_2 - r_1}{y_1 + y_2} \cdot y_1 ,$$

wenn y_2 den absoluten Werth von P_2P_2' bezeichnet.

Hierauf berechnet man die zu r_3 gehörige Ordinate y_3, und wiederholt dann dasselbe Verfahren, indem man y_3 mit derjenigen der beiden Ordinaten $P_1'P_1$ und $P_2'P_2$ zusammen nimmt, welche mit y_3 nicht dasselbe Vorzeichen hat u. s. w. bis man durch diese fortgesetzte Interpolation zu einem Werthe r gelangt ist, für welchen der zugehörige Werth von y hinlänglich genau mit Null übereinstimmt.

Beispiel. Für $C = 28000$, $R = 3000$, $n = 12$ erhält man

$$\frac{R}{C} = 0{,}10714;$$

für $p = 3; \quad 4; \quad 5;$

folgt $y = +\,0{,}00299; \quad +\,0{,}00034; \quad -\,0{,}00349.$

Ersetzt man in der für r_3 gegebenen Interpolationsformel $r_2 - r_1$ durch 0,01, y_1 durch 0,00034, y_2 durch 0,00349, so erhält man

$$r_3 = 1{,}0489.$$

Der zugehörige Werth von y ist $+\,0{,}00001$, also mit Null hinlänglich genau übereinstimmend. Daher ist

$$p = 4{,}89.$$

13. Wenn die am Ende jedes Jahres zahlbare Rente R durch m gleich grosse in gleichen Zwischenräumen zahlbare Renten R' ersetzt werden und die erste Zahlung $1 : m$ Jahr nach Einlegung der Mise erfolgen soll, so hat man R' so zu wählen, dass die Summe aller Einzelzahlungen R', jede vermehrt um die bis zum Jahresschlusse von ihr gebrachten Zinsen, gleich der jährlichen Rente R ist. Man hat daher die Gleichung

$$R = \sum_0^{m-1} R'\left(1 + \frac{k}{m} \cdot \frac{p}{100}\right)$$

$$= mR' + \frac{pR'}{100m}(1 + 2 + \ldots + m - 1),$$

$$= R'\left(m + p \cdot \frac{m-1}{200}\right).$$

Beispiel. Soll die Rente R' vierteljährlich bezahlt werden und ist $p = 5$, so ist

$$R = 4\frac{3}{40} \cdot R', \quad R' = 0{,}24540 \cdot R.$$

14. Für manche Aufgaben aus dem Versicherungswesen ist die Betrachtung einer continuirlichen Rente unter gleichzeitiger Anwendung continuirlicher Capitalisirung der Zinsen von Bedeutung. Bei continuirlicher Verzinsung (No. 5) wächst die Einheit des Kapitals in x Jahren an auf

$$e^{\frac{px}{100}} = v^x,$$

wenn $e^{p:100}$ mit v bezeichnet wird.

Bezeichnet ρ die Summe aller der Beträge (ohne Rücksicht auf Zeitwerth), die während einer Zeiteinheit als Rente gewährt werden, so ist die in dem Zeitelemente dy erfolgte Rentenzahlung

$$\rho dx,$$

und daher der Werth der in x Jahren bezahlten continuirlichen Rente, berechnet für den Zeitpunkt der Auszahlung der letzten Rente

$$S = \int_0^x v^x \rho dx = \frac{100\rho}{p}(v^x - 1).$$

Die Summe R der Zeitwerthe aller im Laufe eines Jahres gezahlten Renten, für das Ende des Jahres berechnet, entsteht hieraus, wenn man $x = 1$ setzt; man erhält

$$R = \frac{100\rho}{p}(v - 1).$$

Durch Division ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen

$$S = R \cdot \frac{v^x - 1}{v - 1}.$$

Die unmittelbar vor Beginn der Auszahlung dieser Rente eingezahlte Mise C hat sich in x Jahren vermehrt auf

$$Cv^x.$$

Vergleicht man dies mit dem für S gegebenen Werthe, so erhält man die Rentengleichung für den Fall der continuirlichen Rente

$$Cv^x = R \cdot \frac{v^x - 1}{v - 1}.$$

15. Die Zurückzahlung (Tilgung, Amortisation) einer Anleihe C erfolgt in der Regel so, dass der Schuldner (Staat, Gemeinde, Actiengesellschaft u. s. w.) eine bestimmte, unveränderliche Summe R alljährlich auf Verzinsung und Zurückzahlung verwendet; was man von dieser Summe nicht zur Bezahlung der Zinsen auf den noch nicht zurückgezahlten Theil der Anleihe braucht, wird zur Zurückzahlung eines Theils der Schuld verwendet.

Der Zusammenhang zwischen C, R, dem Zinsfusse p und der Dauer n der Amortisation ergiebt sich aus der Bemerkung, dass man die Gesammtheit der Gläubiger als einen Rentengläubiger ansehen kann, der jährlich die Summe R so lange erhält, bis das Kapital C aufgezehrt ist. So lange nur die Zinsen des Kapitals an die Gläubiger bezahlt werden, ändert sich die Schuld nicht; daher ist die Schuld C die Mise für die Rente R und man hat

$$C \cdot r^n = \frac{100R}{p}(r^n - 1).$$

Hat man ein System von zusammengehörigen Werthen C, R, p und n ermittelt, so gilt es nun, den Tilgungsplan zu entwerfen; in demselben ist anzugeben, wie viel jährlich zur Verzinsung des Anleiherestes und wie viel zur Tilgung zu verwenden ist. Hierbei setzen wir voraus, dass die Schuld in Abschnitte (Staatsschuldscheine, Prioritätsobligationen u. s. w.) zerlegt ist, von denen wir der Einfachheit wegen annehmen, dass sie alle auf den gleichen Betrag A lauten.

Man hat bei der ersten Tilgung noch die Zinsen der ganzen Anleihe zu bezahlen, also $pC : 100$, und kann daher zur Tilgung verwenden

$$R - \frac{pC}{100}.$$

Ist q_1 die ganze Zahl des Quotienten

$$\left(R - \frac{pC}{100}\right) : A,$$

und ρ_1 der Rest, so werden q_1 Schuldscheine im Gesammtbetrage $q_1 A$ getilgt, und der Rest ρ_1 zu $p\%$ verzinslich angelegt. Am Ende des zweiten Jahres hat man die Zinsen auf

$$C - q_1 A$$

zu bezahlen; zur Tilgung ist daher verfügbar

$$R - (C - q_1 A)$$

und ausserdem noch der durch die Zinsen eines Jahres vermehrte Tilgungsrest ρ_1, also zusammen

$$R - (C - q_1 A) + \rho_1 r.$$

Man tilgt hiernach am Ende des 2. Jahres so viele (q_2) Schuldscheine, als die ganze Zahl des Quotienten beträgt

$$[R - (C - q_1 A) + \rho_1 r] : A$$

und überträgt den Rest ρ_2 auf das nächste Jahr.

Dieses Verfahren ist bis zur vollständigen Tilgung der Anleihe zu wiederholen.

Den Tilgungsresten, die jedes Jahr in den Händen des Schuldners bleiben, stehen gleich grosse, noch ungetilgte Beträge in den Händen der Gläubiger gegenüber; die für die letzteren zu zahlenden Zinsen gleichen sich gegen die zu Gunsten des Schuldners verzinsten Tilgungsreste aus, so dass durch die Tilgungsreste der Abschluss der ganzen Tilgung nur insoweit beeinträchtigt werden kann, als durch die von Jahr zu Jahr zu berechneten Zinsen der Tilgungsreste eine Ungenauigkeit in den letzten Stellen hervorgerufen werden kann, die indess als unwesentlich zu betrachten ist.

Beispiel. Eine Anleihe von 50000 Mark soll durch 10 gleiche jährliche Zahlungen zu 4% verzinst und getilgt werden; wie viel ist jährlich hierfür aufzuwenden und wie gestaltet sich der Tilgungsplan, wenn die Schuld in 500 Abschnitte von 100 Mark eingetheilt ist?

Aus der Gleichung

$$R = \frac{Cp}{100}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right)$$

folgt

$$R = 6164,6 .$$

Die Zinsen der Anleihe betragen 2000 Mk.; aus der Differenz

$$6164,6 - 2000 = 4164,6$$

ergiebt sich, dass 41 (q_1) Schuldscheine getilgt und 64,6 Mk. (ρ_1) Tilgungsrest auf das nächste Jahr übertragen werden. — Am Ende des 2. Jahres sind zu verzinsen 500 — 41 = 459 Schuldscheine, also an Zinsen auszugeben 1836,0 Mk.; da ρ_1 durch die Zinsen eines Jahres auf 67,2 Mk. anwächst, so verbleiben zur Tilgung

$$6164,6 + 67,2 - 1836,0 = 4395,8 .$$

Folglich werden am Schlusse des zweiten Jahres 43 Schuldscheine getilgt und 95,8 Mk. auf das nächste Jahr übertragen.

Auf diese Weise ergiebt sich der nachstehende Tilgungsplan. In der Spalte Kapitalrest ist angegeben, welches Kapital im nächsten Jahre zu verzinsen ist.

Ende des Jahres	Zinsen	Tilgung in Stücken	Kapitalrest zu 100 Mark	Tilgungsrest	
1	2000	41	459	64,6	1
2	1836	43	416	95,8	2
3	1664	46	370	0,2	3
4	1480	46	324	84,8	4
5	1296	49	275	56,8	5
6	1100	51	224	23,7	6
7	896	52	172	93,3	7
8	688	55	117	73,7	8
9	468	57	60	73,2	9
10	240	60		0,7	10

Der schliessliche Kapitalbestand (0,7 Mk.) lässt sich nur dadurch herabdrücken, dass man die Rechnung mit grösserer Genauigkeit, als hier, durchführt; ist aber praktisch ganz ohne Bedeutung.

16. Den in der ungleichmässigen Gütervertheilung wurzelnden sozialen Missständen kann man unter anderem dadurch entgegenarbeiteu, dass man die Ansammlung grosser, milden Zwecken aller Art bestimmter Kapitalien in den Händen von Staats- oder Gemeindeverwaltungen oder von gemeinnützigen Vereinen möglichst befördert. Je mehr es die Staatsregierungen für eine ihrer

wesentlichen Aufgaben ansehen, die Nothstände in den untersten Volksschichten durch Ausdehnung der Haftpflicht der Arbeitgeber, durch Einführung obligatorischer Kranken- und Invalidenversicherung möglichst abzuschwächen, um so mehr werden dann die der Wohlthätigkeit zugewiesenen Stiftungsgelder zur Ausgleichung bei Nothlagen auch in den übrigen Bevölkerungsschichten, zur Unterstützung von Lernenden aller Art, zur Beihülfe in Krankheitsfällen, zur Gewährung von Asylen für vereinsamte oder der sittlichen Anleitung bedürftige Personen u. s. w. verwendbar sein.

Die Grundlagen zur Ansammlung grosser Kapitalien zu diesen Zwecken müssen nach wie vor durch Schenkungen und Vermächtnisse erfolgen.

Es können leicht Mittel angegeben werden, durch welche solche Kapitalien, ohne wesentliche Beeinträchtigung des Zweckes, zu dem sie gestiftet worden sind, zur Kapitalvermehrung benutzt werden können.

Als einfachstes Mittel empfiehlt es sich, dass für die Verwaltungen von Stiftungen folgende Grundsätze angenommen werden:

A. Man behält sich bei der Uebernahme jedes für milde Zwecke gestifteten Kapitals vor, dessen Zinsen nicht sofort im Sinne der Stiftung zu verwenden, sondern es zuvor während einer Reihe von Jahren durch Zinseszins sich vermehren zu lassen.

Es würde sich empfehlen, diese Wartezeit der Kapitalien im Allgemeinen vorher zu bestimmen, etwa so, dass man 5 oder 10 Jahre wählt, je nachdem es mehr oder weniger dringend erwünscht ist, dass die Zinsen des Kapitals stiftungsgemäss verwendet werden.

B. Nach Ablauf der Wartezeit wird nicht der ganze Zinsertrag des Kapitals stiftungsgemäss verwendet, sondern nur ein bestimmter Bruchtheil desselben, etwa zwei Drittel; das letzte Drittel dient zur Kapitalvermehrung.

C. Der zur Kapitalvermehrung dienende Bruchtheil der Zinsen wird zunächst für eine bestimmte Reihe von Jahren der Stiftung zugewiesen, aus welcher er fliesst. Die Verwaltung behält sich das Recht vor, nach Ablauf dieser Zeit den genannten Betrag nach freiem Ermessen anderen milden Stiftungen zuzuführen.

Nimmt man an, dass Stiftungsgelder nach Abzug der Verwaltungskosten eine Verzinsung von 4,25 % zulassen, so wächst ein Kapital C in 5 bez. in 10 Jahren an auf

$$K = 1{,}0425^5 \cdot C, \quad \text{bez.} \quad 1{,}0425^{10} \cdot C,$$

d. i. auf den 1,23fachen, bez. 1,52fachen Betrag.

Hieraus ist ersichtlich, dass nach 5jähriger Wartezeit das Kapital bereits im 6. Jahre zu $\frac{2}{3} \cdot 4{,}25 = 2{,}83$ % nur um den 10. Theil weniger stiftungsgemäss verwendbare Zinsen bringt, als wenn es ohne Wartezeit sofort die vollen Zinsen zu 4,25 % für die Stiftung abgeworfen hätte; nach 10jähriger Wartezeit betragen die Zinsen im 11. Jahre zu 2,83 % ebensoviel wie die des ursprünglich gestifteten Kapitals zu 4,3 %.

Wird der dritte Theil des jährlichen Zinsbetrags zur Kapitalvermehrung verwendet, so wächst das Kapilal durch Zinseszins zu $4{,}25 : 3 = 1{,}417$ %.

Nach Ablauf von $n + 5$ bez. $n + 10$ Jahren nach der Stiftung erreicht das Kapital bei 5. bez. 10jähriger Wartezeit den Betrag

$$1{,}0425^5 \cdot 1{,}01417^n \cdot C, \quad \text{bez.} \quad 1{,}0425^{10} \cdot 1{,}01417^n \cdot C.$$

Die folgende Tafel enthält für einige Werthe von n die Faktoren, mit denen man C multipliciren muss, um den Endwerth nach $n$jähriger stiftungsgemässer Verwendung, (d. i. $n + 5$ bez. $n + 10$ Jahre nachdem das Kapital gestiftet wurde) zu erhalten:

n	40	60	80	100	120	180
5 Jahre Wartezeit	2,229	2,864	3,795	5,028	6,666	15,50
10 Jahre „ „	2,662	3,527	4,673	6,192	8,203	19,08

Wenn man es nicht räthlich finden sollte, die vorgeschlagene auf Kapitalvermehrung gerichtete Verwaltung von Stiftungsgeldern ganz allgemein einzuführen, so könnte doch durch Gesetz eine solche Verwaltungsart als zulässig erkannt werden. Man könnte dann bestimmen, dass die zur Verwaltung einer Stiftung bestimmten Behörden nach der Uebernahme derselben bei einer Oberbehörde um die Erlaubniss nachsuchen können, das Kapital während einer bestimmten Zeit — vielleicht 60 bis 70 Jahre lang — auf Vermehrung verwalten und die durch die Vermehrung geschaffenen Kapitalien in bestimmter Weise auch für andere, verwandte, näher anzugebende Zwecke verwenden zu dürfen; nach Ablauf dieser Zeit hätte dann die Oberbehörde Gelegenheit zu prüfen, ob eine Fortsetzung der vermehrenden Verwaltung in dem vorliegenden Falle angezeigt erscheint oder nicht.

Dabei wäre als Grundsatz auszusprechen, dass man das Einverständniss des Stifters mit der vermehrenden Verwaltung voraussetzt, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil erklärt wird; hierdurch dürften alle juristischen Bedenken gehoben sein.

Bis zur gesetzlichen Regelung dieser Angelegenheit wäre es zu wünschen, dass Personen, die die Absicht haben eine Stiftung zu errichten, für die hier gemachten Vorschläge erwärmt werden, so dass sie die vermehrende Verwaltung für die zu begründende Stiftung ausdrücklich zulassen*).

§ 3. Berechnung der Prämien für Renten-, Lebens- und Aussteuerversicherung.

1. Wenn eine Summe R nach Verlauf von n Jahren unter der Voraussetzung zahlbar ist, dass ein Ereigniss eingetreten ist, dessen Eintritt die Wahrscheinlichkeit w hat, so ist der heutige Werth der Summe

$$R \cdot \frac{1}{r^n} \cdot w .$$

Denn ist z. B. jede von a_x heute x jährigen Personen verpflichtet, nach n Jahren, im Falle, dass die Person diesen Zeitpunkt erlebt, R zu zahlen, so wird die Summe nur von a_{x+n} Personen bezahlt; der auf heute berechnete Zeitwerth aller wirklich geleisteten Zahlungen beträgt daher

$$R \cdot \frac{1}{r^n} \cdot a_{x+n} ,$$

und der durchschnittlich auf eine Person entfallende Betrag ist

$$R \cdot \frac{1}{r^n} \cdot \frac{a_{x+n}}{a_x} = R \cdot \frac{1}{r^n} \cdot w ,$$

wenn w die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass eine heute x Jahre alte Person noch n Jahre lebt.

*) Aehnliche Vorschläge macht MÖLLINGER, Das cyclische Verwaltungssystem. Zürich 1879.

2. Hat eine heute n jährige Person lebenslänglich eine Jahresrente vom Betrage 1 (Mark, Gulden, Franken) zu beziehen, und erfolgt die Zahlung am Ende jedes Jahres, so ist der auf heute berechnete Werth der lebenslänglichen Rente

1. $$\overset{n}{R}_1 = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{r} + \frac{a_{n+2}}{a_n} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{a_{n+3}}{a_n} \cdot \frac{1}{r^3} + \ldots$$

Diese Reihe hört auf, sobald in der Sterblichkeitstafel $a_{n+x} = 0$ ist.

Wird die Rente praenumerando gezahlt, so vermehrt sich die Reihe 1. um die heute zahlbare Rente; bezeichnet man die praenumerando zahlbare Rente mit

$${}_1\overset{n}{R},$$

so hat man daher

2. $${}_1\overset{n}{R} = 1 + \overset{n}{R}_1 .$$

Wenn eine $n - s$ jährige Person heute eine Summe C bezahlt, um damit eine nach Vollendung des $n$ten Lebensjahres beginnende lebenslängliche jährliche Rente 1 zu erwerben, so hat man durch Vergleichung der auf heute berechneten Zeitwerthe

$$C = \frac{1}{r^s} \cdot \frac{a_n}{a_{n-s}} \cdot {}_1\overset{n}{R};$$

denn der heutige Werth der 1., 2., 3., ... Rente ist

$$\frac{a_n}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^s}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^{s+1}}, \quad \frac{a_{n+3}}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^{s+2}}, \ldots$$

Diese Grössen erhält man aus dem 1., 2., 3., ... Gliede der Reihe 2. durch Multiplication mit dem Faktor

$$\frac{a_n}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^s}.$$

3. Eine Person macht zu verschiedenen Zeiten ungleiche Einzahlungen, um dadurch eine am Ende des $n$ten Lebensjahres beginnende jährliche Rente zu erwerben; wie gross ist dieselbe?

Die gesuchte Rente wird gefunden, indem man nach No. 2, 3 für jede einzelne Einzahlung die Rente berechnet und alle diese Renten addirt. Die am Ende des $(n - s)$ten Jahres geleistete Einzahlung C gewährt die jährliche Rente G, wenn

$$C = \frac{1}{r^s} \cdot \frac{a_n}{a_{n-s}} \cdot G \cdot {}_1\overset{n}{R};$$

daher hat man

$$G = \frac{a_{n-s}}{a_n} \cdot r^s C : {}_1\overset{n}{R}.$$

Sind die Einzahlungen $C, D, E, \ldots$ am Ende der Lebensjahre $n - s$, $n - t$, $n - u, \ldots$ erfolgt, so ist daher die dafür erworbene Rente

$$G = (a_{n-s} r^s C + a_{n-t} r^t D + a_{n-u} r^u E + \ldots) : {}_1\overset{n}{R} a_n .$$

4. Eine $n - s$ jährige Person will durch e gleiche jährliche Einzahlungen P $(e < s)$, die am heutigen Tage beginnen sollen, eine jährliche Leibrente 1 erwerben, die nach s Jahren zum ersten Male ausgezahlt werden soll. Wie viel beträgt P (die Prämie)?

Wenn anstatt P die Zahlung 1 jährlich erfolgte, so würde der auf heute berechnete Werth der Zahlungen der Unterschied einer heute beginnenden lebenslänglichen Rente

$${}_1\overset{n-s}{R}$$

und einer nach Vollendung des $(n - s + e)$ten Jahres beginnenden sein. Der heutige Werth der letzteren ist

$$\overset{n-s+e}{{}_1R} \cdot \frac{a_{n-s+e}}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^e}.$$

Daher hat man zur Bestimmung von P die Gleichung

$$P\left(\overset{n-s}{{}_1R} - \frac{a_{n-s+e}}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^e} \cdot \overset{n-s+e}{{}_1R}\right) = \frac{a_n}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^s} \cdot \overset{n}{{}_1R}.$$

5. Bei den in No. 2, 3, 4, angegebenen Formeln ist vorausgesetzt worden, dass beim Tode einer versicherten Person die Erben keinen Anspruch an die Bank machen, sondern die Bank der Erbe der an sie geleisteten Zahlungen ist. Wenn der Versicherte stirbt, ehe er in den Rentengenuss eingetreten ist, oder erst kurze Zeit nach Eintritt in denselben, nachdem er also auf seine Einzahlung hin sehr wenig an Rente zurückerhalten hat, so werden die Erben offenbar benachtheiligt. Man hat daher solche Versicherungen eingerichtet, bei denen beim frühzeitigen Tode des Versicherten von der Bank eine entsprechende Zahlung an die Rechtsnachfolger geleistet wird. Wir wollen annehmen, dass sich die Bank verpflichtet, beim Tode des Versicherten die baar eingezahlten Prämien (ohne Zinsen) zurück zugewähren, wenn der Versicherte stirbt, ehe er in den Rentengenuss eingetreten ist; wenn er bereits einige Renten bezogen hatte, so soll der Unterschied der baar gezahlten Prämien und der Renten zurückgewährt werden.

Wir beschränken uns hier darauf, unter diesen Voraussetzungen die Zahlung C auszurechnen, die eine $(n-s)$ jährige Person zu leisten hat, um eine vom Ende des $n$ten Jahres beginnende Rente $\mathfrak{R}$ zu erwerben.

Wenn die Person im 1, 2, 3, . . $s$ten Jahre nach Abschluss des Versicherungsvertrags stirbt, so hat die Bank die volle Einzahlung C zurückzugeben; die auf heute berechneten Zeitwerthe aller dieser Zahlungen sind

$$\left[\left(1 - \frac{a_{n-s+1}}{a_{n-s}}\right)\frac{1}{r} + \left(1 - \frac{a_{n-s+2}}{a_{n-s}}\right)\frac{1}{r^2} + \ldots + \left(1 - \frac{a_n}{a_{n-s}}\right)\frac{1}{r^s}\right] C.$$

Wenn die Person im $(n+i)$ten Lebensjahre stirbt, so zahlt die Bank nur den Betrag C vermindert um die ersten i Renten, also $C - i\mathfrak{R}$ zurück. Der heutige Werth dieser Zahlung ist

$$\left(1 - \frac{a_{n+i}}{a_{n-s}}\right) \cdot \frac{1}{r^{s+i}} \cdot (C - i\mathfrak{R}).$$

Der heutige Werth dieser letzteren Zahlungen zusammen genommen ist

$$\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_{n-s}}\right) \cdot \frac{1}{r^{s+1}}(C - \mathfrak{R}) + \left(1 - \frac{a_{n+2}}{a_{n-s}}\right)\frac{1}{r^{s+2}} \cdot (C - 2\mathfrak{R})$$
$$+ \left(1 - \frac{a_{n+3}}{a_{n-s}}\right)\frac{1}{r^{s+3}}(C - 3\mathfrak{R}) + \left(1 - \frac{a_{n+4}}{a_{n-s}}\right)\frac{1}{r^{s+4}} \cdot (C - 4\mathfrak{R}) + \ldots$$

Diese Reihe ist nur soweit fortzusetzen, als die Differenz $C - i\mathfrak{R}$ positiv ist, denn die Bank zahlt nur so lange an die Erben, als die baar gezahlten Renten zusammen weniger betragen, als die Einlage C. Ist daher i die ganze Zahl des Quotienten $C : \mathfrak{R}$ (so dass also $C : \mathfrak{R}$ aus der ganzen Zahl i und einem echten Decimalbruche besteht), so ist die gesammte Leistung H der Bank an die Erben, reducirt auf den heutigen Tag,

$$H = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \ldots + \frac{1}{r^{s+i}}\right) C$$
$$- \left(\frac{a_{n-s+1}}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r} + \frac{a_{n-s+2}}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{a_{n-s+3}}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^3} + \ldots + \frac{a_{n+i}}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^{s+i}}\right) C$$
$$- \left[\frac{1}{r^{s+1}}\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_{n-s}}\right) - \frac{2}{r^{s+2}}\left(1 - \frac{a_{n+2}}{a_{n-s}}\right) - \ldots - \frac{i}{r^{s+i}}\left(1 - \frac{a_{n+i}}{a_{n-s}}\right)\right] \cdot \mathfrak{R}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$H = A \cdot C + B \cdot \mathfrak{R},$$

so hat man daher zur Bestimmung von C die Gleichung

$$C = A \cdot C + B \cdot \mathfrak{R} + \frac{1}{r^s} \cdot \frac{a_n}{a_{n-s}} \cdot {}_1\overset{n}{R} \cdot \mathfrak{R}.$$

6. Zwei Personen A und B, die erste m Jahre alt, die andere n Jahre, beziehen vom Ende des nächsten Jahres an eine Rente 1, die so lange ausgezahlt wird, als beide Personen am Leben sind; wie gross ist der heutige Werth dieser Rente?

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Personen nach i Jahren noch leben, ist

$$\frac{a_{m+i}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+i}}{a_n};$$

folglich ist der gesuchte Werth

$$\overset{m,n}{R}_1 = \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{r} + \frac{a_{m+2}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+2}}{a_n} \cdot \frac{1}{r^2} + \ldots$$

Soll die Rente praenumerando gezahlt werden, so ist der heutige Werth

$${}_1\overset{m,n}{R} = 1 + \overset{m,n}{R}_1,$$

da zu den obigen Zahlungen noch die heute fällige Zahlung 1 addirt werden muss.

Man kann das Paar A, B als ein Ganzes ansehen und sich eine Sterblichkeitstabelle für Paare, deren Theilnehmer heute m und n Jahre alt sind, entwerfen; wenn dieselbe mit dem Produkte

$$a_{m,n} = a_m a_n$$

beginnt, so würde, falls alle B am Leben blieben, nach i Jahren infolge Absterbens der Personen A die Anzahl der noch lebenden Paare

$$a_{m+i} a_n$$

sein; da aber von a_n Personen B nur noch a_{n+i} am Leben sind, so vermindert sich die Anzahl der lebenden Paare in demselben Verhältnisse, also erhält man für die Zahl der nach i Jahren noch lebenden Paare

$$a_{m+i,\,n+i} = a_{m+i} \cdot a_{n+i}.$$

Hieraus folgt sofort, dass alle in Bezug auf Rentenversicherung einer einzelnen Person geltenden Formeln auch auf Rentenversicherung für Paare gilt, wenn man nur statt der Zahlen a_{n+s} die Zahlen $a_{m+s,\,n+s}$ setzt.

7. Ist die Rente zahlbar, solange von den beiden Personen überhaupt noch eine lebt, also bis zum Tode der zuletzt sterbenden, so ist in $\overset{n}{R}_1$ an Stelle der Zahlen $a_{n+s} : a_n$ die Wahrscheinlichkeit dafür einzuführen, dass nach s Jahren noch eine der beiden Personen am Leben ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist

$$1 - \left(1 - \frac{a_{m+s}}{a_m}\right)\left(1 - \frac{a_{n+s}}{a_n}\right) = \frac{a_{m+s}}{a_m} + \frac{a_{n+s}}{a_n} - \frac{a_{m+s,\,n+s}}{a_{m,n}}.$$

Daher ist der gesuchte heutige Werth der Rente

$$\overset{m}{R}_1 + \overset{n}{R}_1 - \overset{m,n}{R}_1.$$

Ist die Rente zahlbar, so lange B lebt, beginnt aber die Zahlung erst, wenn A gestorben ist, so ist $a_{n+s} : a_n$ durch die Wahrscheinlichkeit dafür zu ersetzen, dass B lebt und A gestorben ist, also durch

$$\left(1 - \frac{a_{m+s}}{a_m}\right) \cdot \frac{a_{n+s}}{a_n}.$$

Hieraus ergiebt sich sofort für den gesuchten Werth

$$\overset{m}{R}_1 - \overset{m,n}{R}_1.$$

8. Drei Personen A, B, C im Alter von m, n, p Jahren versichern heute eine Rente 1, zahlbar vom Ende des nächsten Jahres an, so

lange noch alle drei Personen am Leben sind, also bis zum Tode der zuerst sterbenden. Um den heutigen Werth der Rente zu finden, hat man in $\overset{n}{R}_1$ die Lebenswahrscheinlichkeit $a_{n+s} : a_n$ zu ersetzen durch die Wahrscheinlichkeit, dass die Gruppe A, B, C noch vollzählig ist, also durch

$$\frac{a_{m+s}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+s}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+s}}{a_p}.$$

Daher ist der gesuchte Werth

$$\overset{m,n,p}{R}_1 = \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+1}}{a_p} \cdot \frac{1}{r} + \frac{a_{m+s}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+s}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+s}}{a_p} \cdot \frac{1}{r^2} + \ldots$$

Derselbe kann ebenfalls angesehen werden wie eine auf das Leben einer einfachen Person versicherte Rente, wenn nur eine Sterblichkeitstafel zu Grunde gelegt wird, die statt der Zahlen a_{n+s} die Produkte

$$a_{m+s} \cdot a_{n+s} \cdot a_{p+s}$$

enthält. Man kann daher auch auf diesen Fall die übrigen in No. 2 bis 5 gegebenen Formeln übertragen. Beginnt die Rente erst, nachdem A und B gestorben sind und dauert bis zum Tode von C (Rentenversicherung für Kinder für den Fall ihrer gänzlichen Verwaisung), so hat man statt der Lebenswahrscheinlichkeit zu benutzen

$$\left(1 - \frac{a_{m+s}}{a_m}\right)\left(1 - \frac{a_{n+s}}{a_n}\right) \frac{a_{p+s}}{a_p}.$$

Daher ergiebt sich

$$\overset{p}{R}_1 - \overset{m,p}{R}_1 - \overset{n,p}{R}_1 + \overset{m,n,p}{R}_1.$$

Soll die Rente so lange gezahlt werden, als B und C leben, aber erst nach dem Ableben von A, so hat man statt der Lebenswahrscheinlichkeit zu setzen

$$\left(1 - \frac{a_{m+s}}{a_m}\right) \frac{a_{n+s}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+s}}{a_p},$$

Daher erhält man

$$\overset{n,p}{R}_1 - \overset{m,n,p}{R}_1.$$

Wird die Rente so lange fortgezahlt, bis alle drei Personen gestorben sind, so benutzt man die Wahrscheinlichkeit

$$1 - \left(1 - \frac{a_{m+s}}{a_m}\right)\left(1 - \frac{a_{n+s}}{a_n}\right)\left(1 - \frac{a_{p+s}}{a_p}\right)$$

und erhält

$$\overset{m}{R}_1 + \overset{n}{R}_1 + \overset{p}{R}_1 - \overset{m,n}{R}_1 - \overset{m,p}{R}_1 - \overset{n,p}{R}_1 + \overset{m,n,p}{R}_1.$$

9. Wird die Jahresrente 1 ratenweise gezahlt, nämlich je $1 : t$ nach Ablauf von $1 : t$ Jahren, so bedarf man zur Berechnung des heutigen Werthes einer Sterblichkeitstafel, die nicht von Jahr zu Jahr fortschreitet, sondern für das Intervall $1 : t$ construirt ist. Eine solche Tafel erhält man mit einer für den vorliegenden Zweck ausreichenden Genauigkeit, wenn man die gegebenen Tafeln durch Interpolation unter der Annahme ergänzt, dass das Absterben im Laufe eines Jahres gleichmässig erfolgt.

Von a_m Personen, die das $m$te Lebensjahr erfüllen, sterben im Laufe des nächsten Jahres $a_m - a_{m+1}$ Personen, im $t$ten Theile des Jahres sterben daher

$$\frac{1}{t}(a_m - a_{m+1}),$$

und in $\lambda : t$ Jahren

$$\frac{\lambda}{t}(a_m - a_{m+1}).$$

Die Anzahl derer, die das Alter $m + \lambda : t$ erreichen, ist

$$a_m - \frac{\lambda}{t}(a_m - a_{m+1}) = \frac{(t-\lambda)a_m + \lambda a_{m+1}}{t}.$$

Die Wahrscheinlichkeit einer $n$jährigen Person, das Alter $m + \lambda : t$ zu erfüllen, ist folglich

$$\frac{(t-\lambda)a_m + \lambda a_{m+1}}{t a_n}.$$

Da wir voraussetzen, dass die Kapitalisirung der Zinsen nur an den Jahresschlüssen erfolgt, so muss eine um $\lambda : t$ Jahre vom Jahresanfang entfernte Zahlung zunächst durch den Faktor

$$1 : \left(1 + \frac{\lambda p}{100 t}\right)$$

auf den vorhergehenden Jahresanfang und dann in bekannter Weise auf den heutigen Tag zurückdiscontirt werden. Der heutige Werth der an die $m + \lambda : t$ jährige Person zahlbaren Rente $1 : t$ ist daher

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda p}{100 t}\right) r^{m-n}} \cdot \frac{(t-\lambda)a_m + \lambda a_{m+1}}{t a_n} \cdot \frac{1}{t}.$$

Die Rechnung nach dieser genauen Formel ist wegen des veränderlichen Divisors $1 + \frac{\lambda p}{100 t}$ unbequem. Eine bequemere, hinlänglich genaue Formel wird erhalten, wenn man die zur Zeit $m + \lambda : t$ fällige Ratenzahlung durch den Faktor

$$1 + \frac{t-\lambda}{t} \cdot \frac{p}{100}$$

auf das Ende des laufenden Jahres und die so erhaltene Summe dann rückwärts auf den heutigen Tag discontirt. Dadurch erhält man als discontirten Werth der im $(m+1)$ten Lebensjahre des Rentners zahlbaren Renten

$$1. \qquad \frac{1}{r^{m-n+1}} \cdot \frac{1}{t^2 a_n} \sum_1^t \left(1 + \frac{t-\lambda}{t} \cdot \frac{p}{100}\right) [(t-\lambda)a_m + \lambda a_{m+1}].$$

Zur Bildung der Summe hat man von den Formeln Gebrauch zu machen

$$\Sigma\lambda = \frac{t(t+1)}{2}, \quad \Sigma(t-\lambda) = \frac{t(t-1)}{2},$$

$$\Sigma(t-\lambda)^2 = \tfrac{1}{6} t(t-1)(2t-1), \quad \Sigma(t-\lambda)\lambda = \tfrac{1}{6} t(t^2-1).$$

Man erhält, wenn man die Summe mit S bezeichnet,

$$2. \qquad \frac{1}{t^2} \cdot S = \frac{t-1}{2t}\left[1 + \frac{p(2t-1)}{300 t}\right] a_m + \frac{t+1}{2t}\left[1 + \frac{p(t-1)}{300 t}\right] a_{m+1}.$$

Aus 1. und 2. ergiebt sich der heutige Werth einer Rente $1 : t$, die an eine $n$jährige Person nach jedem $t$ten Theile eines Jahres zahlbar ist und nach Ablauf von $1 : t$ Jahr beginnt,

$$\overset{n}{R}_t = \frac{1}{r} \cdot \frac{t-1}{2t}\left[1 + \frac{p(2t-1)}{300 t}\right] {}_1\overset{n}{R} + \frac{t+1}{2t}\left[1 + \frac{p(t-1)}{300 t}\right] \cdot \overset{n}{R}_1.$$

Ersetzt man hier ${}_1\overset{n}{R}$ durch $\overset{n}{R}_1 + 1$, so ergiebt sich nach gehöriger Zusammenrechnung

$$3. \qquad \overset{n}{R}_t = \left(1 + \frac{p^2}{30000 r} \cdot \frac{t^2-1}{t^2}\right) \overset{n}{R}_1 + \left(1 + \frac{p}{300} \cdot \frac{2t-1}{t}\right) \cdot \frac{t-1}{2tr}.$$

Man kann links im ersten Gliede ohne merklichen Fehler den vor $\overset{n}{R}_1$ stehenden Faktor durch 1 ersetzen; im zweiten Gliede kann man $1 : r$ durch

$$1 - \frac{p}{100}$$

ersetzen, das Produkt ausführen und darin das mit p^2 multiplicirte Glied unterdrücken. Hierdurch erhält man

$$4. \qquad \overset{n}{R}_t = \overset{n}{R}_1 + \left(1 - \frac{p}{300} \cdot \frac{t+1}{t}\right) \cdot \frac{t-1}{2t}.$$

Hieraus kann man einen Annäherungswerth für eine continuirliche Rente $\overset{n}{\underset{\infty}{R}}$ erhalten, indem man $t = \infty$ setzt; vom genauen Werthe weicht der so berechnete infolge der Annahme gleichmässiger Vertheilung der Sterbefälle innerhalb eines Jahres ab; ferner ist zu bemerken, dass in dem so erhaltenen Werthe die Voraussetzung enthalten ist, dass die Verzinsung im Laufe eines Jahres nur einfach (ohne Zinseszins) erfolgt. Nimmt man neben der continuirlichen Rentenzahlung auch eine continuirliche Kapitalisirung der Zinsen an, so erhält man einen abweichenden Werth, für welchen man indess den Werth $\overset{n}{\underset{\infty}{R}}$ als genügende Annäherung betrachten kann. Durch die Substitution $t = \infty$ ergiebt sich

$$5. \qquad \overset{n}{\underset{\infty}{R}} = \overset{n}{R}_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{300}\right).$$

Dieselbe Formel ist auch auf die Renten

$$\overset{m,n}{\underset{\infty}{R}}, \quad \overset{m,n,p}{\underset{\infty}{R}},$$

sowie auf die übrigen in No. 6 bis 9 betrachteten Fälle anwendbar, da alle diese Renten sich als Renten $\overset{n}{R}_1$ oder ${}_1\overset{n}{R}$ ansehen lassen, denen verschiedene Sterblichkeitstafeln zu Grunde liegen.

10. Der genaue heutige Werth einer an eine $n$jährige Person zahlbaren, sofort beginnenden, stetigen Rente ergiebt sich (§ 2, 14), wenn die Summe der in einem Jahre baar gezahlten Beträge 1 ist, und stetige Kapitalisirung der Zinsen stattfindet, zu

$$1. \qquad \overset{n}{\underset{\infty}{R}} = \int_0^\infty \frac{a_{n-x}}{a_n} \cdot v^x dx;$$

ferner ist

$$2. \qquad \overset{m,n}{\underset{\infty}{R}} = \int_0^\infty \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} \cdot v^x dx,$$

$$3. \qquad \overset{m,n,p}{\underset{\infty}{R}} = \int_0^\infty \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+x}}{a_p} \cdot v^x dx.$$

Um diese Integrale berechnen zu können, muss a_{n+x} als Function von $n + x$ bekannt sein. Legt man das GOMPERTZ-MAKEHAM'sche Gesetz zu Grunde (§ 1, No. 7), so hat man

$$a_{n+x} = cK^{q^{n+x}} h^{n+x}, \quad a_n = cK^{q^n} h^n,$$

$$\frac{a_{n+x}}{a_n} = \frac{B_n{}^{q^x}}{B_n} \cdot h^x,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$K^{q^n} = B_n.$$

Hierdurch verwandeln sich die Formeln 1., 2. und 3. in

$$4. \qquad \overset{n}{\underset{\infty}{R}} = \frac{1}{B_n} \int_0^\infty B_n{}^{q^x} (hv)^x dx,$$

5. $$\overset{m,n}{\underset{\infty}{R}} = \frac{1}{B_m B_n}\int_0^\infty (B_m B_n)^{q^x}(h^2 v)^x dx,$$

6. $$\overset{m,n,p}{\underset{\infty}{R}} = \frac{1}{B_m B_n B_p}\int_0^\infty (B_m B_n B_p)^{q^x}(h^3 v)^x dx.$$

Zur Berechnung der Renten

$$\overset{m,n}{\underset{\infty}{R}},\ \overset{m,n,p}{\underset{\infty}{R}}$$

hat man nicht nöthig, die Rechnung für alle einzelnen Combinationen m, n und m, n, p zu führen. Bei Benutzung der soeben gegebenen Formeln genügt es, die Renten für Personen gleichen Alters zu berechnen. Hat man nämlich für jedes vorkommende Lebensjahr s die Tafeln der Werthe

$$\overset{s,s}{\underset{\infty}{R}},\ \overset{s,s,s}{\underset{\infty}{R}}$$

berechnet, so bestimme man die Zahl s aus der Gleichung

7. $$B_s^2 = B_m B_n, \quad \text{bez.} \quad B_s^3 = B_m B_n B_p;$$

alsdann ist offenbar

$$\overset{m,n}{\underset{\infty}{R}} = \overset{s,s}{\underset{\infty}{R}}, \quad \text{bez.} \quad \overset{m,n,p}{\underset{\infty}{R}} = \overset{s,s,s}{\underset{\infty}{R}}.$$

Ergiebt sich für s aus einer der Gleichungen 7. keine ganze Zahl, so hat man den zugehörigen Werth von

$$\overset{s,s}{\underset{\infty}{R}} \quad \text{bez.} \quad \overset{s,s,s}{\underset{\infty}{R}}$$

durch Interpolation aus der für die Reihe der ganzen Zahlen s berechneten Rententafel zu bestimmen.

11. Wenn man nach No. 10 die Berechnung der stetigen Renten durchgeführt hat, so ergeben sich hinlänglich gute Annäherungswerthe für die jährlichen Renten aus der Gleichung (No. 9, 5)

$$R_1 = \underset{\infty}{R} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{300}\right), \quad {}_1R = \underset{\infty}{R} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p}{300}\right).$$

Für die in Raten zahlbaren Renten hat man nach No. 9, 4

$$R_t = R_1 + \left(1 - \frac{p}{300}\cdot\frac{t+1}{t}\right)\frac{t-1}{2t}.$$

Werden die Raten praenumerando gezahlt, so ist der Werth der Rente

$${}_tR = R_t + \frac{1}{t}.$$

---

12. Einfache Lebensversicherung auf den Todesfall mit einmaliger Prämienzahlung. Eine $n$jährige Person A zahlt bei der Versicherungsbank ein Kapital C ein; dafür zahlt die Bank beim Tode der versicherten Person eine Summe S an die Hinterlassenen aus.

Es wird angenommen, dass die versicherten Summen S für alle im Laufe eines Lebensjahres Verstorbenen am Ende dieses Jahres ausgezahlt werden. Alsdann hat die Bank am Ende des $x$ten Jahres (von heute an gerechnet) die Summe S unter der Voraussetzung zu zahlen, dass A im $(n+x)$ten Lebensjahre stirbt; die Wahrscheinlichkeit hiervon ist

$$\frac{a_{n+x-1} - a_{n+x}}{a_n}.$$

Folglich ist der heutige Werth dieser Zahlung

$$\frac{a_{n+x-1} - a_{n+x}}{a_n} \cdot \frac{1}{r^x} \cdot S.$$

Die Gesammtleistung der Bank im Interesse dieser Versicherung ist die Summe dieser Glieder von $x = 1$ bis zur Grenze der Sterblichkeitstafel. Daher hat man die Gleichung

$$C = S\left(\frac{a_n}{a_n} \cdot \frac{1}{r} + \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{a_{n+2}}{a_n} \cdot \frac{1}{r^3} + \ldots\right.$$
$$\left. - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{r} - \frac{a_{n+2}}{a_n} \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{a_{n+3}}{a_n} \cdot \frac{1}{r^3} - \ldots\right)$$
$$= S\left({}_1\overset{n}{R} \cdot \frac{1}{r} - \overset{n}{R}_1\right) = S\left[\frac{1}{r}\left(\overset{n}{R}_1 + 1\right) - \overset{n}{R}_1\right].$$

Daher ist

$$C = S\left(\frac{1}{r} - \frac{r-1}{r}\overset{n}{R}_1\right).$$

13. Einfache Lebensversicherung mit jährlicher Prämienzahlung. Gewöhnlich erfolgt die Lebensversicherung nicht durch eine einzige Einzahlung, sondern durch jährliche Zahlung einer bestimmten Summe $\overset{n}{P}$ (Prämie); die erste Zahlung wird sofort beim Abschlusse der Versicherung bezahlt.

Der heutige Werth aller an die Bank von dem Versicherten zu zahlenden Prämien ist das $\overset{n}{P}$ fache der Rente ${}_1\overset{n}{R} = \overset{n}{R}_1 + 1$. Daher hat man, wenn C und S dieselbe Bedeutung haben wie in No. 12,

$$\overset{n}{P}\left(\overset{n}{R}_1 + 1\right) = C,$$

mithin

$$\overset{n}{P} = S\left[\frac{1}{r} - \frac{\overset{n}{R}_1}{\overset{n}{R}_1 + 1}\right].$$

14. Lebensversicherung für zwei verbundene Leben. Eine $m$jährige Person A und eine $n$jährige Person zahlen an die Bank ein Kapital C, und verlangen dafür die Auszahlung einer Summe S, zahlbar nach dem Tode der zuerst sterbenden Person an die Ueberlebende.

Nach No. 6 bestehen von $a_m \cdot a_n$ Paaren von Personen A, B nach x Jahren noch $a_{m+x} \cdot a_{n+x}$ Paare. Daher lösen sich im x Jahre, von heute an gerechnet,

$$a_{m+x-1}\, a_{n+x-1} - a_{m+x}\, a_{n+x}$$

Paare auf; die Wahrscheinlichkeit, dass das Paar A, B sich im Laufe des $x$ten Jahres auflöst, ist hiernach

$$\frac{a_{m+x-1}\, a_{n+x-1} - a_{m+x}\, a_{n+x}}{a_m\, a_n}.$$

Hieraus folgt der heutige Werth der Leistungen der Bank zu

$$S \cdot \sum \frac{a_{m+x-1}\, a_{n+x-1} - a_{m+x}\, a_{n+x}}{a_m\, a_n} \cdot \frac{1}{r^x}$$
$$= S \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot {}_1\overset{m,n}{R} - \overset{m,n}{R}_1\right).$$

Man erhält daher (vergl. No. 12 und 13)

$$C = S \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{r-1}{r}\overset{m,n}{R}_1\right).$$

Wird eine jährliche gleiche Prämie $\overset{m,n}{P}$ bezahlt, so ist

$$\overset{m,n}{P} = S \cdot \left[\frac{1}{r} - \frac{\overset{m,n}{R}_1}{\overset{m,n}{R}_1 + 1}\right].$$

15. Soll das versicherte Kapital erst nach dem Tode der zuletzt sterbenden Person ausgezahlt werden (Lebensversicherung von Eltern zu Gunsten ihrer Kinder für den Fall der gänzlichen Verwaisung derselben), so kommt die Wahrscheinlichkeit in Betracht, dass nach x Jahren beide Personen gestorben sind; dieselbe ist

$$\left(1 - \frac{a_{m+x}}{a_m}\right)\left(1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}\right).$$

Daher ist der auf heute reducirte Werth der Leistungen der Bank

$$S \cdot \sum \left(1 - \frac{a_{m+x}}{a_m}\right)\left(1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}\right) \cdot \frac{1}{r_x}.$$

Folglich ist

$$C = S \cdot \sum \left(1 - \frac{a_{m+x}}{a_m}\right)\left(1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}\right) \cdot \frac{1}{r_x}$$

$$= S\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots - \overset{m}{R}_1 - \overset{n}{R}_1 + \overset{m,n}{R}_1\right).$$

Wird eine jährliche Prämie P bezahlt, so hat die Zahlung so lange zu dauern, als noch eine der Personen am Leben ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach x Jahren noch eine der beiden Personen lebt, ist

$$1 - \left(1 - \frac{a_{m+x}}{a_m}\right)\left(1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}\right) = \frac{a_{m+x}}{a_m} + \frac{a_{n+x}}{a_n} - \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n}.$$

Der heutige Werth aller Prämienzahlungen P ist daher

$$P \cdot \sum \left(\frac{a_{m+x}}{a_m} + \frac{a_{n+x}}{a_n} - \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n}\right) \frac{1}{r^x},$$

wobei die Summation mit dem Werthe $x = 0$ beginnt. Für diese Sümme ergiebt sich sofort

$$P\left(1 + \overset{m}{R}_1 + \overset{n}{R}_1 - \overset{m,n}{R}_1\right);$$

folglich ist

$$P = S \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots - \overset{m}{R}_1 - \overset{n}{R}_1 + \overset{m,n}{R}_1}{1 + \overset{m}{R}_1 + \overset{n}{R}_1 - \overset{m,n}{R}_1}.$$

16. Ueberlebensversicherung. Eine Person A versichert ein Kapital S zu Gunsten einer Person B; das Kapital soll beim Tode von A an B ausgezahlt werden, wenn B A überlebt; stirbt B vor A, so fällt das von A eingezahlte Kapital, bez. die bis zum Tode von B eingezahlten Prämien, an die Bank.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Versicherung der Summe S durch eine einmalige Zahlung C erfolgt. Wir denken uns jedes Jahr in t gleiche Theile getheilt, und machen die Annahmen, dass das Absterben im Verlaufe eines Jahres gleichmässig erfolgt; in Bezug auf die Person A wollen wir ferner annehmen, dass das Absterben nicht an den Enden der kleinen Zeitabschnitte, sondern im Verlaufe derselben erfolgt; bezüglich des Absterbens der B setzen wir umgekekrt voraus, dass es nur am Ende der Zeitabschnitte erfolgt. Nehmen wir dann $t = \infty$, so weichen beide Voraussetzungen von der Wahrheit nicht ab. Alle Ausgaben, die die Bank im Laufe eines Jahres zu machen hat, discontiren wir vorwärts auf das Ende des nächsten Jahres und dann rückwärts auf heute.

Die Wahrscheinlichkeit, dass A von heute an noch $x + \lambda : t$ Jahre lebt, aber nach $x + (\lambda + 1)t$ Jahren nicht mehr lebt, ist

$$\frac{a_{m+x} - a_{m+x+1}}{t a_m},$$

denn von a_n heute lebenden $n$jährigen Personen sterben $(a_{m+x} - a_{m+x+1}) : t$ in jedem $t$ten Theile ihres $(n + x + 1)$ten Lebensjahres. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass B nach $x + \lambda : t$ Jahren noch lebt, ist

$$\frac{(t - \lambda)\, a_{n+x} + \lambda a_{n+x+1}}{t a_n}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider Ereignisse ist das Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten. Die auf diesen Zeitraum bezügliche Leistung der Bank ist daher

$$\frac{a_{m+x} - a_{m+x+1}}{t a_m} \cdot \frac{(t - \lambda)\, a_{n+x} + \lambda a_{n+x+1}}{t a_n} \left(1 + \frac{(t-\lambda)p}{100t}\right) \cdot \frac{1}{r^{x+1}}.$$

Die discontirte Leistung der Bank in Bezug auf das $(x + 1)$te Jahr ergiebt sich hieraus zu

$$1. \qquad S \cdot \frac{a_{m+x} - a_{m+x+1}}{t^2 a_m a_n} \cdot \frac{1}{r^{x+1}} \sum \left([t - \lambda] + \frac{p}{100t}[t - \lambda]^2\right) a_{n+x} + \left(\lambda + \frac{p}{100t}\lambda[t - \lambda]\right) a_{n+x+1}.$$

Die Summe erstreckt sich über alle Werthe von λ von 1 bis t. Berechnet man die Summe und geht dann zur Grenze $t = \infty$ über, so erhält man

$$\frac{1}{t^2}\sum = \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{300}\right) a_{n+x} + \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{600}\right) a_{n+x+1}.$$

Dieser Werth ist in 1. einzusetzen und die Summe aller so erhaltenen discontirten Jahresleistungen von $x = 0$ an zu bilden. Dies ergiebt die Gleichung

$$C = \left[\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2} + \frac{p}{300}\right)\left({}_1\overset{m,n}{R} - \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot {}_1\overset{m+1,n}{R}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2} + \frac{p}{600}\right)\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\, {}_1\overset{m,n+1}{R} - \overset{m,n}{R}_1\right)\right] \cdot S.$$

Ersetzt man $\overset{m,n}{R}_1$ durch ${}_1\overset{m,n}{R} - 1$, so erhält man

$$3. \quad C = \frac{1}{r}\left[\frac{p}{600} \cdot {}_1\overset{m,n}{R} - \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{300}\right)\frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot {}_1\overset{m+1,n}{R} + \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{600}\right)\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot {}_1\overset{m,n+1}{R} + 1\right)\right] \cdot S.$$

Wird eine jährliche Prämie P entrichtet, so hat die Zahlung derselben so lange zu erfolgen, als beide Personen am Leben sind; daher ist der auf heute discontirte Werth aller dieser Zahlungen (No. 13)

$$P \cdot {}_1\overset{m,n}{R}.$$

Hieraus und aus 3. folgt

$$P = \frac{1}{{}_1\overset{m,n}{R}\, r}\left[\frac{p}{600}\, {}_1\overset{m,n}{R} - \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{300}\right)\frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot {}_1\overset{m+1,n}{R} + \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{600}\right)\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\, {}_1\overset{m,n+1}{R} + 1\right)\right].$$

In vielen Fällen kann man sich mit der Annähernng begnügen, die aus dieser Formel hervorgeht, wenn man die mit den Faktoren $p : 600$ und $p : 300$ versehenen Glieder weglässt. Man erhält dann einfacher

$$P = \frac{1}{2\, {}_1\overset{m,n}{R} \cdot r}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\, {}_1\overset{m,n+1}{R} + 1 - \frac{a_{m+1}}{a_m}\, {}_1\overset{m+1,n}{R}\right).$$

Statt der praenumerando zahlbaren Renten kann man postnumerando zahlbare einführen

$$ {}_1\overset{m,n}{R} = \overset{m,n}{R}_1 + 1, \quad {}_1\overset{m,n+1}{R} + \frac{1}{r} \cdot \frac{a_{m-1}\, a_n}{a_m a_{n+1}}\, \overset{m-1,n}{R}_1, \quad {}_1\overset{m+1,n}{R} = \frac{1}{r} \cdot \frac{a_m\, a_{n-1}}{a_{m+1} a_n}\, \overset{m,n-1}{R}_1,$$

und erhält

$$P = \frac{1}{2\left(\overset{m,n}{R}_1 + 1\right)}\left(\frac{a_{m-1}}{a_m}\, \overset{m-1,n}{R}_1 + \frac{1}{r} - \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \overset{m,n-1}{R}_1\right).$$

---

17. Aussteuerversicherung. Hierunter wollen wir alle die Arten der

Versicherung begreifen, bei welchen der Versichernde in den ersten Lebensjahren eines Kindes ein Kapital einzahlt, oder die Verpflichtung zu einer jährlichen Prämienzahlung eingeht, während die Bank sich verpflichtet, an einem bestimmten Termine ein bestimmtes Kapital S auszuzahlen, vorausgesetzt, dass das Kind diesen Termin erlebt.

Man hat diese Versicherungen verschieden eingerichtet; die Prämienzahlung hört entweder mit dem Tode des Versichernden auf, oder sie ist bis zum Jahre vor der Auszahlung des Kapitals zu entrichten; beim frühzeitigen Tode des Kindes fallen die eingezahlten Prämien und Kapitale der Bank anheim, oder sie werden vollständig (ohne Zinsen) oder verkürzt zurückbezahlt.

Versicherungen mit Prämienrückgewähr haben im Wesentlichen nur die Wirkung von Sparkassen; sie gewähren vor diesen nur den Vortheil, dass sie die Verwendung der versicherten Gelder zu einem anderen Zwecke ausschliessen; verbinden aber damit den Nachtheil, dass die eingezahlten Beträge die Verwaltungskosten und den Gewinn der Bank mit zu tragen haben.

Diese Art der Versicherung könnte sehr zweckmässig im Interesse der Tausende von Eltern und Erziehern, die sich ihrer bedienen wollen, durch eine sehr einfache Modification an Einlagebüchern der öffentlichen Sparkassen ersetzt werden.

Man treffe die Einrichtung, dass Eltern und Erzieher Sparbücher erwerben können, die sie auf den Namen eines Kindes ausstellen lassen, und welche den ausdrücklichen Vermerk enthalten, dass Auszahlungen vor einem bestimmten Tage nur dann erfolgen, wenn der Tod der Person, auf deren Namen das Buch lautet, urkundlich nachgewiesen wird.

Ein Vater, der für die Aussteuer seiner Tochter sparen will, würde ein solches Buch auf den Namen der Tochter ausstellen und als Auszahlungstermin z. B. den Tag eintragen lassen, an welchem die Tochter das 18. Lebensjahr vollendet. Alle auf das Buch gemachten Einzahlungen würden alsdann erst an diesem Tage erhoben werden können, ausgenommen, wenn die Tochter vorher stirbt.

Diese Art der Kinderversorgung würde sich alsdann von der bei Versicherungsanstalten mit Prämienrückgabe nur dadurch nachtheilig unterscheiden, dass bei letzterer der Zwang regelmässiger Prämienzahlung besteht; dagegen würde man den erheblichen Vortheil haben, zu jeder Zeit noch so kleine Beträge einzahlen zu können; unzweifelhaft würde die vorgeschlagene Einrichtung sehr stark verwendet werden und viel Nutzen stiften.

18. Wir betrachten hier nur die Form Aussteuerversicherung, welche das eigentliche Wesen der Versicherung — nämlich eine Sicherheit auch gegen die ungünstigsten Zufälle zu gewähren, — am deutlichsten zeigt. Wir nehmen an, eine $m$jährige Person A (Vater) versichert zu Gunsten einer $n$jährigen Person B (Kind) ein Kapital S, zahlbar nach k Jahren in dem Falle, dass B alsdann noch lebt; die Versicherung erfolgt durch jährliche Prämien, die längstens k mal gezahlt werden; die Prämienzahlung hört bereits früher auf, wenn während der nächsten $k - 1$ Jahren eine der beiden Personen stirbt; (der Vater zahlt also die Prämie so lange das Kind lebt längstens k mal, oder, wenn er vorher stirbt, bis zu seinem Tode).

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine $n$jährige Person das Lebensalter $n + k$ erreicht, ist

$$\frac{a_{n+k}}{a_n}.$$

Daher ist die auf heute discontirte Leitung der Bank

$$\frac{1}{r^k} \cdot \frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot S.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass A und B nach i Jahren noch leben, ist

$$\frac{a_{m+i}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+i}}{a_n}.$$

Daher ist der auf heute discontirte Werth aller Prämien

$$P \cdot \sum_0^{k-1} \frac{a_{m+i} a_{n+i}}{a_m a_n} \cdot \frac{1}{r^i} = P \cdot \sum_0^{\infty} \frac{a_{m+i} a_{n+i}}{a_m a_n} \cdot \frac{1}{r^i} - P \cdot \sum_0^{\infty} \frac{a_{m+k+i} a_{n+k+i}}{a_m a_n} \cdot \frac{1}{r^{k+i}}$$

$$= P \cdot \left({}_1\overset{m,n}{R} - \frac{a_{m+k} a_{n+k}}{a_m a_n} \cdot \frac{1}{r^k} \cdot {}_1\overset{m+k,\,n+k}{R} \right).$$

Folglich hat man für P die Gleichung

$$P\left(r^k\,{}_1\overset{m,n}{R} - \frac{a_{m+k} a_{n+k}}{a_m a_a} \cdot {}_1\overset{m+k,\,n+k}{R} \right) = \frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot S.$$

---

19. Zur Deckung der Verwaltungskosten und bei Gesellschaften, welche Actienunternehmungen sind, zur Erzielung einer Dividende, setzt man die jährlichen oder einmaligen Prämien höher an, als sie sich durch die obigen Formeln ergeben, in welchen auf Verwaltung und Gewinn keine Rücksicht genommen worden ist. Dabei geht man von dem Grundsatze aus, den Beitrag, den man von jeder einen Versicherungsvertrag abschliessenden Person zu Kosten und Gewinn fordert, proportional den Leistungen der Bank an die Person zu bestimmen.

Setzt man fest, dass für Verwaltung etc. das μfache der aus den Formeln folgenden Leistung zu zahlen ist ($\mu < 1$) und bezeichnet die wirkliche (einmalige oder jährliche) Prämie mit $\mathfrak{P}$, die reine (aus den Formeln folgende) wieder mit P, so ist bei allen Versicherungen ohne Prämienrückgewähr

$$\mathfrak{P} = (1 + \mu)P.$$

Denn wenn der auf heute discontirte Werth aller theoretischen Prämienzahlungen mit aP bezeichnet wird, so ist der Ueberschuss, den die Bank macht

$$a\mathfrak{P} - aP = \mu \cdot aP = \mu S,$$

wenn S die auf heute discontirte Leistung der Bank bezeichnet.

Anders verhält sich die Sache bei Versicherungen mit Prämienrückgewähr. Die Leistung der Bank setzt sich hier aus zwei Theilen zusammen: Ein Theil drückt den heutigen Werth der Prämienrückzahlungen, der andere den heutigen Werth der zu leistenden versicherten Summen (Kapitalien, Rente) aus. Man hat daher für die Leistung der Bank die Formel

$$bP + cS.$$

Bezeichnet man wieder den heutigen Werth der einzuzahlenden reinen Prämie mit aP, so ist

$$aP = bP + cS.$$

Wird statt der reinen Prämie die wirkliche Prämie

$$\mathfrak{P} = (1 + \nu)P$$

gefordert, so nimmt die Bank $a\nu P$ mehr ein, als nach 1., giebt aber dafür auch $b\nu P$ mehr aus; zur Deckung der Kosten etc. verbleibt also nur der Betrag

$$\nu(a - b)P.$$

Soll dies das μfache der wirklichen Leistung der Bank sein, so hat man die Gleichung

$$\nu(a - b)P = \mu b(1 + \nu)P + \mu c S,$$

woraus für ν der Werth folgt

$$\nu = \frac{\mu (bP + cS)}{(a - b - b\mu) \cdot P}.$$

20. Bei der **Beurtheilung des augenblicklichen Standes einer Versicherungskasse** hat man zu beachten: a) die Verpflichtungen, welche die Versicherten gegen die Kasse zu erfüllen haben; b) die Verpflichtungen, welche die Kasse gegen die Versicherten zu erfüllen hat; c) den Aufwand für die Verwaltung; d) das Baarvermögen der Kasse.

Die Verpflichtungen, welche die Versicherten gegen die Kasse zu erfüllen haben, bestehen in wirklichen jährlichen Prämien; bei Berechnung derselben hat man das heutige Alter zu Grunde zu legen.

Da die Beiträge zu den Verwaltungskosten proportional den Leistungen der Bank erhoben werden, so lassen sich die Posten b) und c) zusammenfassen. Wird das ρfache der Leistungen für die Verwaltung berechnet (die obige Zahl μ bezieht sich auf **Verwaltung und Gewinn**), so hat man die aus den Verpflichtungen gegen die Versicherten folgenden Leistungen der Bank mit $(1 + \rho)$ zu multipliciren.

Der Vergleich der Zahlen a) und d) mit b) und c) ergiebt den Gewinn der Bank.

Einen Theil dieses Gewinnes wird man zur Dotirung eines Reservefonds zur Sicherstellung der Bank gegen unvorhergesehene Verluste verwenden, insbesondere gegen die, welche aus ungünstigen Abweichungen der Sterbefälle der bei der Bank Versicherten von der den Rechnungen zu Grunde liegenden Sterblichkeitstafel folgen.

21. Für eine einfache Lebensversicherung ist die **Verpflichtung der Bank**, wenn der Versicherte heute q Jahre alt ist, einschliesslich des Aufwandes für Verwaltung,

$$(1 + \rho) S \left(\frac{1}{r} - \frac{r-1}{r} \cdot \overset{q}{R}_1 \right).$$

Bei jährlicher Prämienzahlung $\mathfrak{P}$ beträgt die Verpflichtung des Versicherten gegen die Bank

$$\mathfrak{P} \left(\overset{q}{R}_1 + 1 \right).$$

Bei Rentenversicherungen bestehen Verpflichtungen gegen die Bank bei den Personen, die jährliche Prämien zahlen; die Personen, welche Rente gegen einmalige Prämie versichert haben, sowie die, welche schon in den Rentengenuss eingetreten sind oder mit dem Jahresschlusse in denselben eintreten werden, haben keine Verpflichtung gegen die Bank.

Wir müssen darauf verzichten, die Formeln zur Beurtheilung der Kassenlage ausführlich zu entwickeln. Nach den angegebenen Grundsätzen und mit Hilfe der entwickelten Formeln lassen sie sich ohne Schwierigkeit aufstellen.

Absterbeordnung und Tafel der Lebenserwartung der Bevölkerung des preussischen Staates,

berechnet aus dem Vergleiche der Anfangs 1867, 1868, 1872, 1875, 1876 und 1877 im preussischen Staate vorhandenen Lebenden und der daraus in denselben Jahren Gestorbenen.

Alter.	Absterbeordnung. Von je 100000 Lebendgeborenen erlebten das nebenbezeichnete Alter		Lebenserwartung. Von den Ueberlebenden ist die halbe Anzahl verstorben nach . . . Jahren	
	m.	w.	m.	w.
1 Jahr . .	77 154	80 115	50,9	54,2
2 „ . .	71 297	74 333	52,9	56,1
3 „ . .	68 483	71 469	53,3	56,6
4 „ . .	66 681	69 639	53,1	56,8
5 „ . .	65 433	68 338	52,7	55,9
6 „ . .	64 503	67 375	52,2	55,2
7 „ . .	63 757	66 600	51,4	54,6
8 „ . .	63 158	65 984	50,8	53,9
9 „ . .	62 688	65 493	50,0	53,0
10 „ . .	62 304	65 086	49,1	52,2
11 „ . .	61 975	64 740	48,4	51,3
12 „ . .	61 690	64 429	47,4	50,5
13 „ . .	61 432	64 139	46,5	49,6
14 „ . .	61 192	63 854	45,6	48,7
15 „ . .	60 948	63 565	44,7	47,8
16 „ . .	60 688	63 266	43,8	47,0
17 „ . .	60 383	62 942	43,0	46,1
18 „ . .	60 025	62 606	42,2	45,2
19 „ . .	59 625	62 262	41,3	44,3
20 „ . .	59 215	61 899	40,5	43,5
21 „ . .	58 733	61 511	39,7	42,6
22 „ . .	58 220	61 106	38,9	41,8
23 „ . .	57 683	60 678	38,1	40,9
24 „ . .	57 154	60 217	37,3	40,1
25 „ . .	56 641	59 731	36,6	39,3
26 „ . .	56 138	59 228	35,7	38,5
27 „ . .	55 637	58 715	35,0	37,7
28 „ . .	55 128	58 189	34,2	36,9
29 „ . .	54 614	57 631	33,4	36,1
30 „ . .	54 077	57 071	32,6	35,3

Alter.	Absterbeordnung. Von je 100000 Lebendgeborenen erlebten das nebenbezeichnete Alter		Lebenserwartung. Von den Ueberlebenden ist die halbe Anzahl verstorben nach . . . Jahren	
	m.	w.	m.	w.
31 Jahr . .	53 547	56 485	31,8	34,5
32 „ . .	53 040	55 923	31,0	33,7
33 „ . .	52 503	55 340	30,2	32,9
34 „ . .	51 947	54 739	29,5	32,1
35 „ . .	51 372	54 130	28,7	31,3
36 „ . .	50 774	53 504	27,9	30,5
37 „ . .	50 170	52 874	27,2	29,7
38 „ . .	49 545	52 230	26,4	28,9
39 „ . .	48 897	51 578	25,7	28,2
40 „ . .	48 186	50 906	25,0	27,4
41 „ . .	47 445	50 221	24,2	26,6
42 „ . .	46 781	49 615	23,5	25,8
43 „ . .	46 047	48 963	22,8	25,0
44 „ . .	45 303	48 329	22,0	24,2
45 „ . .	44 511	47 677	21,3	23,4
46 „ . .	43 701	47 034	20,6	22,6
47 „ . .	42 933	46 426	19,9	21,8
48 „ . .	42 121	45 799	19,2	21,0
49 „ . .	41 270	45 139	18,5	20,3
50 „ . .	40 356	44 401	17,8	19,5
51 „ . .	39 403	43 620	17,2	18,7
52 „ . .	38 577	42 925	16,5	17,9
53 „ . .	37 640	42 135	15,8	17,1
54 „ . .	36 667	41 298	15,1	16,4
55 „ . .	35 649	40 416	14,5	15,6
56 „ . .	34 588	39 495	13,9	14,9
57 „ . .	33 540	38 564	13,2	14,2
58 „ . .	32 491	37 600	12,6	13,5
59 „ . .	31 381	36 556	12,0	12,9
60 „ . .	30 187	35 373	11,5	12,3
61 „ . .	28 937	34 121	11,0	11,7
62 „ . .	27 868	33 046	10,4	11,0
63 „ . .	26 658	31 801	9,9	10,4
64 „ . .	25 378	30 459	9,4	9,9
65 „ . .	24 051	29 025	8,9	9,4
66 „ . .	22 700	27 557	8,4	8,8
67 „ . .	21 360	26 123	7,9	8,3
68 „ . .	19 969	24 612	7,5	7,8
69 „ . .	18 557	23 017	7,0	7,3
70 „ . .	17 137	21 347	6,6	6,9

Alter.	Absterbeordnung. Von je 100000 Lebendgeborenen erlebten das nebenbezeichnete Alter		Lebenserwartung. Von den Ueberlebenden ist die halbe Anzahl verstorben nach . . . Jahren	
	m.	w.	m.	w.
71 Jahr . .	15 727	19 653	6,2	6,4
72 „ . .	14 486	18 229	5,8	6,0
73 „ . .	13 155	16 627	5,4	5,6
74 „ . .	11 853	15 055	5,0	5,2
75 „ . .	10 564	13 492	4,6	4,8
76 „ . .	9 300	11 924	4,3	4,4
77 „ . .	8 126	10 484	4,0	4,1
78 „ . .	7 004	9 141	3,8	3,9
79 „ . .	5 849	7 734	3,8	3,8
80 „ . .	4 886	6 452	3,6	3,7
81 „ . .	4 037	5 328	3,4	3,5
82 „ . .	3 406	4 529	3,0	3,1
83 „ . .	2 794	3 736	2,8	2,9
84 „ . .	2 227	2 979	2,7	2,8
85 „ . .	1 727	2 316	2,5	2,7
86 „ . .	1 311	1 788	2,4	2,6
87 „ . .	990	1 402	2,2	2,5
88 „ . .	738	1 076	1,9	2,2
89 „ . .	520	792	1,9	2,1
90 „ . .	359	566	2,2	2,2
91 „ . .	253	389	2,5	2,6
92 „ . .	192	304	2,2	2,4
93 „ . .	142	225	2,1	2,4
94 „ . .	101	161	2,1	2,6
95 „ . .	73	120	2,2	2,8
96 „ . .	51	87	2,2	2,9
97 „ . .	38	70	2,3	2,6
98 „ . .	28	56	1,9	2,0
99 „ . .	21	43	1,6	1,5
100 „ . .	15	32	1,5	1,4

Druckfehler-Verzeichniss des II. Bandes.

Seite 1, Zeile 3 u. 4 v. u. lies P' und P'' statt OP' und OP''.

„ 2, „ 1 v. o. lies OP' und OP'' st. P' und P''.

„ 69, „ 6 v. u. „ $\mathfrak{P}'$ st. $\mathfrak{P}_1$.

„ 70, „ 13 v. u. „ y^n st. y_n.

„ 71, „ 14 v. u. „ ia' st. ai'.

„ 127, „ 29 v. o. „ $f \equiv$ st. $f_1 \equiv$.

„ 129, „ 17 v. o. „ $\alpha_{23} u_2 u_3$ st. $a_{23} u_2 n_3$.

„ 168, No. 4, Gleichung 6. lies x_2 st. x_1.

„ 168, No. 4, Gleichung 7. „ B_0 st. B_3.

„ 169, Zeile 12 v. o. lies x_2 st. x_1.

„ 176, „ 7 v. u. „ $2f_{12}(\mathfrak{x})$ st. $2f_{11}(\mathfrak{x})$.

„ 185, „ 8 v. o. „ $f_1 = 2x_2x_3$ und $f_2 = 2x_1x_3$. st. $f = 2x_2x_3$ und $f = 2x_1x_3$.

„ 193, „ 19 v. o. „ $3a_{233}x_2x_3^2$ st. $3a_{233}x_1x_3^2$.

„ 241, „ 2 v. o. „ φ'_w st. φ_w.

„ 261, „ 2 v. o. „ bv st. by.

„ 263, „ 8 v. u. „ gu st. yu.

„ 280, „ 6 v. o. „ g_1 st. g.

„ 286, „ 17 v. u. „ einer st. eine.

„ 287, „ 9 v. o. „ Cylinder st. Kegel.

„ 321, „ 5 v. u. „ φ_{31}' und φ_{41}' st. φ_{31} und φ_{41}.

„ 345 in der letzten Gleichung lies T_{32} st. T'_{33}.

„ 408, Zeile 1 v. o. lies a_{13} st. a_{33}.

„ 420, „ 15 u. 17 v. o. lies b^2v^2 st. b^2u^2.

„ 537, „ 4 u. 5 v. o. lies $\Delta z \dfrac{\partial}{\partial z}$ st. Δz.

„ 537, „ 6 v. o. lies r st. p.

„ 692, „ 1 v. u. „ α st. a.

„ 729, „ 9 v. u. „ $c_1\zeta^2$ st. $c_1\zeta$.

„ 729, „ 3 v. u. „ z st. z_1.

„ 756, „ 7 v. o. „ φ_r st. φ^r.

„ 808, „ 8 v. u. „ Z st. z.

„ 824, „ 10 v. u. „ durch Elimination von st. wenn man.

„ 829, „ 11 v. u. „ gebracht st. gedacht.

„ 857, „ 16 v. u. „ c_{n-2} st. c_n.

„ 942, „ 10 v. u. „ 6. Theil st. 10. Theil.

Literatur.

Lehrbücher der Elementarmathematik.

ASCHENBORN, H., Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Geometrie. Berlin, Hofbuchdruckerei.
BALTZER, R., Die Elemente der Mathematik. Leipzig, Hirzel.
BECKER, J. K., Lehrbuch der Elementarmathematik. Berlin, Weidmann.
GALLENKAMP, W., Die Elemente der Mathematik. Iserlohn, Bädeker.
REIDT, F., Die Elemente der Mathematik. Berlin, Grote.
SCHLEGEL, V., Lehrbuch der Elementarmathematik. Wolfenbüttel, Zwissler.

Logarithmentafeln.

VEGA, G. v., Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. (Siebenstellig.) Berlin, Weidmann.
SCHRÖN, L., Siebenstellige Logarithmentafeln. Braunschweig, Vieweg.
SCHLOEMILCH, O., Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Braunschweig, Vieweg.

Aufgabensammlungen.

HEIS, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. Köln, Dumont-Schauberg.
MEIER-HIRSCH, Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung etc. Berlin, Dunker.
BARDEY, E., Methodisch geordnete Aufgabensammlung über alle Theile der Elementararithmetik. Leipzig, Teubner.
BARDEY, E., Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Leipzig, Teubner.
LIEBER u. v. LÜHMANN, Geometrische Constructionsaufgaben. Berlin, Simion.
GANDTNER u. JUNGHANNS, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie. Berlin, Weidmann.
PETERSEN, J., Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben. Kopenhagen, Host & Sohn.
REIDT, F., Planimetrische Aufgaben. Breslau, Trewendt.
MÜTTRICH, A., Sammlung stereometrischer Aufgaben. Königsberg, Bon.
REIDT, F., Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Stereometrie. Leipzig, Teubner.
HERMES, O., Sammlung von Aufgaben aus der Goniometrie und ebenen Trigonometrie. Berlin, Winkelmann & Sohn.
LIEBER u. v. LÜHMANN, Trigonometrische Aufgaben. Berlin, Simion.
GALLENKAMP, W., Sammlung trigonometrischer Aufgaben. Mühlheim a. d. R., Bagel.
REIDT, F., Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie. (Hierzu besonders das Resultatenheft.) Leipzig, Teubner.

Höhere Algebra.

DRONKE, A., Einleitung in die höhere Algebra. Halle, Nebert.
MATTHIESSEN, L., Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig, Teubner.

PETERSEN, J., Theorie der algebraischen Gleichungen. Kopenhagen, Host & Sohn.
SERRET, A., Handbuch der höheren Algebra. Deutsch von G. v. WERTHEIM. Leipzig, Teubner.
HANKEL, H., Vorlesungen über die complexen Zahlen. Leipzig, Voss.
BALTZER, R., Theorie und Anwendungen der Determinanten. Leipzig, Hirzel.
GÜNTHER, S., Lehrbuch der Determinantentheorie. Erlangen, Besold.
CLEBSCH, H., Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig, Teubner.
SALMON, G., Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen. Deutsch von W. FIEDLER. Leipzig, Teubner.

Zahlentheorie.

MINDING, F., Anfangsgründe der höheren Arithmetik. Berlin, G. Reimer.
LEJEUNE-DIRICHLET, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgeg. von DEDEKIND. Braunschweig, Vieweg & Sohn.
BACHMANN, P., Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Leipzig, Teubner.
GAUSS, C. F., Disquisitiones arithmeticae. (Gesammelte Werke, Bd. I.) Leipzig, Fleischer.

Analytische, synthetische und descriptive Geometrie.

JOACHIMSTHAL, F., Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Berlin, G. Reimer.
MAGNUS, L. J., Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. Berlin, Duncker & Humblot.
HEGER, R., Elemente der analytischen Geometrie in homogenen Coordinaten. Braunschweig, Vieweg & Sohn.
SCHENDEL, L., Elemente der analytischen Geometrie in trilinearen Coordinaten. Jena, Costenoble.
CLEBSCH, H., Vorlesungen über Geometrie, herausgeg. von F. LINDEMANN. Leipzig. Teubner.
SALMON, G., Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Deutsch von W. FIEDLER. Leipzig, Teubner.
SALMON, G., Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven. Deutsch von W. FIEDLER. Leipzig, Teubner.
DURÈGE, H., Die ebenen Curven dritter Ordnung. Leipzig, Teubner.
SALMON, G., Analytische Geometrie des Raumes. Deutsch von W. FIEDLER. Leipzig, Teubner.
HESSE, O., Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes insbes. über die Flächen zweiter Ordnung. Leipzig, Teubner.
PLÜCKER, J., Neue Geometrie des Raumes. Leipzig, Teubner.
FIEDLER, W., Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen. Leipzig. Teubner.
MÖBIUS, A., Der barycentrische Calcül. Leipzig.
STEINER, J., Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin, Fincke.
STEINER, J., Vorlesungen über synthetische Geometrie, herausgeg. von H. SCHRÖTER. Leipzig, Teubner.
REYE, TH., Geometrie der Lage. Hannover, Rümpler.
FIEDLER, W., Die darstellende Geometrie. Leipzig, Teubner.

Algebraische Analysis.

SCHLOEMILCH, O., Handbuch der algebraischen Analysis. Jena, Frommann.
LIEBLEIN, J., Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis. Prag, Satow.

Höhere Analysis und deren Anwendungen.

SCHLOEMILCH, O., Compendium der höheren Analysis. Braunschweig, Vieweg & Sohn.
SCHLOEMILCH, O., Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Leipzig, Teubner.
HATTENDORF, K., Höhere Analysis. Hannover, Rümpler.
LIPSCHITZ, R., Lehrbuch der Analysis. Breslau, Cohen.
WORPITZKY, J., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Berlin, Weidmann.

MEYER, G. J., Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen. Leipzig, Teubner.

JOACHIMSTHAL, F., Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf die Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Leipzig, Teubner.

RIEMANN, B., Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendungen; herausgeg. von K. HATTENDORF. Braunschweig, Vieweg & Sohn.

NEUMANN, C., Untersuchungen über das logarithmische und NEWTON'sche Potential. Leipzig, Teubner.

Allgemeine Functionentheorie und specielle Transcendenten.

DURÈGE, H., Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Leipzig, Teubner.

THOMAE, J., Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen. Halle, Nebert.

BRIOT u. BOUQUET, Theorie der doppelt-periodischen Functionen; übers. von H. FISCHER. Halle, Schmidt.

HEINE, E., Handbuch der Kugelfunctionen. Berlin, G. Reimer.

NEUMANN, C., Theorie der BESSEL'schen Functionen. Leipzig, Teubner.

SOMMEL, E., Studien über die BESSEL'schen Functionen. Leipzig, Teubner.

JACOBI, C. G. J., Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Königsberg, Bornträger.

SCHELLBACH, K., Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen. Berlin, G. Reimer.

DURÈGE, H., Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig, Teubner.

KÖNIGSBERGER, L., Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig, Teubner.

KÖNIGSBERGER, L., Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale. Leipzig, Teubner.

PRYM, A., Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen. Bonn, Habicht.

WEIERSTRASS, Theorie der ABEL'schen Functionen. Berlin, G. Reimer.

RIEMANN, B., Theorie der ABEL'schen Functionen. Berlin, G. Reimer.

NEUMANN, C., Vorlesungen über RIEMANN's Theorie der ABEL'schen Functionen. Leipzig, Teubner.

CLEBSCH u. GORDAN. Theorie der ABEL'schen Functionen. Leipzig, Teubner.

Werke verschiedenen Inhalts.

GAUSS, C. F., Werke. Göttingen, herausgeg. von der K. Gesellschaft der Wissenschaften.

JACOBI, C. G. J., Gesammelte Werke. Berlin, G. Reimer.

RIEMANN, B., Gesammelte Werke. Leipzig, Teubner.

Journal für reine und angewandte Mathematik, begr. von CRELLE. Berlin, G. Reimer.

Archiv der Mathematik und Physik, begr. von GRUNERT. Leipzig, Koch.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, redig. von O. SCHLOEMILCH u. M. CANTOR. Leipzig, Teubner.

Geschichte der Mathematik.

HANKEL, H., Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig, Teubner.

CANTOR, M., Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik. Leipzig, Teubner.

Breslau, Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule).

